



N° d'ordre :...../2016

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté des Sciences

Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

AZZI ASMA

THEME

**L'amplitude de diffusion dans la mécanique quantique avec une
longueur minimale méthode des ondes partielles**

Soutenu le : ...04../...06.../2016

Devant le jury composé de :

E.REDOUAN

MCB Univ. de M'sila

Président

N.GUSEMIA

MCA Univ. de M'sila

Rapporteur

MEDJBER

MCA Univ. de M'sila

Examineur

Promotion Juin 2016

REMERCIEMENTS

Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux

Je remercie tout d'abord ALLAH tout puissant pour m'avoir donné la santé, la patience et le courage pour mener à terminer ce mémoire.

J'exprime mes plus vifs remerciements à *E.REDOUAN* d'avoir présidé le jury et qu'il trouve ici le témoignage de notre très haute considération.

Je tiens à remercier *MEDJBER* pour avoir accepté d'être l'examinatrice de ce mémoire.

J'adresse mes vifs remerciements à mon encadreur *N.GUESMIA* Pour sa disponibilité, sa rigueur, son soutien et son engagement durant la réalisation de cette thèse.

Mes remerciements à mes enseignants de département de physique théorique.

Dédicace

Ce mémoire n'aurait jamais pu voir le jour sans l'encouragement des membres

de ma famille que je tiens à remercier et à qui je dédie ce modeste travail, tout

d'abord aux deux personnes les plus chères de ma vie :

Ma mère, la lumière qui m'a toujours éclairée le chemin. A celle qui a tout fait

pour ma réussite, pour sa douceur, sa tendresse, ses sacrifices et ses prières.

Mon père, à qui je dois tout le respect et l'amour, pour son soutien, son

encouragement et surtout sa confiance en moi.

A Mes frères et sœurs

A tous mes amies, à tous ceux qui m'aiment et ceux que j'aime.

ASMA

LISTE DES FIGURES :

Figure1.1:Section efficace différentielle de diffusion.

Figure1.2:Ondes incidente et diffusée.

Figure2.1:La relation d'incertitude généralisée,impliquant une longueur minimale $(\Delta X)_{\min} > 0$

Table des matières

Introduction	1
Introduction	1
1 Le formalisme de diffusion en mécanique quantique ordinaire	3
1.1 Relations d'incertitude de Heisenberg	4
1.2 L'équation de Schrödinger	5
1.3 Densité de courant et équation de continuité	6
1.4 L'équation de Schrödinger d'une particule dans un potentiel central	7
1.4.1 Hamiltonien de la particule	7
1.4.2 Séparation des variables	8
1.5 La diffusion par un potentiel scalaire	9
1.5.1 Importance des phénomènes de collision	9
1.6 Section efficace	10
1.6.1 Notion de section efficace	10
1.6.2 Définition de la section efficace de diffusion	10
1.7 Définition des états stationnaires de diffusion	11
1.7.1 a-Équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien	11
1.7.2 b-Forme asymptotique des états stationnaires de diffusion	12
1.8 Calcul de la section efficace	14
1.9 Théorème optique	15
1.10 Équation intégrale de la diffusion	17
1.11 Ondes partielles et déphasages	19

1.11.1 Développement en ondes partielles	19
2 La mécanique quantique avec une longueur minimale	23
2.1 longueur minimale	23
2.2 Principe d'incertitude généralisé (GUP)	24
2.3 Représentation théorique	26
2.3.1 Représentation dans l'espace des impulsions	27
2.4 Produit scalaire et relation de fermeture	28
2.5 Relation d'incertitude généralisée à N dimensions	30
2.6 La réduction de Brau	32
2.7 L'équation de schrödinger	33
2.8 La densité de courant et l'équation de continuité:	34
3 Le formalisme de diffusion en mécanique quantique déformée	36
3.1 Amplitude de diffusion et section efficace différentielle	36
3.2 Méthode des ondes partielles	41
3.3 conclusion	45
3.4 Bibliographie	46

Introduction

En physique, le concept de longueur élémentaire a été posé depuis très longtemps. Le physicien Kempf et ses collaborateurs ont mis ce concept en relation avec le problème fondamental de la physique moderne qui est l'unification des interactions gravitationnelles, fortes, électromagnétiques et faibles. En effet, l'introduction des forces gravitationnelles dans la théorie des champs quantiques montrent des différences qui rendent la théorie non normalisable. Pour résoudre ce problème, les physiciens ont proposé plusieurs théories dont l'existence d'une longueur minimale en dessous de laquelle on ne peut accéder à la physique.

La mécanique quantique déformée est une version modifiée de l'algèbre de Heisenberg en ajoutant quelques corrections sur les commutateurs dues à une longueur dite longueur minimale. Ce formalisme a été observé depuis quelques années par beaucoup de physiciens tels que Kempf et ses collaborateurs. L'existence de cette longueur minimale est impliquée dans la théorie de gravitation quantique et dans la théorie des cordes, ces théories proposent quelques corrections sur la relation d'incertitude de Heisenberg qui devient sous la forme [16],[18]et[21] $\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta \Delta P^2 + \dots)$, ces corrections modifient la relation de commutation entre l'opérateur d'impulsion qui devient: $[X,P]=i \hbar (1 + \beta P^2 + \dots)$.

L'introduction de cette algèbre modifiée de Heisenberg en mécanique quantique non relativiste peut permettre de résoudre les divergences présentes dans la théorie quantique des champs.

Ainsi, si l'étude de la diffusion est tellement importante c'est qu'elle a conduit à la découverte du monde quantique et des particules. Beaucoup d'expériences de physique sont des expériences de diffusion qui ont permis en 2012, la découverte du Boson de Higgs dans les processus de diffusion au L.H.C.

Si on n'avait pas découvert la théorie de la diffusion la structure du monde infiniment petit serait resté inaccessible pour l'humanité on n'a pu découvrir la structure de la matière: l'atome, les noyaux, les nucléon et les quarks(neutron,protons...).

L'objet de ce mémoire est l'étude du formalisme de diffusion élastique par un potentiel scalaire et central dans le cadre de la mécanique quantique au presence d'une longueur minimale. Et nous allons étudier l'influence de cette algèbre sur le phénomène de la diffusion:l'équation intégrale de la diffusion, la fonction de Green, la section efficace, la méthode des ondes partielles pour déterminer l'amplitude de diffusion et la section efficace et les déphasages.

Notre travail est réparti sur trois chapitres :

Dans le premier chapitre on fait un rappel sur le formalisme de diffusion en mécanique quantique ordinaire, :l'équation intégrale de la diffusion, la fonction de Green, l'amplitude de diffusion, la section efficace, théoreme optique, la méthode des ondes partielles et déphasages.

Le deuxième chapitre est consacrer au formalisme de la mécanique quantique déformée due à l'existence d'une longueur minimale et nous avons exposé le principe d'incertitude généralisé, qui se fond sur cette longueur, nous avons exposé les conséquences de cette algèbre déformé en effet le produit scalaire, relation de fermeture, et bien sûr la nouvelle équation de Schrödinger et la nouvelle forme de l'équation de continuité avec un courant déformé.

Dans le troisième chapitre nous avons exposé le formalisme de diffusion en mécanique quantique au presence de la longueur minimale, nous avons exposé un calcul détaillé concernant la nouvelle amplitude de diffusion, la version modifiée de la fonction de Green, l'équation de Schrödinger déformée, la section efficace, et comme est le cas dans la mécanique quantique ordinaire pour un potentiel central il est nécessaire d'introduire la méthode des ondes partielles et déphasages et on terminera par une conclusion.

Chapitre 1

Le formalisme de diffusion en mécanique quantique ordinaire

A l'aube du vingtième siècle et avec l'essor des progrès technologiques, les physiciens se trouvèrent tout à coup confrontés à des phénomènes nouveaux pour lesquels les prévisions de la théorie classique sont en désaccord flagrant avec l'expérience. Il fallait donc jeter les bases d'une nouvelle théorie susceptible de pallier les insuffisances de la conception classique.

A l'échelle quantique nous avons vu qu'on ne peut mesurer simultanément la position et la vitesse de la particule et ce fait ne provient pas de la précision limitée des instruments de mesure mais des propriétés de la nature elle-même, exprimées par les relations d'incertitude de Heisenberg. La position et la quantité de mouvement d'une particule ne caractérisent plus son état puisqu'on ne peut plus les mesurer simultanément et définir ainsi une trajectoire. A la description classique en termes de position et d'impulsion il faut donc substituer une description quantique en termes d'autres données représentatives de l'état du système et des grandeurs physiques qui lui sont associées. Cette nouvelle vision, différente de notre manière de pensée classique est construite à partir des postulats de la mécanique quantique [1] qui vont nous permettre de décrire:

- L'état d'un système physique à un instant donné.
- Les grandeurs physiques associées au système et la prédiction du résultat de leur mesure.
- L'évolution du système au cours du temps.
- Les règles de quantification des grandeurs physiques.

Il faut remarquer que la validité de ces postulats et par conséquent celle de la théorie quantique est plus que largement confortée par toutes les expériences effectuées dans les différents domaines de la physique microscopique.

1.1 Relations d'incertitude de Heisenberg

En mécanique quantique la particule est décrite par une fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ qui représente l'amplitude de probabilité de trouver la particule au point \vec{r} à l'instant t , il est donc exclu de connaître avec certitude la position ou la vitesse et de définir une trajectoire du mouvement.

Considérons un système physique dans l'état $|\Psi\rangle$ et deux observables A et B qui ne commutent pas ($[A, B] \neq 0$) on a la variance du système [1] :

$$\begin{aligned}(\Delta A)^2 &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \\ (\Delta B)^2 &= \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2\end{aligned}\tag{1.1}$$

Les opérateurs A' et B' définis par

$$A' = A - \langle A \rangle \quad \text{et} \quad B' = B - \langle B \rangle\tag{1.2}$$

A' et B' représentent l'écart des opérateurs A et B par rapport à leur valeur moyenne. Comme $\langle A \rangle$ et $\langle B \rangle$ sont des scalaires on a $[A', B'] = [A, B]$

Considérons le vecteur $|\Psi'\rangle$ transformé de $|\Psi\rangle$ par l'application de l'opération $\lambda A' + iB'$ ou λ est un paramètre réel quelconque [4] : $|\Psi'\rangle = (\lambda A' + iB') |\Psi\rangle$

$$\langle \Psi' | \Psi' \rangle = \langle \Psi | (\lambda A' - iB') (\lambda A' + iB') | \Psi \rangle\tag{1.3}$$

$$= \langle A'^2 \rangle \lambda^2 + i [A', B'] \lambda + \langle B'^2 \rangle\tag{1.4}$$

$\langle \Psi' | \Psi' \rangle$ étant une quantité positive, le polynôme du second degré en λ doit être toujours positif ou nul. Pour qu'il soit toujours ainsi quelque soit λ il faut que le discriminant soit négatif, c'est-à-dire :

$$\left(i \langle [A', B'] \rangle \right)^2 - 4 \langle A'^2 \rangle \langle B'^2 \rangle \leq 0\tag{1.5}$$

Soit

$$\langle A'^2 \rangle \langle B'^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left(i \langle [A', B'] \rangle \right)^2 \quad (1.6)$$

Ou encore

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle [A', B'] \rangle | \quad (1.7)$$

En appliquant cette inégalité aux composantes des observables \vec{r} et \vec{p} qui sont telles que:

$$[x, p_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = i \hbar \quad (1.8)$$

on obtient:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.9)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.10)$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.11)$$

Ces inégalités définies ce sont ce qu'on appelle le principe d'incertitude d'Heisenberg.

1.2 L'équation de Schrödinger

L'équation d'onde dans le vide dérive de la structure des ondes de De Broglie. Ce fut la première grande contribution de Schrödinger d'y incorporer les forces lorsque la particule se trouve plongée dans un potentiel $V(r)$.

Lorsque la particule est placée dans un potentiel $V(r)$, l'évolution dans le temps de la fonction d'onde est régie par l'équation de Schrödinger[4] :

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \Delta + V(r) \right) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.12)$$

L'équation de Schrödinger est linéaire, c'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans le temps. Par conséquent, elle détermine complètement la fonction d'onde

$\Psi(\mathbf{r}, t)$ à tout instant; si l'on connaît celle-ci à un instant initial t_0 . Les problèmes d'évolution dans le temps consistent à résoudre cette équation, en imposant certaines conditions aux limites à la fonction d'onde.

1.3 Densité de courant et équation de continuité

D'après la relation $\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = 1$

ou

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \rho(\vec{r}, t)$$

on a

$$\int \rho(\vec{r}, t) d^3r = 1 \quad (1.13)$$

Cette relation exprime la conservation globale de la probabilité, il doit donc lui correspondre une équation de conservation locale pour la densité de probabilité. Par exemple le cas de la conservation totale de la charge électrique à laquelle correspond la conservation locale de la densité de charge[3] qui s'exprime par:

$$\text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.14)$$

Où $\vec{J}(\vec{r}, t)$ est le vecteur densité de courant et $\rho(\vec{r}, t)$ la densité volumique de charge.

On va montrer qu'on peut définir un vecteur $\vec{J}(\vec{r}, t)$ appelé courant de probabilité qui satisfait à une équation locale. Pour ce fait nous écrivons en représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$ l'équation de Schrödinger et son complexe conjugué pour une particule plongée dans un potentiel $V(\vec{r}, t)$, on a alors:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi^*(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\Psi^*(\vec{r}, t) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

En multipliant la première équation par $\Psi^*(\vec{r}, t)$ et la deuxième par $\Psi(\vec{r}, t)$ et en faisant la différence il devient:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\Psi(\vec{r}, t) \Psi^*(\vec{r}, t)] = -\frac{\hbar^2}{2m} [\Psi^*(\vec{r}, t) \Delta \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \Delta \Psi^*(\vec{r}, t)]$$

ou encore :

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\hbar}{2im} [\Psi^*(\vec{r}, t) \Delta \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \Delta \Psi^*(\vec{r}, t)] = 0$$

En comparant avec (1.14) on déduit que:

$$\text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} [\Psi^*(\vec{r}, t) \Delta \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \Delta \Psi^*(\vec{r}, t)] \quad (1.16)$$

Le second membre de (1.16) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} & \Psi^*(\vec{r}, t) \Delta \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \Delta \Psi^*(\vec{r}, t) \\ &= \nabla \cdot (\Psi^*(\vec{r}, t) \nabla \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \nabla \Psi^*(\vec{r}, t)) \end{aligned}$$

Donc:

$$\text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} \text{div} [\Psi^*(\vec{r}, t) \nabla \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \nabla \Psi^*(\vec{r}, t)] \quad (1.17)$$

1.4 L'équation de Schrödinger d'une particule dans un potentiel central

On considère une particule de masse m et de vecteur position \vec{r} en mouvement dans un potentiel central $V(r)$, en mécanique quantique il s'agit de résoudre l'équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien H associé à l'énergie E de la particule.

1.4.1 Hamiltonien de la particule

En représentation $\{ | \vec{r} \rangle \}$ l'Hamiltonien $H[1]$ s'écrit :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \quad (1.18)$$

Comme le potentiel est central, les coordonnées sphériques sont mieux adaptées et le Laplacien Δ s'écrit:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (1.19)$$

L'opérateur \vec{L}^2 s'écrit :

$$\vec{L}^2 = -\frac{\hbar^2}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (1.20)$$

Alors le Laplacien peut se mettre sous la forme :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2} \quad (1.21)$$

De sorte que l'Hamiltonien s'écrit:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r) \quad (1.22)$$

Ce qui permet d'écrire l'équation aux valeurs propres sous la forme:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r) \right] \Psi(r, \theta, \varphi) = E \Psi(r, \theta, \varphi) \quad (1.23)$$

Où $\Psi(r, \theta, \varphi)$ est la fonction propre de l'Hamiltonien et E son énergie propre.

1.4.2 Séparation des variables

L'expression (1.23) montre que toute la dépendance en θ et φ est contenue dans l'opérateur \vec{L}^2 et on a $[H, \vec{L}^2] = 0$ et $[H, L_Z] = 0$. L'ensemble $\{H, \vec{L}^2, L_Z\}$ constitue donc un E.C.O.C. et les trois observables H , \vec{L}^2 et L_Z admettent un système commun de fonction propres[1] de sorte que l'on a :

$$H \Psi(r, \theta, \varphi) = E \Psi(r, \theta, \varphi) \quad (a)$$

$$L^2 \Psi(r, \theta, \varphi) = l(l+1) \hbar^2 \Psi(r, \theta, \varphi) \quad (b) \quad (1.24)$$

$$L_Z \Psi(r, \theta, \varphi) = m \hbar \Psi(r, \theta, \varphi) \quad (c)$$

Les fonctions propres communes à \vec{L}^2 et L_Z correspondant à des valeurs de l et m fixées sont les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Les fonctions $\Psi(r, \theta, \varphi)$ sont donc forcément les produits d'une fonction $R(r)$ radial par l'harmonique sphérique $Y_l^m(\theta, \varphi)$ soit:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (1.25)$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \vec{L}^2\Psi(r, \theta, \varphi) &= \vec{L}^2 R(r)Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &= R(r)\vec{L}^2 Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &= l(l+1)\hbar^2 R(r)Y_l^m(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.26)$$

On aboutit à l'équation radiale suivante:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right] R(r) = E R(r) \quad (1.27)$$

1.5 La diffusion par un potentiel scalaire

1.5.1 Importance des phénomènes de collision

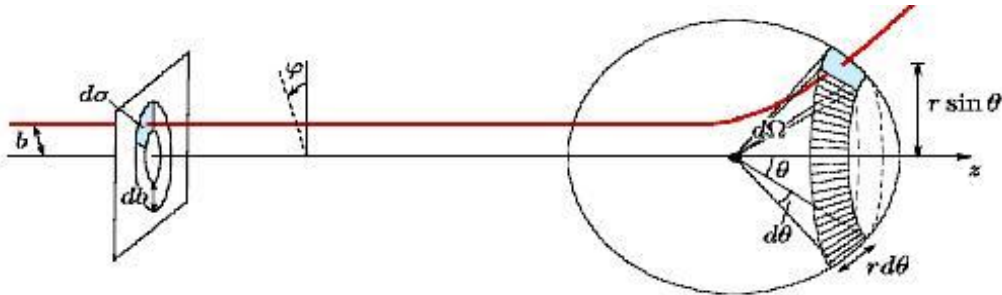


Figure 1.1: Section efficace différentielle de diffusion.

La théorie quantique de la diffusion[3],[5] consiste à diriger un faisceau de particules (1) sur une cible constituée de particules (2), on détecte les différentes particules qui composent l'état après la collision, dans des conditions données on désigne sous le nom de diffusion celles dans lesquelles l'état final est constitué des mêmes particules (1) et (2) que l'état initial (diffusion élastique), et on mesure leurs caractéristiques (direction d'émission, énergie, etc...).

Le but c'est de déterminer les interactions qui existent entre les diverses particules intervenant dans la collision.

1.6 Section efficace

1.6.1 Notion de section efficace

Le concept statistique de section efficace est utilisé en physique classique et garde sa validité en mécanique quantique, le principe consiste à bombarder de façon aléatoire une cible par un faisceau de particules projectiles, et à analyser la distribution énergétique et angulaire des produits finaux[4].

1.6.2 Définition de la section efficace de diffusion

La notion de section efficace est avant tout expérimentale: soit F_i le flux incident, c'est-à-dire le nombre de particules incidentes traversant par unité de temps une surface unité perpendiculaire à l'axe Oz à l'aide d'un détecteur placé loin de l'origine O , on mesure le nombre des particules dn diffusées par unité de temps dans l'angle solide $d\Omega$, situé dans la direction définie par (θ, φ) le nombre dn est proportionnel à $d\Omega$ et au flux incident F_i à travers la relation[4],[5] suivante :

$$dn = F_i \sigma(\theta, \varphi) d\Omega \quad (1.28)$$

Où θ : est l'angle polaire

φ : l'angle azimutal

$\sigma(\theta, \varphi)$: la section efficace différentielle de diffusion dans la direction (θ, φ)

La section efficace est la surface fictive que devrait avoir la particule cible pour reproduire la probabilité observée de collision ou réaction avec une autre particule en supposant que ses collisions se produisent entre objets impénétrables. D'où la nécessité de sa détermination pour interpréter les résultats des expériences de diffusion. On définit également la section efficace totale de diffusion σ par la formule:

$$\sigma = \int \sigma(\theta, \varphi) d\Omega \quad (1.29)$$

1.7 Définition des états stationnaires de diffusion

1.7.1 a-Équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien

L'équation de Schrödinger décrivant l'évolution de la particule dans le potentiel $V(r)$ admet des solutions d'énergie E bien définies:

$$\Psi(r, t) = \varphi(r) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) \quad (1.30)$$

Où $\varphi(r)$ est la solution de l'équation aux valeurs propres:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \varphi(r) = E\varphi(r) \quad (1.31)$$

Nous allons supposer que le potentiel $V(r)$ décroît à l'infini plus vite que $\frac{1}{r}$, la solution de (1.31) associée à une énergie E positive, on pose:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (1.32)$$

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{2m} U(r) \quad (1.33)$$

De sorte que (1.31) s'écrit:

$$[\Delta + k^2 - U(r)] \varphi(r) = 0 \quad (1.34)$$

Pour chaque valeur de k l'équation (1.34) admet une infinité de solutions, les conditions qu'il faut imposer aux solutions de (1.34) s'appellent les états stationnaires de diffusion, et notée $\Psi_k^{\text{diff}}(r)$ les fonctions d'ondes associées.

1.7.2 b-Forme asymptotique des états stationnaires de diffusion

Si $\Psi(\vec{r})$ est une onde stationnaire d'énergie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, pour $r \gg 1$ [6] on a:

$$\Psi(r) = a_-(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikr}}{r} + a_+(\theta, \varphi) \frac{e^{+ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.35)$$

Où $a_{\pm}(\theta, \varphi)$: amplitudes sphériques l'une entrante et l'autre sortante.

$o\left(\frac{1}{r}\right)$: décrit un terme qui décroît plus vite que $\frac{1}{r}$ pour $r \rightarrow \infty$.

Pour $r \gg 1$, loin du lieu de collision, on a supposé que $V(r) \rightarrow 0$ donc: $\hat{H} \simeq \hat{H}_0 + o\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\Delta \Psi = -k^2 \Psi + o\left(\frac{1}{r}\right) \Psi \quad (1.36)$$

En coordonnées sphériques le Laplacien s'écrit [formule (1.19)], si on écrit $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)a(\theta, \varphi)$, (1.31) donne

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R) a = -k^2 (R a) + o\left(\frac{1}{r}\right) \iff \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R) = -k^2 (R r) + o(1)$$

Cette équation de deuxième ordre est celle de l'oscillateur harmonique à deux solutions indépendantes, $r R(r) = e^{\pm ikr} + o(1)$

soit

$$R(r) = \frac{e^{\pm ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

une onde plane selon z peut [6] s'écrire:

$$e^{ikz} = a_+(\theta) \frac{e^{+ikr}}{r} + a_-(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.37)$$

avec

$$a_-(\theta) = \frac{2\pi}{k} \delta(\theta - \pi) \quad (1.38)$$

$$a_+(\theta) = \frac{-2\pi}{k} \delta(\theta) \quad (1.39)$$

où δ est la distribution de Dirac.

On remarque que $a_{\pm}(\theta)$ sont indépendantes de φ . en coordonnées sphériques $z = r \cos \theta$ l'onde plane s'écrit:

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta}$$

$$\cdot \theta = 0$$

$$e^{ikz} = e^{ikr} \delta(\theta) \frac{(-2\pi)}{kr} = \frac{e^{ikr}}{r} a_+(\theta) \quad (1.40)$$

$$\cdot \theta = \pi$$

$$e^{ikz} = e^{-ikr} \delta(\theta - \pi) \frac{2\pi}{kr} = \frac{e^{-ikr}}{r} a_-(\theta) \quad (1.41)$$

Une onde sphérique entrante est plus souvent modélisée par une onde plane incidente, cela amène à la théorie de la diffusion stationnaire.

$$\Psi(r) = e^{ikz} + f(k, \theta, \varphi) \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.42)$$

e^{ikz} :est une onde incidente et transmise selon l'axe z.

$f(k, \theta, \varphi) \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)$:est une onde sphérique sortante diffusée.

$f(k, \theta, \varphi)$:amplitude de diffusion.

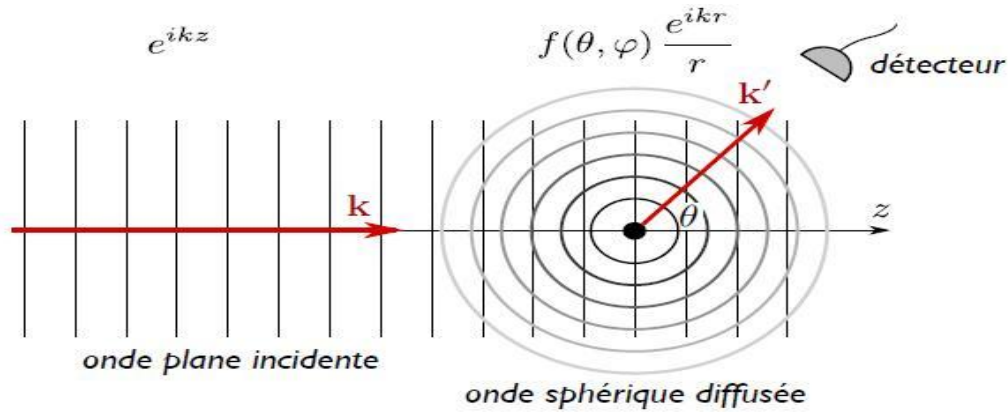


Figure1.2: Ondes incidente et diffusée.

1.8 Calcul de la section efficace

Pour une onde quantique $\Psi(\vec{r}, t)$ quelconque, la densité de probabilité est donnée par:

$$P(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \quad (1.43)$$

On a l'équation de conservation de probabilité:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} j = 0 \quad (1.44)$$

où la densité de courant de probabilité est définie par:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \Re\left(\bar{\Psi}(\vec{r}, t) \left(\vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t)\right)\right) \quad (1.45)$$

Les courants de probabilité sont:

$$\vec{j}_{inc}(\vec{r}) = \frac{\hbar \vec{k}}{m} \quad (1.46)$$

$$\vec{j}_{diff}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{m} \frac{|f(\vec{k}')|^2}{r^2} k \vec{u}_r \quad (1.47)$$

Le courant total diffusé sur la sphère de rayon r est

$$(4\pi r^2) j_{diff} = 4\pi \frac{\hbar}{m} |f(\vec{k}')|^2 k$$

En coordonnées sphériques le gradient[6] est:

$$\vec{\nabla} \Psi_{diff} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} j_{diff}(\vec{r}) &= \Re\left(\bar{\Psi}_{diff}\right) \left(\frac{-i\hbar}{m} \left(\vec{\nabla} \Psi_{diff}\right)\right) \\ &= \frac{\hbar}{m} (k |\Psi_{diff}|^2, 0, 0) = \frac{\hbar}{m} \frac{|f(\vec{k}')|^2}{r^2} k \vec{u}_r \end{aligned}$$

En coordonnées cartésiennes

$$\nabla \Psi_{inc} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{ikz} = (0, 0, ik) e^{ikz}$$

$$\begin{aligned} \vec{j}_{inc}(\vec{r}) &= \Re \left(\bar{\Psi}_{inc} \left(-\frac{i\hbar}{m} (\vec{\nabla} \Psi_{inc}) \right) \right) \\ &= \frac{\hbar}{m} (0, 0, \vec{k}) = \frac{\hbar}{m} \vec{k} \end{aligned}$$

La section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{k}') = \frac{(r^2 | \vec{j}_{diff} |)}{| \vec{j}_{inc} |} = | f(\vec{k}') |^2 \quad (1.48)$$

La section efficace totale[6] est:

$$\sigma_{tot} = \int_{s^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \quad (1.49)$$

1.9 Théorème optique

La section efficace différentielle est donc simplement donnée par le carré du module de l'amplitude de diffusion[7]. Dans la direction vers l'avant, le faisceau subit une atténuation liée à la diffusion des particules dans toutes les autres directions de l'espace. Dans le calcul du flux ceci se montre comme une interférence négative entre l'onde incidente et l'onde diffusée; pour faire le calcul correct il faut travailler avec un paquet d'ondes pour l'onde incidente, mais on obtient une bonne idée de ce qui se passe en calculant la partie $\frac{1}{r^2}$ du courant d'interférence.[8]

$$0 = \int d\Omega r \frac{\hbar}{2mi} [(\Psi_i^* + \Psi_d^*) \nabla (\Psi_i + \Psi_d) - \nabla (\Psi_i^* + \Psi_d^*) (\Psi_i + \Psi_d)] \quad (1.50)$$

$$= \int d\Omega r \left[j_i + j_d + \frac{\hbar}{2mi} (\Psi_i^* \nabla \Psi_d + \Psi_d^* \nabla \Psi_i - \nabla \Psi_i^* \Psi_d - \nabla \Psi_d^* \Psi_i) \right] \quad (1.51)$$

$$= \int d\Omega r \left[j_i + j_d + \frac{\hbar}{m} \Im (\Psi_i^* \nabla \Psi_d + \Psi_d^* \nabla \Psi_i) \right] \quad (1.52)$$

Ce courant j_{int} a une partie $\propto \frac{1}{r^2}$ qui vient de la dérivée du facteur $\frac{1}{r}$ dans Ψ_d , [7] et qui contribue au flux à travers une surface $dS = r^2 d\Omega$ lointaine. Ceci est le courant d'interférence physique: [8]

$$0 = \int d\Omega \left[r (j_i + j_d) + \frac{\hbar}{m} \Im \left(e^{-ikz} \partial_r f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} + f^*(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikr}}{r} \partial_r e^{ikz} \right) \right] \quad (1.53)$$

$$\approx \int d\Omega \left[r (j_i + j_d) + \frac{\hbar}{m} \Im \left(ik f(\theta, \varphi) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} + ik \cos \theta f^* \frac{e^{-ik(r-z)}}{r} \right) \right] \quad (1.54)$$

$$= \frac{\sigma \hbar k}{mr^2} + \frac{\hbar k}{mr} \Re \int d\Omega [f(\theta, \varphi) e^{ik(r-z)} + \cos \theta f^*(\theta, \varphi) e^{-ik(r-z)}] \quad (1.55)$$

$$= \frac{\sigma \hbar k}{mr^2} + \frac{\hbar k}{mr} \int d\Omega (1 + \cos \theta) [\Re f(\theta, \varphi) \cos k(r-z) - \Im f(\theta, \varphi) \sin k(r-z)] \quad (1.56)$$

$$\approx \frac{\sigma \hbar k}{mr^2} + \frac{4\pi \hbar k}{mr} \int_{1-\delta c}^1 dc [\Re f(0, \varphi) \cos kr (1-c) - \Im f(0, \varphi) \sin kr (1-c)] \quad (1.57)$$

$$= \frac{\sigma \hbar k}{mr^2} + \frac{4\pi \hbar k \Re f(0, \varphi) \sin kr \delta c}{kr} - \frac{4\pi \hbar k \Im f(0, \varphi) (1 - \cos kr \delta c)}{kr} \quad (1.58)$$

$$\approx \frac{\sigma \hbar k}{mr^2} - \frac{4\pi \hbar \Im f(0, \varphi)}{mr^2} \quad (1.59)$$

dans toutes les directions sauf en avant, ($k \parallel r$) le flux à travers une surface $dS = r^2 d\Omega$ oscille et le flux moyen disparaît. Seule vers l'avant on obtient un flux net [8], [9]:

$$\sigma = \frac{4\pi \Im f(0, \varphi)}{k} \quad (1.60)$$

Ceci correspond à une nette atténuation du flux si $\Im f(0, \varphi) > 0$. Nous allons voir par la suite que cette condition est toujours satisfaite, et que $\Im f(0, \varphi)$ est liée à la section efficace totale.

1.10 Equation intégrale de la diffusion

En général la diffusion n'étant pas isotrope, l'amplitude de l'onde sortante dépend de la direction (θ, ϕ) que l'on considère, ceci motive l'introduction de l'amplitude de diffusion $f(k', k)$, où $k' = k \cdot r$ est le vecteur d'onde émergent de la diffusion.

La fonction $f(k', k)$ contient évidemment toute l'information relative au potentiel $V(r)$.

Des méthodes approximatives sont alors nécessaires pour calculer l'amplitude de diffusion, pour effectuer ce calcul, nous utiliserons la fonction de Green.

Par définition la fonction de Green est la solution de l'équation [3],[26],[11] :

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.61)$$

La solution général de l'équation de Schrödinger s'écrit comme:

$$\Psi_k(\vec{r}) = \Psi_k^{(0)}(\vec{r}) + \int d^3r' G(\vec{r} - \vec{r}') U(r') \Psi_k(\vec{r}') \quad (1.62)$$

où $\Psi_k^{(0)}(\vec{r}) = e^{ikz}$ est la fonction d'onde incidente, puis elle exprime la solution de l'équation homogène:

$$(\Delta + k^2) \Psi_k^{(0)}(\vec{r}) = 0 \quad (1.63)$$

En effet appliquons l'opérateur $(\Delta + k^2)$ aux deux membres de (1.42) compte tenu de (1.61), nous obtenons

$$(\Delta + k^2) \Psi_k(\vec{r}) = \int d^3r' G(\vec{r} - \vec{r}') U(r') \Psi_k(\vec{r}') \quad (1.64)$$

La fonction de Green [8],[27], est alors donnée par:

$$G_{\pm}(r, r') = \frac{\hbar^2}{2m} \langle r | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | r' \rangle \quad (1.65)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{d^3k''}{(2\pi)^3} \langle r | k' \rangle \frac{1}{E - \frac{\hbar^2 k''^2}{2m} \pm i\epsilon} \langle k' | k'' \rangle \langle k'' | r' \rangle$$

Avec $\langle k' | k'' \rangle = (2\pi)^3 \delta(k' - k'')$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i k' (r-r')}}{E - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} \pm i\epsilon} \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m (2\pi)^3} \int_0^\infty dq q^2 \int_{-\pi}^{+\pi} d\Phi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \frac{e^{i q |r-r'| \cos\theta}}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \pm i\epsilon} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq q^2 \int_{-\pi}^{+\pi} d\Phi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \frac{e^{i q |r-r'| \cos\theta}}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \\
 &= \frac{1}{2 (2\pi)^2 i |r-r'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dq q \frac{e^{i q |r-r'|} - e^{-i q |r-r'|}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon}
 \end{aligned}$$

Avec $q^2 - k^2 \pm i\epsilon = (q-k \pm i\epsilon')(q+k \pm i\epsilon')$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi |r-r'|} \left[\frac{(\pm k) e^{\pm i k |r-r'|}}{\pm 2k} + \frac{(\pm k) e^{\pm i k |r-r'|}}{\pm 2k} \right] \\
 &= -\frac{e^{\pm i k |r-r'|}}{4\pi |r-r'|} \tag{1.66}
 \end{aligned}$$

insérant (1.66) dans (1.62) on obtient les fonctions d'onde diffusées :

$$\Psi_k(\vec{r}) = \Psi_k^{(0)}(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3 r' \frac{e^{i k |r-r'|}}{|r-r'|} U(\vec{r}') \Psi_k(\vec{r}') \tag{1.67}$$

Nous nous intéressons à la fonction d'onde dans la région asymptotique $r \rightarrow \infty$:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 \vec{r} \cdot \vec{r}'} \simeq r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \tag{1.68}$$

$$-\frac{e^{i k |r-r'|}}{4\pi |r-r'|} \simeq -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{i k r}}{r} e^{-i k' r'} \tag{1.69}$$

Où $\mathbf{k}' = k \frac{\vec{r}}{r}$ est le vecteur d'onde émergent de la diffusion. Ceci nous permet d'écrire la fonction d'onde sous la forme d'une équation intégrale de diffusion :

$$\Psi_k(r) \simeq \Psi_k^{(0)}(r) + \frac{e^{i k r}}{r} \left[-\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3 r' e^{-i k' r'} U(r') \Psi_k(r') \right] \tag{1.70}$$

Alors l'amplitude de diffusion est :

$$f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3 r' e^{-i k' r'} U(r') \Psi_k(r') \tag{1.71}$$

1.11 Ondes partielles et déphasages

1.11.1 Développement en ondes partielles

La méthode de résolution de l'équation de Schrödinger lorsque le potentiel $V(r)$ est à symétrie sphérique consiste à développer la fonction d'onde en harmoniques sphériques ([2],[25],[28],[29]) suivant :

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l, m_l} \frac{u_l(r)}{r} Y_l^{m_l}(\theta, \varphi)$$

La symétrie cylindrique autour de Oz du présent problème permet de se limiter aux termes indépendants de φ : $m_l = 0$, et compte tenu de la proportionnalité entre les harmoniques sphériques $m_l = 0$ et les polynômes de Legendre, nous pouvons nous contenter de:

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos(\theta)) \quad (1.72)$$

où $u_l(r)$ est solution de l'équation radiale,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] u_l(r) = E u_l(r) \quad (1.73)$$

avec la condition aux limites $u_l(0) = 0$, ou de façon plus précise suivante :

$$r \rightarrow 0 : \quad u_l(r) \propto r^{l+1} \quad (1.74)$$

Comme les polynômes de Legendre forment une base pour les fonctions définies sur l'intervalle $[-1, +1]$, on peut écrire le développement suivant de $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos \theta)$$

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\theta) P_L(\cos \theta) d \cos \theta \quad (1.75)$$

Le développement (1.75) est appelé développement en ondes partielles de l'amplitude de diffusion. Si $V(r)$ tend vers zéro suffisamment vite pour $r \rightarrow \infty$, on peut négliger dans

(1.73) $V(r)$ et le terme de barrière centrifuge. Le comportement asymptotique de $u_l(r)$ sera alors:

$$r \rightarrow \infty : u_l(r) \propto \sin(kr + \hat{\delta}_l)$$

Comparons ce comportement avec celui d'une onde plane, une onde plane $e^{ikz} = e^{i k r \cos \theta}$ est une solution à symétrie cylindrique de l'équation de Schrödinger lorsque $V(r)=0$. On peut donc écrire pour e^{ikz} un développement en polynômes de Legendre du type (1.72). Les coefficients de ce développement sont calculés à partir de (1.75) et sont appelés fonctions de Bessel sphériques $j_l(kr)$:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (1.76)$$

Les fonctions de Bessel sphériques sont données par:

$$j_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x} = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l j_0(x) \quad (1.77)$$

Lorsque $r \rightarrow 0$, $r j_l(kr) \propto (kr)^{l+1}$, ce qui est un cas particulier du comportement (1.74) puisque $r j_l(kr)$ est solution de l'équation de Schrödinger radiale avec $V(r) = 0$, tandis que si $r \rightarrow 0$, on montre:

$$r \rightarrow \infty : j_l(kr) \simeq \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right) \quad (1.78)$$

La comparaison avec le comportement de $u_l(r)$ conduit à définir:

$$\delta_l = \hat{\delta}_l - \frac{1}{2}l\pi$$

ce qui permet d'écrire le comportement asymptotique de $u_l(r)$:

$$r \rightarrow \infty : u_l(r) \simeq a_l \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right) \quad (1.79)$$

Le nombre δ_l est le déphasage dans l'onde partielle l , et c'est une fonction de k : $\delta_l(k)$. afin d'exprimer

$f(\theta)$ en fonction des déphasages, il suffit de comparer les développements asymptotiques $r \rightarrow \infty$ de (1.42) et de (1.72). Compte tenu de (1.76), le développement (1.42) s'écrit:

$$e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \sum_{l=0}^{\infty} X_l P_l(\cos \theta)$$

$$X_l(r) = (2l+1) i^l j_l(kr) + f_l \frac{e^{ikr}}{r}$$

La forme asymptotique (1.78) de j_l donne:

$$i^l j_l(kr) \simeq \frac{1}{2ikr} \left[(-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr} \right]$$

et on en déduit:

$$X_l(r) = \frac{2l+1}{2ikr} \left[(-1)^{l+1} e^{-ikr} + \left(1 + \frac{2ik}{2l+1} f_l \right) e^{ikr} \right] \quad (1.80)$$

La fonction $X_l(r)$ doit être asymptotiquement égale à $\frac{u_l(r)}{r}$ qui vaut, d'après (1.79)

$$\frac{u_l(r)}{r} \simeq \frac{a_l}{2ir} \left[(-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{2i\delta_l} e^{ikr} \right] \quad (1.81)$$

L'égalité de (1.80) et (1.81) n'est possible que si

$$e^{2i\delta_l} = 1 + \frac{2ik}{2l+1} f_l$$

soit

$$f_l = \frac{2l+1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1) = \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l \quad (1.82)$$

Cette équation donne l'expression recherchée de $f(\theta)$ en fonction des déphasages:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (1.83)$$

On déduit la section efficace différentielle de (1.48) et la section efficace totale par intégration sur les angles, en utilisant la relation d'orthogonalité des polynômes de Legendre et de l'orthogonalité des harmoniques sphériques:

$$\int d\Omega P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (1.84)$$

Le résultat pour σ_{tot} s'écrit:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \quad (1.85)$$

Chapitre 2

La mécanique quantique avec une longueur minimale

2.1 longueur minimale

L'hypothèse de la longueur élémentaire en physique existe depuis longtemps, pour des raisons aussi bien conceptuelles que techniques. Ainsi récemment des études en théorie des cordes et en théorie de la gravitation quantique proposent de petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg qui impliquent une incertitude minimale non nulle $(\Delta X)_{\min}$ sur la position correspondant à cette longueur élémentaire.

On peut voir cette incertitude minimale soit comme une conséquence du caractère "flou" (fuzzy) de l'espace temps à des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck $l_p = 10^{-35}m$, soit comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires . En mécanique quantique, en effet, le caractère ponctuel des particules est un postulat de base; ce qui en découle est la localisabilité des particules. A des énergies suffisamment grandes, on peut mesurer la position d'une particule avec une incertitude arbitrairement petite. Ceci est traduit par la relation d'incertitude de Heisenberg habituelle. En fait, cette description est idéaliste, il serait plus juste de dire qu'une relation d'incertitude généralisée, menant à une incertitude minimale non nulle, serait plus proche de la réalité physique. Aussi ces dernières années les physiciens se sont intéressés à cette notion de longueur élémentaire pour l'introduire dans le traitement des problèmes physique via des

corrections aux relations de commutation canonique. C'est Kempf et ses collaborateurs qui ont étudié le formalisme général de cette nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée[12], que nous allons présenter dans le prochain développement.

2.2 Principe d'incertitude généralisé (GUP)

Il y a dans la littérature plusieurs théories sur le concept de longueur minimale[12]. Les premières avec un principe d'incertitude généralisé (GUP), puis une relativité restreinte déformée, enfin avec des relations de dispersion modifiées. Nous allons suivre l'approche de GUP, pour montrer comment incorporer la notion de la longueur élémentaire l_m en mécanique quantique; ainsi on postule que lorsque l'on augmente arbitrairement l'impulsion p de la particule, le vecteur d'onde k ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale de l'ordre de $\frac{1}{l_m}$. En conséquence, on aura des déviations par rapport à la dépendance linéaire, ($p = \hbar k$) lorsque p approche l'échelle ($\frac{\hbar}{l_m}$). Ceci s'interprète physiquement par le fait que les particules ne peuvent pas posséder des longueurs d'onde ($\frac{2\pi}{k}$) arbitrairement petites, et que des échelles de distances arbitrairement petites ne peuvent plus être explorées. Pour simplifier, raisonnons à une seule dimension. on suppose une relation $p = f(k)$ entre k et p . Cette fonction doit être impaire, du fait de la parité, et la fonction inverse doit approcher asymptotiquement une valeur de l'ordre ($\frac{1}{l_m}$) lorsque p tend vers l'infini.

On suppose aussi que $f(k)$ est bien définie, on peut trouver plusieurs formes de la fonction f : par exemple [13] le choix de Hossenfelder :

$$p = \frac{\hbar}{l_m} \tan(l_m k) \quad (2.1)$$

En utilisant le développement:

$$\tan(\alpha) = \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \dots \right) \quad (2.2)$$

au deuxième ordre en l_m , p s'écrit:

$$p = \hbar \left(k + \frac{l_m^2}{3} k^3 + \dots \right) \quad (2.3)$$

Supposant que le commutateur entre X et P garde la forme standard, c'est-à-dire $[X, P] = i\delta_{ij}$, et utilisant la relation générale:

$$[X, A(K)] = i \frac{\partial A}{\partial K} \quad (2.4)$$

On obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée

$$\begin{aligned} [X, P(K)] &= i \frac{\partial P}{\partial K} \\ &= i \frac{\partial}{\partial K} \hbar \left(K + \frac{l_m^2}{3} K^3 + \dots \right) = i \hbar \frac{\partial}{\partial K} \left(K + \frac{l_m^2}{3} K^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

donc:

$$i \frac{\partial P}{\partial K} = i \hbar (1 + l_m^2 k^2 + \dots)$$

et puisque on a:

$$l_m^2 k^2 \sim \frac{l_m^2 p^2}{\hbar^2} + O(l_m^4)$$

on trouve:

$$[X, P(K)] = i \hbar \left(1 + \left(\frac{l_m}{\hbar} \right)^2 p^2 + \dots \right) \quad (2.5)$$

En introduisant un paramètre β , relié à la longueur minimale par :

$$\beta = \left(\frac{l_m}{\hbar} \right)^2, \text{ soit } l_m = \hbar \sqrt{\beta}$$

on aboutit à la relation de commutation suivante :

$$[X, P] = i \hbar (1 + \beta p^2 + \dots) \quad (2.6)$$

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude[10] à travers la formule :

$$(\Delta A) (\Delta B) \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle |$$

ce qui donne

$$(\Delta X) (\Delta P) \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \frac{\partial P}{\partial K} \right\rangle \right| \quad (2.7)$$

Au premier ordre du paramètre β , la relation d'incertitude modifiée aura la forme suivante :

$$(\Delta X) (\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta \langle P^2 \rangle)$$

En utilisant la définition de l'écart quadratique moyen : $(\Delta P)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$, on peut écrire :

$$(\Delta X) (\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \{1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma\} \quad (2.8)$$

$$\gamma = \beta \langle p \rangle^2$$

La relation d'incertitude (2.8) implique une incertitude minimale non nulle sur la position; elle a été étudiée rigoureusement par Kempf et ses collaborateurs[14, 15, 16].

Dans la section qui suit, nous allons nous baser essentiellement sur la référence [14], pour présenter le formalisme de la mécanique quantique découlant de cette algèbre modifiée.

2.3 Représentation théorique

Considérons la relation d'incertitude modifiée (2.8) :

$$(\Delta X) (\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \{1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma\} \quad (2.9)$$

où β est un paramètre positif, relié à la longueur élémentaire; γ est un paramètre positif dépendant de la valeur moyenne de l'impulsion

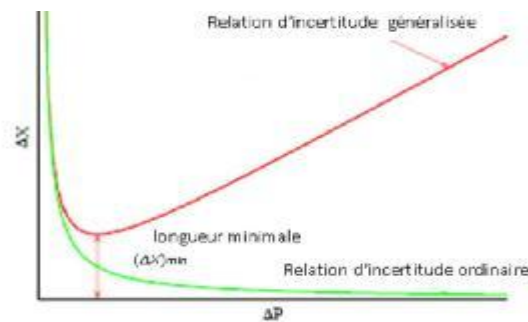


Figure2.1:La relation d'incertitude généralisée,impliquant une longueur minimale $(\Delta X)_{\min} > 0$

En mécanique quantique ordinaire ($\beta = \gamma = 0$), ΔX peut être arbitrairement petit si ΔP est suffisamment grand, ce qui veut dire que l'on peut résoudre des échelles de distances arbitrairement petites en utilisant des particules test suffisamment énergétiques. Ceci n'est pas le cas dans la relation (2.9) du fait de la présence du terme $\beta (\Delta P)^2$ dans le membre droit de l'inégalité; même pour de grandes valeurs de ΔX , ΔP est toujours supérieur à une valeur minimale $(\Delta X)_{\min}$ non nulle, que nous allons définir par la suite. La courbe représentant cette relation d'incertitude est illustrée dans la figure (2.1). On observe que pour les petites valeurs de ΔP , la relation d'incertitude généralisée et la relation d'incertitude ordinaire sont presque identiques; elles deviennent remarquablement différentes dans la région de grand ΔP [12].

2.3.1 Représentation dans l'espace des impulsions

Considérons l'algèbre de Heisenberg associative générée par les opérateurs X et P , satisfaisant à la relation de commutation:

$$[X, P] = i\hbar (1 + \beta P^2) \quad \beta > 0 \quad (2.10)$$

la relation d'incertitude correspondante est :

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \beta \langle P \rangle^2) \quad (2.11)$$

Pour un (ΔX) fixe[12], l'inégalité (2.9) est satisfaite dans l'intervalle: $[\Delta P_-, \Delta P_+]$, tel que :

$$\Delta P_{\pm} = \frac{\Delta X}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\beta \langle P \rangle^2 + 1}{\beta}}$$

La plus petite valeur de ΔX est celle qui correspond à une racine double, c.-à-d., $\Delta P_- = \Delta P_+$, soit :

$$\left(\frac{(\Delta X)_0}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\beta \langle P \rangle^2 + 1}{\beta} = 0$$

$$(\Delta X)_0 = \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{\beta \langle P \rangle^2 + 1}$$

La valeur minimale $(\Delta X)_{\min}$, correspond à ($\langle P \rangle = 0$).

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar\beta$$

dans l'espace des impulsions, où X et P agissent sur les fonctions $\Psi(p) = \langle p | \Psi \rangle$, ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs x et p, satisfaisant à la relation de commutation canonique : $[x, p] = i\hbar$, alors on peut trouver une représentation de X et P qui vérifie la relation de commutation modifiée (2.10).

La réalisation la plus simple[14] s'écrit :

$$X = (1 + \beta p^2) x \quad , \quad P = p \quad (2.12)$$

où l'on a:

$$P \Psi(P) = P \Psi(P)$$

$$x \Psi(p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \Psi(p)$$

Alors, X et P s'écrivent explicitement :

$$X = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \quad P = p$$

Il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (2.10).

2.4 Produit scalaire et relation de fermeture

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation (2.12), est la préservation de la symétrie des opérateurs X et P, pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment que P n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente; il n'en est pas le cas pour l'opérateur X. En effet, la condition de symétrie s'écrit [14] :

$$(\langle \Psi | X | \varphi \rangle) = \langle \Psi | (X | \varphi \rangle) \quad (2.13)$$

cette condition n'est pas satisfaite par rapport au produit scalaire ordinaire :

$$\langle \Psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \Psi^*(p) \varphi(p).$$

Pour que l'opérateur X soit symétrique, il faut modifier le produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \Psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \Psi^*(p) \varphi(p) \quad (2.14)$$

Le facteur $\frac{1}{1+\beta p^2}$ est nécessaire pour éliminer le facteur correspondant de l'opérateur X . En effet :

$$\langle \Psi | (X | \varphi) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \Psi^*(p) \left[i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) \right] = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \Psi^*(p) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p)$$

en intégrant par parties et en tenant compte que $\Psi(p)$ et $\varphi(p)$ sont nulles à l'infini, on obtient :

$$\langle \Psi | (X | \varphi) \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \Psi^*(p) \right) \varphi(p)$$

D'autre part on a :

$$\langle (\Psi | X) | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \left[i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \Psi^*(p) \right] \varphi(p) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \Psi^*(p) \right) \varphi(p)$$

Ceci montre bien que X est symétrique par rapport au produit scalaire (2.14). La modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture; celle-ci devient:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle p | p \rangle = 1 \quad (2.15)$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion, on obtient :

$$\langle \hat{p} | \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle \hat{p} | p \rangle \langle p | \hat{p} \rangle$$

On en déduit, immédiatement, la nouvelle relation d'orthonormalisation:

$$\langle p | \hat{p} \rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - \hat{p}) \quad (2.16)$$

2.5 Relation d'incertitude généralisée à N dimensions

Une généralisation naturelle de la relation de commutation (2.10), préservant la symétrie rotationnelle,[14] s'écrit :

$$[X_i, P_j] = i \hbar \delta_{ij}(1 + \beta p^2) \quad (2.17)$$

Si on impose[12] :

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (2.18)$$

l'identité de Jacobi [17]est:

$$\frac{1}{i \hbar} [X_i, X_j] = - \left\{ 2 \left(\hat{A} + \hat{B} \hat{P}^2 \right) \hat{A}' - \hat{A} \hat{B} \right\} \hat{l}_{ij}$$

où $\hat{A} = 1 + \beta P^2$, $\hat{A}' = \frac{d\hat{A}}{dP^2}$, $\hat{B} = B(P^2)$ et $\hat{l}_{ij} = (X_i P_j - X_j P_i) / \hat{A}$.

Alors [17]et[24]donne :

$$[X_i, X_j] = \frac{2i \beta \hbar}{1 + \beta p^2} (P_i X_j - P_j X_i) \quad (2.19)$$

ce qui mène naturellement à une algèbre de Heisenberg non commutative. La relation d'incertitude impliquée par (2.17) s'écrit :

$$(\Delta X_i) (\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left(1 + \beta \sum_{k=1}^N [(\Delta P_k)^2 + \langle p_k \rangle^2] \right) \quad (2.20)$$

N étant la dimension de l'espace. Cette relation d'incertitude implique des incertitudes minimales non nulles sur toutes les composantes du vecteur position. On peut déduire facilement, comme dans le cas à une dimension :

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt{N\beta} \quad \forall i. \quad (2.21)$$

Dans l'espace des impulsions, la représentation la plus simple, satisfaisant à la relation (2.12) , les opérateurs X_i et P_j sont symétriques par rapport au produit scalaire :

$$\langle \Psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N P}{1 + \beta p^2} \Psi^*(p) \varphi(p) \quad (2.22)$$

Comme dans le cas à une dimension, les opérateurs de position sont simplement symétriques, et ne possèdent pas d'états propres physique, il est important de noter, que la relation de commutation a été généralisée pour avoir non seulement une incertitude minimale non nulle sur la position, mais aussi, pour assurer que les opérateurs X_i et P_j soient auto-adjoints.

La relation de commutation la plus générale s'écrit :

$$[X_i, P_j] = i\hbar \left[\delta_{ij}(1 + \beta p^2) + \hat{\beta} P_i P_j \right] , \quad (\beta, \hat{\beta}) > 0 \quad (2.23)$$

En supposant :

$$[P_i, P_i] = 0 \quad (2.24)$$

alors, l'identité de Jacobi implique l'algèbre "non commutative" suivante[17],[24] :

$$[X_i, X_j] = i\hbar \frac{\left(2\beta - \hat{\beta}\right) + \beta \left(2\beta + \hat{\beta}\right) p^2}{1 + \beta p^2} (P_i X_j - P_j X_i) \quad (2.25)$$

En supposant que ΔP_i ne dépend pas de j , on peut déduire facilement la relation d'incertitude correspondant à la relation de commutation (2.23) :

$$(\Delta X_i) (\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} + (N\beta + \hat{\beta}) (\Delta P_j)^2 + \gamma \quad (2.26)$$

avec
$$\gamma = \beta \sum_{K=1}^N \left[\langle P_k \rangle^2 + \hat{\beta} \langle P_i \rangle^2 \right]$$

La minimisation de cette dernière relation par rapport à ΔP_j donne :

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt{N\beta + \hat{\beta}} \quad \forall i. \quad (2.27)$$

Le choix de la représentation se fait toujours en supposant que X_i et P_j comme des fonctions des opérateurs x_i et p_j satisfaisant les relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire. La première représentation qui a été utilisée est celle de la référence [18], à savoir :

$$X_i = x_i + \beta \frac{p^2 x_i + x_i p^2}{2} + \hat{\beta} \frac{p_i p_j x_j + x_j p_i p_j}{2} , \quad P_i = p_i \quad (2.28)$$

où dans l'espace des impulsions :

$$x_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \quad , p_i = p_i$$

La forme explicite de (2.28), s'écrit :

$$X_i = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \left(\beta + \frac{N+1}{2} \beta \right) p_i \right] \quad , \quad p_i = p_j \quad (2.29)$$

en introduisant un paramètre arbitraire $\tilde{\gamma}$ [19] :

$$\tilde{\gamma} = \left(\beta + \frac{N+1}{2} \beta \right)$$

donc:

$$X_i = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \tilde{\gamma} p_i \right] \quad (2.30)$$

soit:

$$X_i = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) x_i + \beta p_i p_j x_j + \tilde{\gamma} p_i \right] \quad (2.31)$$

Le paramètre positif $\tilde{\gamma}$ affecte ni les relations de commutation ni les observables physiques.

2.6 La réduction de Brau

Dans la référence [20], l'auteur considère le cas $\beta = 2\beta$ dans lequel les commutateurs entre les opérateurs de position (2.25) s'annulent au premier ordre de β . Ce cas présente un intérêt particulier puisque, en plus de l'invariance rotationnelle, le formalisme devient invariant par rapport aux translations, pour ce cas particulier, les opérateurs X_i et P_j satisfaisant au premier ordre en β à l'algèbre de Heisenberg déformée (2.23) sont représentés par :

$$X_i = x_i \quad , P_i = p_i (1 + \beta p^2) \quad (2.32)$$

avec :

$$x_i = x_i \quad , p_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Cette représentation est très simple, et convient surtout lors de l'utilisation de la théorie des perturbations. Dans la référence [21], une représentation généralisant (2.32) au cas $\hat{\beta} = 2\beta$ a été donnée, elle a la forme suivante:

$$X_i = x_i + \frac{2\beta - \hat{\beta}}{4} (p^2 x_i + x_i p^2) \quad , \quad P_i = p_i \left(1 + \frac{\hat{\beta}}{2} p^2 \right) \quad (2.33)$$

Cette représentation est valable seulement au premier ordre de β et $\hat{\beta}$ elle se réduit dans le cas $\hat{\beta} = 2\beta$ à la représentation (2.32). Plus généralement, on peut introduire un paramètre δ et considérer la représentation suivante:

$$X_i = x_i + (\beta - \delta) \frac{(p^2 x_i + x_i p^2)}{2} + \left(\hat{\beta} - 2\delta \right) \frac{p_i p_j x_j + x_j p_i p_j}{2}$$

$$P_i = p_i (1 + \delta p^2) \quad (2.34)$$

Cette famille de représentations, valables au premier ordre de β et $\hat{\beta}$, englobe toutes les représentations présentées plus-haut. En effet, elle se réduit à :

- la représentation (2.28) pour, $\delta = 0$;
- la représentation (2.33) pour, $\delta = \frac{\hat{\beta}}{2}$; et
- la représentation (2.32), pour $\delta = \beta = \frac{\hat{\beta}}{2}$.

2.7 L'équation de schrödinger

Dans la mécanique quantique ordinaire l'équation de schrödinger s'écrit:

$$H \Psi (\vec{r}, t) = E \Psi (\vec{r}, t)$$

Avec
$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad \text{et} \quad E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

utilisons la réduction de Brau (2.32), avec $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, on aura:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) = \frac{(p(1+\beta p^2))^2}{2m} + V(r)$$

En négligeant les termes à l'ordre (β^2) on obtient:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) + \frac{\beta}{m} p^4 + O(\beta^2) \quad (2.35)$$

donc

$$H = H_0 + H_1 + O(\beta^2) \quad (2.36)$$

où $H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(r)$ et $H_1 = \frac{\beta}{m}p^4$

Alors:

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m}p^4 + V(r)\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \quad (2.37)$$

Cette équation représente l'équation de Schrödinger ordinaire avec un terme additionnel à p^4 . On peut considérer ce terme comme une perturbation.

2.8 La densité de courant et l'équation de continuité:

Dans l'équation schrödinger (2.37), $V(r)$ doit être réel pour que H soit hermétique. L'équation conjuguée est la complexe conjuguée de (2.37):

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m}p^4 + V(r)\right)\Psi^* = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^* \quad (2.38)$$

Multiplications les équations de(2.37) par Ψ^* et (2.38) par Ψ on aura:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\Delta\Psi + \frac{\beta}{m}\hbar^4\Psi^*\Delta^2\Psi + \Psi^*V(r)\Psi &= i\hbar\Psi^*\frac{\partial}{\partial t}\Psi \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi\Delta\Psi^* + \frac{\beta}{m}\hbar^4\Psi\Delta^2\Psi^* + \Psi V(r)\Psi^* &= -i\hbar\Psi\frac{\partial}{\partial t}\Psi^* \end{aligned} \quad (2.39)$$

On faisant la différence entre les deux équations on obtient:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\Psi^*\Delta\Psi - \Psi\Delta\Psi^*) + \frac{\beta}{m}\hbar^4(\Psi^*\Delta^2\Psi - \Psi\Delta^2\Psi^*) = i\hbar\left(\Psi^*\frac{\partial}{\partial t}\Psi + \Psi\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*\right) \quad (2.40)$$

$$-\frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\Delta\Psi - \Psi\Delta\Psi^*) + \frac{\beta}{mi}\hbar^3(\Psi^*\Delta^2\Psi - \Psi\Delta^2\Psi^*) = \left(\Psi^*\frac{\partial}{\partial t}\Psi + \Psi\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*\right) \quad (2.41)$$

l'équation de continuité est: $\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} = 0\right)$, comparons cette équation avec(2.41), en trouve:

$$\vec{\nabla} \vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \Delta \Psi - \Psi \Delta \Psi^*) - \frac{\beta}{mi} \hbar^3 (\Psi^* \Delta^2 \Psi - \Psi \Delta^2 \Psi^*) \quad (2.42)$$

avec

$$\Psi^* \Delta \Psi - \Psi \Delta \Psi^* = \vec{\nabla} \left(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right) \quad (2.43)$$

$$\Psi^* \Delta^2 \Psi - \Psi \Delta^2 \Psi^* = \vec{\nabla} \left[\left(\Psi^* \vec{\nabla} \Delta \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Delta \Psi^* \right) + \left(\Delta \Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Delta \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right) \right] \quad (2.44)$$

En remplaçant (2.43) et (2.44) dans (2.42), on trouve:

$$\vec{\nabla} \vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\vec{\nabla} \left(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right)) - \frac{\beta}{mi} \hbar^3 \vec{\nabla} \left[\left(\Psi^* \vec{\nabla} \Delta \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Delta \Psi^* \right) + \left(\Delta \Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Delta \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right) \right]$$

donc:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right) - \frac{\beta}{mi} \hbar^3 \left[\left(\Psi^* \vec{\nabla} \Delta \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Delta \Psi^* \right) + \left(\Delta \Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Delta \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right) \right] \quad (2.45)$$

$$= \vec{j} + \vec{j}_1$$

Où \vec{j} est l'expression courante dans la mécanique quantique ordinaire et \vec{j}_1 est un terme supplémentaire due à la déformation.

Chapitre 3

Le formalisme de diffusion en mécanique quantique déformée

Dans ce qui suit on s'intéresse au formalisme de la diffusion élastique en mécanique quantique déformée par la présence d'une longueur minimale, on va présenter le calcul de l'amplitude de diffusion par un potentiel central ainsi que la section efficace différentielle. Pour cela on a utilisé le formalisme la fonction de Green et comme est le cas dans la mécanique quantique ordinaire pour un potentiel central il est nécessaire d'introduire la méthode des ondes partielles.

3.1 Amplitude de diffusion et section efficace différentielle

Pour rechercher le problème de diffusion il est essentiel d'introduire la représentation des opérateurs satisfaisant l'algèbre de Kempf il est bien connu qu'une telle algèbre est définie dans l'espace des impulsions mais nous utilisons la représentation approximative au premier ordre des paramètres de déformation[21],[22]:

$$\begin{aligned} X_i &= x_i + \frac{2\beta - \beta'}{4} (x_i p^2 + p^2 x_i), \\ P_i &= p_i + \frac{\beta'}{2} p_i p^2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ou $p^2 = \sum_{j=1}^3 p_j^2$, et les opérateurs x_i, p_j satisfont la relation de commutation canonique. La représentation de la position $x_i = x_i$, $p_j = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$, peut être prise en l'algèbre ordinaire de Heisenberg. Nous notons que dans le cas special $2\beta = \beta'$, les opérateurs de position commutent $[X_i, X_j] = 0$.

L'équation de Schrodinger avec un potentiel arbitraire $U(r)$ dans les variables canoniques prend la forme suivante:

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\beta' p^4}{2m} + U(r, p) \right) \Psi = E \Psi \quad (3.2)$$

Nous supposons que $U(r, p) \rightarrow 0$, quand $r \rightarrow \infty$ et le mouvement d'une particule diffusée aux grandes distances par un centre de diffusion est libre. L'énergie cinétique d'une particule libre est:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} (1 + \beta' \hbar^2 k^2) \quad (3.3)$$

Où k est le vecteur d'onde de la particule incidente et $P = \hbar k \left(1 + \frac{\beta' \hbar^2 k^2}{2} \right)$ est la quantité de mouvement. La fonction d'onde de la particule incidente est:

$$\Psi_k(r) = e^{i k r} \quad (3.4)$$

Après la diffusion, le mouvement d'une particule est également libre aux grandes distances avec l'impulsion $P' = \hbar k' \left(1 + \beta' \hbar^2 k'^2 \right)$. Comme on l'a noté ci-dessus nous considérons la diffusion élastique de sorte que nous avons $k' = k$. L'équation (3.2) peut être représentée [22] comme suit:

$$(\nabla^2 - \beta' \hbar^2 \nabla^4 + k^2 [1 + \beta' \hbar^2 k^2]) \Psi = \frac{2m}{\hbar^2} U(r, p) \Psi \quad (3.5)$$

et comme on a $P = -i\hbar \nabla$. La solution formelle de l'équation (3.5) peut être écrit comme suit:

$$\Psi(r) = \Psi_k(r) + \int G(r, r') \frac{2m}{\hbar^2} U(r', p') \Psi dr' \quad (3.6)$$

c'est l'équation intégrale et $G(r, r')$ est la fonction de Green qui satisfait l'équation suivante:

$$(\nabla^2 - \beta' \hbar^2 \nabla^4 + k^2 [1 + \beta' \hbar^2 k^2]) G(r, r') = \delta(r - r') \quad (3.7)$$

La solution pour la fonction de Green est:

$$G(r, r') = G(r - r') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{iq(r-r')}}{k^2(1 + \beta' \hbar^2 k^2) - q^2(1 + \beta' \hbar^2 q^2)} dq \quad (3.8)$$

Après l'intégration sur les variables angulaires nous avons:

$$G(r, r') = \frac{1}{4i\pi^2 |r - r'|} \int \frac{q e^{iq|r-r'|}}{k^2(1 + \beta' \hbar^2 k^2) - q^2(1 + \beta' \hbar^2 q^2)} dq \quad (3.9)$$

La dernière intégrale peut être calculée en utilisant le théorème des résidus. Par conséquent, il est nécessaire de déterminer le contour de l'intégration dans le plan complexe. Ainsi, la manière d'enfermer les pôles $q = \pm k$. La façon d'enfermer les pôles peut être déterminée à partir des conditions aux limites imposées sur la fonction de Green $G(|r - r'|)$ lorsque $|r - r'| \rightarrow 0$. Pour obtenir la solution correspondant à l'onde sortante nous choisissons le contour de l'intégration de la même manière que nous sélectionnons le contour de l'onde sortante dans la mécanique quantique ordinaire. Ensuite, l'intégrale (3.9) devient:

$$G(r-r') = -\frac{1}{4\pi |r - r'| (1 + 2\beta' \hbar^2 k^2)} (e^{ik|r-r'|} - e^{-\sqrt{k^2 + 1/\beta' \hbar^2}|r-r'|}) \quad (3.10)$$

La fonction de Green pour une particule libre dans le cas déformé est quelque peu différente de celle de l'ordinaire. Nous avons un multiplicateur supplémentaire $1 / (1 + 2\beta' \hbar^2 k^2)$ tendant vers l'unité lorsque $\beta' \rightarrow 0$. Alors dans le cas déformé nous avons également la fonction supplémentaire $\sqrt{k^2 + 1/\beta' \hbar^2} |r - r'|$ qui diminue rapidement avec l'augmentation de $|r - r'|$.

La dernière fonction tend vers zéro lorsque $\beta' \rightarrow 0$. Puisque nous voulons trouver le Comportement asymptotique pour la fonction de Green qui a lieu lorsque la différence $|r - r'|$ est grande. Nous pouvons négliger la dernière fonction. Ainsi, la fonction de Green à grande distance du centre de diffusion est:

$$G(r-r') = -\frac{1}{4\pi |r - r'| (1 + 2\beta' \hbar^2 k^2)} e^{ik|r-r'|} \quad (3.11)$$

En utilisant la fonction de Green et après quelques simplifications[23], nous réécrivons l'équation(3.6) par la forme:

$$\Psi(r) = \Psi_k(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2(1+2\beta'\hbar^2k^2)} \int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} U(r',p') \Psi(r') dr' \quad (3.12)$$

Où $k'=nk$. Nous voulons obtenir la solution de l'équation intégrale (3.12) à de grandes distances du centre de diffusion: l'action de l'opérateur d'énergie Potentielle $U(r',p')$ sur la fonction d'onde fait une contribution considérable à l'intégrale de l'équation (3.12) dans le domaine borné. L'action de l'opérateur $U(r',p')$ sur la fonction d'onde $\Psi(r')$ fait une petite contribution négligeable à l'intégrale (3.12) pour un r' plus grand. Alors les valeurs réelles de la variable d'intégration r' sont limitées par un certain rayon effectif de l'énergie potentielle. Lorsque $r \rightarrow \infty$ le rapport r'/r est petit et on peut utiliser le développement suivant:

$$|r-r'| = \sqrt{r^2 - 2rr' + r'^2} \simeq r \left(1 - \frac{r \cdot r'}{r^2} + \dots \right) = r - nr' + \dots \quad (3.13)$$

Où $n = r / r$ est le vecteur unitaire dans la direction du mouvement de la particule diffusée.

Ensuite, nous remplaçons la décomposition (3.13) dans l'équation (3.12) et en prenant en compte le premier terme de l'équation asymptotique que nous représentons l'équation (3.12) sous la forme:

$$\Psi(r) = \Psi_k(r) - \frac{m}{2\pi\hbar^2(1+2\beta'\hbar^2k^2)} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-ik'r'} U(r',p') \Psi(r') dr' \quad (3.14)$$

Où $k'=nk$. L'expression(3.14) peut être réécrite[23] comme suit:

$$\Psi(r) = e^{ikr} + \frac{e^{ikr}}{r} f \quad (3.15)$$

où

$$f = \frac{m}{2\pi\hbar^2(1+2\beta'\hbar^2k^2)} \int e^{-ik'r'} U(r',p') \Psi(r') dr' \quad (3.16)$$

Est l'amplitude de diffusion.

L'expression (3.15) coïncide formellement avec la fonction d'onde du problème de diffusion dans la mécanique quantique ordinaire. La principale différence entre les deux est causée par des expressions différentes pour l'amplitude de diffusion. Comme dans le cas ordinaire, le second terme de la fonction d'onde (3.15) correspond à la fonction d'onde de la particule diffusée.

$$\Psi_{diff}(r) = \frac{e^{ikr}}{r} f \quad (3.17)$$

Le problème central de la théorie de la diffusion est le calcul de la section efficace différentielle. Nous définissons la section efficace différentielle de la même manière que cela a été fait dans la mécanique quantique ordinaire.

$$d\sigma = \frac{j_{diff} \cdot ds}{j_{inc}} \quad (3.18)$$

Où j_{inc} est la valeur absolue de la densité de courant pour les particules incidentes, j_{diff} est la densité de courant pour les particules diffusées et ds est l'élément de la zone le long de la direction du mouvement pour les particules diffusées. l'élément de la zone peut être réécrite sous la forme $dS = n ds$ où $n = r / r$. Et après l'introduction d'un angle spatial $d\Omega = \frac{ds}{r^2}$ la section différentielle peut être représentée[22] sous la forme:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(j_{diff} \cdot n)r^2}{j_{inc}} \quad (3.19)$$

Pour le calcul de la section efficace différentielle, il est nécessaire de calculer la densité de courant pour les particules incidentes et la densité de courant pour les particules diffusées. En substituant (3.4) en (2.45), nous obtenons

$$j_{inc} = \frac{\hbar k}{m} (1 + 2\beta' \hbar^2 k^2) \quad (3.20)$$

L'expression de la densité de courant des particules incidentes est quelque peu différente que dans le cas ordinaire. Nous avons le facteur $(1 + 2\beta' \hbar^2 k^2)$ tendant à l'unité si $\beta' \rightarrow 0$. En substituant (3.17) en relation (2.45), et après des transformations simples nous obtenons l'expression de la densité de courant pour les particules sortantes:

$$j_{diff} = \frac{\hbar k}{m} \frac{|f|^2}{r^2} (1 + 2\beta' \hbar^2 k^2) \quad (3.21)$$

Ensuite, nous remplaçons les relations (3.21) et (3.20) dans l'expression (3.19) et on obtient:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \quad (3.22)$$

Comme nous le voyons la relation pour la section efficace différentielle coïncide formellement avec l'expression de la section efficace en mécanique quantique ordinaire, mais l'amplitude de diffusion est définie par la relation (3.16) qui, comme nous l'avons noté précédemment, est quelque peu différente de celle du cas ordinaire.

La dernière équation permet de calculer la section efficace différentielle pour un potentiel arbitraire de diffusion.

3.2 Méthode des ondes partielles

Quand le potentiel de diffusion a une symétrie sphérique, le moment angulaire de la particule de diffusion est une intégral de mouvement, donc il devrait noter que les particules avec nombres quantiques orbitaux sont diffusés indépendamment. Alors comme dans la mécanique quantique ordinaire, nous pouvons représenter la section efficace de diffusion comme une somme des sections efficaces partielles, pour les valeurs fixes des nombres quantique orbitale l . Alors, nous assumons que nous avons un potentiel diffusé de symétrie sphérique et considérons le processus de diffusion sur ce potentiel. La solution arbitraire de l'équation de Schrödinger peut être représentée[23] par la forme:

$$\Psi(r) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l R_{kl}(r) P_l(\cos \theta) \quad (3.23)$$

où $R_{nl}(r)$ sont les fonctions d'onde radial et $P_l(\cos \theta)$ sont les polynômes de Légendre. Considérons d'abord les particules libres l'équation de Schrödinger s'écrit:

$$-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} (1 - \beta' \hbar^2 \nabla^2) \Psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} (1 + \beta' \hbar^2 k^2) \Psi \quad (3.24)$$

qui a une forme[23] équivalente:

$$(\nabla^2 + k^2) (1 - \beta' \hbar^2 (\nabla^2 - k^2)) \Psi = 0 \quad (3.25)$$

Nous représentons la solution de la dernière équation comme la somme de deux fonctions Ψ_1 et Ψ_2 qui sont les solutions des équations suivantes:

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi_1 = 0 \quad (3.26)$$

$$(1 - \beta' \hbar^2 (\nabla^2 - k^2)) \Psi_2 = 0 \quad (3.27)$$

La partie radiale de la fonction d'onde Ψ_1 prend la forme bien connue:

$$R_{kl}(r) = \frac{1}{k^l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^l \left(-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{\sin kr}{r} \quad (3.28)$$

L'équation (3.27) nous donne une solution non physique. Et nous la rejetons. La solution asymptotique (3.28) à de grandes distances est:

$$R_{kl}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2})}{r} \quad (3.29)$$

Similairement à la mécanique quantique ordinaire, nous supposons que la fonction asymptotique de l'onde pour la particule diffusée est la même et diffère de (3.29) par un déphasage seulement

$$\bar{R}_{kl}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l)}{r}, r \rightarrow \infty \quad (3.30)$$

On utilise la décomposition (3.23) et à la place de la fonction $R_{kl}(r)$ on prend la fonction (3.29) pour la particule libre et la fonction (3.30) pour la particule dans le champ externe. Alors on substitue les décompositions mentionnées avant en (3.15) alors on obtient:

$$\Psi_{diff} = f \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \theta) \left[C_l \sin \left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l \right) - \sin \left(kr - l\frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (3.31)$$

On obtient:

$$f = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) (1 - e^{2i\delta_l}) P_l(\cos \theta) \quad (3.32)$$

La dernière relation coïncide formellement avec l'expression de l'amplitude de diffusion dans la mécanique quantique ordinaire, mais on note que le vecteur d'onde k et le déphasage δ_l dépend des paramètres de déformation. Utilisant la relation (3.22) et après intégration sur tous les angles spatiaux nous avons:

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (3.33)$$

De même que en mécanique quantique ordinaire, la section efficace de diffusion se rapproche de la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion dans la direction avant. Alors nous avons:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \Im f(0) \quad (3.34)$$

La méthode des ondes partielles a aussi permis d'obtenir le déphasage. Utilisant les fonctions radiales $\chi_{kl}(r) = rR_{kl}(r)$ et $\bar{\chi}_{kl}(r) = r\bar{R}_{kl}(r)$ pour les particules libres et diffusées respectivement, nous trouvons:

$$\begin{aligned} & \chi_{kl} \frac{\partial \bar{\chi}_{kl}}{\partial r} - \bar{\chi}_{kl} \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial r} - \beta' \hbar^2 \left(\chi_{kl} \frac{\partial^3 \bar{\chi}_{kl}}{\partial r^3} - \bar{\chi}_{kl} \frac{\partial^3 \chi_{kl}}{\partial r^3} - \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial r} \frac{\partial^2 \bar{\chi}_{kl}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{\chi}_{kl}}{\partial r} \frac{\partial^2 \chi_{kl}}{\partial r^2} \right) + \\ & + 2\beta' \hbar^2 \frac{l(l+1)}{r^2} \left(\chi_{kl} \frac{\partial \bar{\chi}_{kl}}{\partial r} - \bar{\chi}_{kl} \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial r} \right) = \int_0^r \chi_{kl}(r') U - \bar{\chi}_{kl}(r') dr' \end{aligned} \quad (3.35)$$

La dernière équation est un problème très compliqué à résoudre, mais pour déterminer les déphasages on peut utiliser les fonctions d'ondes asymptotiques (3.29) et (3.30) et prenant en compte le fait que le dernier terme dans le coté gauche de la relation (3.35) tend vers 0 aux grandes distances du diffuseur. [23] On obtient:

$$\sin \delta_l = -\frac{1}{k(1+2\beta'\hbar^2 k^2)} \int_0^r \sin(kr' - l\frac{\pi}{2}) U(r', p') \sin(kr' - l\frac{\pi}{2} + \delta_l) dr' \quad (3.36)$$

Et comme une première approximation, nous pouvons mettre dans le coté droit de (3.36) la fonction d'onde asymptotique de la particule libre $\chi_{kl}(r)$ à la place de $\bar{\chi}_{kl}(r)$, alors nous avons le résultat final du déphasage:

$$\sin \delta_l = -\frac{1}{k(1 + 2\beta' \hbar^2 k^2)} \int_0^{+\infty} \sin(kr' - l\frac{\pi}{2}) U(r', p') \sin(kr' - l\frac{\pi}{2}) dr' \quad (3.37)$$

3.3 conclusion

La partie principale de notre travail est de présenter le formalisme du processus de diffusion en mécanique quantique déformée. Cette déformation dû à la présence d'une longueur élémentaire, introduite comme une incertitude supplémentaire sur la position, en modifiant la relation d'incertitude de Heisenberg. Ceci équivaut à modifier les relations de commutation entre les opérateurs de position et d'impulsion sous la forme: $[X_i, P_j] = i\hbar [\delta_{ij}(1 + \beta p^2) + \beta P_i P_j]$, ce qui conduit à une algèbre non commutative des opérateurs de position ($[X_i, X_j] \neq 0$). Nous avons exposé les modifications et les conséquences de cette déformation notamment la nouvelle forme de l'équation de Schrödinger, le produit scalaire, la relation de fermeture...

L'étude de la diffusion élastique dans ce contexte, nous apparaît que la section efficace différentielle égale au module carré de l'amplitude de diffusion alors nous avons la même expression comme la mécanique quantique ordinaire, nous remarquons que la déformation apparaît dans la nouvelle fonction de Green et son calcul est se complique mais sa formule coïncide avec celle de la mécanique quantique ordinaire quand les paramètres de déformation tendent vers zéro,

En fin on note que la méthode des ondes partielles dans le cas déformé de la diffusion par un potentiel à symétrie sphérique est similaire au cas ordinaire, les particules qui ont un moment angulaire différent sont diffusées indépendamment, alors l'expression pour l'amplitude de diffusion est une somme d'amplitudes partielles et la relation pour la section efficace coïncide formellement avec les relations correspondent en mécanique quantique ordinaire mais on note que le vecteur d'onde k et le déphasage δ_l dépend des paramètres de déformation.

3.4 Bibliographie

- [1] Habib Bouchriha, " Introduction à la physique quantique", cour et applications,(2002) .
- [2] Michel.Le Bellac, "Physique quantique", 2e édition, EDP Sciences/CNRS DITIONS.
- [3] Claude.Cohen-tannoudji, Bernard.Diu et Franck. "Laloe mécanique quantique"-
tomes 1 et 2-Edition Heramann(1973) .
- [4] Jean-Louis.Basdevant et Jean.Dalibard," Mécanique quantique,
Cours de l'école polytechnique", Février (2002).
- [5] MEDGGA.FATMA, Mémoire de Magister, "Diffusion élastique d'électrons par
une molécule quasi-sphérique:cas de H₂s", Université MOULOUE MAMMARI, TIZIOUZOU.
- [6] Frédéric.Faure," Notes de cours sur la Mécanique quantique", Université Joseph Fourier,
Grenoble; Master Physique M1(version : 1 octobre 2014).
- [7] Ruth.Durrer, "Mécanique Quantique II, Cours de troisième année", Université
de Genève, (2004 – 2005).
- [8] Janos.Polonyi," Mécanique Quantique, Master mention Physique", Université
Louis Pasteur, Strasbourg, France (Le 15 janvier, 2007).
- [9] David.London, "Mécanique Quantique Avancée", PHY3813H,
Université de Montréal.
- [10] K.Gottfried, Quantum Mechanics, Vol 1:Fundamentals,
(Academic Press Inc,New York, 1966) .
- [11] Nouredine. Zettili, "Quantum Mechanics Concepts and Applications" 2 ed,
Jacksonville State University, Jacksonville, USA, (2009) .
- [12] Djamil.Bouaziz, Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de docteur,
"Mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé. Application
à l'interaction $1/r^2$ " fl Juin2009.
- [13] Sabine.Hossenfelder, Class. Quantum Grav.23, 1815(2006) .
- [14] A.Kempf, G.Manganoy et Robert B. Mann, "Hilbert Space Representation of
the Minimal Length Uncertainty Relation", Phys.Rev.D52:1108 (1995).
- [15] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. 37, 2121 (1996).
- [16] A. Kempf, J. Math. Phys. 35, 4483 (1994).
- [17] L.N. Chang, D. Minic, A. Roman, C. Sun, and T. Takeuchi,"On the Physics of

the Minimal Length:The Question of Gauge Invariance", 1602.07752v1 [hep-th] 24 Feb 2016.

[18]A. Kempf, J. Phys. A 30, 2093 (1997).

[19]L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura and T. Takeuchi, Phys. Rev. D 65, 125027 (2002).

[20]F. Brau, J. Phys. A 32, 7691 (1999).

[21]M. M. Stetsko and V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A 74, 012101 (2006).

[22]M.M. Stetsko and V.M. Tkachuk, "Scattering problem in deformed space with minimal length". Phys. Rev. A 76, 012707, (2007) .

[23]M.M. Stetsko, "A Note on Scattering in Deformed Space with Minimal Length", Computational Methods in Science and Technology 16(2), 195-199 (2010).

[24]S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic and T. Takeuchi, Phys. Rev. A 72, 012104 (2005).

[25]Paolo.Giannozzi",Numerical Methods in Quantum Mechanics", Corso di Laurea Magistrale in Fisica, Interateneo TriesteUdine, Anno accademico (2013/2014) .

[26]Claude.Aslangul," Mécanique quantique 2, Développements et applications à basse énergie", 2^e édition, de boeck Université Pierre et Marie Curie, 2012.

[27]Michio. Masujima, Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, (2005).

[28]PHY 3813, Mécanique Quantique Avancée," Introduction à la Diffusion", 16 juillet, 2004.

[29]Eric L. Michelsen, "Quirky Quantum Concepts", emichels at physics.ucsd.edu , (2006) .

ملخص

قدمنا في هذا العمل نموذج الانتشار المرن للجسيمات في اطار ميكانيك الكم المشوه بوجود الطول الاولي ذكرنا اولاً بالنموذج في ميكانيك الكم العادي ثم عرضنا نموذج الطول الاولي ونتاجه على جبر ميكانيك الكم العادي و في الأخير طبقنا هذا الجبر المشوه في دراسة ظاهر الانتشار المرن، سعة الانتشار، المقطع الفعال، دالة قرين، طريقة الامواج الجزئية تبين لنا ان علاقات سعة الانتشار و المقطع الفعال تتطابق شكلياً مع نتائج ميكانيك الكم العادي مع ظهور تشوه في عبارة الطاقة الحركية و فرق الطور.

الكلمات المفتاحي ميكانيك الكم المشوه بوجود الطول الاولي، الانتشار المرن للجسيمات، سعة الانتشار، المقطع الفعال، دالة قرين، الامواج الجزئية

Résumé:

Dans ce travail, nous avons exposé le formalisme de la diffusion élastique des particules dans le cadre de la mécanique quantique avec une longueur minimale. Nous avons rappelé d'abord l'étude de la diffusion en mécanique quantique ordinaire, ensuite nous avons présenté le formalisme de la longueur minimale et ses conséquences sur l'algèbre de la mécanique quantique. En fin nous avons appliqué cette algèbre déformée pour étudier le phénomène de la diffusion; l'amplitude de la diffusion, la fonction de Green, la section efficace, la méthode des ondes partielles. Il est apparu que les relations de l'amplitude de la diffusion et la section efficace coïncident formellement avec les résultats ordinaires avec énergie cinétique et déphasage déformés.

Les mots clés: la mécanique quantique avec une longueur minimale. la diffusion élastique des particules. l'amplitude de la diffusion, la fonction de Green, la section efficace, les ondes partielles.

Abstract:

In this work, we exposed the formalism of the elastic scattering of particles in the framework of quantum mechanics with a minimal length. We first called the study of diffusion in ordinary quantum mechanics, and then we introduced the formalism of minimum length and its impact on the algebra of quantum mechanics. In the end we applied this deformed algebra to study the phenomenon of diffusion; the amplitude of the scattering, the Green's function, the cross section, the partial wave method. It appears that the relationship of the magnitude of the spread and effective section formally coincide with the usual results with kinetic energy and deformed phase.

Key words: quantum mechanics with a minimal length. the elastic scattering of particles. the amplitude of the scattering, the Green's function, the cross section, the partial wave