

المسيلة في : 2022 /06/29

رقم: 2022/GE/.2021

مستخلص من محضر اجتماع اللجنة العلمية لقسم الهندسة الكهربائية
المنعقد بتاريخ 2022-06-28
- بخصوص مطبوعة الدروس

بخصوص مطبوعة الدروس المنجزة من طرف الأستاذ: زميت عبد الرحيم أستاذ محاضر قسم "أ"
بالقسم تحت عنوان « Theorie du Champ Electromagnetique » فقد اطلعت اللجنة على التقارير
الواردة من طرف لجنة الخبراء المكونة من الأستاذ مسالتي صبير أستاذ بجامعة المسيلة، الأستاذ
طارق بوشعلة أستاذ بجامعة المسيلة و الأستاذ مداد منير استاذ بجامعة برج بوعرييج و التي كانت
كلها ايجابية، لهذا فإن اللجنة لا ترى مانعا أن تتخذه سندا في تدريس طلبة السنة الثالثة كهروتقني
ميدان علوم و تكنولوجيا و أن تعتمد في أي تقييم للمسار العلمي للأستاذ المعني.

رئيس اللجنة العلمية للقسم

بوقرة عبد الرحمان



Cours et Travaux Dirigés

Théorie des champs Électromagnétiques

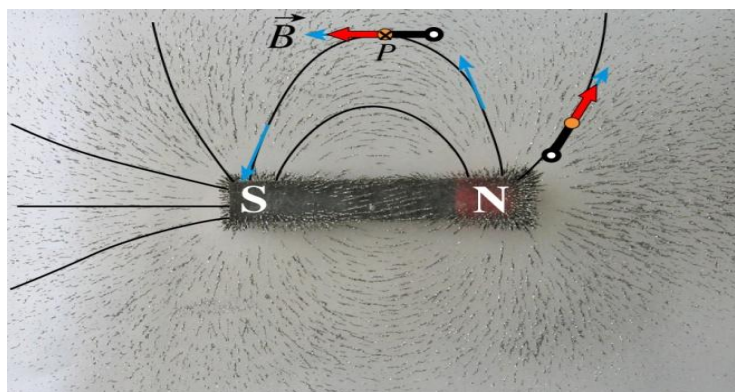
3^{eme} année Licence , Électrotechnique

Réalisé par :

Dr. ZEMMIT Abderrahim

Enseignant chercheur au département de : **Génie électrique**

Spécialité : **Électrotechnique**



Année académique : **2021-2022**

Table des matières

Avant-propos	4
Chapitre I : Calculs de Champ et Potentiel Électrostatique	
I-1 Utilisation du théorème de Gauss	5
I-1-1 Champ créé par une boule sphérique uniformément chargée.....	5
I-1-2 Champ créé par une surface plane uniformément chargée.....	5
I-1-3 Champ créé par une droite uniformément chargée.....	7
I-1-4 Discontinuité du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée	7
I-1-5 Cas d'une symétrie sphérique de la distribution de charge	8
I-2. Exemples de calculs du champ et du potentiel électrostatiques par intégration	9
I-2-1 Cas où il y a des charges à l'infini.....	9
I-2-2 Champ créé par un disque uniformément chargé en un point de son axe	9
I-2-3 Potentiel électrostatique créé par une surface sphérique uniformément chargée	10
I-3 Dipôle électrostatique	12
I-3-1 Définition, moment dipolaire.....	12
I-3-2 Champ créé par un dipôle en un point éloigné.	12
I-3-3 Carte du champ électrostatique d'un dipôle	13
I-3-4 Action d'un champ extérieur sur un dipôle	13
I-3-5 L'approximation dipolaire.....	14
Chapitre II : Calculs de Champ Magnétostatiques	
II.1. Historique.....	17
II.1.a. Lignes de champ	18
II.1.b. Tube de champ.....	18
II.2 Création de champs magnétiques par des courants électriques	19
II.2.a. Formule de Biot et Savart.....	19
II.2.b. Exemples de calcul de champ magnétique :	20
II.2.c. Complément mathématique : intégrale vectorielle ou circulation d'un vecteur	22
II.3 Théorème d'Ampère.....	23
II.3.a. Exemple d'application du théorème d'Ampère	24
(Excitation magnétique créée par un fil de longueur infini).....	24
II.4 Force exercée par une induction magnétique sur un courant.....	24
II.5 Forces exercées entre deux courants rectilignes parallèles	26
II.6 Flux magnétique.....	27
II.7 Différence de potentiel électrique induite dans un circuit par une variation de flux magnétique	30
II.7.a. Lois de Faraday et de Lenz	30

Chapitre III : Le Phénomène d'Induction Electromagnétique

III.1. Définition :.....	31
III.1.a. Le traitement mathématique :	31
III.1.b. Bilan de puissances :	31
III.2. Etude Théorique de l'Induction Electromagnétique.....	31
III.2.a. Cas particuliers :	31
III.2.b. Calcul des fem induites :.....	32
III.2.c. Equation de Maxwell – Faraday :	32
III.3. Energie Magnétique.....	32
III.3.a. Expressions du flux :.....	32
III.3.b. Travail des forces électromagnétiques :	33
III.3.c. Energie mécanique :	33
III.3.d. Energie magnétique :	33
III.4. Régimes Variables	33
III.4.a. Lois tension - courant :	33
III.4.b. Circuits R-C :	34
III.4.c. Circuits R-L :	34
III.4.d. Circuits R-L-C :	35

Chapitre IV : Les Equation de MAXWELL

IV.1. Introduction	37
IV.1.a. Régime statique : Alors les grandeurs ne dépendent pas du temps, donc $\frac{\partial}{\partial t} = 0$	37
IV.1.b. Régime variable :	37
IV.1.c. Milieux matériels :	37
IV.1.d. Lois intégrales :	37
IV.2. Equation de Maxwell – Ampere.....	38
IV.2.a. Equation intégrale :.....	38
IV.2.b. Application : établissement du régime permanent dans un conducteur ohmique.	38
IV.3. Equations de Propagation	39
IV.3.a. Lien entre champs & potentiels : on a les relations : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A}, \vec{E} = -\overrightarrow{\text{Grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$	39
IV.3.b. Equations de propagation des champs :.....	39
IV.3.c. Equations de propagation des potentiels : commencer par \vec{A} ! (ordre alphabétique !)	39
IV.3.d. Invariance de Jauge :	40
IV.4. Conditions de Passage :	40
IV.5. Propagation.....	40
IV.5.a. Généralités sur les ondes :	40
IV.5.b. Onde plane progressive harmonique (opph):	41

IV.5.c. Onde stationnaire :	41
IV.5.d. Application aux ondes électromagnétiques :	41
IV.5.e. Aspect énergétique :	41
IV.5.f. Corde vibrante :	42
IV.5.g. Propagation du son dans un fluide :	42
Chapitre V: Propagation guidée des ondes électromagnétiques	
V. 1 . Introduction.....	43
V.1.a. Équations de Maxwell dans un matériau diélectrique.	43
V.1.b. Equations de Propagation :	44
V.1.c. Equations de continuité du champ électromagnétique à la surface d'un dioptré.....	44
V.2. Guidage sur un plan conducteur parfait.....	46
V.2.a. Rappels sur les conducteurs parfaits (type métal).....	46
V.2.b. Equations de continuité des champs à l'interface diélectrique/métal.	46
V.2.a. Cas 1 : Onde Transverse Electrique (TE). Champ électrique incident perpendiculaire au plan d'incidence (alors le champ magnétique est dans le plan d'incidence).....	47
V.2.b. Cas 2 : Onde Transverse Magnétique (TM). Champ magnétique incident perpendiculaire au plan d'incidence (alors le champ électrique est dans le plan d'incidence).....	51
V.2.c. Quelques remarques et grandeurs utiles généralisables aux deux cas considérés (TE et TM) :	52
V.4. Impédance de l'onde guidée	53
Annexe (A) : Les postulats de l'électromagnétisme classique.	54
Annexe (B) : Introduction du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur A.....	57
Bibliographie.....	58

Avant-propos

Ce polycopié a été conçu dans le but d'être considéré comme étant un support pédagogique. Dans le quel, j'ai essayé de présenter plus au moins des notions qui seront destinées aux étudiants de 3^{ème} Année des Licences de la filière d'électrotechnique.

Et vu que L'électromagnétisme est un domaine très vaste, je ne pouvais dans ce modeste travail mettre en relief. C'est pour cela que j'ai préféré, me basé simplement sur les notions qui sont très simples. pour objectif d'introduire les phénomènes électromagnétiques dans le vide et dans la matière. La première partie se concentre sur l'électrostatique, la magnétostatique ainsi que sur les lois de l'électricité ce qui nous obligera à faire une petite digression du côté des phénomènes lentement variables dans le temps. La deuxième partie s'intéresse au phénomène d'induction et aux équations de Maxwell pour les régimes variables, dont une conséquence importante est l'existence d'ondes électromagnétiques dans le vide. La dernière partie est consacrée aux équations de propagation des champs et des potentiels électromagnétiques.

Enfin, j'ai terminé ce polycopié avec quelques annexes. Que je considère comme étant un genre de support mnémotechnique.

I. Chapitre I : Calculs de Champ et Potentiel Électrostatique

Électrostatique est une branche de la physique qui traite des phénomènes et des propriétés des charges électriques fixes ou déplaçant lentement.

I-1 Utilisation du théorème de Gauss

On ne peut pratiquement l'utiliser que si la distribution de la charge présente une symétrie suffisante.

I-1-1 Champ créé par une boule sphérique uniformément chargée

Soit la sphère Σ (O,R) délimitant un volume uniformément chargé avec la densité volumique de charge ρ . La distribution de la charge présente donc une symétrie sphérique de centre O. Il en est donc de même pour le potentiel et le champ.

On utilise les coordonnées sphériques. Au point M (r,θ,φ), $V = V(r)$ et $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$.

Pour appliquer le théorème de Gauss, on définit une "surface de Gauss" : la sphère S (O,r) de volume intérieur \mathcal{V} .

Un vecteur surface élémentaire de S est radial et vers l'extérieur : $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$.

Le flux de \vec{E} à travers S est : $\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E_r(r) dS = 4\pi r^2 E_r$ car E_r est uniforme sur S.

- Pour $r > R$:

Le théorème de Gauss donne : $\Phi = \frac{\iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0}$. On a donc $E_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$ et $\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r \text{ donc, avec } \lim_{r \rightarrow \infty} V = 0 \text{ on obtient } V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

On constate que *le potentiel et le champ sont les mêmes que si toute la charge* $Q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$ *était placée*

au centre de la sphère : $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ et $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$.

- Pour $r < R$:

Une partie seulement de la sphère chargée est dans le volume \mathcal{V} : $\Phi = \frac{\iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} = 4\pi r^2 E_r$ donc

$$E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r \text{ d'où } \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r \text{ et } V = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + K.$$

$$\text{La continuité de } V(r) \text{ pour } r = R \text{ implique : } -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + K = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \text{ donc } K = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}. \quad V = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

- Pour $r = R$:

Il y a continuité du champ et du potentiel, $\vec{E} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$ et $V = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$.

I-1-2 Champ créé par une surface plane uniformément chargée

Soit un plan Π portant une charge surfacique de densité uniforme σ .

La distribution de la charge est symétrique par rapport à Π et par rapport à tout plan perpendiculaire à Π et invariante par toute translation parallèle à Π . Il en est de même pour V et pour \vec{E} .

Soit O (quelconque) un point de Π et Oz normal à Π .

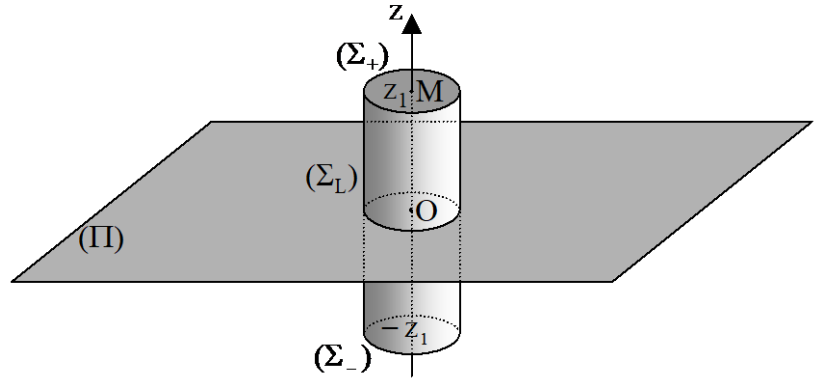
En un point M quelconque, le champ est dans tous les plans contenant M et perpendiculaires à Π donc $\vec{E} = E_z \vec{u}_z$. L'invariance par toute translation parallèlement à Π implique $E_z = E_z(z)$.

$$\text{Donc } \boxed{\vec{E} = E_z(z) \vec{u}_z} \text{ et } \boxed{V = V(z)}.$$

La symétrie par rapport à Π implique que V est une fonction paire de z et E_z une fonction impaire de z :

$$V(-z) = V(z) \text{ et } E_z(-z) = -E_z(z).$$

Soit une surface de Gauss $\Sigma = \Sigma_L \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, cylindrique, d'axe Oz , de section droite quelconque d'aire S , limitée par les sections droites Σ_+ (de cote $z_1 > 0$) et Σ_- (de cote $-z_1$).



En tout point M de cote z_1 : $\vec{E} = E_z(z_1) \vec{u}_z$, en tout point de cote $-z_1$: $\vec{E} = -E_z(z_1) \vec{u}_z$.

Le flux à travers Σ est $\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_+} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_-} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}$.

Sur Σ_L , $\vec{E} \perp d\vec{S}$ en tout point, donc le troisième terme est nul.

Sur Σ_+ , $\vec{E} = E_z(z_1) \vec{u}_z$ et $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$. Sur Σ_- , $\vec{E} = -E_z(z_1) \vec{u}_z$ et $d\vec{S} = -dS \vec{u}_z$.

$$\Phi = E_z(z_1) \left(\iint_{\Sigma_+} dS + \iint_{\Sigma_-} dS \right) \text{ soit } \Phi = 2 S E_z(z_1). \text{ La charge intérieure à } \Sigma \text{ est } Q_{\text{int}} = \sigma S.$$

Le théorème de Gauss donne : $2SE_z(z_1) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ d'où $E_z(z_1) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -E_z(-z_1)$.

On a donc un champ uniforme au dessus du plan de symétrie et un champ uniforme opposé du précédent de l'autre côté :

$$\boxed{\forall z > 0 \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z} \text{ et } \boxed{\forall z < 0 \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z}.$$

On remarque qu'à la traversée du plan chargé dans le sens de \vec{u}_z , le champ présente une **discontinuité**

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z}.$$

Le potentiel s'obtient avec $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = E_z \vec{u}_z$:

$$\text{Pour } z > 0 : -\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ donc } V = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} + A. \text{ Pour } z < 0 : -\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ donc } V = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} + B.$$

Il est impossible de prendre $V = 0$ pour z infini, (ceci est dû à la présence de charges à l'infini dans les directions de Π). On pose alors $V = 0$ pour $z = 0$, ce qui assure la continuité de $V(z)$.

$$\boxed{\forall z > 0 \quad V = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}} \text{ et } \boxed{\forall z < 0 \quad V = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}}.$$

Les surfaces équipotentielles sont les plans // Π . Les lignes de champ sont les demi-droites normales à Π et orientées de Π vers l'infini si $\sigma > 0$ ou de l'infini vers Π si $\sigma < 0$.

I-1-3 Champ créé par une droite uniformément chargée

Soit une droite $z'z$ chargée uniformément avec la densité linéique de charge λ .

La distribution de la charge est invariante par translation parallèlement à Oz et par rotation autour de Oz (symétrie cylindrique). Tous les plans contenant Oz et tous les plans perpendiculaires à Oz sont des plans de symétrie. Le champ et le potentiel présentent les mêmes invariances et les mêmes symétries.

En coordonnées cylindropolaires d'axe Oz , Au point $M(r, \theta, z)$, $V = V(r)$

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r \quad (\text{voir 27-5-5}).$$

On choisit une surface de Gauss cylindrique, d'axe Oz , de hauteur L :

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_L.$$

Le flux du champ à travers Σ est :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Pour Σ_1 et Σ_2 , $\vec{E} \perp d\vec{S}$ en tout point. Pour Σ_L , $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$ donc

$$\Phi = \iint_{\Sigma_L} E_r(r) dS = E_r \iint_{\Sigma_L} dS = 2\pi r L E_r.$$

La charge intérieure à Σ est $Q_{\text{int}} = \lambda L$.

D'après le théorème de Gauss, on a donc $2\pi r L E_r = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$ et $E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

Le potentiel s'obtient avec $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = E_r \vec{u}_r$ donc $\frac{dV}{dr} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ et $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{K}{r}\right)$.

On ne peut pas choisir $V = 0$ pour $r \rightarrow \infty$ car il y a des charges à l'infini dans le direction de Oz .

On choisira donc arbitrairement $V = 0$ à une distance r_0 du fil : $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$.

On remarque que V n'est pas défini pour $r = 0$.

Les lignes de champ sont les demi-droites perpendiculaires à la droite chargée $z'z$, orientées de cette droite vers l'infini si $\lambda > 0$ et de l'infini vers cette droite si $\lambda < 0$. Les surfaces équipotentielles sont les cylindres de révolution d'axe $z'z$.

I-1-4 Discontinuité du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée

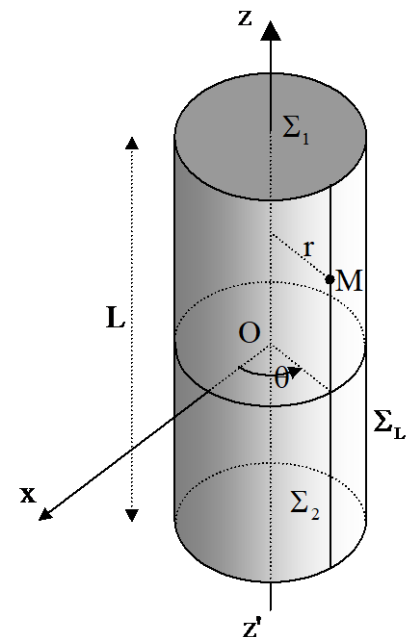
Le potentiel est une fonction continue des coordonnées.

Il n'est pas défini (infini) sur une ligne chargée ou sur une charge ponctuelle.

Le champ électrostatique n'est pas défini sur une surface chargée, sur une ligne chargée ou sur une charge ponctuelle.

À la traversée d'une surface chargée le champ électrostatique présente une discontinuité.

L'expression de la discontinuité obtenue à la traversée d'un plan uniformément chargé se généralise à toute surface chargée.



Soit Σ une surface portant la densité surfacique de charge σ , non uniforme mais fonction continue des coordonnées. Soit un point M de Σ .

On peut décomposer Σ en :

- Σ' : disque plan de rayon r infiniment petit centré en M , de densité surfacique uniforme égale à σ en M ,
- Σ'' : le reste de la surface Σ : $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$.

Soient les points M_1 et M_2 , infiniment voisins de M et placés sur la normale en M à Σ , de part et d'autre de Σ . On choisit MM_1 et MM_2 infiniment petits devant r (c'est-à-dire des infiniment petits du second ordre).

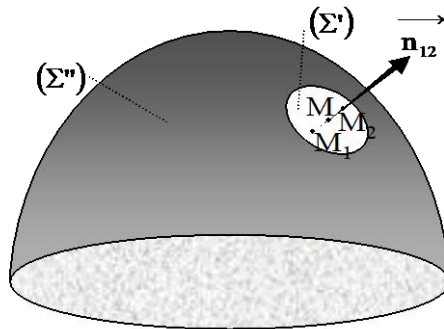
Soit le vecteur \vec{n}_{12} normal à Σ en M et orienté de M_1 vers M_2 .

En M_1 , le champ est $\vec{E}_1 = \vec{E}'_1 + \vec{E}''_1$, et en M_2 , $\vec{E}_2 = \vec{E}'_2 + \vec{E}''_2$.

M_1 et M_2 sont pratiquement confondus avec M et Σ'' est percée au niveau de M , il n'y a pas de discontinuité de \vec{E}'' , donc $\vec{E}''_1 = \vec{E}''_2 = \vec{E}''$ (champ créé en M par Σ'').

Vue de M_1 ou de M_2 , le disque Σ' est pratiquement un plan infini de densité surfacique égale à σ au point M .

D'après les résultats du 28-1-2, $\vec{E}'_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ et $\vec{E}'_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}_{12}$.



La discontinuité du champ électrostatique est : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ lors de la traversée de la surface chargée

dans le sens de \vec{n}_{12} en un point où la densité surfacique de charge est σ .

I-1-5 Cas d'une symétrie sphérique de la distribution de charge

Si la distribution de la charge présente une symétrie sphérique de centre O , (charge volumique avec $\rho = \rho(r)$ ou surfaces sphériques concentriques uniformément chargées...). On a, en coordonnées sphériques,

$\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$. Le flux du champ électrostatique à travers une surface sphérique $\Sigma(O, r)$ s'écrit : $\Phi = 4\pi r^2$

E_r . En notant Q_{int} la charge intérieure au volume délimité par Σ , le théorème de Gauss donne $E_r = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

et $\vec{E} = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ en tout point de la surface sphérique (O, r) .

En tout point à la distance r du centre O d'une distribution de charge à symétrie sphérique, le champ électrostatique est le même que celui que créerait la charge intérieure au volume délimité par la sphère (O, r) si elle était placée en O .

En particulier, en un point situé au delà de la distribution de charge à symétrie sphérique, le champ est le même que si toute la charge était en O . Il en est de même pour le potentiel.

Le même raisonnement s'applique bien sûr au champ de gravitation si la distribution de la masse présente une symétrie sphérique de centre O : $\vec{G} = -\mathcal{G} \frac{M_{int}}{r^2} \vec{u}_r$ en tout point de la surface sphérique (O,r).

I-2. Exemples de calculs du champ et du potentiel électrostatiques par intégration

I-2-1 Cas où il y a des charges à l'infini

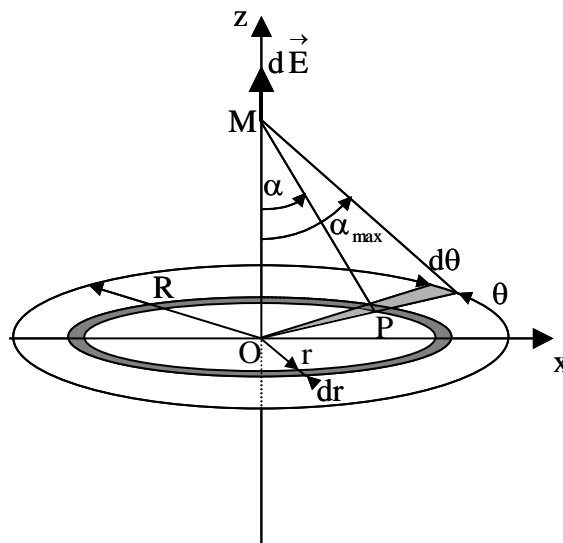
On a vu sur deux exemples, 28-1-2 et 28-1-3 que l'on ne pouvait pas poser $V = 0$ à l'infini dans les cas (artificiels) où il y avait des charges à l'infini. On ne peut alors pas employer les formules intégrales qui donnent le potentiel, car elles ont été démontrées en utilisant la convention $V = 0$ en un point infiniment éloigné.

Les formules $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho d\tau}{PM}$, $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho d\tau}{PM}$ et $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho d\tau}{PM}$ sont inutilisables s'il y a des

charges à l'infini (c'est-à-dire si ρ , σ ou λ ne tendent pas vers 0 quand on s'éloigne indéfiniment, dans une direction quelconque, du point où l'on cherche V).

S'il y a des charges à l'infini, il faut donc calculer d'abord le champ, avec le théorème de Gauss ou avec les formules intégrales, puis en déduire le potentiel avec $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$, en choisissant arbitrairement l'origine des potentiels.

I-2-2 Champ créé par un disque uniformément chargé en un point de son axe



I-2-2-1 Calcul du champ électrostatique

Soit un disque de rayon R et de centre O chargé uniformément avec la densité surfacique σ .

Soit Oz l'axe de symétrie de révolution du disque.

On cherche le champ électrostatique en un point M de Oz, de cote z. Le plan du disque étant un plan de symétrie pour la distribution de la charge est aussi un plan de symétrie pour le champ, ce qui permettra de trouver le champ pour $z < 0$.

Tous les plans contenant Oz sont des plans de symétrie pour la distribution de la charge donc des plans de symétrie pour le champ. En M, le champ est dans tous ces plans donc $\vec{E} = E_z(z) \vec{u}_z$.

La surface élémentaire $dS = r d\theta dr$ autour du point P (r,theta,0), crée au point M le champ élémentaire

$d^2 \vec{E} = \frac{\sigma r dr d\theta \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3}$ avec $PM = \sqrt{r^2 + z^2}$. Sa cote est $d^2 E_z = \frac{\sigma r dr d\theta z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$. En intégrant de $\theta = 0$ à

$\theta = 2\pi$, on obtient la cote du champ créé par la couronne circulaire de rayon r et de largeur dr :

$$dE_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\sigma r dr z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \frac{\sigma r dr z}{2\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En intégrant maintenant de $r = 0$ à $r = R$, on obtient $E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_{r=0}^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R$ soit

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z$$

Pour $z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos(\alpha_{\max})) \vec{u}_z$. On aurait pu aussi mener le calcul en effectuant un changement de variable : en remplaçant la variable r par la variable α .

I-2-2-2 Étude des cas limites

Pour $R \rightarrow \infty$ ou $z \rightarrow 0$, donc pour $\alpha_{\max} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ on retrouve bien le champ créé par un plan uniformément

chargé : $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$.

Pour $R \rightarrow 0$ ou $z \rightarrow \infty$, on doit retrouver le champ créé par une charge ponctuelle $Q = \pi R^2 \sigma$ (charge totale du disque) :

$$1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = 1 - \left(1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \left(1 - \frac{R^2}{2z^2} \right) = \frac{R^2}{2z^2} \text{ et } \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z^2} \vec{u}_z \text{ soit } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \vec{u}_z.$$

I-2-2-3 Calcul du potentiel électrostatique

En notant D le disque :

$$V = \iint_D \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{r=0}^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R.$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right)$$

I-2-2-4 Calcul du champ à partir du potentiel

On ne peut pas utiliser directement $\vec{E} = -\text{grad}V$ car on n'a aucun renseignement sur la fonction $V(r,z)$.

On doit procéder ainsi : $\vec{E} \cdot d\vec{M} = -dV$. Pour M se déplaçant sur Oz : $\vec{E} = E_z \vec{u}_z$ et $d\vec{M} = dz \vec{u}_z$ donc

$$dV = -E_z dz \text{ donc, sur l'axe } Oz : E_z = -\frac{dV}{dz} \text{ et } \vec{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z.$$

En notant que $\frac{d|z|}{dz} = \frac{z}{|z|}$, on obtient bien $\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z$.

I-2-3 Potentiel électrostatique créé par une surface sphérique uniformément chargée

Soit la sphère Σ (O,R) avec la densité surfacique de charge σ , uniforme. Sa charge $Q = 4\pi R^2 \sigma$.

D'après le 28-1-5, à l'intérieur du volume délimité par Σ : $\vec{E} = \vec{0}$ ($Q_{\text{int}} = 0$), donc $V = C^{\text{ste}}$, et à l'extérieur de ce volume : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ d'où $V = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$ (avec $\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$ car il n'y a pas de charges à l'infini).

La continuité de $V(r)$ implique que le volume intérieur à Σ (volume équipotentiel) est au potentiel $V = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$.

On peut retrouver ces résultats par intégration :

Le potentiel en O est $V_O = \iint_{\Sigma} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 PO} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \iint_{\Sigma} dS = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$. Le champ à l'intérieur étant nul, le

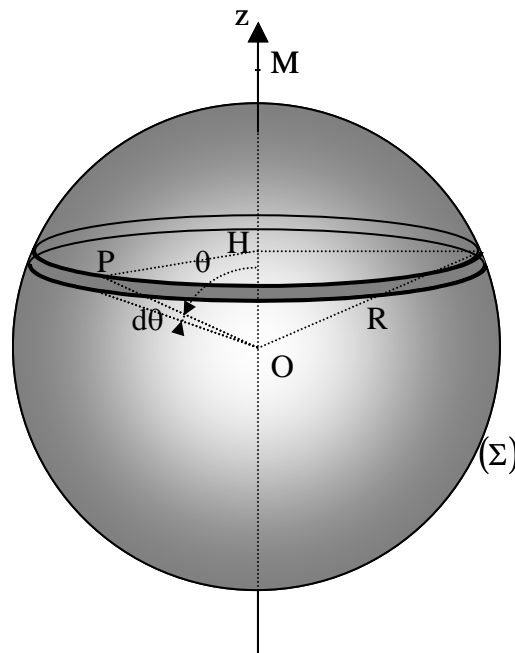
volume intérieur est équipotentiel, en tout point à l'intérieur, $V = V_O = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$.

Pour obtenir le potentiel à l'extérieur du volume délimité par la sphère, en un point M quelconque, on utilise des coordonnées sphériques avec l'axe Oz passant par M, qui a donc la distance $r = OM$ pour coordonnée radiale. Un point P de la sphère chargée a pour coordonnées R, θ, φ .

Tous les points d'une bande circulaire d'axe Oz, passant par P, de longueur $2\pi HP = 2\pi R \sin\theta$ et de largeur $R d\theta$, donc d'aire $dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$, sont à la même distance de M :

$$PM = \sqrt{HM^2 + HP^2} = \sqrt{(r - R \cos\theta)^2 + (R \sin\theta)^2} = \sqrt{r^2 - 2rR \cos\theta + R^2}.$$

$$\text{Le potentiel en M est : } V = \iint_{\Sigma} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos\theta + R^2}}$$



On remarque que $\frac{d\sqrt{r^2 - 2rR \cos\theta + R^2}}{d\theta} = \frac{2rR \sin\theta}{2\sqrt{r^2 - 2rR \cos\theta + R^2}}$.

$$\text{Donc } V = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{Rr} \left[\sqrt{r^2 - 2rR \cos\theta + R^2} \right]_0^{\pi} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r} ((R+r) - (r-R)) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

I-3 Dipôle électrostatique

I-3-1 Définition, moment dipolaire

Un dipôle électrostatique est formé de deux charges ponctuelles opposées et liées rigidement. Soit le dipôle formé par les charges ponctuelles $-q$ placée en A et q placée en B

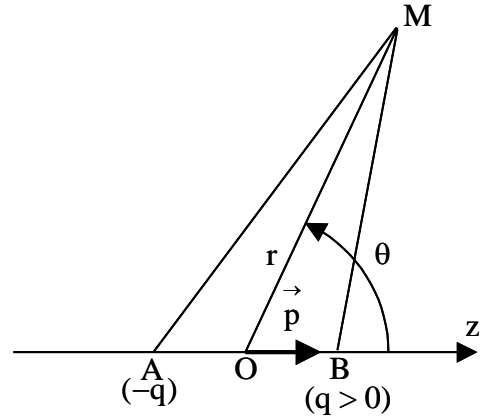
On remarque que $\vec{qAB} = -q\vec{BA} = q\vec{OB} - q\vec{OA}$ quel que soit le point O.

Le moment dipolaire du dipôle est $\vec{p} = q\vec{AB}$. Son unité SI est le coulomb-mètre : C.m.

En chimie, on utilise encore le Debye : $1 \text{ D} = \frac{1}{3}10^{-29} \text{ C.m.}$

Le moment dipolaire a donc la direction AB, son sens est de la charge négative vers la charge positive et, avec $a = AB$, sa norme est $p = |q|a$.

Par la suite, on appellera B le point où se trouve la charge $q > 0$. On a alors $p = qa$.



I-3-2 Champ créé par un dipôle en un point éloigné.

Le potentiel créé par le dipôle en M est $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right)$.

En utilisant les coordonnées sphériques de centre O, milieu de AB, avec Oz dans la direction et dans le sens

de \vec{p} : $BM^2 = \left(\vec{OM} - \vec{OB} \right)^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} - ra\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = r^2 \left(1 - \frac{a}{r}\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \right)$

et $AM^2 = \left(\vec{OM} - \vec{OA} \right)^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} + ra\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = r^2 \left(1 + \frac{a}{r}\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \right)$.

En un point éloigné, $r \gg a$ donc $\frac{a}{r}$ est un infiniment petit..

$$\frac{1}{BM} = \left(BM^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r}\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r}\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z \right),$$

$$\frac{1}{AM} = \left(AM^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r}\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r}\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z \right),$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z \text{ avec } \vec{p} = qa\vec{u}_z \text{ donc } V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ ou } V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 OM^3} \text{ ou } V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

On obtient le champ avec $\vec{E} = -\text{grad} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \right)$.

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta \right) \text{ soit } E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ et } E_\varphi = 0.$$

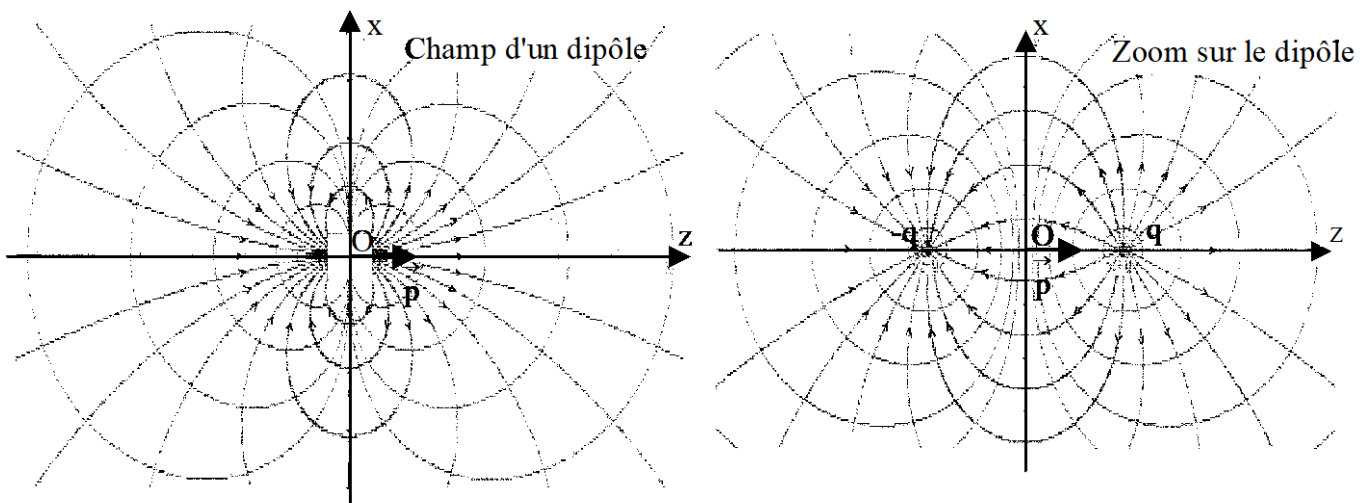
On pourra vérifier l'expression intrinsèque du champ :

$$\vec{E} = \frac{\left(3 \vec{p} \cdot \vec{OM} \right) \vec{OM} - \vec{p} \text{ OM}^2}{4\pi\epsilon_0 \text{ OM}^3}$$

On remarque que V est en $\frac{1}{r^2}$ et \vec{E} en $\frac{1}{r^3}$ alors que pour une charge ponctuelle ils sont respectivement en $\frac{1}{r}$ et en $\frac{1}{r^2}$. Ils s'annulent donc plus rapidement quand r croît. En effet, vu de très loin, le dipôle équivaut à une charge nulle au point O .

I-3-3 Carte du champ électrostatique d'un dipôle

Loin du dipôle, les *surfaces équipotentielles* ont pour équation $V = C^{\text{ste}}$ soit $r = \sqrt{A \cos \theta}$, A étant une constante.



Loin du dipôle, les *lignes de champ* suivent l'équation différentielle $d\vec{M} = dK\vec{E}$, avec dK constante infiniment petite. Donc $dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi = \frac{dK}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta \right)$.

Après simplification, on a donc $d\varphi = 0$ donc $\varphi = C^{\text{ste}}$: chaque ligne de champ est entièrement contenue dans un plan contenant Oz et $\frac{dr}{2 \cos \theta} = \frac{r d\theta}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta} \Rightarrow d(\ln(r)) = d(\ln(\sin^2 \theta))$ d'où l'équation $r = B \sin^2 \theta$.

Les tracés ci-dessus représentent les lignes de champ et les équipotentielles, en coupe par le plan $\varphi = 0$, loin du dipôle puis dans la région du dipôle, donc sans faire d'approximation.

On obtient la carte du champ dans n'importe quel plan $\varphi = C^{\text{ste}}$ par rotation autour de Oz du fait de la symétrie de révolution.

I-3-4 Action d'un champ extérieur sur un dipôle

On considère un champ électrostatique presque uniforme dans la région où se trouve le dipôle, c'est-à-dire que les points A et B sont très voisins de O et que le champ y est peu différent de ce qu'il est en O .

Le dipôle subit les forces extérieures $\vec{F}_B = q\vec{E}_B$ et $\vec{F}_A = -q\vec{E}_A$. Le moment résultant en O de ces forces est $\vec{\Gamma}_O = \vec{OB} \wedge q\vec{E}_B - \vec{OA} \wedge q\vec{E}_A = q \vec{OB} \wedge (\vec{E}_A + \vec{E}_B)$ avec $\vec{E}_A + \vec{E}_B \approx 2\vec{E}_O$ et $\vec{p} = 2q \vec{OB}$.

Moment résultant des forces exercées par un champ extérieur sur un dipôle : $\vec{\Gamma}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_O$.

Les forces électrostatiques dérivent d'une énergie potentielle $E_p = q V_B - q V_A$.

Dans le cas où le champ extérieur n'est pas tout à fait le même en A et en B, $V_B - V_A$ est un infiniment petit : $V_A - V_B \approx \vec{E}_O \cdot \vec{AB}$ donc $E_p = q \vec{AB} \cdot \vec{E}_O$.

Énergie potentielle électrostatique du dipôle dans un champ extérieur : $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_O$.

Si le champ extérieur est uniforme, la résultante des forces subies par le dipôle est nulle, $\vec{R} = \vec{0}$, les deux

forces forment un couple de moment (identique en tout point) : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ et l'énergie potentielle du dipôle

dans le champ extérieur est $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

On voit que le moment du couple s'annule quand le moment dipolaire s'aligne avec le champ extérieur; il y a alors équilibre.

Lorsque \vec{p} et \vec{E} sont alignés et dans le même sens, $E_p = -pE$ a sa valeur minimale, l'équilibre est stable.

Lorsque \vec{p} et \vec{E} sont alignés de sens contraires, $E_p = pE$ a sa valeur maximale, l'équilibre est instable.

Dans le cas général, le dipôle oscille autour de sa position d'équilibre stable.

Considérons maintenant un dipôle dans un champ extérieur non uniforme mais localement (entre A et B) presque uniforme et un dipôle dont le moment dipolaire s'est aligné avec ce champ extérieur et dans le

même sens, on a donc $\vec{\Gamma}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_O = \vec{0}$. Le dipôle n'a donc aucune tendance à tourner autour de O mais on doit envisager une translation du dipôle sous l'effet de la résultante des forces qui, dans ce cas, n'est pas nulle puisqu'elle dérive d'une énergie potentielle qui n'est pas uniforme.

On a alors $\vec{R} = -\vec{\text{grad}} E_p = \vec{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E}_O)$ avec \vec{p} constant (translation) mais \vec{E}_O variable.

On pourra démontrer que, le champ électrostatique étant un champ de gradient, on obtient le même résultat en appliquant l'opérateur $\vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}$ à \vec{E}_O .

$\vec{p} \cdot \vec{E}_O$ croît quand O se déplace vers les régions où champ est plus intense d'où la conclusion :

Dans un champ extérieur localement presque uniforme, un dipôle subit un moment résultant qui tend à

l'aligner avec le champ et une force résultante $\vec{R} = \vec{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E}_O) = (\vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E}_O$ qui l'entraîne vers les

régions de champ plus intense.

I-3-5 L'approximation dipolaire

Le cas étudié ci-dessus de deux charges ponctuelles opposées peut sembler anecdotique. Mais en fait, toute distribution de charges, limitée dans l'espace, de somme nulle et telle que les barycentres des charges positives et négatives ne coïncident pas, crée, loin de cette distribution, un champ électrostatique identique à celui d'un dipôle.

Soit une distribution de charges ponctuelles $A_i (q_i)$ limitée dans l'espace. Soit un point O appartenant au volume dans lequel sont contenues les charges et soit un point M où l'on veut exprimer le potentiel.

On pose $\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r$ et $\vec{OA}_i = \vec{a}_i$ donc $\vec{A}_i M = \vec{r} - \vec{a}_i$.

Le potentiel créé par la distribution de charges en M est $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{a}_i\|}$.

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{a}_i\|} = \left((\vec{r} - \vec{a}_i)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{a}_i + a_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\frac{\vec{a}_i \cdot \vec{u}_r}{r} + \left(\frac{a_i}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si M est loin de la distribution de charges, $\frac{a_i}{r} \ll 1$ et on peut se contenter d'un développement limité suivant

les puissances de $\frac{a_i}{r}$: $\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{a}_i\|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{a}_i \cdot \vec{u}_r}{r} + O\left(\frac{a_i}{r}\right)^2 \right)$. Le potentiel se décompose en plusieurs termes :

$$V = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sum_i \left(q_i \vec{a}_i \right) \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{K a_i^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

- **Si la somme des charges n'est pas nulle**, en prenant O au barycentre des charges $\sum_i \left(q_i \vec{a}_i \right) = \vec{0}$, le deuxième terme s'annule. Au troisième ordre près, on a donc le même potentiel, et par conséquent, le **même champ que celui d'une charge ponctuelle égale à la charge totale, qui serait place au barycentre des charges**.

Ceci justifie l'approximation qui consiste à considérer une charge comme ponctuelle, quand elle est confinée dans un espace réduit (particule élémentaire ou ion, vus de loin), même si la charge n'est pas répartie avec une symétrie sphérique.

- **Si la somme des charges est nulle**, le premier terme est nul. Si le second ne l'est pas, on pose :

$$\vec{p} = \sum_i \left(q_i \vec{OA}_i \right) : \text{moment dipolaire de la distribution de charges. } \vec{p} = \sum_i \left(q_i \vec{a}_i \right).$$

On vérifie facilement que le moment dipolaire est alors du point O choisi :

$$\sum_i \left(q_i \vec{OA}_i \right) - \sum_i \left(q_i \vec{O'A}_i \right) = \sum_i \left(q_i \vec{OO'} \right) = \vec{OO'} \sum_i q_i = \vec{0}.$$

On peut aussi décomposer la somme en deux parties, l'une pour les charges positives, d'indices j, l'autre pour les charges négatives, d'indices k. En notant P le barycentre des charges positives, N celui des charges négatives et Q celle des charges positives, on a $\vec{p} = \sum_j \left(q_j \vec{OA}_j \right) + \sum_k \left(q_k \vec{OA}_k \right) = Q \vec{OP} - Q \vec{ON}$ soit

$\vec{p} = Q \vec{NP}$, comme pour un dipôle formé de deux charges opposées.

On a bien alors, comme pour un dipôle formé de deux charges opposées :

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ ou } V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 OM^3} \text{ ou } V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\cos\theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin\theta}{r^3} \vec{u}_\theta \right) \text{ soit } E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ et } E_\varphi = 0.$$

$$\vec{E} = \frac{\left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{OM^3} \right) \vec{OM} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 OM^3}.$$

Si on a affaire à une distribution volumique de la charge, de somme nulle, dans le volume limité \mathcal{V} , avec la densité volumique ρ au point A, le moment dipolaire s'exprime par $\vec{p} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{OA} d\tau$, O étant un point quelconque dans le volume \mathcal{V} .

- *Si les deux premiers termes sont nuls, le champ est multipolaire on ne l'étudiera pas ici.*

II. Chapitre II : Calculs de Champ Magnétostatiques

II.1. Historique

C'est en 1819 qu'Hans-Christian Oersted, physicien danois, découvre qu'une aiguille aimantée, placée à proximité d'un fil métallique parcouru par un courant, est déviée de sa position d'équilibre.

En 1820, Jean-Baptiste Biot et Félix Savart étudient les propriétés de la force subie par un des « pôles magnétiques » d'une l'aiguille aimantée et Pierre-Simon de Laplace (1742-1827) traduit cette loi par une formule qui porte le nom de Biot et Savart. Laplace a également déterminé la formule permettant de calculer la force exercée sur un fil parcouru par un courant électrique et baigné par un champ magnétique.

André-Marie Ampère (1775-1836), assimilant un solénoïde parcouru par un courant à un aimant, crée la théorie de l'électrodynamique.

C'est Faraday qui montre la possibilité de transformer le travail mécanique en énergie électrique en 1831. En 1833, Lenz établit la loi qui donne le sens du courant induit. Henry publie en 1832 un mémoire sur l'auto-induction.

En 1855, Foucault démontre l'existence des courants qui portent son nom.

En 1865, Maxwell publie son « traité d'électricité et de magnétisme », véritable fondement de l'électromagnétisme moderne, achevant l'œuvre d'Ampère.

En 1887, Hertz utilise un détecteur de sa construction pour montrer que ces ondes électromagnétiques ont des propriétés analogues à celles de la lumière, ouvrant ainsi la voix à la radio-électricité et, à partir de 1904, à l'électronique.

Les équations de Maxwell : toute l'électricité est

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$



James Clerk Maxwell
(1831-1879)

II.1.a. Lignes de champ

Pour matérialiser le champ magnétique, on peut saupoudrer des grains de limaille de fer sur une feuille de papier placée au-dessus d'un aimant. La limaille se dispose suivant des courbes fermées appelées **lignes de champ**, tangentes en chacun de leurs points au vecteur champ magnétique et orientées dans le sens du champ. Il y en a une infinité.

Dans le cas d'un aimant, les lignes de champ sont orientées du pôle nord vers le pôle sud à l'extérieur de la matière aimantée. L'ensemble de ces lignes constitue un spectre magnétique. Il est à noter que sur la Terre, les lignes de champ sortent de ce que l'on nomme le pôle Sud géographique et que ce pôle correspond donc à un pôle nord magnétique.

II.1.b. Tube de champ

Dans l'espace, un faisceau de lignes de champ s'appuyant sur deux contours (C_1) et (C_2) forme un tube de champ Figure II.1.

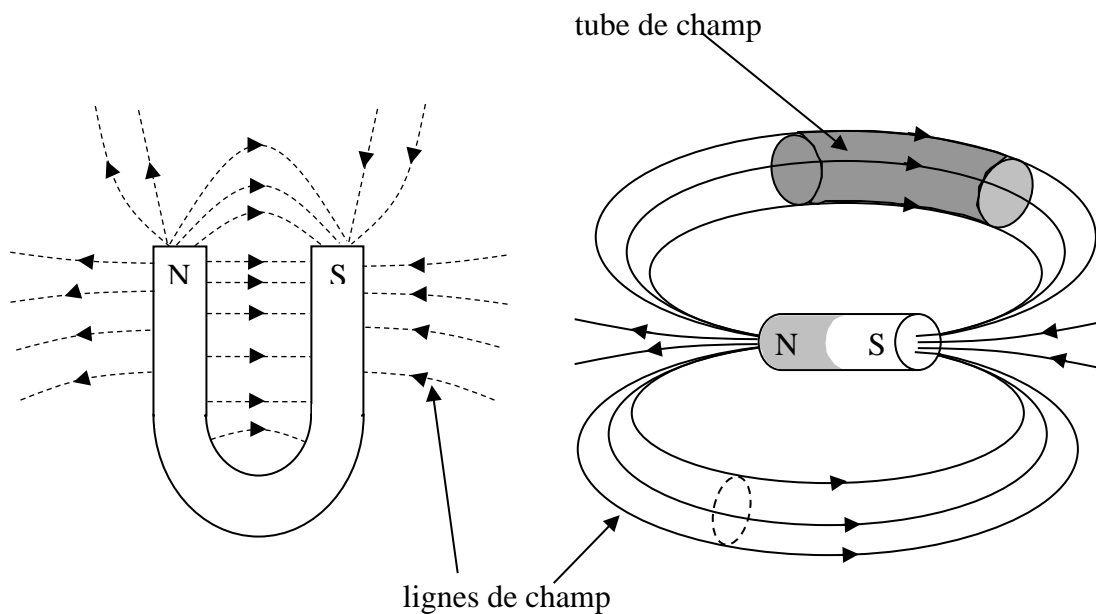


Figure II.1

II.2 Création de champs magnétiques par des courants électriques

L'existence d'une excitation magnétique \vec{H} en un point donné de l'espace peut être due à la présence de matière aimantée ou bien à la circulation de courants électriques.

II.2.a. Formule de Biot et Savart

Hans Christian Oersted (1777-1851) découvre en 1819 qu'une aiguille aimantée est déviée à angle droit vers un courant électrique et établit ainsi la relation entre l'électricité et le magnétisme. C'est la découverte qui fonde l'électromagnétisme. A la suite de l'expérience d'Oersted, Jean Baptiste Biot et Félix Savart effectuent une étude quantitative des interactions entre aimants et courants au cours de l'année 1820, ce qui conduira à la loi de Biot et Savart formulée par Pierre Simon de Laplace.

Considérons (Figure II.2) un circuit électrique (C) parcouru par un courant électrique i : la circulation de ce courant engendre l'apparition d'une excitation magnétique en tout point de l'espace. En un point M, situé à une distance r d'un élément de courant de longueur dl du circuit, ce vecteur excitation magnétique est défini par l'expression vectorielle :

$$\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \oint_C \overrightarrow{grad} \frac{1}{r} \wedge d\vec{l} \quad , \text{ expression à laquelle nous préférons la loi plus pratique :}$$

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{i d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{idl \sin \alpha}{r^2} \quad , \quad \alpha \text{ désigne l'angle entre l'élément de courant et la droite joignant cet élément au point M. } \vec{H} \text{ s'exprime en A/m.}$$

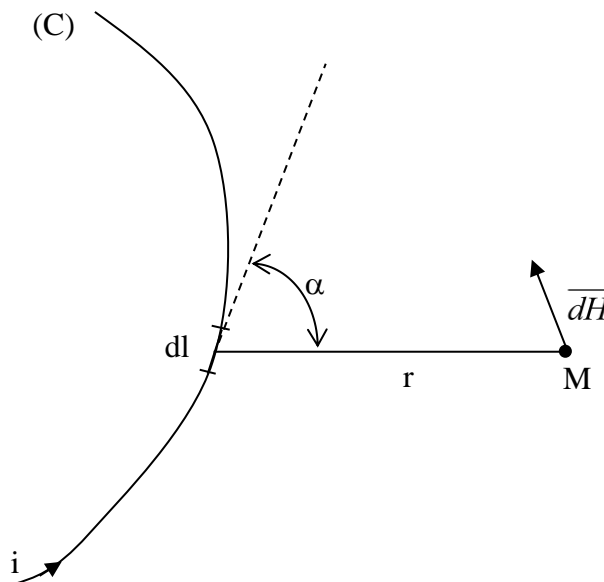
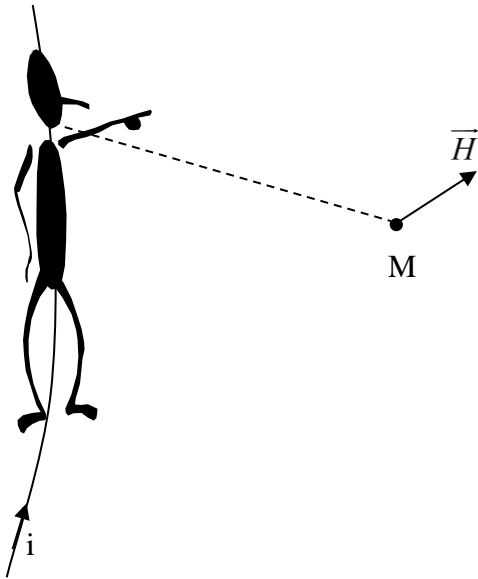


Figure II.2

Formule de Biot et Savart (C n'est pas forcément contenue dans le plan de la page)

Règle de l'observateur d'Ampère donnant le sens de \vec{H} (Figure II.3):



L'observateur est installé le long du circuit électrique de telle manière que le courant lui rentre par les pieds et lui sorte par la tête. L'observateur regarde le point M et tend le bras gauche, le vecteur excitation magnétique est dirigé dans le sens du bras gauche.

On peut tout aussi bien "effectuer" le produit vectoriel en tournant le "tire bouchon de Maxwell" dans le sens du repliement du vecteur $i\vec{dl}$ sur le vecteur \vec{r} . Le tire bouchon progresse dans le sens du vecteur \vec{H} .

Figure II.3
Observateur de Laplace

II.2.b. Exemples de calcul de champ magnétique :

II.2.b.1 . Champ créé par un segment de fil électrique parcouru par un courant I :

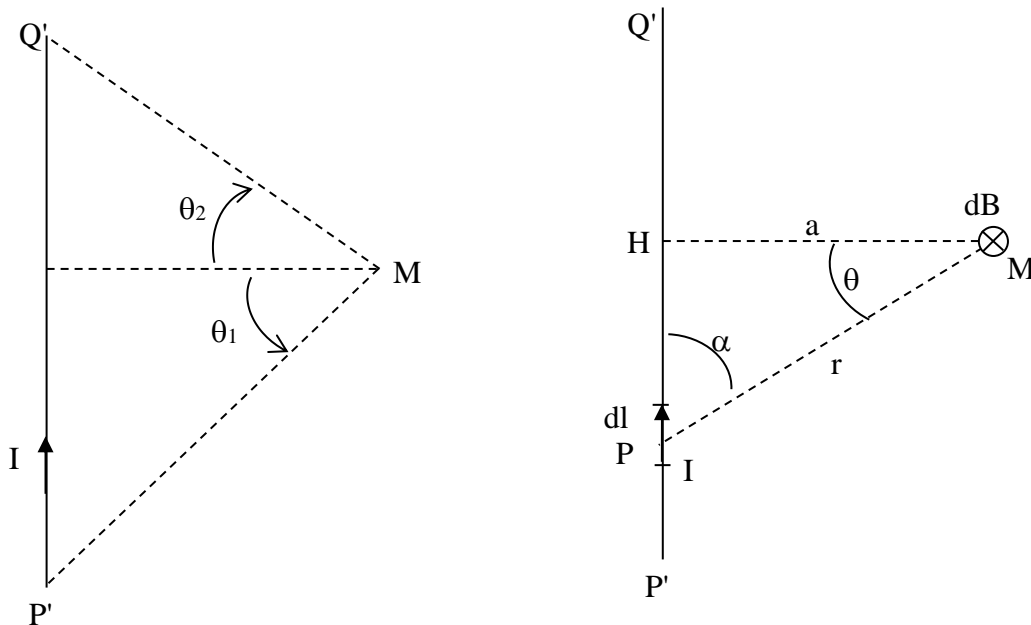


Figure II.4
 \vec{H} créée par un fil

On oriente les angles θ_1 et θ_2 par le sens du courant I (Figure). Dans le cas de la figure ci-dessus, θ_1 est négatif et θ_2 est positif.

Soit un élément de longueur \vec{dl} , celui-ci crée en M un champ élémentaire :

$$\overline{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \overline{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \text{ en posant } \overline{PM} = \vec{r}$$

Le vecteur \overline{dB} sera perpendiculaire au plan formé par dl et M et orienté dans le cas ci-contre vers l'arrière.

Tous les vecteurs \overline{dB} créés par tous les éléments \overline{dl} en lesquels on peut décomposer le segment $P'Q'$ seront colinéaires et de même sens.

Le module B du champ résultant sera donc :

$$B = \int_{P'Q'} dB \text{ or } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \alpha}{r^2}$$

Posons $HP = 1$. On a $\frac{l}{a} = \text{tg} \theta$ donc $dl = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$

D'autre part $\sin \alpha = \cos \theta$ et $r = \frac{a}{\cos \theta}$

En reportant dans dB , il vient :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta$$

En intégrant sur le segment, il vient :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

Donc : $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$

Si le fil possède une longueur infinie :

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

II.2.b.2 . Champ magnétique sur l'axe d'une spire de rayon R à la distance x du centre de celle-ci créé par un courant d'intensité I :

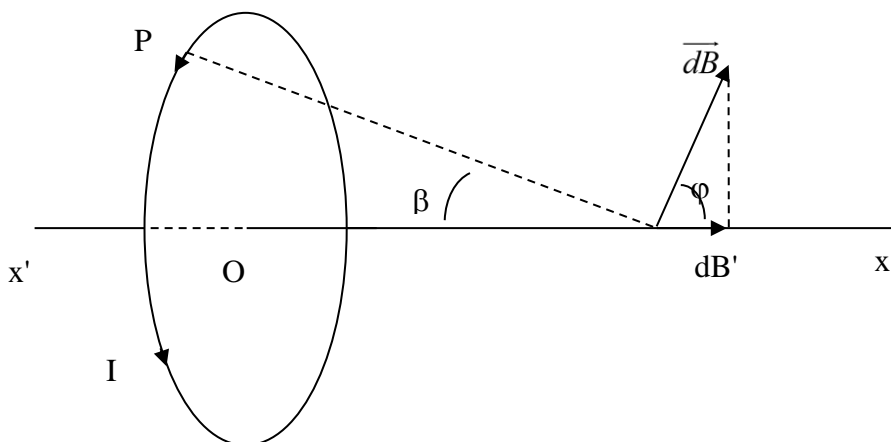


Figure II.5

H créée par une spire sur un point de son axe

Soit un élément de longueur \overrightarrow{dl} de la spire centré en P (Figure). En M, cet élément crée un champ élémentaire \overrightarrow{dB} perpendiculaire à PM, orienté comme sur la figure ci-dessus, de module :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \theta}{r^2} \text{ avec } r = PM \text{ et } \theta = (\overrightarrow{dl}, \overrightarrow{PM}).$$

Or $\theta = \frac{\pi}{2}$ quel que soit l'élément dl et r = constante. Par raison de symétrie, le champ résultant B sera porté par l'axe x' O x.

La composante utile de dB sera donc :

$$dB' = dB \times \cos \varphi \text{ or } \varphi = \frac{\pi}{2} - \beta, \text{ donc } dB' = dB \times \sin \beta.$$

Pour tous les éléments dl, β est le même.

$$\text{Donc : } dB' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \beta \cdot dl$$

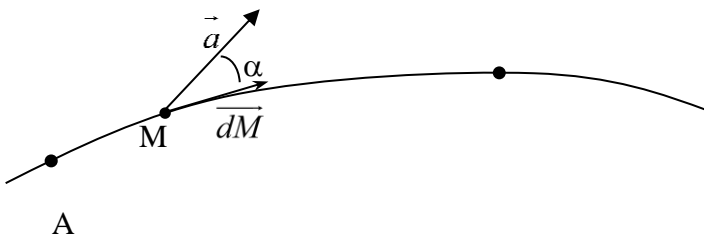
L'intégration de dB' sur toute la spire donne le module du champ résultant B.

$$\text{Donc : } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \beta \cdot 2\pi R \text{ or } \sin \beta = \frac{R}{r}$$

$$\text{Donc : } B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta \text{ ou en fonction de } x : B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

II.2.c. Complément mathématique : intégrale vectorielle ou circulation d'un vecteur

Soit un arc AB sur une courbe C parcouru par un point M dans un certain sens. Soit \vec{a} un vecteur fonction du point.



On appelle circulation du vecteur \vec{a} le long de l'arc AB la valeur de l'intégrale curviligne $\int_A^B \vec{a} \cdot \overrightarrow{dM}$ (intégrale curviligne d'un produit scalaire).

\overrightarrow{dM} est le vecteur tangent à la courbe C au point M.

$\vec{a} \cdot \overrightarrow{dM} = a \cdot dM \cdot \cos \alpha$ avec α angle entre \vec{a} et \overrightarrow{dM} . Dans le cas général α varie suivant M.

Si \vec{a} est une force, la circulation de cette force le long de l'arc AB est le travail de cette force.

On note $\oint \vec{a} \cdot \overrightarrow{dM}$ la circulation du vecteur \vec{a} suivant un contour fermé.

II.3 Théorème d'Ampère

L'équation de Maxwell : $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ se simplifie dans le domaine de l'électrotechnique où l'on peut négliger le courant de déplacement \vec{D} . Ainsi, cette équation devient : $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$.

Une intégration de cette relation conduit à la relation suivante, qui constitue le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = ni$$

La circulation du vecteur excitation magnétique \vec{H} le long d'une ligne d'induction Γ fermée entourant un circuit C parcouru par un courant i est égale au produit du courant i par le nombre de fois que cette ligne Γ traverse le circuit C .

Ou encore : la circulation du vecteur excitation magnétique le long d'un contour fermé est égal à la somme algébrique des intensités électriques traversant une surface quelconque supportée par ce contour.

L'intérêt de ce théorème, en électrotechnique, provient du fait que, très souvent, la ligne d'induction Γ est évidente.

Il est également à remarquer que le nombre de fois que la ligne Γ traverse le circuit C est égal au nombre de fois que le circuit C entoure la ligne Γ . Dans les cas pratiques, il s'agira du nombre de spires du circuit C .

La quantité qui intervient au second membre s'appelle la "force magnétomotrice" du circuit :

f.m.m. = $ni = \mathcal{F}$ en unité SI, une f.m.m. se mesure en "ampère-tour", symbole At, ou plus simplement en ampère A.

Considérons la Figure et cherchons à appliquer le théorème d'Ampère au contour Γ . La question qui se pose immédiatement est la détermination du signe des intensités i_1 , i_2 , et i_3 .

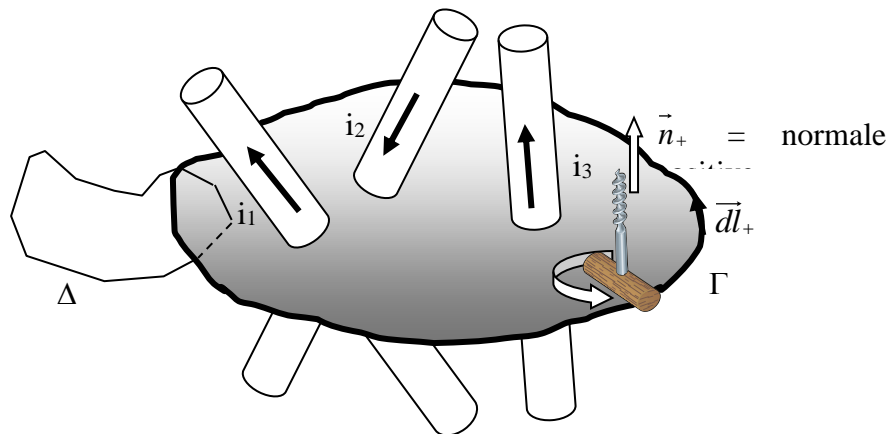


Figure II.6

Illustration du théorème d'Ampère

Dans la suite de cet ouvrage, nous définirons comme normale positive à une surface la normale obtenue par la règle du tire bouchon de Maxwell : on tourne le tire bouchon suivant le sens positif défini sur Γ , il s'enfonce dans le sens de la normale positive. Le signe d'une intensité est positif si l'intensité est dans le sens de la normale positive, négatifs sinon.

Ainsi, l'application du théorème d'Ampère à la courbe Γ de la Figure donne :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_1 - i_2 + i_3$$

L'application du théorème d'Ampère à la courbe Δ , qui n'entoure aucun courant donne : $\oint_{\Delta} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$

II.3.a. Exemple d'application du théorème d'Ampère

(Excitation magnétique créée par un fil de longueur infini)

Considérons un fil électrique de longueur infinie perpendiculaire au plan de cette feuille de papier. Les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil. Il est ainsi facile de déterminer la valeur de H sur une ligne d'induction de rayon a .

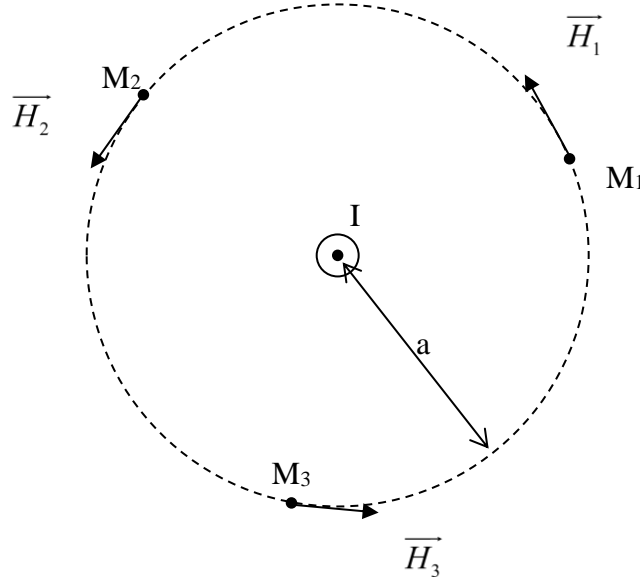


Figure II.7

H créée par un fil sur son axe obtenue par le théorème d'Ampère

Le vecteur H possède un module constant sur la ligne d'induction de la Figure . En effet, la formule de Biot et Savart $dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$ indique que, si r est constant, alors H reste constant en module.

On a donc, en prenant comme courbe Γ une ligne d'induction :

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{dl} = H \int_{\Gamma} \vec{dl} = H \cdot 2\pi a = I \Rightarrow \boxed{H = \frac{I}{2\pi a}}$$

La direction et le sens de \vec{H} sont donné par Biot et Savart : $\vec{Idl} \wedge \vec{r}$.

II.4 Force exercée par une induction magnétique sur un courant

Un champ magnétique \vec{B} exerce une force sur toute charge animée d'une vitesse par rapport à ce champ. Etant donné qu'un courant électrique est une circulation de charges électriques (électrons se déplaçant), un champ magnétique exerce une force sur un élément de courant dl .

En électrotechnique, nous supposons négligeable le champ électrique \vec{E} et nous ne tiendrons pas compte de la contribution $q\vec{E}$ présente dans l'expression de la force de Lorentz donnant la force créé par un champ magnétique sur une charge en mouvement relatif par rapport à ce champ : $F = q[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]$ (avec v : vitesse des charges)

Dans l'expression de la force de Lorentz, en considérant la circulation d'un courant électrique i pendant le temps dt , on peut remplacer la charge électrique dq par idt ($dq = idt$) et la vitesse par $v = \frac{dl}{dt}$.

La force élémentaire \overline{dF} exercée sur l'élément dl par un champ \overline{B} uniforme vaut donc :

$$\overline{dF} = idt \frac{d\overline{l}}{dt} \wedge \overline{B} = i d\overline{l} \wedge \overline{B}$$

On obtient ainsi l'expression de la force de Laplace :

$$\boxed{\overline{dF} = i d\overline{l} \wedge \overline{B}}$$

Si le fil est rectiligne, de longueur l et que le champ \overline{B} est perpendiculaire au fil, le module de la force a pour valeur :

$$F = Bil$$

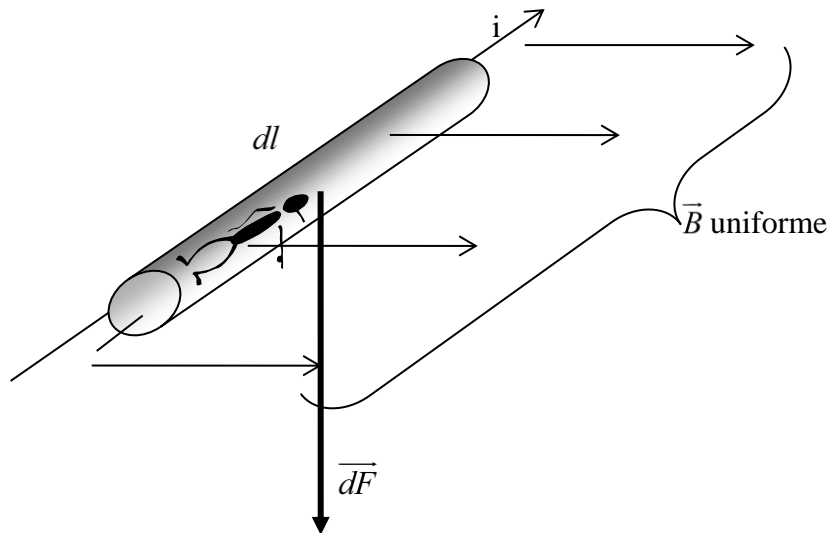


Figure II.8
Force de Laplace

Le sens de la force de Laplace est tel que pour un observateur installé dans le sens du courant et regardant dans le sens de l'induction, la force est dirigée vers sa gauche.

Une autre règle très utile pour la détermination de la direction et du sens de la force de Laplace est la règle dite "des trois doigts de la main droite" où le pouce, l'index et le majeur sont placés de manière à former un trièdre rectangle comme l'indique la Figure .

D'autres dispositions des doigts sont possibles par permutation circulaire. Néanmoins celle-ci permet une meilleure mémorisation. En effet, lors de la détermination de la f.é.m. induite dans un conducteur que l'on déplace dans un champ \vec{B} , on se sert de la main gauche avec le pouce qui représente toujours le champ et le majeur qui représente toujours le courant, l'index de la main gauche représentant la vitesse de déplacement du conducteur. Les pouces représentent le champ et les majeurs le courant.

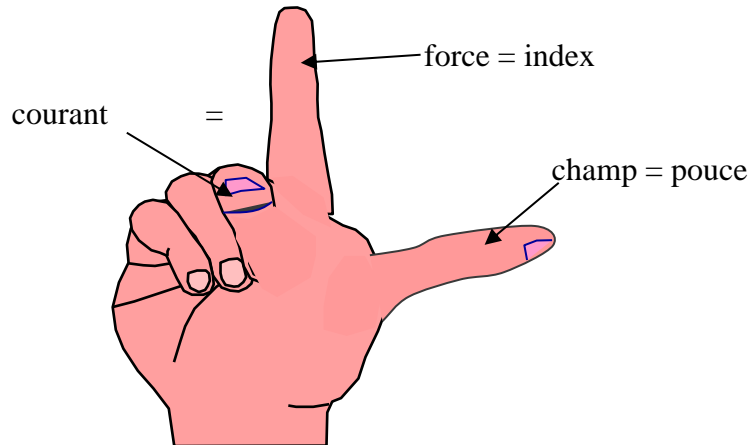


Figure II.8

Règle des trois doigts de la main droite

II.5 Forces exercées entre deux courants rectilignes parallèles

Considérons deux fils rectilignes situés à une distance a l'un de l'autre, parcourus par des courants i_1 et i_2 ayant les sens indiqués Figure . Le courant i_1 crée une excitation magnétique \vec{H}_1 en tout point de l'espace et en particulier au voisinage d'un élément dl du courant i_2 .

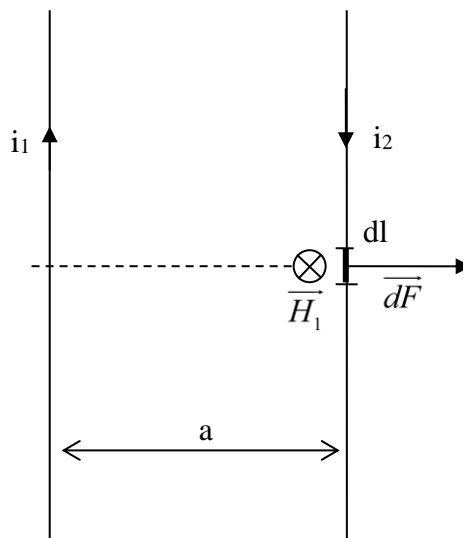


Figure II.9

Force de Laplace entre deux courants

Nous avons établi l'expression de l'excitation magnétique créée par un fil de longueur infini :

$$H_1 = \frac{i_1}{2\pi a} \text{ dans le sens indiqué Figure .}$$

A cette excitation magnétique H_1 , correspond une induction B_1 qui vaut, en désignant par μ la perméabilité magnétique du milieu dans lequel sont les fils :

$$B_1 = \mu H_1 = \mu \frac{i_1}{2\pi a}$$

Ce champ exerce sur l'élément dl parcouru par le courant i_2 une force dirigée dans le sens indiqué Figure :

$$dF = i_2 dl \cdot B_1 = i_2 \cdot \frac{\mu i_1}{2\pi a} \cdot dl$$

Ainsi, la force d'interaction par unité de longueur vaut :

$$\frac{dF}{dl} = \mu \cdot \frac{i_1 \cdot i_2}{2\pi a}$$

Cette force est attractive si les courants sont de même sens et répulsive si les courants sont de sens opposés. L'existence de cette force montre que les deux fils peuvent réaliser une conversion d'énergie électromécanique si on les laisse libre de se mouvoir.

II.6 Flux magnétique

Le flux magnétique est une quantité importante qui intervient constamment dans l'étude des machines électriques. C'est une grandeur scalaire qui se prête mieux aux calculs que le champ magnétique, grandeur vectorielle.

Le flux magnétique Φ à travers une surface quelconque S est défini par la formule :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_S B \cdot \cos \alpha \cdot dS \quad (0.1), \quad \Phi \text{ est exprimé en Weber.}$$

α est l'angle entre la normale et le champ \vec{B} , \vec{n} est la normale (unitaire) à la surface dS . Son orientation est liée au sens positif choisi sur la courbe sur laquelle s'appuie la surface comme le montre la Figure .

Définissons arbitrairement un sens positif de parcours du contour Γ sur laquelle s'appuie la surface. La règle du tire bouchon de Maxwell permet de définir une normale positive à la surface (le tire bouchon que l'on tourne dans le sens positif choisi progresse selon la normale positive).

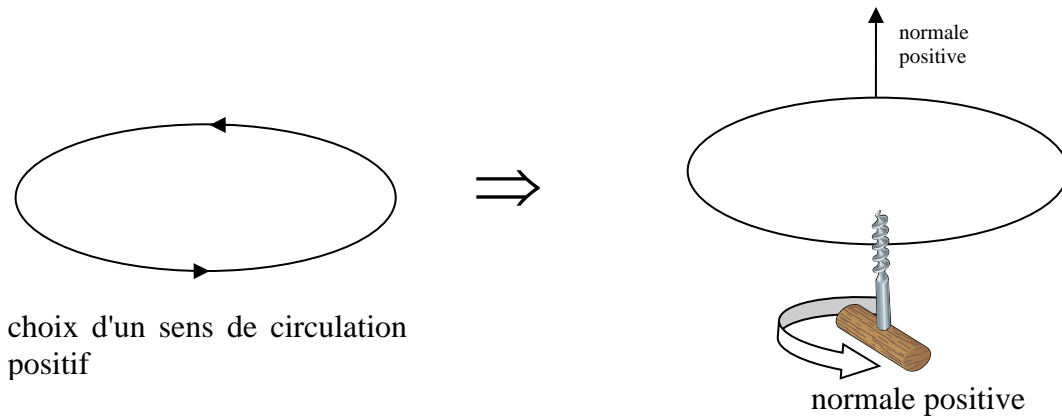


Figure II.10

Définition de la normale positive à une surface

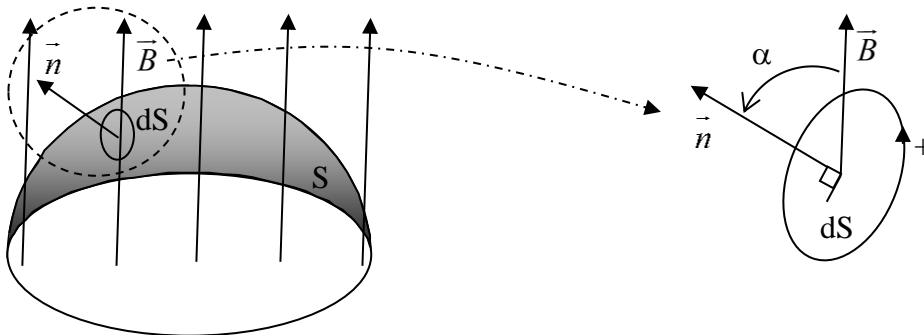


Figure II.11

Flux magnétique

Lorsque le champ \vec{B} est uniforme (il est identique en tout point d'un volume) et qu'il traverse une surface plane S , alors :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S = BS \cos \alpha$$

Si la surface est perpendiculaire aux lignes de champ ($\alpha = 0$), l'expression devient :

$$\Phi = BS$$

La quatrième équation de Maxwell : $\text{div} \vec{B} = 0$ indique que le flux du vecteur champ magnétique à travers une surface fermée est nul. En électrotechnique, les lignes de champ \vec{B} n'émanent pas de sources ponctuelles.

Il n'y a pas de monopôle magnétique en électrotechnique. Certaines théories physiques impliquent l'existence de tels objets. L'existence des monopôles magnétiques n'est toujours pas prouvée, mais, même s'ils existaient, cela ne modifierait pas l'électrotechnique pour laquelle : $\text{div} \vec{B} = 0$.

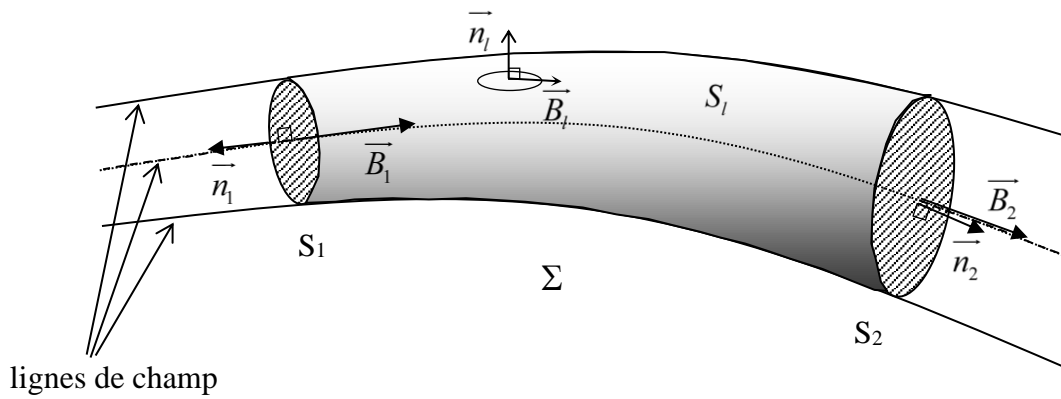


Figure II.12

Soit la surface de la Figure : Σ , formée par la surface latérale S_l d'un tube de champ (surface formée d'un ensemble de lignes de champ) et de deux sections droites (perpendiculaires aux lignes de champ) S_1 et S_2 . Le flux magnétique sortant de Σ est nul (en orientant les normales vers l'extérieur) :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_l} \vec{B}_l \cdot \vec{n}_l dS_l + \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 = 0$$

$$\Rightarrow -B_1 S_1 + B_2 S_2 = 0 \Rightarrow -\Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

Le signe – devant Φ_1 indique qu'il s'agit d'un flux entrant.

Le long d'un tube de champ, le flux magnétique se conserve, il ne dépend que du contour et non de la surface considérée : $\Phi_1 = B_1 S_1 = B_2 S_2 = \Phi_2$.

Cette propriété peut être exploitée pour créer des champs B très intenses (2500 T). En effet, on ne sait pas créer de champ B continu dans le temps supérieur à environ 40 Tesla. Pour générer des champs beaucoup plus intenses, on décharge des condensateurs dans un solénoïde tout en diminuant brusquement la section de celui-ci en le faisant imploser à l'aide d'explosifs judicieusement placés autour. Le flux, comme la charge électrique portée par les armatures d'un condensateur, est une grandeur qui ne varie pas instantanément. Ainsi, si la surface tend vers 0, le champ B peut atteindre des valeurs très élevées pendant un très court intervalle de temps, voire la Figure .

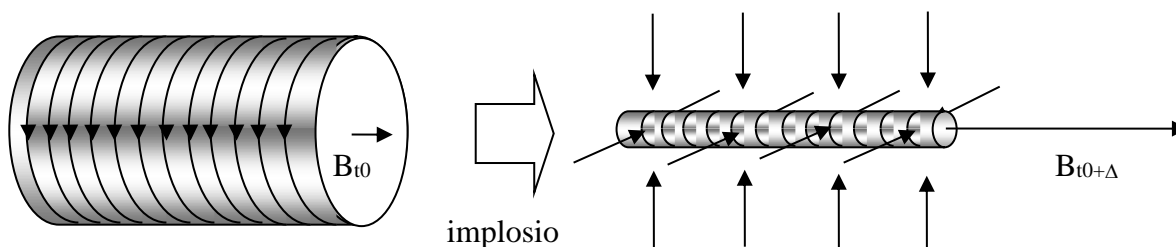


Figure II.13

Production de champ B très intense (2500 T)

II.7 Différence de potentiel électrique induite dans un circuit par une variation de flux magnétique

Tout circuit électrique traversé par un flux magnétique peut être le siège d'une d.d.p. à ses bornes si ce flux varie en fonction du temps. Cette d.d.p. s'appelle une f.é.m. induite.

II.7.a. Lois de Faraday et de Lenz

Sous sa forme générale, la loi de Faraday donne la valeur du champ électrique \vec{E} induit par une variation du champ magnétique \vec{B} :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Dans le domaine de l'électrotechnique où on considère des circuits filiforme bobinés, l'expression ci-dessus peut se simplifier :

$e = -n \frac{d\Phi}{dt}$, la f.é.m. aux bornes d'un circuit comportant n spires (bobinées en série) est égale à n fois la

dérivée par rapport au temps du flux (du champ \vec{B}) qui traverse chaque spire du circuit (on considère que chaque spire est traversée par un même flux, celui-ci ne varie pas en fonction des spires).

Si le flux est indépendant du temps, il n'apparaît aucune f.é.m. aux bornes du circuit.

On met quelque fois un signe – dans la formule pour rappeler que la f.é.m. induite s'oppose à la cause qui lui donne naissance. Cette opposition est précisée par la loi de Lenz :

La f.é.m. induite tend à créer un courant induit dont le sens est tel qu'il s'oppose au flux qui l'a fait naître.

Les deux lois précédentes sont très générales et sont valables quelle que soit la forme du circuit et la façon dont le flux varie :

- Lorsque les variations de flux sont dues à un mouvement (ou à une déformation du circuit, il s'agit d'un flux "coupé" par le circuit et la f.é.m. s'appelle "f.é.m. de vitesse". C'est le cas pour la f.é.m. qui apparaît aux bornes d'un fil rigide que l'on déplace dans une induction uniforme.
- Lorsque les variations de flux sont dues à une variation de l'induction (c'est-à-dire du courant qui crée cette induction), il s'agit d'un flux "embrassé" et la f.é.m. correspondante est appelée "f.é.m. de transformation".

III. Chapitre III : Le Phénomène d'Induction Electromagnétique

III.1. Définition :

C'est une conversion électromécanique, réalisée au moyen d'un transducteur. Dans le sens mécanique \rightarrow électrique, l'appareil est un générateur, & dans le sens électrique \rightarrow mécanique, l'appareil est un moteur. En principe, on considèrera que sur l'organe actif du transducteur (induit par exemple) la conversion est idéale (sans pertes) comme on le verra plus loin pour le bilan de puissances. On a donc des applications évidentes (notamment toute l'électrotechnique). Le phénomène d'induction électro-magnétique suppose que l'on soit en régime variable (car en régime permanent il ne se passe rien dans le repère lié).

III.1.a. Le traitement mathématique :

On aura toujours deux variables dépendant du temps, l'une d'origine électrique (ce sera toujours l'intensité I du courant), l'autre d'origine mécanique : la vitesse V pour un mouvement de translation (rare, cas du moteur linéaire), la vitesse angulaire ω (fréquent, cas des machines tournantes). Ces deux variables interviendront toujours simultanément dans deux équations différentielles : l'équation électrique (E), que l'on écrira toujours homogène à des tensions, & l'équation mécanique (M) qui traduira la relation fondamentale de la dynamique (donc homogène à des forces) pour un mouvement de translation, ou le théorème du moment cinétique (donc homogène à des couples) pour un mouvement de rotation. Par élimination, on arrivera à deux équations différentielles (de même type) où n'interviendra qu'une des deux fonctions inconnues. On les intégrera, compte tenu des conditions initiales données.

Remarque : un régime transitoire (RT) fait passer le système d'un premier régime permanent (RP₁) correspondant à l'état initial, à un second régime permanent (RP₂) correspondant à l'état final. Il sera toujours possible de trouver les valeurs des deux inconnues pour ces deux régimes permanents.

III.1.b. Bilan de puissances :

Comme il ne nécessite que l'écriture des équations (E) & (M), il peut être fait avant ou après l'intégration de ces équations. Pour cela : on multiplie l'équation électrique (E), homogène à des tensions, par la fonction $I(t)$ pour obtenir une quantité homogène à une puissance. Dans le cas d'un mouvement de translation, l'équation mécanique (M) est homogène à des forces & sera donc multipliée par la fonction $V(t)$. Dans le cas d'un mouvement de rotation, l'équation mécanique (M) est homogène à des couples & sera donc multipliée par la fonction $\omega(t)$. Il apparaîtra toujours un terme (dit de couplage, proportionnel au produit des deux fonctions $I(t).V(t)$ ou $I(t).\omega(t)$) qu'il suffira d'éliminer pour obtenir une équation bilan de forme

générale : $P_{Fournie} = P_{Pertes} + \frac{dE}{dt}$. La puissance fournie $P_{Fournie}$, d'origine mécanique pour un

générateur & électrique pour un moteur, doit l'être en permanence, & pas seulement à l'état initial, & sera nulle si le système est isolé. La puissance dissipée par les pertes P_{Pertes} comprendra toujours l'effet Joule, & un terme mécanique s'il y a des frottements. Enfin, la quantité E représente l'énergie totale (toutes formes électriques ou mécaniques) du système.

III.2. Etude Théorique de l'Induction Electromagnétique

III.2.a. Cas particuliers :

On définit le cas de Lorentz (circuit mobile dans un champ magnétique \vec{B} indépendant du temps) & le cas de Neumann, complémentaire (circuit fixe dans un champ magnétique \vec{B} dépendant du temps). Le cas le plus général est obtenu par superposition des deux.

III.2.b. Calcul des fem induites :

L'écriture de l'équation électrique (E) suppose de pouvoir calculer la fem induite e . Le principe du calcul dépend du cas. Pour le cas de Lorentz, on passe par le champ électromoteur (ce qui dispense d'une convention d'orientation du circuit). Pour le cas de Neumann, pour éviter le potentiel – vecteur, on passe par le flux (loi de Faraday, la convention d'orientation étant alors indispensable). Dans le cas général, le théorème de superposition donne $e = e_1 + e_2$, où la fem de Lorentz est calculée par le champ électromoteur & la fem de Neumann par le flux. Expressions du champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{Neumann}) \quad \vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{Lorentz}) \quad \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{Général})$$

La dernière formule est conforme, dans le cas des faibles vitesses ($v \ll c$) à la transformation relativiste de Lorentz des champs. Il est clair que le force de Lorentz faisant intervenir la vitesse n'est pas invariante par transformation classique de Galilée.

Expressions de la fem induite :

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad e = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{Neumann})$$

La seconde formule traduit la loi intégrale de Faraday, postulat d'origine expérimentale, à éviter si le domaine d'intégration évolue (cas de Lorentz en particulier). Le signe – de cette loi traduit (comme dans une force de rappel) la loi de Lenz, qui est une loi de modération (comme les lois de Van't Hoff ou Le Châtelier en chimie) traduisant que le système était dans un état d'équilibre stable avant la perturbation qui

a donné naissance au courant induit. Rappelons que : $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$.

Remarque : il peut apparaître une fem induite sans qu'il y ait variation de flux : c'est le cas du flux coupé, quand le circuit coupe, dans son mouvement, des lignes de champ magnétique (cas du cadre du galvanomètre).

III.2.c. Equation de Maxwell – Faraday :

Les équations de Maxwell sont écrites dans le référentiel lié au circuit (le seul clairement défini), donc dans le cas de Neumann. Alors la loi locale associée à l'équation intégrale de Faraday est l'équation de Maxwell-

Faraday : $\text{Rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, où $\vec{E} = \vec{E}_{es} + \vec{E}_m = -\text{Grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est appelé champ électrique, & est donc

constitué de la somme du champ électrostatique (qui est un gradient, donc un champ à circulation conservative) & du champ électromoteur (qui, lui, n'a pas cette propriété).

III.3. Energie Magnétique

III.3.a. Expressions du flux :

La relation de définition s'écrit, en utilisant le théorème de Stokes : $\Phi = \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ pour un circuit

filiforme C. En utilisant l'expression du potentiel-vecteur pour un circuit filiforme, on établit la formule de Neumann donnant l'expression de l'inductance mutuelle entre deux circuits filiformes C_p & C_q , qui ne présente qu'un intérêt théorique car difficile à manipuler. On obtient :

$$\Phi_{pp} = L_p \cdot I_p \quad \Phi_p = \sum_q M_{pq} \cdot I_q \quad M_{pq} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_p} \oint_{C_q} \frac{d\vec{l}_p \cdot d\vec{l}_q}{r}$$

La première formule (qui est la définition de l'inductance propre) donne le flux propre pour un seul circuit, la seconde (qui est la définition de l'inductance mutuelle) donne le flux total à travers un circuit. Il en résulte que $L_p = M_{pp}$.

III.3.b. Travail des forces électromagnétiques :

Dans le cas général, il y a production d'un travail électrique dT_I (provenant de la fem induite) & donc donné par la première relation, & d'un travail mécanique dT_D dans le cas de Lorentz (alors opposé au travail électrique car la force de Lorentz ne travaille pas) :

$$dT_I = eI \cdot dt = e \cdot dq \quad dT_D = I \cdot d\Phi = -dT_I$$

La seconde relation, qui constitue le théorème de Maxwell, redonne le travail électrique par utilisation de la loi de Faraday.

III.3.c. Energie mécanique :

Dans le cas d'un seul circuit, on peut concevoir que le courant est maintenu constant. Alors l'énergie est purement mécanique & l'on a : $W = W_D = -I \cdot \Phi = -\vec{M} \cdot \vec{B}$, la dernière expression correspondant au cas d'un dipôle magnétique.

III.3.d. Energie magnétique :

Quand on a plusieurs circuits, on ne peut plus avoir de courants constants (à cause des mouvements relatifs). Alors (cas aussi d'un seul circuit en courant variable) : $dW = -dT_I = +dT_D = -dW_D$. Alors la loi de

Faraday donne, dans le cas de l'auto-induction $e = -L \frac{dI}{dt}$ d'où l'on déduit :

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad W = \frac{1}{2} \sum_p I_p \cdot \Phi_p = \frac{1}{2} \sum_p \sum_q M_{pq} \cdot I_p I_q \quad W = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d^3\tau$$

La dernière relation traduit la localisation de l'énergie magnétique.

Remarque : l'énergie est donc une forme quadratique définie positive des courants, ce qui conduit à :

$$\frac{M_{pq}^2}{L_p L_q} = k^2 \leq 1, \text{ où } k \text{ est le coefficient de couplage.}$$

III.4. Régimes Variables

On étudie des dipôles linéaires passifs R-C, R-L, R-L-C en régime variable (en restant dans le cadre de l'ARQP, approximation des régimes quasi - permanents, ce qui exclut les phénomènes de propagation).

III.4.a. Lois tension - courant :

Pour les conventions d'orientation, voir les figures 1, 2 & 3 page suivante.

$$u_R = R \cdot i_R \quad i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

La résistance suit la loi d'Ohm. La figure 2 correspond à la charge du condensateur. Dans le cas d'une décharge, q décroît, $i = -\frac{dq}{dt}$, le courant change de sens pour une polarisation donnée du condensateur.

Dans une inductance, naît une fem induite donnée par la loi de Faraday : $e = -L \frac{di}{dt}$, en opposition sur le courant (loi de Lenz).

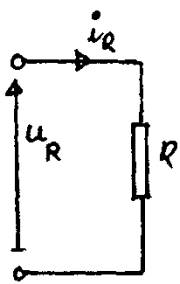


Figure 1

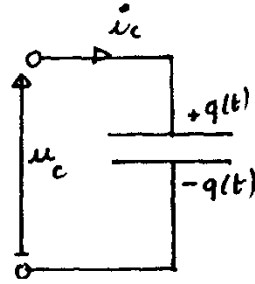


Figure 2

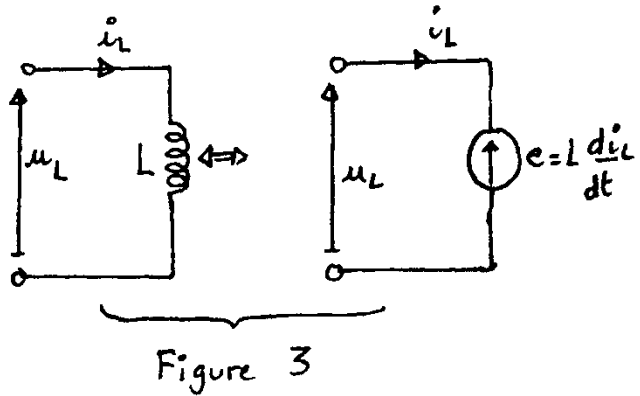


Figure 3

Remarques :

* les éléments R, C, L sont supposés parfaits.

* on passe du régime variable quelconque au régime sinusoïdal en changeant d/dt en $j\omega$. Les trois formules précédentes donneront alors la loi d'Ohm en grandeurs complexes.

III.4.b. Circuits R-C :

Ils sont régis par l'équation différentielle du premier ordre : $U_c + \tau \frac{dU_c}{dt} = E$, $\tau = RC$ dont

$$\text{l'intégration conduit à : } U_c = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad i_c = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La charge du condensateur à travers la résistance R, par le générateur E, correspond à un régime transitoire de durée $6,9 \cdot \tau$ (temps au bout duquel les grandeurs U_c & i_c diffèrent de moins de 0,1% de leurs valeurs d'équilibre E & 0). La constante de temps τ apparaît alors comme un temps de relaxation entre les deux régimes permanents $(0, 0)$ & $(E, 0)$. On rappelle que :

- Pour les circuits R-C, $U_c(t)$ est continue & $i_c(t)$ est discontinue pour $t = 0$.

Remarque : l'équation différentielle de la décharge s'obtient en annulant E ; i_c change de sens, mais sa valeur est inchangée. U_c vaut alors $E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

III.4.c. Circuits R-L :

Ils sont régis par l'équation différentielle du premier ordre : $i_L + \tau \frac{di_L}{dt} = \frac{E}{R}$, $\tau = \frac{L}{R}$ dont l'intégration

$$\text{conduit à : } i_L = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad U_L = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Cette équation différentielle décrit l'établissement du courant dans un circuit inductif. Comme en B, on a un régime transitoire, les grandeurs i_L & U_L diffèrent de leurs valeurs d'équilibre E/R & 0 à moins de 0,1% près au bout de $6,9 \cdot \tau$. Ce régime transitoire sépare les deux régimes permanents $(0, 0)$ & $(E/R, 0)$. On rappelle que :

- Pour les circuits R-L, $i_L(t)$ est continu & $U_L(t)$ est discontinue pour $t = 0$.

Remarque : rupture du courant dans un circuit inductif : si on fait $E = 0$ dans l'équation différentielle précédente, alors la loi $i_L(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ obtenue est physiquement acceptable, mais la loi $U_L = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ ne rend pas compte du phénomène de surtension observé. Si on corrige l'équation en remplaçant R par $R(t)$ qui croît à l'ouverture du circuit, on améliore U_L qui traduit alors la surtension mais i_L ne convient plus, donc pas de modèle simple.

III.4.d. Circuits R-L-C :

Toutes les grandeurs sont maintenant continues en $t = 0$.

III.4.d.1. Circuit série :

Il est régi par l'équation différentielle du second ordre : $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_o^2 \cdot y = f(t)$, où la quantité

$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre du circuit, $Q = \frac{L\omega_o}{R} = \frac{1}{RC\omega_o} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ est le facteur de qualité du

circuit, & $y = q$, charge du condensateur. Cette équation sous forme standard étant déduite de l'équation :

$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{q}{C} = U_E(t)$ où $U_E(t)$ est la tension d'alimentation, il en résulte que l'on a :

$f(t) = \frac{U_E(t)}{L}$. Enfin, rappelons la définition la plus générale du facteur de qualité d'un oscillateur

quelconque (électrique, mécanique, acoustique, optique,..) :

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energie emmagasinée par période}}{\text{Energie dissipée par période}}.$$

La solution générale d'une telle équation comprend deux termes :

- y_1 est la solution de l'équation homogène associée (second membre nul) & correspond au régime libre d'oscillation. La substitution $y_1 = e^{rt}$ permet de passer à l'équation caractéristique :

$r^2 + \frac{\omega_o}{Q} r + \omega_o^2 \cdot r = 0$. En posant $\sigma = \frac{\omega_o}{2Q}$, on obtient : $r = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_o^2}$, d'où les solutions :

- * $\sigma = 0$: $y_1(t) = Y_o \cdot \cos(\omega_o t - \varphi)$, oscillateur harmonique ;
- * $\sigma < \omega_o$: $y_1(t) = Y_o \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$, avec, régime oscillant amorti ;
- * $\sigma = \omega_o$: $y_1(t) = Y_o \cdot e^{-\omega_o \cdot t} \cdot (1 + \omega_o t)$, régime critique ;
- * $\sigma > \omega_o$: $y_1(t) = Y_o \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \text{ch}(\omega t + \varphi)$, avec $\omega = \sqrt{\sigma^2 - \omega_o^2}$, régime aperiodique.

Le cas $\sigma = 0$ étant mis à part, y_1 tend toujours vers zéro si $t \rightarrow \infty$. Il en résulte que le régime libre correspond à un régime transitoire dont la durée est de l'ordre de $6,9 \cdot \tau$; il est indépendant de $U_E(t)$.

- y_2 est une intégrale particulière de l'équation complète, & correspond au régime forcé ; on montre en mathématiques que y_2 a la même forme que $U_E(t)$, & ceci quelles que soient les conditions initiales ; en particulier, si $U_E(t) = \text{cste}$, $y_2 = \frac{U_E}{L} = \text{cste}$.

- $y = y_1 + y_2$ (équation linéaire). Les constantes d'intégration figurant dans y_l sont déterminées par application des conditions initiales à la solution complète y . Dans tous les cas, pour $t > 6,9.\tau$, y se réduit à y_2 .

III.4.d.2. Circuit parallèle :

Son étude se déduit de celle du circuit série par dualité. Alors l'équation différentielle qui régit le circuit est formellement la même : $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_o^2 \cdot y = f(t)$, avec $y = \Phi = L.i_L$ (flux dans l'inductance), où

ω_o est inchangé, le facteur de qualité valant $Q = \frac{C\omega_o}{G} = \frac{1}{GL\omega_o} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$ (donc inverse de $Q_{\text{série}}$), & où

$f(t) = \frac{i_E(t)}{C}$, $i_E(t)$ étant le courant issu du générateur.

On en déduit alors les solutions par dualité.

IV. Chapitre IV : Les Equation de MAXWELL

IV.1. Introduction

Les équations de Maxwell sont des lois fondamentales de la physique, et sont au nombre de quatre (Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday, Maxwell-Flux et Maxwell-Ampère). L'ensemble de ces équations se rapportent à l'électromagnétisme, et plus particulièrement à la description des phénomènes magnétiques, électriques, et lumineux. Le tableau dans la page suivante présenté les équations de Maxwell.

IV.1.a. Régime statique : Alors les grandeurs ne dépendent pas du temps, donc $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

Il en résulte donc que les champs électrique & magnétique (\vec{E} & \vec{B} ou \vec{D} & \vec{H}) sont séparés.

IV.1.b. Régime variable :

Alors les grandeurs dépendent du temps, & il existe un couplage entre les champs électrique & magnétique, responsable des phénomènes d'induction électromagnétique. On ne considère alors plus qu'un seul champ à 6 composantes qualifié d'électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}), notamment en théorie de la relativité, seul modèle réellement adapté à la description de ces phénomènes.

IV.1.c. Milieux matériels :

On passe des équations hors milieux (dans le vide) aux équations dans les milieux (diélectriques de constante ϵ_r ou magnétiques de constante μ_r) en changeant :

- ϵ_r en $\epsilon_o \epsilon_r$, & de même μ_o en $\mu_o \mu_r$
- \vec{E} en $\vec{D} = \epsilon_o \epsilon_r \vec{E}$, & de même \vec{B} en $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o \mu_r}$
- la densité volumique de charges ρ_{total} en $\rho_{libre} = \rho_{total} - \rho_{polar}$
- la densité volumique de courants \vec{J}_{total} en $\vec{J}_{\Omega} = \vec{J}_{total} - \vec{J}_{aim}$

IV.1.d. Lois intégrales :

Les équations de Maxwell sont des lois **locales**, & donc relient des champs de vecteurs ou de scalaires **au même point**, & donc indépendamment de la géométrie du problème considéré, ce qui fait que les postulats seront toujours des équations locales & ne feront intervenir que les distributions **volumiques**, les seules à correspondre à la réalité. En revanche, les lois intégrales font intervenir la géométrie du problème, & sont donc d'un emploi plus limité (en fait liées à une symétrie forte), & peuvent faire intervenir des distributions linéiques ou surfaciques (ou même ponctuelles en électrostatique) qui ne sont que des idéalizations mathématiques des distributions volumiques. De plus, ces lois intégrales supposent impérativement que le domaine d'intégration (courbe, surface, volume) ne soit **pas déformable**.

Remarque : en ce qui concerne la symétrie : pour les calculs de champs (\vec{E} par le théorème de Gauss

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_o} \quad \text{ou} \quad \vec{B} \text{ par le théorème d'Ampère } \oint_{LC} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \cdot I_{int}$$

la seule possibilité est d'arriver à : $ES = \frac{Q_{int}}{\epsilon_o}$ ou $Bl = \mu_o I_{int}$, ce qui suppose d'abord que les vecteurs

\vec{E} & \vec{dS} ou \vec{B} & \vec{dl} soient colinéaires (donc la surface fermée S doit être une équipotentielle, & la courbe fermée LC doit être une ligne de champ), & de plus on doit avoir $E = \text{cste}$ sur S ou $B = \text{cste}$ sur LC . Ces conditions ne seront réunies que dans le cas d'une symétrie forte.

Equations locales	Régime Statique	Régime Variable	Cas du vide	Milieux Matériels	Equation Intégrale
Equation de Maxwell-Gauss	$\text{Div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{Div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{Div } \vec{E} = 0$	$\text{Div } \vec{D} = \rho_{lib}$	$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ Th. de Gauss
Equation de Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} = \vec{0}$	$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$e = -\frac{d\Phi}{dt}$ Loi de Faraday
Equation du Flux	$\text{Div } \vec{B} = 0$	$\text{Div } \vec{B} = 0$	$\text{Div } \vec{B} = 0$	$\text{Div } \vec{B} = 0$	$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \text{cste}$ Conservation du Flux
Equation de Maxwell-Ampère	$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{H} = \vec{J}_\Omega + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \vec{J}$ Th. d'Ampère

En ce qui concerne le domaine d'intégration : pour les phénomènes d'induction, le domaine d'intégration C correspond au circuit, mobile dans le cas de Lorentz & donc on évitera d'utiliser la loi intégrale de Faraday pour ce cas, en échange elle constituera le mode de calcul adapté pour le cas de Neumann, C étant fixe.

IV.2. Equation de Maxwell – Ampère

IV.2.a. Equation intégrale :

Elle s'écrit (théorème d'Ampère généralisé) $\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_{int} = I_\Omega + I_{dépl}$, où le I_{int} inclut le courant

ohmique (réel) I_Ω & le courant de déplacement de densité volumique $\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Par rapport au régime

statique, l'équation locale a été corrigée de façon à satisfaire l'équation de continuité de la charge électrique :

$$\text{Div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

IV.2.b. Application : établissement du régime permanent dans un conducteur ohmique.

La densité de courant \vec{J} satisfait l'équation de continuité & la loi d'Ohm locale $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, où γ est la conductivité du matériau. On élimine \vec{E} au moyen de l'équation de Maxwell - Gauss : $\text{Div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, ce

qui fournit une équation différentielle en $\rho(t)$ donnant l'évolution de la densité volumique de charge pendant le régime transitoire, soit : $\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, où la constante de temps vaut approximativement

$\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \approx 10^{-17}$ s, donc non mesurable & on peut raisonnablement considérer que la densité ρ est constamment nulle.

Remarque : si on ajoute au tableau des équations de Maxwell la loi d'Ohm locale $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, la force de Lorentz sur une particule chargée : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, & la loi de Newton de la gravitation donnée par $\vec{F} = -G \frac{mm'}{r^2} \vec{u}$, on obtient sept équations qui contiennent toute la physique (électricité, optique, mécanique) à l'exclusion de physique quantique & statistique (thermodynamique).

IV.3. Equations de Propagation

IV.3.a. Lien entre champs & potentiels : on a les relations : $\vec{B} = \text{Rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\text{Grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

IV.3.b. Equations de propagation des champs :

On utilise la relation : $\text{Rot}(\text{Rot } \vec{X}) = \text{Grad}(\text{Div } \vec{X}) - \Delta \vec{X}$ déduite de la relation du double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, avec : $\text{Rot } \vec{X} = \vec{\nabla} \wedge \vec{X}$, où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur vectoriel différentiel « Nabla » de composantes $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. En utilisant les équations de Maxwell, & en tenant compte que ρ est toujours nul dans le vide ou un conducteur, on obtient les équations :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{X} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} &= \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} && \text{(conducteur)} \\ \Delta \vec{X} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} &= \vec{0} && \text{(vide), où } \vec{X} = \vec{E} \text{ ou } \vec{B}. \end{aligned}$$

Remarquer que le premier membre ne dépend pas de la nature du milieu, alors que le second le caractérise. On rencontrera en pratique la propagation dans le vide (où $\vec{J} = \vec{0}$), dans un conducteur ($\vec{J} = \gamma \vec{E}$), dans un supraconducteur ($\vec{J} = \gamma \vec{E} - \lambda \vec{A}$), dans un plasma (milieu diélectrique où $\epsilon_r = f(\omega)$).

Rappelons que les équations de Maxwell sont conventionnellement écrites dans un repère lié au circuit, le seul clairement défini (cas de Neumann, ce qui se voit avec l'expression du champ électromoteur dans l'expression de \vec{E}).

IV.3.c. Equations de propagation des potentiels : commencer par \vec{A} ! (ordre alphabétique !)

La méthode précédente ne peut être appliquée qu'à un vecteur. Elle conduit à :

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{Grad} \left[\text{Div } \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right]$$

Comme le potentiel-vecteur \vec{A} n'est défini à un gradient près, on peut toujours annuler le crochet d'où la deuxième jauge de Lorentz : $\text{Div } \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ qui redonne la première en régime permanent.

& le potentiel-vecteur satisfait à la même équation de propagation que les champs. Comme le potentiel scalaire V n'est pas un vecteur, on ne peut utiliser la même méthode mais on utilise la définition intrinsèque de l'opérateur Laplacien : peu d'intérêt.

IV.3.d. Invariance de Jauge :

On considère deux couples de potentiels (\vec{A}, V) & (\vec{A}', V') donnant le même couple de champs (\vec{E}, \vec{B}) .

Alors : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A}'$, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{Grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{Grad}} V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$. Avec : $\overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{\text{Grad}}) = \vec{0}$, on aura :

$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{Grad}} f$, où f est une fonction quelconque de (x, y, z, t) . On reporte dans \vec{E} , ce qui conduit à :

$$\overrightarrow{\text{Grad}} V' = \overrightarrow{\text{Grad}} \left[V - \frac{\partial f}{\partial t} \right], \text{ d'où on déduit } \boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{Grad}} f \ \& \ V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Si on impose que le deuxième couple de potentiels satisfasse aussi la seconde jauge de Lorentz, on obtient :

$$\text{Div} \vec{A}' + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V'}{\partial t} = 0 = \left[\text{Div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right] + \text{Div}(\overrightarrow{\text{Grad}} f) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \text{ soit aussi :}$$

$$\boxed{\Delta f - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

& la fonction f satisfait aussi à l'équation de propagation.

IV.4. Conditions de Passage :

Rappelons les relations de continuité sur les champs à la traversée d'une surface ouverte S pouvant porter une densité surfacique de charges statiques σ & une densité de courant en surface \vec{J}_S séparant deux milieux caractérisés par $(\epsilon_{r1}, \mu_{r1})$ & $(\epsilon_{r2}, \mu_{r2})$:

$$\boxed{E_{t1} = E_{t2}, \ B_{n1} = B_{n2}, \ \vec{D} \cdot \vec{N}_{21} + \vec{D} \cdot \vec{N}_{12} = \sigma, \ \Delta H_{t\perp} = J_S}$$

où les indices t & n désignent respectivement des composantes tangentielles & normales relativement à la surface S , & l'indice $t\perp$ une composante tangentielle orthogonale à la densité de courant J_S . Les grandeurs \vec{N}_{12} & \vec{N}_{21} désignent des vecteurs unitaires se dirigeant du milieu correspondant au premier indice vers l'autre. Il en résulte que la formule donnant la discontinuité du vecteur \vec{D} est symétrique (les deux milieux jouant des rôles équivalents), & que cette symétrie est détruite (notation Δ) par le choix d'une seule orientation pour la normale & alors $\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}$.

IV.5. Propagation**IV.5.a. Généralités sur les ondes :**

On rappelle qu'une onde correspond à la propagation d'un mouvement vibratoire. Si la vibration a lieu orthogonalement à la direction de propagation, l'onde est dite transversale (cas des ondes électromagnétiques), & sera dite longitudinale (cas du son) si la vibration se fait suivant la direction de propagation. Si la vitesse des ondes dépend de la fréquence, le milieu traversé par les ondes sera dit dispersif.

Remarque : en partant de l'hypothèse d'un milieu homogène, isotrope, non dispersif, sans pertes (donc

vitesse & amplitude de l'onde constantes) on établit l'équation dite de d'Alembert : $\boxed{\Delta f - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$.

Remarque que cette équation est en V^2 , incluant l'onde réfléchie.

IV.5.b. Onde plane progressive harmonique (opph):

Elle est de la forme : $\underline{f} = F \cdot \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = F \cdot e^{j\varphi}$, où $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$ est appelé vecteur d'onde, \vec{u} étant

le vecteur unitaire de la direction de propagation. La notation complexe est permise car l'équation d'onde est linéaire. Seule la partie réelle de \underline{f} a un sens physique : c'est un cosinus, donc pair, & le sens des termes dans la phase ne semble pas avoir d'importance, mais il faut garder ce sens si on veut faire le lien avec

l'alternatif ordinaire $\left(\frac{\partial}{\partial t} = +j\omega\right)$. Une surface d'onde est telle que la phase φ est constante. Dans une onde

progressive, le temps & les variables d'espace y figurent, de sorte que la surface d'onde (ici un plan pour une OPPH) se déplace à la vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$. Une telle onde ne peut exister que dans un milieu

ouvert, donc infini, sans frontières, où donc il n'existera pas d'onde réfléchie. Alors ses paramètres (ω , λ) sont continus.

Remarque : le théorème de Fourier permet de décomposer toute onde périodique en superposition d'ondes planes, d'où l'intérêt de ces dernières. Il en résulte qu'on pourra toujours écrire que $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$, & que seule la dépendance spatiale de l'onde variera d'un problème à l'autre.

IV.5.c. Onde stationnaire :

Dans un milieu fermé, donc fini, donc limité par des frontières (qui donneront naissance à une onde réfléchie), on écrit des conditions aux limites appropriées. Par exemple, pour une propagation suivant Ox dans un milieu fermé de longueur L , avec frontières fixes :

$f(x, t) = F_o \cos(\omega t - kx) + F'_o \cos(\omega t + kx) = 0$ en $x = 0$ ou L , & ceci quel que soit t . Remarquer qu'il est prudent de revenir aux notations réelles car l'exponentielle complexe ne s'annule pas. La condition en $x = 0$ conduit à $F_o = -F'_o$ (miroir parfait). On transforme la différence de cosinus en produit, & la condition en L conduit à $\sin(kL) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$, puis $\omega_n = k_n V = n \frac{\pi V}{L}$. Les conditions aux limites conduisent

à la quantification des paramètres. La solution s'écrit alors :

$f(x, t) = \sum_n F_n \cdot \sin\left(n \frac{\pi V}{L} t\right) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$. Remarquer que le temps & la variable d'espace interviennent

dans des phases différentes, de sorte que la condition $\varphi = cste$ conduit à $x = cste$, & les surfaces d'onde ne se déplacent plus.

IV.5.d. Application aux ondes électromagnétiques :

En identifiant l'équation de propagation à l'équation de d'Alembert, on obtient la relation de Maxwell

$\boxed{\varepsilon_o \mu_o c^2 = 1}$ qui conduit à l'invariance de c & donc à la théorie de la Relativité.

L'onde plane électromagnétique est alors constituée du trièdre direct $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$, & l'on a la relation entre normes : $E = cB$. On appelle polarisation de l'onde la direction du champ électrique.

IV.5.e. Aspect énergétique :

On appelle densité d'énergie de l'onde la quantité : $u = \frac{1}{2} \varepsilon_o E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o}$. Dans le cas d'une onde plane, les deux termes sont égaux.

On définit le vecteur de Poynting par la relation : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. Il est donc porté par la direction de

propagation. Dans le cas d'une onde plane, on a $\vec{\Pi} = u \cdot \vec{c}$.

En partant de la formule $\text{Div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{Rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{Rot } \vec{B}$, on établit l'équation de continuité de l'énergie

(ou équation locale de Poynting) : $\text{Div } \vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$

Les termes de cette équation sont homogènes à une puissance volumique. Le second membre correspond alors à l'effet Joule volumique dans un milieu conducteur. Dans le vide, ce terme est nul & on retrouve la forme classique d'une équation de continuité.

En intégrant cette équation sur le volume limité par une surface fermée Σ , on obtient l'équation intégrale

de Poynting traduisant le bilan énergétique sur Σ : $\frac{\partial W}{\partial t} = -\Phi - P_J$

où W est l'énergie contenue à l'instant t dans la surface fermée Σ . Elle diminue donc pour deux raisons : le terme P_J correspond à la puissance dissipée par effet Joule dans Σ , & le flux Φ du vecteur de Poynting (donc homogène à une puissance) correspond à la puissance qui sort de Σ par rayonnement.

Remarque : la puissance d'une onde plane de section S (faisceau cylindrique, cas du faisceau LASER avec une bonne approximation) se propageant dans le vide est alors donnée par la relation : $P = S u c$, ce qui permet de calculer les champs d'un LASER de puissance.

IV.5.f. Corde vibrante :

On étudie les petites déformations transversales d'une corde de masse négligeable : on en déduit l'équation

de d'Alembert sous la forme : $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$, ξ étant l'élongation transversale, & V la vitesse de l'onde

donnée par : $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ où T est la tension de la corde & $\mu = \frac{dm}{dl}$ sa masse linéique. On reconnaît bien les deux paramètres commandant le son d'une corde de guitare par exemple.

IV.5.g. Propagation du son dans un fluide :

Dans un fluide subissant de petits mouvements isentropiques, la vitesse du fluide v & la surpression p vérifient l'équation de d'Alembert, obtenue en écrivant l'équation de conservation de la masse, l'équation

d'Euler du mouvement & l'invariant thermodynamique. La vitesse du son est donnée par : $c_s = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide au repos, & $\chi_s = \frac{-1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$ le coefficient de compressibilité

isentropique. La densité d'énergie vaut alors : $u = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{1}{2} \chi_s p^2$, & le vecteur de Poynting :

$\vec{\Pi} = p \cdot \vec{v}$. Si la section de l'écoulement est constante, l'impédance acoustique est définie par :

$Z = \frac{p}{v} = \rho_0 c_s$. Si la section est variable, on divisera p par Sv .

V. Chapitre V : Propagation guidée des ondes électromagnétiques

V.1. Introduction

L'objectif de cette partie est de décrire le comportement d'une onde électromagnétique se propageant dans un matériau diélectrique occupant un espace restreint.

V.1.a. Équations de Maxwell dans un matériau diélectrique.

La réduction de vitesse de propagation que subit une onde lumineuse arrivant du vide dans la matière peut s'expliquer avec des arguments simples : le champ électrique périodique de l'onde incidente exerce une force sur les électrons du milieu. Cette force entraîne l'oscillation des électrons à la même fréquence que l'onde incidente ce qui se traduit par l'émission d'une onde électromagnétique de même fréquence. Le champ total résultant est la superposition cohérente des champs de l'onde incidente et de l'onde émise par le milieu. L'interférence de ces ondes conduit à une propagation plus lente dans le milieu matériel que dans le vide.

Lorsqu'un matériau est soumis à un champ extérieur, des phénomènes microscopiques se produisent qui influent sur ses propriétés ; par exemple sous l'effet d'un champ électrique \vec{E} le barycentre des charges négatives (nuage électronique) d'une molécule et celui des charges positives (le noyau) ne coïncident plus nécessairement. On forme donc au sein de la matière des dipôles électriques élémentaires $d\vec{\mu}$ contenus

dans le volume $d\tau$ et on définit le **vecteur polarisation** $\vec{P} = \frac{d\vec{\mu}}{d\tau}$.

De même sous l'influence d'un champ magnétique \vec{B} on génère des courants microscopiques qui donnent lieu à l'existence d'une aimantation élémentaire $d\vec{m}$ dans un volume élémentaire $d\tau$. On définit alors le

vecteur aimantation $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$.

Pour les **matériaux diélectriques** on définit alors les **vecteurs induction électrique** \vec{D} et **induction magnétique** \vec{H} par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

et

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

Pour les **matériaux linéaires et isotropes** \vec{D} et \vec{B} sont simplement reliés à \vec{E} et \vec{H} via les **permittivités** et **perméabilité** relatives ϵ_r et μ_r :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \text{ où } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \text{ où } \mu = \mu_0 \mu_r$$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors (régime variable possible) :

Intrinsèques :	Conservation Flux Magnétique :	$\text{div}(\vec{B}) = 0$
	Maxwell-Faraday (MF) :	$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Dépendent du milieu : (ϵ, μ, j)	Maxwell-Gauss (MG) :	$\text{div}(\vec{D}) = \rho_{\text{charges}}$

$$\text{Maxwell-Ampère (MA)} : \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Parmi les matériaux diélectriques, on peut distinguer ceux sans pertes de ceux avec pertes. Dans la suite nous considérons un **diélectrique sans pertes** permettant d'écrire que les champs \vec{E} et \vec{H} sont en phase. Dans ce cas leur amplitudes E et H sont un réel et leur rapport E/H , qui est l'**impédance de l'onde**, est réel. Pour un **diélectrique avec pertes** les champs \vec{E} et \vec{H} sont déphasés et leurs amplitudes ainsi que l'impédance sont des quantités complexes.

Dans un **diélectrique parfait**, c'est-à-dire de densités volumiques permanentes de charge et de courant nulles (matériau neutre et isolant) : $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Nous obtenons les expressions suivantes qui se simplifient (secondes égalités de droite) selon la condition supplémentaire d'un **milieu homogène de permittivité diélectrique ϵ et magnétique μ toutes deux isotropes** :

Intrinsèques :		Conservation Flux Magnétique :	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	\Rightarrow	idem.
		Maxwell-Faraday (MF) :	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	\Rightarrow	idem.
Dépendent du milieu :		Maxwell-Gauss (MG) :	$\text{div}(\epsilon \vec{E}) = 0$	\Rightarrow	$\text{div}(\vec{E}) = 0$
		Maxwell-Ampère (MA) :	$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	\Rightarrow	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Par la suite, pour simplifier l'écriture des équations, ce **diélectrique sera le vide** (ou l'air), caractérisé par une constante diélectrique (ou permittivité) ϵ_0 et une perméabilité magnétique μ_0 (soit $\epsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$). Néanmoins la méthode exposée sera généralisable à n'importe quel matériau diélectrique (ϵ, μ).

V.1.b. Equations de Propagation :

Par combinaison des équations de Maxwell on obtient deux équations du second ordre auxquelles satisfont les champs \vec{E} et \vec{B} .

$$\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\vec{E})}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}}(\rho)$$

et

$$\Delta(\vec{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\vec{B})}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j})$$

Dans le vide :

$$\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\vec{E})}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\Delta(\vec{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\vec{B})}{\partial t^2} = 0$$

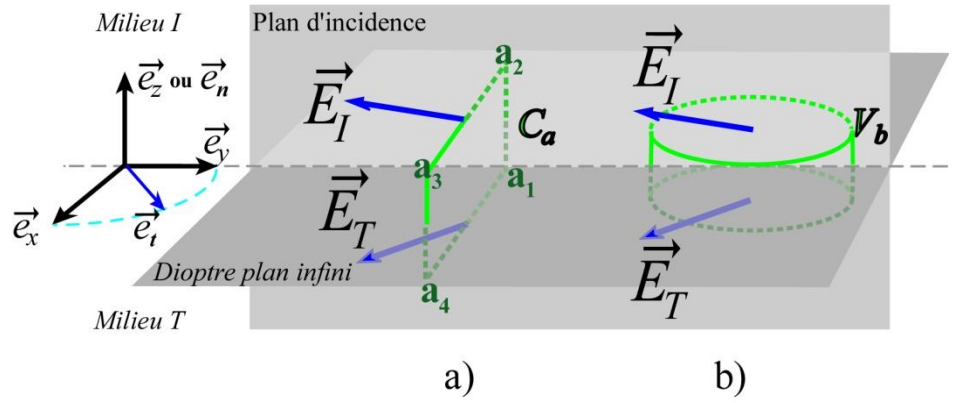
qui suggèrent la propagation d'une onde électromagnétique à la vitesse c .

V.1.c. Equations de continuité du champ électromagnétique à la surface d'un dioptre.

Lorsqu'une onde se propage dans un milieu I et atteint un dioptre le séparant du milieu T , il apparaît une onde dans celui-ci. Les équations liant les champs de ces deux ondes sont dites **équations de continuité** et sont dérivées des équations de Maxwell. Elles s'appliquent au cas général d'une **polarisation quelconque** de l'onde électromagnétique incidente où les champs \vec{E} et \vec{B} sont simplement caractérisés par une **composante normale** (selon \vec{e}_n) et une **composante tangentielle** au dioptre (coplanaire à \vec{e}_t).

En premier lieu considérons les flux des deux membres des deux premières équations de Maxwell à travers la surface S_a délimitée par le contour rectangulaire C_a de la Figure (a).

Figure V.1 : Contour rectangulaire C_a qui délimite la surface S_a , et volume cylindrique V_b de surface S_b , tous deux sont impliqués dans la démonstration des équations de continuité du champ électromagnétique à la surface de séparation des deux milieux indicés I et T . La hauteur des deux constructions est infiniment petite par rapport aux dimensions de leur base parallèle et de part et d'autre du dioptre.



L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ conduit à : $\iint_{S_a} \overrightarrow{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_a} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

Selon la formule de Stokes appliquée au premier membre et puisque la dérivée de la fonction continue B l'est aussi, cette relation devient :

$$\int_{C_a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_a} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le premier terme s'obtient en considérant uniquement les composantes tangentielles de \vec{E} dont les circulations sur $\overline{a_1 a_2}$ et $\overline{a_3 a_4}$ sont nulles et constantes sur $\overline{a_2 a_3}$ et $\overline{a_4 a_1}$.

Le flux de \vec{B} étant infiniment petit comparé à $\overline{a_2 a_3}$ l'on obtient : $E_{t,I} \cdot \overline{a_2 a_3} + E_{t,T} \cdot \overline{a_4 a_1} = 0$

Cette relation est valable pour tout ce plan :

$$\boxed{E_{t,I} = E_{t,T}}$$

Donnons également la relation obtenue de façon analogue avec l'équation Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} : \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_{t,I} / \mu_I = B_{t,T} / \mu_T}$$

La relation de Maxwell-Gauss, $div(\vec{D}) = 0$, et la conservation du flux magnétique, $div(\vec{B}) = 0$, sont utilisées avec le volume d'intégration cylindrique décrit sur figure. En utilisant le théorème d'Ostrogradski on arrive aux égalités suivantes :

$$\iiint_{V_b} div(\vec{D}) dV = \iint_{S_b} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

Seules les composantes normales au dioptre sont à considérer puisque le rapport des flux à travers les bases est infiniment grand devant celui à travers les surfaces latérales et D_y est constant. Ainsi les flux de chaque base doivent s'annuler ce qui donne la relation suivante :

$$\boxed{\varepsilon_I E_{n,I} = \varepsilon_T E_{n,T}}$$

Des considérations similaires appliquées à l'équation de Maxwell conduisent à la deuxième équation suivante :

$$\boxed{B_{n,I} = B_{n,T}}$$

V.2. Guidage sur un plan conducteur parfait.

Par la suite le champ électromagnétique sera **confiné dans un matériau diélectrique enrobé par un conducteur parfait**. Considérons dans un premier temps ce qui se passe au cours de la réflexion de l'onde arrivant du diélectrique sur l'interface du conducteur. On utilisera alors la convention suivante :

Indice **1** : **diélectrique**.

Indice **2** : **conducteur parfait**.

V.2.a. Rappels sur les conducteurs parfaits (type métal).

Un **conducteur est parfait si sa conductivité γ est infinie** (pas de résistivité au passage des charges). Par contre la vitesse \vec{v} des charges mobiles ne peut diverger, ce qui implique que le **vecteur densité de courant** $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ (caractérisant le flux des porteurs de charge de densité volumique ρ_m) doit aussi garder un module fini. Puisqu'il est lié au champ électrique dans le conducteur par la forme locale de la **loi d'Ohm** : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (γ en [S.m^{-1}]), cela implique que la divergence de γ 's'accompagne de la nullité du champ \vec{E} (vrai en régime statique ou variable). En réflexion l'onde électromagnétique ne pénètre donc pas un conducteur parfait (épaisseur de peau tendant vers zéro) et la réflexion est totale sur la surface conductrice qui constitue donc un nœud du champ \vec{E} où il est nul. Le champ magnétique \vec{H} (d'induction) est de même nul en chaque point du conducteur parfait. On peut démontrer quand on sait exprimer la forme explicite du champ total, que la surface du conducteur (épaisseur de peau infiniment faible) est le siège de courants superficiels \vec{j}_s qui ne dissipent pas d'énergie par effet joule.

V.2.b. Equations de continuité des champs à l'interface diélectrique/métal.

Nous avons vu que les champs magnétiques et électriques **sont continus lorsque l'on franchit une interface entre deux matériaux, sauf si l'un d'eux est un conducteur parfait**. Dans ce dernier cas il est alors caractérisé par des **densités de charges et de courants surfaciques** σ_s et \vec{j}_s .

On repère par les indices 1 et 2 les deux matériaux présentant une interface commune et par \vec{n}_{12} le vecteur normal à l'interface dirigé du matériau 1 vers le matériau 2. On indique respectivement par un indice **T** ou **n** les **composantes tangentielles et normales à l'interface**.

Les équations de continuité pour les champs s'écrivent alors :

Champ Electrique :

$$\vec{E}_{T1} = \vec{E}_{T2}$$

$$\vec{D}_{n2} - \vec{D}_{n1} = \sigma_s \vec{n}_{12}$$

et $\left. \begin{array}{l} \vec{j}_s \neq 0 \\ \sigma_s \neq 0 \end{array} \right\}$ pour un **conducteur parfait**. Ils sont nuls sinon.

Champ Magnétique :

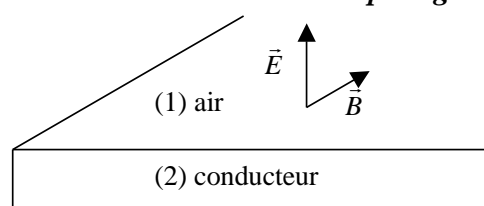
$$\vec{B}_{n2} = \vec{B}_{n1}$$

$$\vec{H}_{T2} - \vec{H}_{T1} = \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

Considérons l'interface particulière entre un milieu diélectrique et un milieu conducteur. on a donc (les champs électrique et magnétique étant nuls dans le conducteur) :

$\vec{E}_{T1} = \vec{E}_{T2} = 0$ d'où à l'interface : - **Le champ électrique est normal au conducteur.**

et $\vec{B}_{n2} = \vec{B}_{n1} = 0$ - **Le champ magnétique est tangent au conducteur.**



FigureV.1 : champs électrique et magnétique à l'interface diélectrique-conducteur parfait

Considérons une onde plane se propageant dans le vide (ou dans un diélectrique : ϵ_r et μ_r) qui est dirigée vers un plan parfaitement conducteur Π_I . On choisit les axes du référentiel tels que le plan conducteur est le plan (Oy,Oz) et le plan d'incidence (Ox,Oz) (plan contenant la normale au plan de réflexion et le vecteur propagation de l'onde incidente). Cette onde donne naissance à une onde réfléchie et on sait d'après les **lois de Snell-Descartes** que l'angle de réflexion doit être égal à l'angle d'incidence (purement spéculaire) pour une interface parfaite (plane latéralement (Oy,Oz) et abrupte selon (Ox)).

Pour tenir compte de différents cas de polarisation de l'onde incidente, nous allons traiter successivement des deux cas fondamentaux de polarisation. Rappelons qu'une onde de champ de polarisation quelconque peut toujours se décomposer en une composante de champ perpendiculaire au plan d'incidence et en une composante de champ comprise dans le plan d'incidence. Pour ces deux composantes particulières des champs incidents (\vec{E}_i ou \vec{H}_i), soit transverse ou soit inclus dans le plan d'incidence, il est intéressant de noter que les champs réfléchis (\vec{E}_r ou \vec{H}_r) seront aussi soit transverse ou soit inclus dans le plan d'incidence. Ceci implique donc une polarisation uniforme dans tout l'espace $x>0$ pour le champ résultant de la superposition de l'onde incidente et réfléchie.

V.2.a. Cas 1 : Onde Transverse Electrique (TE). Champ électrique incident perpendiculaire au plan d'incidence (alors le champ magnétique est dans le plan d'incidence).

On utilisera les conventions de la Figure V.2 pour la représentation des ondes incidentes et réfléchies. Ici le champ électrique de l'onde incidente est perpendiculaire au plan d'incidence. On considère le cas de l'incidence oblique d'angle α mais ces démonstrations s'étendent au cas de l'incidence normale ($\alpha=\pi/2$).

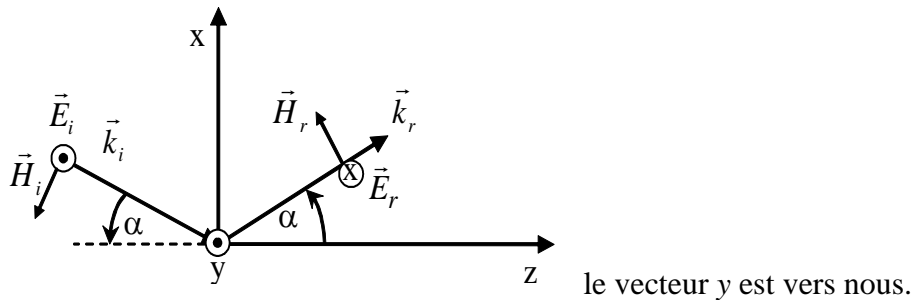


Figure V.2 : ondes incidente et réfléchie par un plan conducteur ; le champ électrique incident est normal au plan d'incidence.

V.2.a.1. Expressions des champs électriques et magnétiques propagés.

On a suit l'onde incidente caractérisée par :

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \vec{k}_i = \begin{pmatrix} -k \sin \alpha \\ 0 \\ k \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ et } \|\vec{k}_i\| = k = \frac{\omega}{c} \text{ ou } 2\pi/\lambda.$$

L'équation de Maxwell-Faraday sur $\vec{B}_i = B_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \frac{\vec{B}_i}{\|\vec{B}_i\|}$ conduit à :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}_i) = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} \Rightarrow -i\omega \vec{B}_i = i \vec{k}_i \wedge \vec{E}_i \text{ soit à : } \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega}$$

$$\text{où le produit vectoriel est : } \vec{k}_i \wedge \vec{E}_i = \begin{vmatrix} -k \sin \alpha & 0 \\ 0 & E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ k \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k E_0 \cos \alpha e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ 0 \\ -k E_0 \sin \alpha e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{B}_i = \begin{vmatrix} -\frac{k}{\omega} E_0 \cos \alpha e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ 0 \\ -\frac{k}{\omega} E_0 \sin \alpha e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \end{vmatrix}$$

en rappelant que le module du vecteur induction magnétique dans le vide est :

$$H_0 = \frac{\|\vec{B}_0\|}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{k}{\omega} E_0 \right)$$

on obtient finalement :

$$\boxed{\vec{E}_i = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ 0 \end{vmatrix}} \text{ et } \boxed{\vec{H}_i = \begin{vmatrix} -H_0 \cos \alpha e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ 0 \\ -H_0 \sin \alpha e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \end{vmatrix}} \text{ avec } \vec{k}_i \cdot \vec{r} = -k \sin \alpha x + k \cos \alpha z$$

On procède de même pour l'onde réfléchie :

$$\text{Le champ électrique vaut : } \vec{E}_r = \begin{vmatrix} 0 \\ E_r e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et son vecteur d'onde : } \vec{k}_r = \begin{vmatrix} k \sin \alpha \\ 0 \\ k \cos \alpha \end{vmatrix} \text{ avec } \|\vec{k}_r\| = \|\vec{k}_i\| = \frac{\omega}{c} = k$$

Le champ magnétique s'obtient grâce à la relation : $\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega}$

$$\text{D'où } \vec{B}_i = \begin{vmatrix} -\frac{k}{\omega} \cos \alpha E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ 0 \\ \frac{k}{\omega} \sin \alpha E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \end{vmatrix} \text{ avec : } \boxed{H_r = \frac{k E_r}{\mu_0 \omega}}$$

$$\text{soit : } \boxed{\vec{E}_r = \begin{vmatrix} 0 \\ E_r e^{i(\omega t - k \sin \alpha x - k \cos \alpha z)} \\ 0 \end{vmatrix}} \text{ et } \boxed{\vec{H}_r = \begin{vmatrix} -H_r \cos \alpha e^{i(\omega t - k \sin \alpha x - k \cos \alpha z)} \\ 0 \\ H_r \sin \alpha e^{i(\omega t - k \sin \alpha x - k \cos \alpha z)} \end{vmatrix}} \text{ avec } \vec{k}_r \cdot \vec{r} = +k \sin \alpha x + k \cos \alpha z$$

Les conditions aux limites en $\underline{x} = 0$ imposent que l'on ait $\vec{E}_{T1} = \vec{E}_{T2} = 0$. Attention dans cette notation T indique une composante tangente au dioptre ((Oy,Oz), plan de l'interface) et ne doit pas être confondu avec l'adjectif transverse qui lui se réfère à l'orientation du champ par rapport au plan d'incidence (ici \neq du dioptre). Dans le milieu d'incidence noté 1 ($x > 0$), l'onde est la superposition des champs incidents et réfléchis $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$. Puisque les champs \vec{E}_i et \vec{E}_r n'ont pas de composante normale au dioptre on a $\vec{E}_{T1} = \vec{E}_{Ti} + \vec{E}_{Tr}$, ou encore $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{0}$. On en déduit que le champ réfléchi a un sens opposé au champ incident : $\vec{E}_r = -\vec{E}_i$ et que son amplitude est donc : $E_r = -E_0$.

Puisque le trièdre formé par \vec{E}_r , \vec{H}_r et la direction de propagation est directe, on en déduit que \vec{H}_r est alors dirigé vers le haut contrairement à \vec{H}_i et de même on obtient : $H_r = -H_0$.

Notons que les amplitudes des champs après réflexion ne sont pas atténuées et c'est pour cela qu'on parle de réflexion totale (pas d'onde transmise dans le milieu conducteur).

Finalement avec $H_0 = \frac{k}{\omega} \left(\frac{E_0}{\mu_0} \right)$ ou $k = \frac{\omega}{c}$, on obtient :

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 e^{i(\omega t + kx \sin \alpha - kz \cos \alpha)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{H}_i = \begin{pmatrix} -H_0 (\cos \alpha) e^{i(\omega t + kx \sin \alpha - kz \cos \alpha)} \\ 0 \\ -H_0 (\sin \alpha) e^{i(\omega t + kx \sin \alpha - kz \cos \alpha)} \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 e^{i(\omega t - kx \sin \alpha - kz \cos \alpha)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{H}_r = \begin{pmatrix} H_0 (\cos \alpha) e^{i(\omega t - kx \sin \alpha - kz \cos \alpha)} \\ 0 \\ -H_0 (\sin \alpha) e^{i(\omega t - kx \sin \alpha - kz \cos \alpha)} \end{pmatrix}$$

On en déduit le champ électrique total coté vide (diélectrique $x > 0$) par la superposition : $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 e^{i(\omega t - kz \cos \alpha)} \left(\frac{e^{ikx \sin \alpha} - e^{-ikx \sin \alpha}}{2i} \right) 2i \\ 0 \end{pmatrix} = i 2E_0 \sin(kx \sin \alpha) e^{i(\omega t - kz \cos \alpha)}$$

et le champ magnétique qui lui est associé :

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} -H_0 \cos(\alpha) e^{i(\omega t - kz \cos \alpha)} \left(\frac{e^{ikx \sin \alpha} - e^{-ikx \sin \alpha}}{2i} \right) 2i \\ 0 \\ -H_0 \sin(\alpha) e^{i(\omega t - kz \cos \alpha)} \left(\frac{e^{ikx \sin \alpha} + e^{-ikx \sin \alpha}}{2} \right) 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i 2H_0 (\cos \alpha) \sin(kx \sin \alpha) e^{i(\omega t - kz \cos \alpha)} \\ 0 \\ -2H_0 (\sin \alpha) \cos(kx \sin \alpha) e^{i(\omega t - kz \cos \alpha)} \end{pmatrix}$$

- **L'onde résultante** (interférence champ incident et réfléchi) **est transverse électrique (TE) tout comme l'onde incidente et réfléchie**. Elle n'est pas transverse magnétique (TM).
- On parle aussi du **mode H** car seul le champ magnétique a une composante dans la direction de propagation (z).
- Le champ magnétique possède deux composantes orthogonales comprises dans le plan d'incidence. On dit qu'il a une polarisation elliptique perpendiculaire au champ électrique. Ces deux composantes H_x et H_z sont déphasés de 90.

V.2.a.2. Propagation de l'onde et de l'énergie.

Déterminons le vecteur de Poynting : $\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}$. Rappelons que $\vec{E} \wedge \vec{B}$ n'est pas une opération linéaire et qu'en toute rigueur on calcule : $\vec{P} = \frac{Re(\vec{E}) \wedge Re(\vec{B})}{\mu}$. Puisqu'on va considérer ici la moyenne

sur le temps de \vec{P} , utilisons la formule : $\langle \vec{P} \rangle_t = \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{H}^*}{2} \right)$. On peut ainsi pousser plus loin la

notation complexe, soit :

$$\langle \vec{P} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\begin{array}{c|c} E_x = 0 & H_x^* \\ E_y & H_y^* = 0 \\ E_z = 0 & H_z^* \end{array} \right) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\begin{array}{c} E_y H_z^* \\ 0 \\ -E_y H_x^* \end{array} \right),$$

à ce stade on peut remarquer parmi les termes intervenant dans les deux composantes non nulles P_x et P_z que :

- La composante longitudinale du champ magnétique H_z est en quadrature avec E_y (et avec H_x).
- La composante perpendiculaire du champ magnétique H_x vibre en phase avec E_y .

on obtient en conservant l'écriture complexe :

$$\langle \vec{P} \rangle_t = \text{Re} \begin{array}{l} -i 2E_0 H_0 \sin \alpha \sin(kx \sin \alpha) \cos(kx \sin \alpha) \\ 0 \\ 2E_0 H_0 \cos \alpha \sin^2(kx \sin \alpha) \end{array}$$

L'expression complexe des composantes montre que :

- Puisque P_x est un imaginaire pur : **la puissance propagée selon x est réactive**. Un régime d'onde stationnaire pure s'installe dans la direction perpendiculaire au dioptré.
- Puisque P_y est nul : **il n'y a pas de puissance électromagnétique transportée selon y**.
- P_z est un réel pur et correspond à $\langle \vec{P} \rangle_t = \text{Re}(\dots)$: **la puissance propagée selon z est active**. C'est la seule composante qui a un sens physique (celui d'une puissance propagée). Notez que cette composante est fonction de l'angle de réflexion et modulo de x (la distance au plan). **L'onde résultante se propage selon z avec le vecteur d'onde guidée : $\vec{k}_g = k \cos \alpha \vec{e}_z$**

Pour l'exercice on peut considérer le calcul partant de la définition du vecteur de Poynting :

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu} \left(\begin{array}{c|c} \text{Re}(E_x) = 0 & \text{Re}(B_x) \\ \text{Re}(E_y) & \text{Re}(B_y) = 0 \\ \text{Re}(E_z) = 0 & \text{Re}(B_z) \end{array} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\begin{array}{c} \text{Re}(E_y) \text{Re}(B_z) \\ 0 \\ -\text{Re}(E_y) \text{Re}(B_x) \end{array} \right)$$

avec : $\text{Re}(E_y) = -2E_0 \sin(kx \sin \alpha) \sin(\omega t - kz \cos \alpha)$ et $\sin X \cos X = 0,5 \sin(2X)$
 $\text{Re}(B_x) = -2\mu H_0 \cos(\alpha) \sin(kx \sin \alpha) \sin(\omega t - kz \cos \alpha)$
 $\text{Re}(B_z) = -2\mu H_0 \sin(\alpha) \cos(kx \sin \alpha) \cos(\omega t - kz \cos \alpha)$

on obtient $\vec{P} = \begin{array}{l} E_0 H_0 \sin(\alpha) \sin(2kx \sin \alpha) \sin(2\omega t - 2kz \cos \alpha) \\ 0 \\ -4E_0 H_0 \cos(\alpha) \sin^2(kx \sin \alpha) \sin^2(\omega t - kz \cos \alpha) \end{array}$

On prend maintenant la moyenne temporelle qui est nulle pour le $\sin(\omega t + \dots)$ et vaut 1/2 pour le $\sin^2(\omega t + \dots)$.

$$\langle \vec{P} \rangle_t = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 2E_0 H_0 \cos(\alpha) \sin^2(kx \sin \alpha) \end{array} . \text{ On retrouve la même expression du terme réel.}$$

V.2.b. Cas 2 : Onde Transverse Magnétique (TM). Champ magnétique incident perpendiculaire au plan d'incidence (alors le champ électrique est dans le plan d'incidence).

Les conventions de représentation des ondes incidentes et réfléchies sont données par la Figure V.3

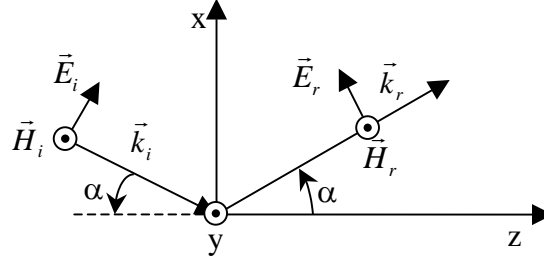


Figure V.3 : ondes incidentes et réfléchies par un plan conducteur ; le champ magnétique incident est normal au plan d'incidence.

V.2.b.1. Expressions des champs électriques et magnétiques propagés.

Les calculs se mènent de façon similaire, on obtient pour l'onde incidente :

$$\begin{aligned} E_{ix} &= E_0 \cos \alpha e^{i(\omega t + k \sin \alpha x - k \cos \alpha z)} & H_{ix} &= 0 \\ E_{iy} &= 0 & H_{iy} &= H_0 e^{i(\omega t + k \sin \alpha x - k \cos \alpha z)} \\ E_{iz} &= E_0 \sin \alpha e^{i(\omega t + k \sin \alpha x - k \cos \alpha z)} & H_{iz} &= 0 \end{aligned}$$

Considérons les relations de continuité à l'interface du conducteur parfait pour déterminer le sens des champs après réflexion. Concernant le champ magnétique, la condition de continuité concerne sa composante normale $\vec{H}_{n2} = \vec{H}_{n1} = \vec{0}$ or il est purement tangent au dioptre dans le cas présent (suivant Oy). Nous devons donc raisonner à partir des composantes du champ électrique. Comme nous l'avons vu : $\vec{E}_{T1} = \vec{E}_{Ti} + \vec{E}_{Tr} = \vec{0}$ soit $\vec{E}_{Tr} = -\vec{E}_{Ti}$. De plus \vec{E}_r doit être perpendiculaire à la direction de propagation \vec{k}_r , ce qui impose son sens et permet d'en déduire que $\vec{H}_r = \vec{H}_i$.

Par conséquent on obtient pour l'onde réfléchie :

$$\begin{aligned} E_{rx} &= E_0 \cos \alpha e^{i(\omega t - k \sin \alpha x - k \cos \alpha z)} & H_{rx} &= 0 \\ E_{ry} &= 0 & H_{ry} &= H_0 \cos \alpha e^{i(\omega t - k \sin \alpha x - k \cos \alpha z)} \\ E_{rz} &= -E_0 \sin \alpha e^{i(\omega t - k \sin \alpha x - k \cos \alpha z)} & H_{rz} &= 0 \end{aligned}$$

d'où pour l'onde résultante dans le milieu diélectrique :

$E_x = 2E_0 \cos \alpha \cos(k x \sin \alpha) e^{i(\omega t - k z \cos \alpha)}$	$H_x = 0$
$E_y = 0$	$H_y = 2H_0 \cos(k x \sin \alpha) e^{i(\omega t - k z \cos \alpha)}$
$E_z = 2iE_0 \sin \alpha \sin(k x \sin \alpha) e^{i(\omega t - k z \cos \alpha)}$	$H_z = 0$

- **L'onde résultante est transverse magnétique (TM) tout comme l'onde incidente et réfléchie.** Elle n'est pas transverse électrique (TE).
- On parle aussi du **mode E** car seul le champ électrique a une composante dans la direction de propagation (z).

V.2.b.2. Propagation de l'onde et de l'énergie.

- La composante longitudinale du champ électrique E_z est en quadrature avec E_x (et avec H_y).
- La composante perpendiculaire du champ électrique E_x vibre en phase avec H_y .

le vecteur de Poynting correspondant est :

$$\langle \vec{P} \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\begin{array}{c} E_x \\ E_y = 0 \\ E_z \end{array} \wedge \begin{array}{c} H_x^* = 0 \\ H_y^* \\ H_z^* = 0 \end{array} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\begin{array}{c} -E_z H_y^* \\ 0 \\ E_x H_y^* \end{array} \right)$$

soit en conservant la notation complexe :

$$\langle \vec{P} \rangle_t = \begin{cases} -i 2E_0 H_0 \sin \alpha \sin(kx \sin \alpha) \cos(kx \sin \alpha) \\ 0 \\ 2E_0 H_0 \cos \alpha \cos^2(kx \sin \alpha) \end{cases}$$

On aboutit aux mêmes conclusions pour l'onde incidente TM que pour l'onde incidente TE.

- P_x est un imaginaire pur.
- P_y est nul.
- P_z est réel pur: **la puissance active se propage selon z avec le vecteur d'onde guidée :**
 $\vec{k}_g = k \cos \alpha \vec{e}_z.$

Pour estimer la puissance propagée le long de z il faudrait intégrer sur un intervalle de x (en choisissant une période en x par exemple). Ceci revient à calculer le flux du vecteur de Poynting au travers d'une section transverse à la direction de propagation.

V.2.c. Quelques remarques et grandeurs utiles généralisables aux deux cas considérés (TE et TM) :

Le module du vecteur d'onde correspondant à l'onde se déplaçant **en espace illimité** s'écrit $k = \frac{\omega}{c}$ avec c la célérité de l'onde dans le diélectrique (le vide par exemple c_0).

V.3. Vitesse de phase v_ϕ de l'onde guidée.

Le vecteur propagation de l'onde guidée s'écrit : $k_g = (k) \cos \alpha = \left(\frac{\omega}{c} \right) \cos \alpha$. On peut en déduire la vitesse

de phase de l'onde guidée selon la relation : $k_g = \frac{\omega}{v_\phi}$, soit pour l'onde guidée : $v_\phi = \frac{c}{\cos \alpha}$

Puisque $\cos(\alpha) < 1$ on a forcément : $v_\phi = \frac{c}{\cos \alpha} > c$. Il n'y a rien de choquant car c 'est une vitesse de phase et non d'une particule.

La Figure V.4 représente deux plans équiphasse consécutifs pour l'onde réfléchi. La longueur d'onde λ représente la distance parcourue par cette onde durant une période T et est définie par :

$$\lambda = cT = c \frac{2\pi}{\omega}.$$

Si on note λ_x et λ_z les distances entre ces deux plans mesurées le long des axes x et z . On peut les qualifier de "longueurs d'onde apparentes". Ces deux plans joignent des points ayant un déphasage de 2π (par définition ils sont sur deux plans équiphasse et il faut donc le même temps pour parcourir λ (trajet oblique), λ_x (le long de x) et λ_z (le long de z)).

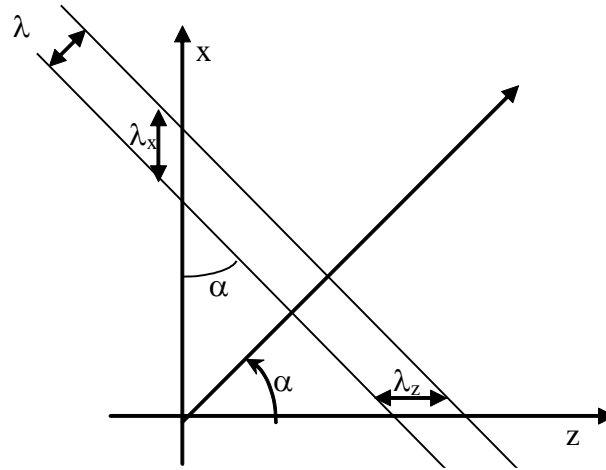


Figure V.4 : représentation de deux plans d'onde en phase de l'onde réfléchie.

On constate que géométriquement $\lambda_x = \frac{\lambda}{\sin \alpha}$ et $\lambda_z = \frac{\lambda}{\cos \alpha} = \frac{cT}{\cos \alpha}$. Ce qui permet de réécrire la vitesse de propagation de l'onde guidée observée selon Oz : $v_\varphi = \frac{c}{\cos \alpha} = \frac{\lambda_z}{T}$ (notons que v_φ augmente avec α).

Les ondes planes incidente et réfléchie se propagent à la célérité c (vitesse de propagation libre dans le milieu diélectrique), mais la superposition des deux ondes semble se propager plus vite le long de Oz et à la vitesse v_φ .

V.4. Impédance de l'onde guidée

Il est souvent utile d'introduire l'impédance de l'onde résultante. C'est le rapport des champs : $Z = \frac{\vec{E}}{\vec{H}}$

Dans le cas d'une onde TE, seule sa composante suivant la direction de propagation active de l'énergie (Oz) peut se définir et fait intervenir le rapport des composantes transverses des champs à cette direction :

$$Z_{z,TE} = \frac{E_y}{H_x} = \frac{E_0}{H_0} \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} \right).$$

Pour l'onde TM on obtient :

$$Z_{z,TM} = \frac{-E_x}{H_y} = \frac{E_0}{H_0} (\cos(\alpha)).$$

Annexe (A) : Les postulats de l'électromagnétisme classique.

1°) Les équations de Maxwell relatives au champ électromagnétique.

- Le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ en un point M à la date t dû à une distribution caractérisée dans le référentiel d'étude supposé galiléen, par la densité volumique totale de charges ρ_{tot} et le vecteur densité volumique totale de courants \vec{j}_{tot} satisfait aux équations ci-dessous

<u>Formulation locale.</u>	<u>Les relations intégrales.</u>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$ </div> (équation de Maxwell - Gauss). ① ϵ_0 est la permittivité absolue du vide . Les lignes de champ \vec{E} , divergent à partir des charges + pour aboutir aux charges -.	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> $\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ </div> <div style="text-align: right;">théorème de Gauss.</div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> $\text{div} \vec{B} = 0$ </div> (\vec{B} , est un champ de rotationnel). ② Les lignes de champ \vec{B} , sont des courbes fermées et ne peuvent jamais se couper (il n'existe pas de « monopôles magnétiques » comme il existe des charges électriques positives ou négatives).	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> $\oiint_{M \in \Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) = 0$ </div> \vec{B} , est à flux conservatif (Le flux de \vec{B} , à travers un circuit ne dépend que du circuit et non de la surface choisie pour calculer ce flux).
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> $\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ </div> (équation de Maxwell - Faraday). ③	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> $\oint_{M \in \Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$ </div> S s'appuie sur Γ . <div style="text-align: right;">Relation de Faraday.</div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{tot} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ </div> (équation de Maxwell - Ampère). ④ μ_0 est la perméabilité absolue du vide .	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 10px;"> $\oint_{M \in \Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 \iint_{P \in S} \vec{j}_{tot} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$ </div> où S s'appuie sur Γ orienté. Forme généralisée du théorème d'Ampère .

Il découle des relations précédentes que :

Le champ électrique \vec{E} , se comporte comme un **vecteur polaire** (donc contenu dans tout plan de symétrie des causes) tandis que le champ magnétique \vec{B} , se comporte comme un **vecteur axial** (donc perpendiculaire à tout plan de symétrie des causes).

Les équations de Maxwell sont **linéaires** vis-à-vis des sources : cette propriété valide le **principe de superposition** relatif à \vec{E} , et \vec{B} . En particulier, cette linéarité permet d'utiliser **la méthode complexe** pour les calculs des champs.

- **Unités et valeurs des constantes électromagnétiques du vide** ϵ_0 et μ_0 .

En u.s.i ,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

et

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$$

- **Mise en évidence du champ électromagnétique : loi de force.**

Le formalisme de l'électromagnétisme est complet à condition d'ajouter aux 4 équations locales la loi de force permettant de mettre en évidence la présence d'un champ électromagnétique.

Loi de force de Lorentz : $\vec{F}_{Lorentz} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$: force agissant sur une particule chargée de charge q , en mouvement dans le référentiel d'étude à la vitesse \vec{v} , où règne le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$.

□ **Action d'un champ électromagnétique sur un conducteur : force de Laplace.**

La **force de Laplace** est la force exercée par le champ $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ sur l'ensemble des charges d'un conducteur. Elle correspond à la force magnétique exercée sur les porteurs mobiles du conducteur.

La **force de Laplace par unité de volume** s'écrit : $\frac{d\vec{F}_{Laplace}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$.

2°) **Énergie du champ électromagnétique.**

Un champ électromagnétique contient et transporte de l'énergie. On définit :

□ **L'énergie électromagnétique volumique.**

La quantité $\varpi = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2 + \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$, homogène à une énergie volumique (exprimée en SI en $\mathbf{J/m^3}$)

est appelée **énergie électromagnétique volumique** (ou improprement **densité volumique d'énergie électromagnétique**). Cette expression montre que l'énergie est localisée dans le champ électromagnétique lui-même.

En isolant les contributions dues à \vec{E} et \vec{B} , on distingue :

$\varpi_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2$, **énergie électrique volumique** et $\varpi_{mag} = \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$, **énergie magnétique volumique**.

□ **Le vecteur de Poynting.**

On note $\vec{\Pi}$, le vecteur, appelé **vecteur de Poynting**, défini par : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$.

$\|\vec{\Pi}\|$ est homogène à une **puissance surfacique**, exprimé en SI en $\mathbf{W.m^{-2}}$.

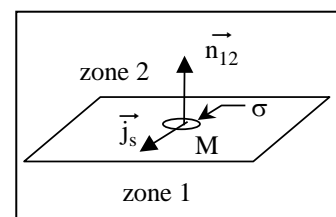
□ **Puissance volumique cédée aux charges par le champ électromagnétique :**

Puissance Joule volumique cédée à la matière par le champ électromagnétique : $\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j}_{tot} \cdot \vec{E}$.

3°) **Les relations de passage du champ électromagnétique.**

Soit M un point d'une surface S séparant deux milieux notés ① et ②. On définit le vecteur unitaire $\vec{n}_{12} \perp$ à S de ① vers ②.

Soit $\sigma(M)$ la densité surfacique de charges et $\vec{j}_s(M)$ le vecteur densité de courants surfacique au point M .



On établit à partir des équations de Maxwell les relations de passage pour \vec{E} et \vec{B} à l'interface :

$$\vec{E}_2(M) - \vec{E}_1(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(M) - \vec{B}_1(M) = \mu_0 \vec{j}_s(M) \times \vec{n}_{12}.$$



on retient qu'il y a continuité de la **composante tangentielle pour $E, \vec{}$** et **continuité de la composante normale pour $B, \vec{}$** .

NB : **Dans le cas d'une modélisation volumique de charges ou de courants, les champs $E, \vec{}$ et $B, \vec{}$ sont définis et continus en tout point de l'espace.**

Des problèmes de discontinuité peuvent survenir lorsqu'on passe à une modélisation plus simpliste (surfactive ou encore linéique).

Rappelons les équivalences des distributions de charges et de courant au voisinage de M :

$$dq = \begin{cases} \rho.d\tau \\ \sigma.dS \\ \lambda.d\ell \end{cases} \quad \text{et} \quad d\vec{C} = \begin{cases} \vec{j}.d\tau \\ \vec{j}_s.dS \\ i.d\vec{\ell} \end{cases}$$

4°) Les lois de conservation déduites des équations de Maxwell.

□ Principe de conservation de la charge électrique.

Sous forme intégrale :

Le courant électrique total sortant d'une surface fermée Σ est égal à la diminution par unité de temps de la charge électrique totale contenue dans le volume V limité par Σ :

$$I = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{ext} = - \frac{dQ_{int}}{dt}.$$

Sous forme locale : $div \vec{j} + \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} = 0$. Cette dernière équation se retrouve à partir des équations de

Maxwell en écrivant que $div(\text{rot}, \vec{}) = 0$.

□ Le cadre de l'A.R.Q.S.

Dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (A.R.Q.S.), l'équation de conservation de la charge s'écrit : $div \vec{j} = 0$ (sous forme locale) ou $\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0$ (forme intégrale).

On reconnaît dans cette dernière relation **la loi des nœuds** établie en électrocinétique.

Le cadre de l'A.R.Q.S. consiste à négliger le terme $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, appelé **vecteur densité de courant de déplacement** devant les courants réels ($\vec{j}, \vec{}$).

L'A.R.Q.S. couvre un large domaine de fréquences, allant du continu aux fréquences radioélectriques (à la limite de l'infra-rouge), du moins pour les milieux conducteurs.

Dans le cadre de l'A.R.Q.S. l'équation de Maxwell Ampère s'écrit : $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ sous forme locale, ou sous forme intégrale : $\iint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \mu_0 (I)_{\Gamma}$, où $(I)_{\Gamma}$ est l'intensité algébrique enlacée par le contour Γ orienté. Cette dernière relation est connue sous le nom de **théorème d'Ampère**.

□ Principe de conservation de l'énergie électromagnétique.

On cherche une équation de conservation pour l'énergie comme on l'a fait pour la charge.

Sous forme intégrale : écrire que la diminution par unité de temps de l'énergie électromagnétique contenue dans un volume V est due d'une part à un transfert par rayonnement à travers la surface Σ limitant le volume V , et d'autre part au transfert d'énergie à la matière contenue dans V (énergie cédée aux charges par le champ électromagnétique) :

$$\oint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext} + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = -\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \varpi d\tau \right)$$

Sous forme locale : $\boxed{\text{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial \varpi}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}}$, obtenue à partir du bilan intégral, mais qu'on peut retrouver directement à partir des équations de Maxwell par identification du couple $\{\varpi, \vec{\Pi}\}$.

Annexe (B) : Introduction du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur A .

1°) Expressions des champs en fonction des potentiels :

On définit deux nouveaux champs, un **champ scalaire** noté V , et un **champ vectoriel** noté A , \vec{A} à

partir desquels on exprime le champ électromagnétique suivant les relations:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \end{cases}$$

V est appelé le **potentiel scalaire** ; son unité SI est le **volt** (symbole V).

A , \vec{A} est appelé le **potentiel vecteur** ; son unité SI est le **weber / mètre** (symbole $Wb \cdot m^{-1}$).

2°) L'indétermination des potentiels ; choix de jauge.

Le couple $\{V, A, \vec{A}\}$ associé à un champ électromagnétique donné **n'est pas unique**. On profite de cette indétermination pour imposer aux potentiels une condition supplémentaire, appelée **condition de jauge**, permettant (si possible !) de simplifier les expressions obtenues pour V et A, \vec{A} .

Deux conditions de jauge sont à connaître :

① la **jauge de Coulomb**, pour laquelle on impose : $\boxed{\text{div} \vec{A} = 0}$.

② la **jauge de Lorentz** pour laquelle on impose : $\boxed{\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$.

☞ La **jauge de Coulomb** est utilisée dans le cadre des **régimes stationnaires ou quasi stationnaires**, alors que la **jauge de Lorentz** est bien adaptée au problème de la **propagation du champ électromagnétique** (les solutions obtenues pour V et A, \vec{A} sont connues sous le nom de **potentiels retardés**).

3°) Les équations vérifiées par les potentiels.

① **En jauge de Coulomb** : V est solution de **l'équation de Poisson**, comme en électrostatique.

$$\begin{cases} \text{div} \vec{A} = 0 \\ \Delta_M V + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \end{cases}$$

② **En jauge de Lorentz** :

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j}_{tot} = \vec{0} \\ \Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} = 0 \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] **Michel Hulin** : "*1 -Electromagnétisme : équations de Maxwell*". Armand Colin, 1971
- [2] **Hubert GIE. Jean-Pierre SARMANT** : "*Electromagnétisme : volume 1*". Collection de sciences physiques, 1985
- [3] **Emile Amzallag, Josseline Ben Aïm, Norbert Piccioli** : "*Electrostatique : Rappels de cours et exercices corrigés de physique*". Ediscience, 1996
- [4] **Joseph Edminister** : "*Electromagnétisme : cours et problèmes*". Série Schaum, Ediscience International, 2000
- [5] **José-Philippe Peres** ; Robert Carles et Robert Fleckinger : "*Electromagnétisme : fondements et applications*". Dunod, 2002
- [6] <http://melusine.eu.org/syracuse/immae/mp/physique-chimie/electromagnetisme/11.pdf>
- [7] **Garing**, "*Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques*", Exercices et problèmes corrigés, 1998.
- [8] **Paul Lorrain, Dale Corson, and François Lorrain**, "*Les Phénomènes électromagnétiques*" : Cours, exercices et problèmes résolus, 2002.
- [9] **Louis de Broglie**, "*Ondes Electromagnétiques et Photons*", 1968.
- [10] **Michel Hulin, Nicole Hulin, and Denise Perrin**, "*Equations de Maxwell : ondes électromagnétiques*". Cours, exercices et problèmes résolus, 1998.