



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

Étude d'un problème inverse pour une équation de diffusion fractionnaire

Présentée par :

ZIANE Amina

Soutenu publiquement le : 19/06/2018.

Devant le jury composé de :

Président : M^r MERZOUGUI Abdelkrim

M.C.A, Université de M'sila

Encadreur : M^r NOUIRI Brahim

M.C.A, Université de M'sila

Co-Encadreur : M^{me} DJERIOUI Khayra

M.A.A, Université de M'sila

Examineur : M^r MIHOUBI Farid

M.A.A, Université de M'sila

Remerciements

AU NOM D'ALLAH LE CLÉMENT ET LE MISÉRICORDIEUX.

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout Puissant qui m'a donné le courage et la persévérance pour la réalisation de ce modeste mémoire.

Je remercie profondément Monsieur *NOUIRI Brahim* mon encadreur, qui m'a beaucoup aidé pour terminer ce travail malgré ses nombreuses charges, il m'a guidé durant mon recherche, et sans oublier ses précieux conseils.

mes remerciements vont aussi aux Madame

DJÉRIOUI Khayra ma co-encadreur.

Mes sincères remerciements à Monsieur *MERZOUGUI Abdelkrim*, qui ma fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement Monsieur

MIHOUBI Farid, qu'a accepté d'examiner mon travail.

Je voudrais également remercier tous mes enseignants, tous mes collègues de deuxième année Master EDP et applications, en particulier M. Zerari, M. Bounif, F. Latrack, je leur souhaite une bonne continuation.

De tous mon cœur je remercie mes parents, et mes prières que Dieu les protège et les accorde santé et longue vie.

Enfin, j'adresse un grand remerciement à mes sœurs, mes frères et tout ma famille, qui m'ont donné beaucoup de soutien constant et d'encouragement.

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire

À mes très chers parents.

À mes chères sœurs : Nadia, Nicha, Khaira, Soumia et Bouchra .

À mes frères : Farouk et Abdelkarim.

À mes oncles, mes cousins et tout les membres de ma famille.

À mes amis.

À tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce niveau d'étude.

À tout les gents qui m'ont aimé.

Amima

Résumé

ملخص: في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة مسألة عكسية لتعيين معامل الانتشار المتعلق بمتغير الفضاء في معادلة الانتشار الكسرية لكابوتو. تم تقديم مخطط ضمني للمسألة المباشرة والذي يعتمد على تقطيع المشتق الجزئي لكابوتو. كما أثبتنا الاستقرار والتقارب لهذا المخطط الضمني باستخدام التحليل المصفوفي، وباستعمال طريقة طوماس قمنا بحساب الحل التقريبي للمسألة المباشرة من خلال مثال عددي. تم إدخال خوارزمية تعتمد على طريقة التربيغات المصغرة مع تنظيم تيخونوف لتحديد معامل الانتشار في فضاء تقريبي مختلف . أظهرت لنا هذه الخوارزمية أنها فعالة على الأقل في هذه المسألة العكسية عبر مثالين عدديين.

كلمات مفتاحية: التحليل المصفوفي، استقرار، تقارب، تربيغات مصغرة، طريقة طوماس ، مخطط ضمني، معادلة الانتشار الكسرية، معادلة ناظرية.

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour déterminer numériquement un coefficient de diffusion dépendant de l'espace dans une équation de diffusion fractionnaire de Caputo en temps. Un schéma de différence implicite pour le problème direct est présenté et basé sur la discrétisation de la dérivée fractionnaire de Caputo, et la stabilité et la convergence de schéma implicite sont prouvées à l'aide de l'analyse matricielle. Avec la méthode de Thomas, nous avons calculé la solution numérique de problème direct par un exemple numérique. Un algorithme d'inversion basé sur la méthode des moindres carrés avec régularisation de Tikhonov est introduit pour déterminer numériquement le coefficient de diffusion dans un espace approximatif différent, et des inversions numériques sont effectuées par deux exemples numériques. Cet algorithme d'inversion est efficace au moins pour ce problème inverse.

Mots-Clés : Analyse matricielle, Convergence, Équation de diffusion fractionnaire, Équation normale, Moindres carrés, Méthode de Thomas, Schéma implicite, Stabilité.

In this memoir, we studied an inverse problem to numerically determine a space-dependent diffusion coefficient in a time-fractional diffusion equation. An implicit difference scheme for the direct problem is presented and based on the discretization of the fractional derivative of Caputo, and the stability and convergence of the implicit scheme are proved using matrix analysis. With Thomas's method, we calculated the numerical solution of direct problem by a numerical example. An inversion algorithm based on the least squares method with Tikhonov regularization is introduced to numerically determine the diffusion coefficient in a different approximate space, and numerical inversions are performed by two numerical examples. This inversion algorithm is effective at least for this inverse problem.

Keywords : Convergence, Fractional diffusion equation, Implicit scheme, Least squares, Matrix analysis, Normal equation, Stability, Thomas method.

Table des matières

1	Préliminaires sur des outils mathématiques	8
1.1	Fonctions spéciales	9
1.1.1	Fonction Gamma	9
1.1.2	Fonction Bêta	9
1.2	Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	10
1.3	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	12
1.4	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	13
1.5	Généralités sur les matrices	14
1.6	Les normes vectorielles et matricielles	15
1.6.1	Normes Vectorielles	15
1.6.2	Normes matricielles	16
1.7	Schéma de différences finies	17
1.7.1	Stabilité et convergence	17
2	Problème direct	19
2.1	Position de problème	20
2.2	Schéma de différence finie implicite	20
2.2.1	Stabilité et convergence du schéma de différence	25
2.2.2	Algorithme	34
2.2.3	Exemple numérique	35
3	Problème inverse	37
3.1	Position de problème	38
3.2	Problème de moindres carrés non linéaire	38
3.2.1	Régularisation de Tikhonov	38
3.2.2	Problème linéaire	39
3.2.3	Résultat d'existence	41
3.2.4	Résultat d'unicité	42
3.3	Algorithme d'inversion	44
3.4	Inversions numériques	44
3.4.1	Exemple 1 :fonction linéaire	44
3.4.2	Exemple 2 :fonction du second ordre	45

Table des figures

2.1	Solutions numériques et exactes pour $t = 0.01$ et $(M=1000, N=100)$	35
2.2	Solutions numériques et exactes pour $t = 0.03$ et $(M=1000, N=100)$	36
3.1	Coefficient de diffusion affine et leur inversion	45
3.2	Coefficient de diffusion quadratique et leur inversion	46

Introduction générale

Il est essentiel de décrire et de simuler le comportement et le processus de diffusion des contaminants dans un milieu poreux hétérogène pour la protection et la prévision de l'environnement. L'équation d'advection-dispersion avec des dérivées d'ordre entier a joué un rôle important dans la modélisation de la diffusion des contaminants au cours des quarante dernières années, appelée modèle de diffusion classique. Cependant, certaines recherches ont indiqué que le modèle classique était insuffisant pour simuler de nombreuses situations réelles, où un panache de particules se propage plus rapidement ou plus lentement que prévu par l'équation de diffusion d'ordre entier. Par exemple, Adams et Gelhar [1] soulignent que les données de terrain dans la zone saturée d'un aquifère très hétérogène ne sont pas bien simulées par l'équation classique d'advection-diffusion, et les données indiquent une diffusion plus lente que la diffusion classique. La diffusion lente est caractérisée par le profil à longue queue dans l'espace distribution des densités comme le temps passe, qui a été examinée et étudiée dans de nombreux domaines des sciences appliquées, voir [17, 12, 3, 29, 27]. Une telle diffusion lente est appelée sous-diffusion anormale, qui peut être décrite en mathématiques par une équation de diffusion fractionnaire temporelle donnée par :

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

où $u(x, t)$ dénote la variable d'état au point d'espace x et le temps t , et $\gamma \in]0, 1[$ est appelé ordre fractionnaire de la dérivée par rapport au temps, $D(x)$ est le coefficient de diffusion dépendant de l'espace, et $r(x, t)$ est un terme source, et $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$ signifie la dérivée de Caputo définie par :

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \frac{ds}{(t-s)^\gamma}. \quad (2)$$

Voir, [22, 14] pour la définition et les propriétés du dérivé de Caputo.

Il y a quelques recherches théoriques et numériques sur le problème direct pour l'équation de diffusion fractionnaire avec des conditions initiales et aux limites. Pour l'étude théorique, voir [24, 20, 6, 16], et pour l'étude numérique voir [7, 18, 23]. Cependant, les problèmes inverses pour les modèles de diffusion fractionnaire ont fait l'objet de beaucoup moins d'attention dans la littérature connue que nous avons. Murio [21] a étudié un problème inverse de récupération des fonctions de frontière à partir d'une donnée transitoire à un point intérieur dans une équation de diffusion fractionnaire temporelle 1D-semi-infinie, et un algorithme stable a été introduit et analysé par des techniques de modification. Cheng, Nakagawa, Yamamoto et Yamazaki [13] ont étudié un problème inverse de détermination de l'ordre fractionnaire et du coefficient de diffusion dépendant de l'espace dans l'équation (1) avec une condition aux limites de Neumann nulle, et l'unicité du problème inverse a été prouvée théoriquement par

des données de frontière supplémentaires. Zhang et Xu [28] ont étudié un problème de source inverse dans l'équation de diffusion fractionnaire temporelle, et prouvé une unicité pour identifier un terme source dépendant de l'espace par continuité et transformée de Laplace. Chi, Li et Jia [8] ont considéré un problème inverse avec les observations finales apparaissant dans l'équation d'advection-dispersion fractionnaire avec une condition aux limites de Dirichlet nulle, et présentant des inversions numériques réussies pour déterminer un coefficient de source dépendant de l'espace en appliquant un algorithme optimal de régularisation.

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour déterminer numériquement un coefficient de diffusion dépendant de l'espace dans une équation de diffusion fractionnaire temporelle de Caputo en dimension un avec des conditions initiales et aux limites de Dirichlet-Neumann et une condition supplémentaire à un point final en appliquant un algorithme basé sur la méthode des moindres carrés avec régularisation de Tikhonov. Grâce à un schéma de différences finies implicites pour le problème direct, les inversions numériques pour le coefficient de diffusion dépendant de l'espace sont effectuées dans un espace approximatif différent, et une unicité numérique sur l'algorithme d'inversion est obtenue. Les résultats d'inversion sont satisfaisants montrant l'efficacité de l'algorithme d'inversion au moins pour ce problème inverse. Il est à noter que le schéma des différences implicites et sa stabilité et convergence ont été étudiés dans [7, 11], mais la méthode de preuve utilisée est simple et efficace avec l'aide d'estimation au rayon du spectre de la matrice de coefficients du schéma de différence, et Proposition 2.1 semble être un résultat qui joue un rôle important dans les preuves de la stabilité et de la convergence du schéma de différence.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous avons parlé par certains théories de base du calcul fractionnaire. Nous donnons des définitions de quelques fonctions spéciales (Gamma, Bêta), ensuite nous présentons les intégrales et les dérivées fractionnaire (au sens de Riemann-Liouville et de Caputo) et ce chapitre contient des définitions élémentaires sur les matrices avec la définition du l'une des méthodes utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles" la méthode des différences finies ".

Dans le deuxième chapitre, nous avons introduit un schéma de différence implicite pour le problème direct, et la stabilité numérique et la convergence du système linéaire sont prouvées avec une analyse spectrale à la matrice de coefficients du schéma, et un exemple numérique est présenté.

Dans le dernier chapitre, nous avons donné un algorithme d'inversion numérique basé sur la méthode des moindres carrés avec régularisation de Tikhonov pour déterminer numériquement le coefficient de diffusion dans un espace approximatif différent, et des inversions numériques sont effectuées par des exemples numériques. Cet algorithme d'inversion est efficace au moins pour ce problème inverse.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

PRÉLIMINAIRES SUR DES OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous avons parlé par certains théories de base du calcul fractionnaire. Nous donnons des définitions de quelques fonctions spéciales (Gamma, Bêta), ensuite nous présentons les intégrales et les dérivées fractionnaire (au sens de Riemann-Liouville et de Caputo) et ce chapitre contient des définitions élémentaires sur les matrices avec la définition du l'une des méthodes utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles" la méthode des différences finies " .

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1. (voir [22]). On appelle fonction Gamma, la fonction définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Propriétés 1.1. Nous avons les propriétés suivantes

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = \pm\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Exemple 1.1. Soit $z = \frac{1}{2}$ pour calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ On utilise un changement de variable on pose que $s = \sqrt{t}$, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \quad (\text{d'après l'intégrale de Gauss}) \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2. (voir [22]). La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes z et w par

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

Proposition 1.1. La relation entre la fonction Gamma et Bêta donnée par

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z, w \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(w) > 0.$$

Démonstration. Soit $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \Gamma(w) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t_1} t_1^{z-1} dt_1 \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t_2} t_2^{w-1} dt_2 \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t_1+t_2)} t_1^{z-1} t_2^{w-1} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} u = t_1 + t_2 \\ v = \frac{t_1}{t_1 + t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = uv \\ t_2 = u(1 - v) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ (1 - v) & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1 - v) = -u.$$

De même que le domaine D' correspondante à D dans les coordonnées u, v est

$$D' = \{(u, v) / u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int \int_D t_1^{z-1} t_2^{w-1} e^{-(t_1+t_2)} dt_1 dt_2 &= \int \int_{D'} (u \cdot v)^{z-1} (u(1-v))^{w-1} e^{-u} |-u| dudv \\ &= \int \int_{D'} u^{z+w-1} v^{z-1} (1-v)^{w-1} e^{-u} dudv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{z+w-1} v^{z-1} (1-v)^{w-1} e^{-u} dudv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} u^{z+w-1} e^{-u} du \right) \int_0^1 v^{z-1} (1-v)^{w-1} dv \\ &= \Gamma(z+w) B(z, w). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

□

Propriétés 1.2. 1. $B(z, w) = B(w, z)$, (symétrique).

2. $B(z, 1) = \frac{1}{z}$.

1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω . Nous avons

$$I_{a+}^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

et

$$\begin{aligned} I_{a+}^2 f(x) &= I_{a+}^1 (I_{a+}^1 f(x)) \\ &= \int_a^x I_{a+}^1 f(t) dt \\ &= \int_a^x \int_a^t f(s) ds dt. \end{aligned}$$

On pose $g(t) = \int_a^t f(s) ds$, d'après l'intégrale par partie, nous avons

$$\begin{aligned} I_{a^+}^2 f(x) &= \left[t \int_a^t f(s) ds \right]_a^x - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(s) ds - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt \\ &= \int_a^x (x-t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Donc, pour n^{ime} itération, on obtient

$$I_{a^+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt.$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et d'après la propriété de Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, nous avons

$$I_{a^+}^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt.$$

Définition 1.3. (voir [14, 26]). Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω . Les intégrales

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, Re(\alpha) > 0. \quad (1.1)$$

$$I_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, Re(\alpha) > 0. \quad (1.2)$$

Sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de **Riemann-Liouville** d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) respectivement.

Exemple 1.2. Soit $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$. On a

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt.$$

Avec le changement de variable $t = a + s(x-a)$, nous avons

$$\begin{cases} t = a \Leftrightarrow s = 0, \\ t = x \Leftrightarrow s = 1, \\ dt = (x-a) ds. \end{cases}$$

Donc, avec la définition de la fonction Bêta, on obtient

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha f(x) &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

En utilisant Proposition 1.1, on obtient

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} (x - a)^{\beta + \alpha - 1}.$$

Remarque 1.1. L'intégrale d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(1 + \alpha)} (x - a)^{\alpha} \quad \text{et} \quad I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(1 + \alpha)} (b - x)^{\alpha}, \quad f(x) = C \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.1. (voir [14]). Soient $f \in \mathcal{C}([a, b])$ et $\alpha > 0$. Les intégrales fractionnaires de **Riemann-Liouville** (1.1) et (1.2) possède les propriétés suivantes

1. $I_{a+}^{\alpha} \left[I_{a+}^{\beta} f(x) \right] = I_{a+}^{\alpha + \beta} f(x).$
2. $I_{b-}^{\alpha} \left[I_{b-}^{\beta} f(x) \right] = I_{b-}^{\alpha + \beta} f(x).$

1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4. (voir [14, page 70]). Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f$ et $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C} (Re(\alpha) > 0)$ sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x - t)^{\alpha - n + 1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x > a. \end{aligned} \quad (1.3)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) &= \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t - x)^{\alpha - n + 1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x < b. \end{aligned} \quad (1.4)$$

respectivement, où $[Re(\alpha)]$ est la partie entière de $Re(\alpha)$.

Propriétés 1.3. (voir [14, page 71]). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons

1. $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (x - a)^{\beta - 1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha - 1}.$
2. $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} (b - x)^{\beta - 1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (b - x)^{\beta - \alpha - 1}.$

Remarque 1.2. Quelques remarques pour ces dérivées

1. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^m f(x) = f^{(m)}(x), \\ \mathcal{D}_{b^-}^m f(x) = (-1)^m f^{(m)}(x). \end{cases}$$

2. Si $0 < \alpha < 1$, alors $n = [\alpha] + 1 = 1$. Donc, (1.3) et (1.4) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad x > a, \\ \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad x < b. \end{aligned}$$

3. Si $\beta = 1$ et $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, alors la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante en général n'est pas nulle :

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{b^-}^\alpha 1 = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

4. Pour tout $j = 1, 2, \dots, [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ avec $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, nous avons

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (x-a)^{\alpha-j} = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-x)^{\alpha-j} = 0.$$

1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.5. (voir [14]). Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1[a, b]$. Les dérivées fractionnaires d'ordre α de f au sens de Caputo sont définies par

$${}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad (1.5)$$

et

$${}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}. \quad (1.6)$$

Proposition 1.2. Les relations entre les dérivées au sens de Caputo (1.5), (1.6) et les dérivées au sens de Riemann-Liouville (1.3), (1.4) sont données par

$${}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right], \quad (1.7)$$

et

$${}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \right]. \quad (1.8)$$

1.5 Généralités sur les matrices

Définition 1.6. (voir [4]). Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Une matrice de type (m, n) sur \mathbb{K} est un tableau de scalaires (réels ou complexes) à m lignes et n colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nous utilisons les abréviations suivantes, $A = (a_{ij})$ avec $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$, et $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices (m, n) sur \mathbb{K} .

Définition 1.7. (voir [4]). Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, la **transposée** de A noté A^T , est la matrice de $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ définie par

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, m,$$

si $A^T = A$ on dit que A est **symétrique**.

Soit A une matrice carrée, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

Définition 1.8. (voir [19]). on dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B de taille n telle que

$$AB = BA = I_n,$$

la matrice B est appelée **inverse** de A et noté A^{-1} .

Définition 1.9. (voir [19]). On dit que A est **tridiagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tout i, j tels que $|i - j| \geq 2$, i.e., si les seuls coefficients non nuls sont les coefficients diagonaux, ceux juste au-dessus de la diagonale, et ceux juste en-dessous de la diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ \mathbf{0} & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.10. (voir [4]). On dit que A est à **diagonale strictement dominante par ligne** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \text{ avec } 1 \leq i \leq n.$$

Théorème 1.2. (voir [4]). Une matrice à **diagonale strictement dominante par ligne** est **inversible**.

Démonstration. On doit montrer que

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ et k un indice tel que $|x_k| = \|x\|_\infty$. Alors,

$$\begin{aligned}
 Ax = 0 &\Rightarrow a_{kk} \cdot x_k = - \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} \cdot x_j \\
 &\Rightarrow |a_{kk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot |x_j| \\
 &\Rightarrow |a_{kk}| \cdot \|x\|_\infty \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot \|x\|_\infty \\
 &\Rightarrow \left(\underbrace{|a_{kk}| - \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|}_{>0} \right) \cdot \|x\|_\infty \leq 0 \\
 &\Rightarrow \|x\|_\infty \leq 0 \\
 &\Rightarrow x = 0.
 \end{aligned}$$

□

Définition 1.11. (voir [4]). Le **rayon spectral** de A est défini par

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

où λ_i sont les valeurs propres de la matrice A .

1.6 Les normes vectorielles et matricielles

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

1.6.1 Normes Vectorielles

Définition 1.12. (voir [19]). Une norme sur \mathbb{K}^n est une application $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

1. $\|x\| = 0_{\mathbb{K}}$ implique $x = 0_n$, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ (inégalité triangulaire).

On définit la p -norme, pour $1 \leq p < +\infty$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les normes les plus usuelles sont

1. La norme :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

2. La norme (norme euclidienne) :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. La norme (norme du sup) :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1.6.2 Normes matricielles

À partir de normes vectorielles, on définit les trois normes matricielles subordonnées $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p,$$

où $p = 1, 2$, ou ∞ .

Proposition 1.3. (voir [4]). Pour chacune de ces trois normes, on a pour toutes A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

et

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque 1.3. (voir [4]). Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

Théorème 1.3. (voir [5, page 18]). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

1.7 Schéma de différences finies

Définition 1.13. Un maillage est un ensemble de points isolés (appelés nœuds) situés dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles. On appelle pas de maillage la distance entre deux nœuds voisins.

Définition 1.14. (voir [15]). Soit $u(x)$ représente une fonction d'une variable, les schémas de différences finies sont obtenus grâce aux formules de Taylor.

Formules de Taylor d'ordre 01

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + O(h). \quad (1.9)$$

Formules de Taylor d'ordre 02

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + O(h^2). \quad (1.10)$$

En un point $x \in [l, L]$ et pour une valeur h de pas de discrétisation donné par $h = \frac{L-l}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, la formule (1.9) nous permet d'approximer $u'(x)$ comme suite

approximation avant

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h), \quad (1.11)$$

approximation arrière

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h), \quad (1.12)$$

approximation centré

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h), \quad (1.13)$$

et se basant sur(1.10) et(1.13) nous obtenons

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

1.7.1 Stabilité et convergence

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les deux principales sont **la stabilité** et **la convergence**.

Définition 1.15. (voir [9]). Un schéma aux différences finies est dit **stable** pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de pas de maillage, telle que

$$\|u^n\|_\infty \leq C \|u^0\|_\infty, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 .

Définition 1.16. (voir [25]). **(Erreur de troncature)** On appelle erreur de troncature la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte dans le schéma numérique, que nous désignons par R_i .

Proposition 1.4. (voir [15]). Soit u_i l'approximation de la solution exacte $u(x_i)$, il est naturel d'utiliser les erreurs ponctuelles $u_i - u(x_i)$. Si on pose que \hat{U} le vecteur des valeurs exactes et U le vecteur des valeurs discrètes, alors le vecteur d'erreur E défini par

$$E = U - \hat{U}.$$

Définition 1.17. (voir [15]). Une méthode est dite convergente si

$$\|E\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

PROBLÈME DIRECT

Dans ce chapitre, nous avons introduit un schéma de différence finie implicite pour le problème direct, et la stabilité numérique et la convergence du système linéaire sont prouvées avec une analyse spectrale à la matrice de coefficients du schéma, et un exemple numérique est présenté.

2.1 Position de problème

On considère le problème suivant

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + r(x, t), \quad 0 < x < \ell, 0 < t < T, 0 < \gamma < 1 \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(\ell, t) = g(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2.3)$$

Où $\ell.T > 0$, $f.D \in C^1([0, \ell])$, $\varphi.g \in C([0, T])$, $D > 0$ sur $[0, \ell]$ et $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo définie par

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x, t) = {}^C \mathcal{D}_t^\gamma u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \times \frac{ds}{(t-s)^\gamma}, \quad (2.4)$$

où (2.2) et la condition initiale, (2.3) sont les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann, $D(x)$ est le coefficient de diffusion dépendant de l'espace et $r(x, t)$ est un terme source.

Remarque 2.1. (Interprétation physique) Le problème de diffusion fractionnaire (2.1)-(2.3) est un modèle mathématique pour décrire le phénomène de flux de contaminants dans un milieu poreux hétérogène.

2.2 Schéma de différence finie implicite

Considérons l'équation de diffusion fractionnaire temporelle (2.1) avec la condition initiale (2.2) et les conditions aux limites (2.3). Commençons d'abord par la méthode numérique pour le problème direct donné par l'équation (2.1) avec la condition initiale et les conditions aux limites (2.2)-(2.3). Basé sur la définition de Caputo (2.4) pour la dérivée fractionnaire, voir [10, 11].

Premièrement, nous discrétisons le domaine de l'espace par

$$x_i = ih, \quad i = 1, \dots, M, \quad h = \frac{\ell}{M} \quad (\text{pas de maillage de l'espace}),$$

$$\text{donc, } x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_M = \ell,$$

et le domaine temporel par

$$t_n = n\mu, \quad n = 1, \dots, N, \quad \mu = \frac{T}{N} \quad (\text{pas de maillage temporel}),$$

$$\text{donc, } t_0 = 0 \quad \text{et} \quad t_N = T.$$

Puis, on calcule la dérivée de Caputo définie par (2.4) en point de maillage (x_i, t_{n+1}) , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x_i, t_{n+1}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^{t_{n+1}} \frac{\partial u(x_i, s)}{\partial s} \times \frac{ds}{(t_{n+1}-s)^\gamma} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial u(x_i, s)}{\partial s} \times \frac{ds}{(t_{n+1}-s)^\gamma}, \end{aligned}$$

d'autre part

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\mu} + O(\mu),$$

et

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - s)^{-\gamma} ds &= \left[\frac{-(t_{n+1} - s)^{-\gamma+1}}{-\gamma + 1} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} \\ &= \frac{1}{(1 - \gamma)} [(t_{n+1} - t_k)^{1-\gamma} - (t_{n+1} - t_{k+1})^{1-\gamma}] \\ &= \frac{1}{(1 - \gamma)} [(n+1)\mu - k\mu)^{1-\gamma} - ((n+1)\mu - (k+1)\mu)^{1-\gamma}] \\ &= \frac{1}{(1 - \gamma)} [(n+1-k)^{1-\gamma} \mu^{1-\gamma} - (n-k)^{1-\gamma} \mu^{1-\gamma}] \\ &= \frac{\mu^{1-\gamma}}{(1 - \gamma)} [(n+1-k)^{1-\gamma} - (n-k)^{1-\gamma}], \end{aligned}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x_i, t_{n+1}) &= \frac{\mu^{1-\gamma}}{(1 - \gamma)\Gamma(1 - \gamma)} \sum_{k=0}^n \left[\frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\mu} \right] \\ &\quad \times [(n+1-k)^{1-\gamma} - (n-k)^{1-\gamma}] + O(\mu), \end{aligned}$$

et d'après Propriétés 1.1, on a

$$(1 - \gamma)\Gamma(1 - \gamma) = \Gamma(2 - \gamma),$$

donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x_i, t_{n+1}) &= \frac{\mu^{-\gamma}}{\Gamma(2 - \gamma)} \sum_{k=0}^n [u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)] \times [(n+1-k)^{1-\gamma} \\ &\quad - (n-k)^{1-\gamma}] + O(\mu). \end{aligned}$$

On pose $k' = n - k \Leftrightarrow k = n - k'$, nous avons

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow k' = n, \\ k = n \Rightarrow k' = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x_i, t_{n+1}) &= \frac{\mu^{-\gamma}}{\Gamma(2 - \gamma)} \sum_{k'=0}^n [u(x_i, t_{n+1-k'}) - u(x_i, t_{n-k'})] \\ &\quad \times [(k'+1)^{1-\gamma} - (k')^{1-\gamma}] + O(\mu). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Enfin, nous discrétisons les dérivées d'ordre entier $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$, en utilisant un schéma général de différence centré sur deux ordre et schéma de différence arrière sur un ordre, respectivement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}) = \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1})}{h^2} + O(h^2), \quad (2.6)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{n+1}) = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_{i-1}, t_{n+1})}{h} + O(h). \quad (2.7)$$

Soit $u_i^n \approx u(x_i, t_n)$, $D_i \approx D(x_i)$.

D'après (2.1), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[D(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + r(x, t) \\ &= D(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{dD}{dx}(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + r(x, t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

en remplaçant (2.5) et (2.8) dans (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\mu^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^n (u_i^{n+1-k} - u_i^{n-k}) [(k+1)^{1-\gamma} - (k)^{1-\gamma}] \\ = D_i \times \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{D_i - D_{i-1}}{h} \\ \times \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} + r_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Donc, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (u_i^{n+1-k} - u_i^{n-k}) [(k+1)^{1-\gamma} - (k)^{1-\gamma}] \\ = \frac{D_i \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \\ + \frac{(D_i - D_{i-1}) \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2} \times (u_i^{n+1} \\ - u_{i-1}^{n+1}) + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r_i^{n+1}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

où $i = 1, 2, \dots, M-1$.

On pose

$$p_i = \frac{D_i \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2}, \quad q_i = \frac{(D_i - D_{i-1}) \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2}. \quad (2.11)$$

En remplaçant(2.11) dans (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - p_i (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) - q_i (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \\ = u_i^n - \sum_{k=1}^n (u_i^{n+1-k} - u_i^{n-k}) [(k+1)^{1-\gamma} - (k)^{1-\gamma}] \\ + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r_i^{n+1}. \end{aligned}$$

Alors, l'équation (2.10) peut être réorganisée comme suit

$$\begin{aligned} & (q_i - p_i) u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2p_i - q_i) u_i^{n+1} - p_i u_{i+1}^{n+1} \\ &= u_i^n - \sum_{k=1}^n (u_i^{n+1-k} - u_i^{n-k}) [(k+1)^{1-\gamma} \\ & \quad - (k)^{1-\gamma}] + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r_i^{n+1}. \end{aligned}$$

La condition initiale et les conditions aux limites sont discrétisées comme suit

$$u_i^0 = f(x_i), \text{ la condition initiale} \quad (2.12)$$

$$u_0^{n+1} = u(0, t_{n+1}) = \varphi(t_{n+1}), \text{ la condition de Dirichlet} \quad (2.13)$$

$$u_x(\ell, t_{n+1}) = g(t_{n+1}), \text{ la condition de Neumann}$$

$$\begin{aligned} u_x(\ell, t_{n+1}) = g(t_{n+1}) &\Leftrightarrow \frac{u(x_M, t_{n+1}) - u(x_{M-1}, t_{n+1})}{h} = g(t_{n+1}) \\ &\Leftrightarrow u(x_M, t_{n+1}) = u(x_{M-1}, t_{n+1}) + hg(t_{n+1}) \\ &\Leftrightarrow u_M^{n+1} = u_{M-1}^{n+1} + hg(t_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Par conséquent, un schéma de différence finie implicite peut être donné comme suit pour $n = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & (q_i - p_i) u_{i-1}^1 + (1 + 2p_i - q_i) u_i^1 - p_i u_{i+1}^1 \\ &= u_i^0 + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r_i^1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

pour $n > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & (q_i - p_i) u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2p_i - q_i) u_i^{n+1} - p_i u_{i+1}^{n+1} \\ &= u_i^n - \sum_{k=1}^n u_i^{n+1-k} [(k+1)^{1-\gamma} - (k)^{1-\gamma}] \\ & \quad + \sum_{k=1}^n u_i^{n-k} [(k+1)^{1-\gamma} - (k)^{1-\gamma}] \\ & \quad + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r_i^{n+1}, \end{aligned}$$

on pose $k = k' - 1 \Leftrightarrow k' = k + 1$, nous avons

$$\begin{cases} k = 1 \Rightarrow k' = 2, \\ k = n \Rightarrow k' = n + 1. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n u_i^{n-k} [(k+1)^{1-\gamma} - (k)^{1-\gamma}] = \sum_{k'=2}^{n+1} u_i^{n+1-k'} [k'^{1-\gamma} - (k'-1)^{1-\gamma}].$$

D'où

$$\begin{aligned} u_i^n + \sum_{k=1}^n u_i^{n-k} [(k+1)^{1-\gamma} - (k)^{1-\gamma}] &= \sum_{k=1}^{n+1} u_i^{n+1-k} [k^{1-\gamma} - (k-1)^{1-\gamma}] \\ &= \sum_{k=1}^n u_i^{n+1-k} [k^{1-\gamma} - (k-1)^{1-\gamma}] \\ &\quad + u_i^0 [(n+1)^{1-\gamma} - n^{1-\gamma}], \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} (q_i - p_i) u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2p_i - q_i) u_i^{n+1} - p_i u_{i+1}^{n+1} \\ = \sum_{k=1}^n u_i^{n+1-k} [2k^{1-\gamma} - (k+1)^{1-\gamma} \\ - (k-1)^{1-\gamma}] + u_i^0 [(n+1)^{1-\gamma} \\ - n^{1-\gamma}] + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donc, le système matricielle correspondant est

- pour $i = 1$, on a

$$(q_1 - p_1) u_0^{n+1} + (1 + 2p_1 - q_1) u_1^{n+1} - p_1 u_2^{n+1} = \sum_{k=1}^n u_1^{n+1-k} [2k^{1-\gamma} - (k+1)^{1-\gamma} - (k-1)^{1-\gamma}] + u_1^0 [(n+1)^{1-\gamma} - n^{1-\gamma}] + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r_1^{n+1},$$

- pour $i = 2$, on a

$$(q_2 - p_2) u_1^{n+1} + (1 + 2p_2 - q_2) u_2^{n+1} - p_2 u_3^{n+1} = \sum_{k=1}^n u_2^{n+1-k} [2k^{1-\gamma} - (k+1)^{1-\gamma} - (k-1)^{1-\gamma}] + u_2^0 [(n+1)^{1-\gamma} - n^{1-\gamma}] + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r_2^{n+1},$$

⋮
⋮
⋮

- pour $i = M - 1$, on a

$$\begin{aligned} (q_{M-1} - p_{M-1}) u_{M-2}^{n+1} + (1 + 2p_{M-1} - q_{M-1}) u_{M-1}^{n+1} - p_{M-1} u_M^{n+1} &= \sum_{k=1}^n u_{M-1}^{n+1-k} [2k^{1-\gamma} - (k+1)^{1-\gamma} \\ &\quad - (k-1)^{1-\gamma}] + u_{M-1}^0 [(n+1)^{1-\gamma} \\ &\quad - n^{1-\gamma}] + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r_{M-1}^{n+1}. \end{aligned}$$

En remplaçant (2.12), (2.13) et (2.14) dans le système matricielle nous obtenons

- pour $i = 1$, on a

$$\begin{aligned} (1 + 2p_1 - q_1) u_1^{n+1} - p_1 u_2^{n+1} &= \sum_{k=1}^n u_1^{n+1-k} [2k^{1-\gamma} - (k+1)^{1-\gamma} - (k-1)^{1-\gamma}] \\ &\quad + f(x_1) [(n+1)^{1-\gamma} - n^{1-\gamma}] + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r_1^{n+1} - (q_1 - p_1) \varphi(t_{n+1}), \end{aligned}$$

Lemme 2.1. (voir [10, 11]). Supposons que $D(x)$ prenne seulement une valeur positive pour $x \in (0, \ell)$. Puis la matrice A définie par (2.19) et à diagonale strictement dominante par ligne, on a

$$\begin{cases} a_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} |a_{ij}| + \frac{D_{i-1} \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2}, & \text{pour } i = 1, \\ a_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} |a_{ij}|, & \text{pour } i = 2, 3, \dots, M-1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Avec $\sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} a_{ij} < 0$ pour $i = 1, 2, \dots, M-1$.

Démonstration. Pour $i = 1$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq 1}^{M-1} |a_{1j}| &= |a_{12}| \\ &= |-p_1| \\ &= p_1, \end{aligned}$$

et

$$a_{11} = 1 + 2p_1 - q_1,$$

d'autre part

$$p_1 = \frac{D_1 \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2} \quad \text{et} \quad q_1 = \frac{(D_1 - D_0) \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2},$$

d'où

$$q_1 = p_1 - \frac{D_0 \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2},$$

alors,

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + 2p_1 - \left(p_1 - \frac{D_0 \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2} \right) \\ &= 1 + p_1 + \frac{D_0 \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2}, \end{aligned}$$

donc,

$$a_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} |a_{ij}| + \frac{D_{i-1} \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2}, \quad \text{pour } i = 1.$$

Pour montrer que

$$a_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} |a_{ij}|, \quad \text{pour } i = 2, 3, \dots, M-1,$$

on utilisons la démonstration par récurrence

– pour $i = 2$ on a

$$a_{22} = 1 + 2p_2 - q_2,$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq 2}^{M-1} |a_{2j}| &= |a_{21}| + |a_{23}| \\ &= |q_2 - p_2| + |-p_2| \\ &= -(q_2 - p_2) + p_2 \\ &= 2p_2 - q_2, \end{aligned}$$

donc,

$$a_{22} = 1 + \sum_{j=1, j \neq 2}^{M-1} |a_{2j}|,$$

– supposons que

$$a_{M-2M-2} = 1 + \sum_{j=1, j \neq M-2}^{M-1} |a_{M-2j}|,$$

– montrons l'égalité pour $i = M - 1$

$$a_{M-1M-1} = 1 + p_{M-1} - q_{M-1},$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq M-1}^{M-2} |a_{2j}| &= |a_{M-1M-2}| \\ &= |q_{M-1} - p_{M-1}| \\ &= -(q_{M-1} - p_{M-1}) \\ &= p_{M-1} - q_{M-1}, \end{aligned}$$

alors,

$$a_{M-1M-1} = 1 + \sum_{j=1, j \neq M-1}^{M-2} |a_{M-1j}|.$$

D'où

$$a_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} |a_{ij}|, \text{ pour } i = 2, 3, \dots, M - 1.$$

□

Ensuite, il y a une égalité fondamentale pour les coefficients c_k et b_n donnés par (2.17) et (2.18), respectivement.

Lemme 2.2. (voir [11]). Pour $n = 1, 2, \dots, N - 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n c_k + b_n = 1, \tag{2.22}$$

où $c_k (k = 1, 2, \dots, n)$ est définie par (2.17) et $b_n (n = 1, 2, \dots, N - 1)$ est donné par (2.18).

Démonstration. En utilisant la démonstration par récurrence

– si $n = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^1 c_k + b_1 &= c_1 + b_1 \\ &= [2(1)^{1-\gamma} - (1+1)^{1-\gamma} - (1-1)^{1-\gamma}] + [(1+1)^{1-\gamma} - 1^{1-\gamma}] \\ &= 2(1)^{1-\gamma} - 1^{1-\gamma} \\ &= 1, \end{aligned}$$

– supposons que

$$\sum_{k=1}^{N-2} c_k + b_{N-2} = 1,$$

– montrons que l'égalité est valable pour $n = N - 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} c_k + b_{N-1} &= \sum_{k=1}^{N-2} c_k + c_{N-1} + b_{N-1} \\ &= 1 - b_{N-2} + c_{N-1} + b_{N-1} \\ &= 1 - [((N-2)+1)^{1-\gamma} - (N-2)^{1-\gamma}] \\ &\quad + [2(N-1)^{1-\gamma} - ((N-1)+1)^{1-\gamma} - ((N-1)-1)^{1-\gamma}] \\ &\quad + [((N-1)+1)^{1-\gamma} - (N-1)^{1-\gamma}] \\ &= 1 - (N-1)^{1-\gamma} + (N-2)^{1-\gamma} + 2(N-1)^{1-\gamma} - N^{1-\gamma} \\ &\quad - (N-2)^{1-\gamma} + N^{1-\gamma} - (N-1)^{1-\gamma} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Alors,

$$\sum_{k=1}^n c_k + b_n = 1, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n \text{ et } n = 1, 2, \dots, N-1.$$

□

Proposition 2.1. (voir [10, 11]). Dans les conditions du Lemme 2.1, on a

$$1 < \rho(A) < 2 \|a\|_{\infty} - 1, \quad (2.23)$$

et

$$\frac{1}{2 \|a\|_{\infty} - 1} < \rho(A^{-1}) < 1, \quad (2.24)$$

où $\|a\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq M-1} \{a_{ii}\}$.

Démonstration. Supposons que

$$A\Theta = \lambda\Theta.$$

d'autre part

$$||\lambda| - |a_{kk}|| < |\lambda - a_{kk}|,$$

implique que

$$1 - a_{kk} < |\lambda| - a_{kk} < a_{kk} - 1,$$

finalement on obtient

$$1 < |\lambda| < 2a_{kk} - 1.$$

Ce qui signifie que les assertions (2.23) et (2.24) sont toutes deux valides. \square

Théorème 2.1. (voir [11]). *Le schéma de différence finie implicite défini par (2.20) est inconditionnellement stable.*

Démonstration. Soit \tilde{f} une conditions initiale perturbée à laquelle on associe une nouvelle solution \tilde{U}^n et à l'aide de système de différence linéaire (2.20) nous avons

$$\begin{cases} A\tilde{U}^1 = \tilde{U}^0 + \mu^\gamma \Gamma(2 - \gamma)r^1 + V^1, & \tilde{U}^0 = \tilde{f}, \\ A\tilde{U}^{n+1} = c_1\tilde{U}^n + c_2\tilde{U}^{n-1} + \dots + c_n\tilde{U}^1 + b_n\tilde{U}^0 + \mu^\gamma \Gamma(2 - \gamma)r^{n+1} + V^{n+1}, \end{cases} \quad (2.25)$$

et soit $E^n = \tilde{U}^n - U^n$ désigne l'erreur de solution pour l'itération d'étape n , et $n = 0, 1, \dots, N-1$. En utilisant (2.20) et (2.25), on obtient

$$\begin{cases} AE^1 = E^0, & E^0 = \tilde{f} - f, \\ AE^{n+1} = c_1E^n + c_2E^{n-1} + \dots + c_nE^1 + b_nE^0, \end{cases} \quad (2.26)$$

pour montrer que $\|E^{n+1}\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty$, pour $n = 0, 1, \dots, N-1$, on utilise la récurrence – si $n = 0$, par (2.26) on a

$$AE^1 = E^0,$$

on multiplie par A^{-1} on obtient

$$E^1 = A^{-1}E^0,$$

d'où

$$\|E^1\|_\infty = \|A^{-1}E^0\|_\infty,$$

d'après les propriétés de la norme matricielle on obtient

$$\|E^1\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|E^0\|_\infty,$$

d'autre part, de Théorème 1.3, nous avons

$$\rho(A) \leq \|A\|_\infty,$$

alors,

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \rho(A^{-1}),$$

et en utilisant Proposition 2.1 on trouve

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \rho(A^{-1}) < 1,$$

d'où

$$\|A^{-1}\|_\infty < 1,$$

par conséquent

$$\|E^1\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty,$$

– supposons qu'il existe

$$\|E^k\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty, \quad \text{pour } k = 2, \dots, n,$$

– d'après (2.26) on a

$$AE^{n+1} = c_1E^n + c_2E^{n-1} + \dots + c_nE^1 + b_nE^0,$$

alors,

$$E^{n+1} = A^{-1}(c_1E^n + c_2E^{n-1} + \dots + c_nE^1 + b_nE^0),$$

d'où

$$\|E^{n+1}\|_\infty = \|A^{-1}(c_1E^n + c_2E^{n-1} + \dots + c_nE^1 + b_nE^0)\|_\infty,$$

grâce à les propriétés de la norme matricielle

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \left(\underbrace{\|A^{-1}\|_\infty}_{<1} \right) \|c_1E^n + c_2E^{n-1} + \dots + c_nE^1 + b_nE^0\|_\infty,$$

en utilisant l'hypothèse précédente on trouve

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \left(\sum_{k=1}^n c_k + b_n \right) \|E^0\|_\infty,$$

et d'après Lemme 2.2 on obtient

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty,$$

donc,

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty, \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.27)$$

Ce qui signifie que le schéma de différence implicite (2.20) est stable. \square

Théorème 2.2. (voir [11]). *La solution de différence du système linéaire (2.20) est convergente à la solution exacte du problème (2.1), (2.2)- (2.3) lorsque $h, \mu \rightarrow 0$ pour le domaine de temps fini.*

Démonstration. Soit $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$ ($i = 1, 2, \dots, M-1, n = 1, 2, \dots, N-1$), où $u(x_i, t_n)$ est la solution exacte du problème (2.1) avec (2.2)- (2.3) à point de maillage (x_i, t_n) , et u_i^n est la solution de schéma de différence (2.20) aussi à (x_i, t_n) . Où $e^n = (e_1^n, e_2^n, \dots, e_{M-1}^n)^T$, on remarque que $e_i^0 = u(x_i, 0) - f_i = 0$, donc, $e^0 = 0$. Nous avons $u_i^n = u(x_i, t_n) - e_i^n$ en le remplaçant dans (2.15) et (2.16) donc,

– pour $n = 0$

$$(q_i - p_i) [u(x_{i-1}, t_1) - e_{i-1}^1] + (1 + 2p_i - q_i) [u(x_i, t_1) - e_i^1] - p_i [u(x_{i+1}, t_1) - e_{i+1}^1] = u(x_i, 0) + \mu^\gamma \Gamma(2 - \gamma) r(x_i, t_1),$$

donc,

$$\begin{aligned} (q_i - p_i) e_{i-1}^1 + (1 + 2p_i - q_i) e_i^1 - p_i e_{i+1}^1 \\ = (q_i - p_i) u(x_{i-1}, t_1) + (1 + 2p_i - q_i) u(x_i, t_1) \\ - p_i u(x_{i+1}, t_1) - u(x_i, 0) - \mu^\gamma \Gamma(2 - \gamma) r(x_i, t_1), \end{aligned}$$

– pour $n > 0$

$$(q_i - p_i) [u(x_{i-1}, t_{n+1}) - e_{i-1}^{n+1}] + (1 + 2p_i - q_i) [u(x_i, t_{n+1}) - e_i^{n+1}] - p_i [u(x_{i+1}, t_{n+1}) - e_{i+1}^{n+1}] = \sum_{k=1}^n [u(x_i, t_{n+1-k}) - e_i^{n+1-k}] [2k^{1-\gamma} - (k+1)^{1-\gamma} - (k-1)^{1-\gamma}] + u(x_i, 0) [(n+1)^{1-\gamma} - n^{1-\gamma}] + \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r(x_i, t_{n+1}),$$

alors,

$$\begin{aligned} & (q_i - p_i) e_{i-1}^{n+1} + (1 + 2p_i - q_i) e_i^{n+1} - p_i e_{i+1}^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n e_i^{n+1-k} [2k^{1-\gamma} - (k+1)^{1-\gamma} - (k-1)^{1-\gamma}] \\ & \quad + (q_i - p_i) u(x_{i-1}, t_{n+1}) + (1 + 2p_i - q_i) u(x_i, t_{n+1}) - p_i u(x_{i+1}, t_{n+1}) \\ & \quad - \sum_{k=1}^n u(x_i, t_{n+1-k}) [2k^{1-\gamma} - (k+1)^{1-\gamma} - (k-1)^{1-\gamma}] \\ & \quad - u(x_i, 0) [(n+1)^{1-\gamma} - n^{1-\gamma}] - \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r(x_i, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Soit $R^n = (R_1^n, R_2^n, \dots, R_{M-1}^n)^T$ une erreur de troncature dans l'approximation des solutions pour $n = 1, 2, \dots, N$, on a $e_0^{n+1} = 0$ et $e_M^{n+1} = e_{M-1}^{n+1}$, et en utilisant le système de différence linéaire (2.20), nous avons

$$\begin{cases} Ae^1 = R^1, \\ Ae^{n+1} = c_1 e^n + c_2 e^{n-1} + \dots + c_n e^1 + R^{n+1}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Où, pour $n = 0, 1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} R_i^{n+1} &= (q_i - p_i) u(x_{i-1}, t_{n+1}) + (1 + 2p_i - q_i) u(x_i, t_{n+1}) - p_i u(x_{i+1}, t_{n+1}) \\ & \quad - \sum_{k=1}^n u(x_i, t_{n+1-k}) [2k^{1-\gamma} - (k+1)^{1-\gamma} - (k-1)^{1-\gamma}] \\ & \quad - u(x_i, 0) [(n+1)^{1-\gamma} - n^{1-\gamma}] - \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r(x_i, t_1) \\ &= (q_i - p_i) u(x_{i-1}, t_{n+1}) + (1 + 2p_i - q_i) u(x_i, t_{n+1}) - p_i u(x_{i+1}, t_{n+1}) \\ & \quad - u(x_i, t_n) + \sum_{k=1}^n [u(x_i, t_{n+1-k}) - u(x_i, t_{n-k})] [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] \\ & \quad - \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r(x_i, t_{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n [u(x_i, t_{n+1-k}) - u(x_i, t_{n-k})] [(k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}] \\ & \quad - \frac{D(x_i) \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2} (u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1})) \\ & \quad - \frac{(D(x_i) - D(x_{i-1})) \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma)}{h^2} (u(x_i, t_{n+1}) - u(x_{i-1}, t_{n+1})) - \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) r(x_i, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Par expressions approximatives (2.5), (2.6) et (2.7) nous obtenons

$$R_i^{n+1} = \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) \left[\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x_i, t_{n+1}) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x_i) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{n+1}) \right) + r(x_i, t_{n+1}) \right) + O(h + \mu) \right],$$

d'après l'équation (2.1) on trouve

$$R_i^{n+1} = \mu^\gamma \Gamma(2-\gamma) O(h + \mu),$$

ce qui implique que il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|R^{n+1}\|_\infty \leq M \mu^\gamma (h + \mu), \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.29)$$

par récurrence, on peut démontrer l'inégalité suivante

$$\|e^{n+1}\|_\infty < \frac{1}{b_n} M \mu^\gamma (h + \mu),$$

où $M > 0$ représente une constante positive arbitraire et b_n est donné par (2.18),

– pour $n = 0$, d'après (2.28) on a

$$e^1 = A^{-1}R^1,$$

alors,

$$\begin{aligned} \|e^1\|_\infty &= \|A^{-1}R^1\|_\infty \\ &\leq \|A^{-1}\|_\infty \|R^1\|_\infty \\ &< \|R^1\|_\infty, \end{aligned}$$

et d'après (2.29)

$$\|e^1\|_\infty < M\mu^\gamma(h + \mu),$$

– on pose que

$$\|e^k\|_\infty < \frac{1}{b_{k-1}} M\mu^\gamma(h + \mu), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.30)$$

– d'après (2.28)

$$e^{n+1} = A^{-1}(c_1e^n + c_2e^{n-1} + \dots + c_n e^1 + R^{n+1}),$$

alors,

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|_\infty &= \|A^{-1}(c_1e^n + c_2e^{n-1} + \dots + c_n e^1 + R^{n+1})\|_\infty \\ &\leq \|A^{-1}\|_\infty \|c_1e^n + c_2e^{n-1} + \dots + c_n e^1 + R^{n+1}\|_\infty \\ &< \frac{1}{b_n}(b_n c_1 \|e^n\|_\infty + b_n c_2 \|e^{n-1}\|_\infty + \dots + b_n c_n \|e^1\|_\infty + b_n \|R^{n+1}\|_\infty), \end{aligned}$$

de (2.18) nous avons $b_n < 1$, et d'après (2.29) et (2.30) on obtient

$$\|e^{n+1}\|_\infty < \frac{1}{b_n} \left(\sum_{k=1}^n c_k + b_n \right) M\mu^\gamma(h + \mu),$$

et en utilisant Lemme 2.2 on trouve

$$\|e^{n+1}\|_\infty < \frac{1}{b_n} M\mu^\gamma(h + \mu). \quad (2.31)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n n^\gamma} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1-\gamma} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} - 1 \right] n^\gamma} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} - 1 \right]} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{1-\gamma}{n} - 1\right)} \\ &= \frac{1}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

On a $t_n = n\mu \Rightarrow \mu^\gamma = \frac{t_n^\gamma}{n^\gamma}$ donc, par (2.31) on obtient

$$\|e^{n+1}\|_\infty < \frac{M}{b_n n^\gamma} t^\gamma (h + \mu),$$

et nous avons $\frac{t_n^\gamma}{n^\gamma} \leq \frac{T^\gamma}{n^\gamma}$,

alors, pour n suffisamment grand on peut déduire que

$$\|e^{n+1}\|_\infty < \frac{M}{1-\gamma} T^\gamma (h + \mu), \quad (2.32)$$

ce qui implique que l'affirmation du théorème est valide. \square

2.2.2 Algorithme

Algorithme de Thomas

Initialisation :

$$M, N, \ell, T$$

$$h = \ell/M$$

$$\mu = T/N$$

pour $i = 1, 2, \dots, M - 2$

$$d_i = 1 + 2p_i - q_i$$

$$d_{M-1} = 1 + p_{M-1} - q_{M-1}$$

pour $i = 1, 2, \dots, M - 2$

$$\alpha_i = -p_i$$

pour $i = 2, 3, \dots, M - 1$

$$\beta_i = q_i - p_i$$

pour $n = 0$

$$F^0 = U^0 + \mu^\gamma \Gamma(2 - \gamma) r^1 + V^1$$

pour $n > 0$

$$F^n = \sum_{k=1}^n c_k U^{n-k+1} + b_n U^0 + \mu^\gamma \Gamma(2 - \gamma) r^{n+1} + V^{n+1}$$

Triangularisation :

$$d'_1 = d_1, F'_1 = F_1, \text{ pour } n \geq 0$$

pour $i = 2, 3, \dots, M - 1$

$$d'_i = d_i - \alpha_{i-1} \times \frac{\beta_i}{d'_{i-1}}$$

$$F'_i = F_i - F_{i-1} \times \frac{\beta_i}{d'_{i-1}}, \text{ pour } n \geq 0$$

Résolution :

$$u_{M-1}^{n+1} = \frac{F'_{M-1}}{d'_{M-1}}, \text{ pour } n \geq 0$$

pour $i = M - 2, \dots, 1$

$$u_i^{n+1} = \frac{F'_i - \alpha_i u_{i+1}^{n+1}}{d'_i}, \text{ pour } n \geq 0$$

écrire U^{n+1}

stop

2.2.3 Exemple numérique

Dans cette sous-section, nous allons présenter un exemple pour montrer la convergence numérique de schéma de différence (2.20).

Dans l'équation (2.1), soient $\gamma = 1/2$, le coefficient de diffusion $D(x) = 1 + x$, le terme source $r(x, t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})x^2(1-x)^2 - e^t(16x^3 - 6x^2 - 8x + 2)$, $\ell = 1, T = 1$, la condition initiale (2.2) $f(x) = x^2(1-x)^2$, les condition aux limites (2.3) $\varphi(t) = g(t) = 0$ et la solution exacte de problème direct $u(x, t) = e^t x^2(1-x)^2$.

Où $\operatorname{erf}(\cdot)$ est la fonction d'erreur de Gauss.

En utilisant **Matlab**, nous avons représenté la solution numérique et la solution exacte du problème direct au temps de $t = 0.01$ et $t = 0.03$ dans les figures (2.1) et (2.2), respectivement, avec $M = 1000$ et $N = 100$. De (Figure2.1) et (Figure2.2) nous concluons que le schéma de différence finie (2.20) est converge.

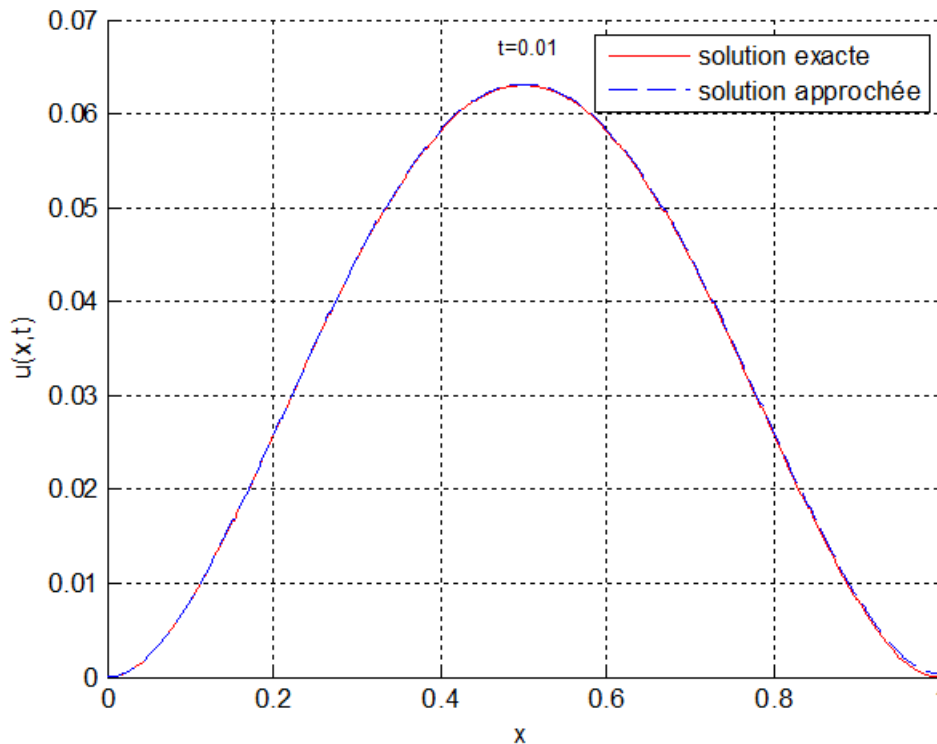


FIGURE 2.1 – Solutions numériques et exactes pour $t = 0.01$ et ($M=1000, N=100$)

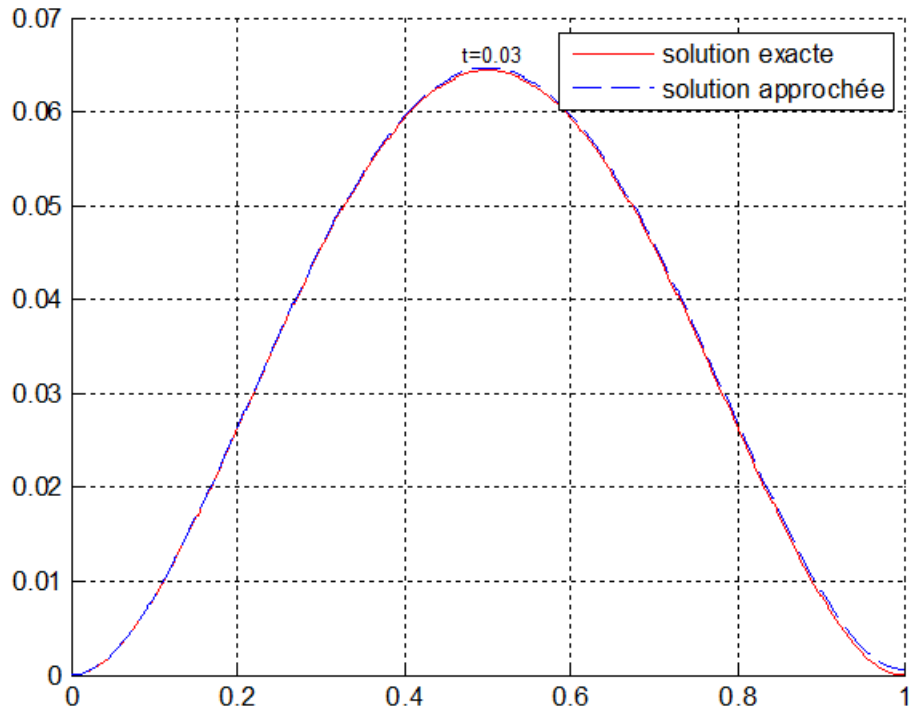


FIGURE 2.2 – Solutions numériques et exactes pour $t = 0.03$ et $(M=1000, N=100)$

PROBLÈME INVERSE

Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme d'inversion numérique basé sur la méthode des moindres carrés avec régularisation de Tikhonov pour déterminer numériquement le coefficient de diffusion dans un espace approximatif différent, et des inversions numériques sont effectuées par deux exemples numériques. Cet algorithme d'inversion est efficace au moins pour ce problème inverse.

3.1 Position de problème

Si le coefficient de diffusion $D(x)$ est inconnu, nous le cherchons par des observations supplémentaires à la limite droite $x = \ell$, i.e.,

$$u(\ell, t) = \psi(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (3.1)$$

Ainsi, un problème inverse est formulé par l'équation de diffusion fractionnaire (2.1), la condition initiale et les conditions aux limites (2.2)- (2.3) avec une condition supplémentaire (3.1).

Pour la solution de ce problème inverse, supposons que la fonction D doit être paramétrée sous la forme d'un polynôme suivant

$$D(x) = \sum_{i=0}^m p_i x^i. \quad (3.2)$$

Pour tout $D(x)$ une solution unique de problème direct correspondant, désigné par $u(x, t; D)$ peut être élaboré par le schéma de différences finies (2.20), alors $u(\ell, t; D)$ est obtenu.

Par conséquent, obtenir un coefficient de diffusion D équivaut à trouver un vecteur P , ce qui signifie que nous pouvons dire $u(\ell, t; D) = u(\ell, t; P)$. Où

$$P = (p_0, p_1, \dots, p_m)^T.$$

3.2 Problème de moindres carrés non linéaire

Pour résoudre le problème inverse on résout un problème de moindres carrés non linéaire suivant

$$\min_P \Phi(P). \quad (3.3)$$

Où

$$\Phi(P) = \|u(\ell, t; P) - \psi(t)\|_2^2, \quad 0 < t \leq T. \quad (3.4)$$

Le problème (3.3) est mal posé de sorte que ce problème admet plusieurs solutions. Pour l'unicité, en utilisant la régularisation de Tikhonov.

3.2.1 Régularisation de Tikhonov

On considère le problème régularisé suivant

$$\min_P \Phi_\alpha(P). \quad (3.5)$$

Où

$$\Phi_\alpha(P) = \|u(\ell, t; P) - \psi(t)\|_2^2 + \alpha \|P\|_2^2, \quad (3.6)$$

tel que $\alpha \geq 0$ est le paramètre de régularisation.

Maintenant, pour obtenir D^j , on suppose que

$$D^{j+1} = D^j + \delta D^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Où

j est le nombre d'itération.

δD^j désigne une perturbation de D^j .

D'après (3.2) nous avons

$$D^j(x) = \sum_{i=0}^m p_i^j x^i,$$

et

$$\delta D^j(x) = \sum_{i=0}^m \delta p_i^j x^i.$$

Où δP^j désigne une perturbation pour P^j donné. Ainsi, pour obtenir P^{j+1} à partir de P^j donné, il suffit d'obtenir une perturbation δP^j .

$$P^{j+1} = P^j + \delta P^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Ensuite, nous avons seulement besoin de déterminer un vecteur de perturbation

$$\delta P^j = (\delta p_0^j, \delta p_1^j, \dots, \delta p_m^j)^T. \quad (3.8)$$

Dans la suite, pour faciliter l'écriture, P^j et δP^j sont abrégés en P et δP , respectivement.

3.2.2 Problème linéaire

Nous avons la solution directe $u(\ell, t; P + \delta P)$ est dépend de P implicitement, donc avec le développement de Taylor à l'ordre un on trouve

$$u(\ell, t; P + \delta P) \approx u(\ell, t; P) + \nabla_P^T u(\ell, t; P) \cdot \delta P. \quad (3.9)$$

En utilisant (3.4) on obtient

$$\Phi(P + \delta P) = \|u(\ell, t; P + \delta P) - \psi(t)\|_2^2,$$

et d'après (3.9) nous avons

$$\Phi(P + \delta P) = \|\nabla_P^T u(\ell, t; P) \cdot \delta P - (\psi(t) - u(\ell, t; P))\|_2^2.$$

Avec (3.6), la fonction objective de moindres carrés devient

$$F_\alpha(\delta P) = \|\nabla_P^T u(\ell, t; P) \cdot \delta P - (\psi(t) - u(\ell, t; P))\|_2^2 + \alpha \|\delta P\|_2^2. \quad (3.10)$$

Nous discrétisons le domaine $[0, T]$ par t_n ($n = 1, 2, \dots, N$) et $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Par la méthode de différence finie, nous avons

$$\nabla_P^T u(\ell, t_n; P) \cdot \delta P \approx \sum_{i=0}^m \frac{u(\ell, t_n; (p_0, \dots, p_i + \tau, \dots, p_m)) - u(\ell, t_n; P)}{\tau} \delta p_i. \quad (3.11)$$

Pour $n = 1, 2, \dots, N$, où τ est un pas différentiel numérique. D'où, on définit la matrice

$$H = (h_{ni})_{N \times (m+1)}.$$

Où

$$h_{ni} = \frac{u(\ell, t_n; (p_0, \dots, p_i + \tau, \dots, p_m)) - u(\ell, t_n; P)}{\tau}.$$

Donc,

$$H = \begin{pmatrix} h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1m} \\ h_{20} & h_{21} & \cdots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N0} & h_{N1} & \cdots & h_{Nm} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Soit

$$U = (u(\ell, t_1; P), u(\ell, t_2; P), \dots, u(\ell, t_N; P))^T, \quad (3.13)$$

$$\Psi = (\psi(t_1), \psi(t_2), \dots, \psi(t_N))^T.$$

En utilisant (3.11), (3.12) et (3.13) on peut écrire (3.10) sous la forme suivante

$$F_\alpha(\delta P) = \|H\delta P - (\Psi - U)\|_2^2 + \alpha \|\delta P\|_2^2. \quad (3.14)$$

Lemme 3.1. (voir [2]). δP^α un minimum de F_α si est seulement si δP^α résout l'équation normale suivante

$$\alpha\delta P^\alpha + H^T H\delta P^\alpha = H^T(\Psi - U). \quad (3.15)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} F_\alpha(\delta P) - F_\alpha(\delta P^\alpha) &= \left(\|H\delta P - (\Psi - U)\|_2^2 + \alpha \|\delta P\|_2^2 \right) - \left(\|H\delta P^\alpha - (\Psi - U)\|_2^2 + \alpha \|\delta P^\alpha\|_2^2 \right) \\ &= \left(\|H\delta P\|_2^2 + \|\Psi - U\|_2^2 - 2 \langle H\delta P, \Psi - U \rangle + \alpha \|\delta P\|_2^2 \right) \\ &\quad - \left(\|H\delta P^\alpha\|_2^2 + \|\Psi - U\|_2^2 - 2 \langle H\delta P^\alpha, \Psi - U \rangle + \alpha \|\delta P^\alpha\|_2^2 \right) \\ &= \|H(\delta P - \delta P^\alpha)\|_2^2 - 2 \|H\delta P^\alpha\|_2^2 + 2 \langle H\delta P, H\delta P^\alpha \rangle - 2 \langle H\delta P, \Psi - U \rangle \\ &\quad + 2 \langle H\delta P^\alpha, \Psi - U \rangle + \alpha \|\delta P - \delta P^\alpha\|_2^2 - 2\alpha \|\delta P^\alpha\|_2^2 + 2\alpha \langle \delta P, \delta P^\alpha \rangle \\ &= 2 \langle H\delta P^\alpha - (\Psi - U), H(\delta P - \delta P^\alpha) \rangle + 2 \langle \delta P^\alpha, \delta P - \delta P^\alpha \rangle \\ &\quad + \|H(\delta P - \delta P^\alpha)\|_2^2 + \alpha \|\delta P - \delta P^\alpha\|_2^2 \\ &= 2 \langle H^T(H\delta P^\alpha - (\Psi - U)) + \alpha\delta P^\alpha, \delta P - \delta P^\alpha \rangle + \|H(\delta P - \delta P^\alpha)\|_2^2 \\ &\quad + \alpha \|\delta P - \delta P^\alpha\|_2^2. \end{aligned}$$

Pour tout $\delta P, \delta P^\alpha \in \mathbb{R}^{m+1}$. Si δP^α satisfait (3.15), puis $F_\alpha(\delta P) - F_\alpha(\delta P^\alpha) \geq 0$, alors δP^α minimise (3.14).

D'autre part, si δP^α minimise (3.14), choisissons $\delta P = \delta P^\alpha + tZ$ pour tout $t > 0$ et $Z \in \mathbb{R}^{m+1}$. On a

$$F_\alpha(\delta P) - F_\alpha(\delta P^\alpha) \geq 0,$$

donc,

$$2t \langle H^T(H\delta P^\alpha - (\Psi - U)) + \alpha\delta P^\alpha, Z \rangle + t^2 \|HZ\|_2^2 + \alpha t^2 \|Z\|_2^2 \geq 0,$$

diviser par $t > 0$, et quand $t \rightarrow 0$ on obtient

$$\langle H^T(H\delta P^\alpha - (\Psi - U)) + \alpha\delta P^\alpha, Z \rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } Z \in \mathbb{R}^{m+1},$$

si on choisit $Z = -\left(H^T(H\delta P^\alpha - (\Psi - U)) + \alpha\delta P^\alpha\right)$, nous obtenons

$$\langle H^T(H\delta P^\alpha - (\Psi - U)) + \alpha\delta P^\alpha, -\left(H^T(H\delta P^\alpha - (\Psi - U)) + \alpha\delta P^\alpha\right) \rangle \geq 0,$$

d'où

$$-\|H^T(H\delta P^\alpha - (\Psi - U)) + \alpha\delta P^\alpha\|_2^2 \geq 0,$$

alors,

$$\|H^T(H\delta P^\alpha - (\Psi - U)) + \alpha\delta P^\alpha\|_2^2 \leq 0,$$

implique que

$$H^T(H\delta P^\alpha - (\Psi - U)) + \alpha\delta P^\alpha = 0,$$

ce qui signifie que δP^α résout l'équation normale (3.15). \square

3.2.3 Résultat d'existence

Théorème 3.1. (voir [2]). Il existe au moins $\delta P^\alpha \in \mathbb{R}^{m+1}$ point de minimum de la fonction F_α .

Démonstration. Soit $(\delta P_n) \in \mathbb{R}^{m+1}$ une suite minimisante, i.e.,

$F_\alpha(\delta P_n) \rightarrow I = \inf_{\delta P \in \mathbb{R}^{m+1}} F_\alpha(\delta P)$ quand n tend vers l'infini. On montre que (δP_n) est une suite de Cauchy.

$$\begin{aligned} F_\alpha(\delta P_n) + F_\alpha(\delta P_m) &= \left(\|H\delta P_n - (\Psi - U)\|_2^2 + \alpha \|\delta P_n\|_2^2 \right) + \left(\|H\delta P_m - (\Psi - U)\|_2^2 + \alpha \|\delta P_m\|_2^2 \right) \\ &= \|H\delta P_n\|_2^2 + \|\Psi - U\|_2^2 - 2 \langle H\delta P_n, \Psi - U \rangle + \alpha \|\delta P_n\|_2^2 \\ &\quad + \|H\delta P_m\|_2^2 + \|\Psi - U\|_2^2 - 2 \langle H\delta P_m, \Psi - U \rangle + \alpha \|\delta P_m\|_2^2 \\ &= \|H\delta P_n\|_2^2 + 2 \|\Psi - U\|_2^2 - 2 \langle H(\delta P_n + \delta P_m), \Psi - U \rangle + \alpha \|\delta P_n\|_2^2 \\ &\quad + \|H\delta P_m\|_2^2 + \alpha \|\delta P_m\|_2^2. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\|H\delta P_n\|_2^2 + \|H\delta P_m\|_2^2 = \frac{1}{2} \left(\|H(\delta P_n + \delta P_m)\|_2^2 + \|H(\delta P_n - \delta P_m)\|_2^2 \right),$$

et

$$\alpha \left(\|\delta P_n\|_2^2 + \|\delta P_m\|_2^2 \right) = \frac{\alpha}{2} \left(\|\delta P_n + \delta P_m\|_2^2 + \|\delta P_n - \delta P_m\|_2^2 \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} F_\alpha(\delta P_n) + F_\alpha(\delta P_m) &= \frac{1}{2} \|H(\delta P_n + \delta P_m)\|_2^2 + 2 \|\Psi - U\|_2^2 - 2 \langle H(\delta P_n + \delta P_m), \Psi - U \rangle \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \|\delta P_n + \delta P_m\|_2^2 + \frac{1}{2} \|H(\delta P_n - \delta P_m)\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|\delta P_n - \delta P_m\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
2F_\alpha\left(\frac{1}{2}(\delta P_n + \delta P_m)\right) &= 2\left\|H\left(\frac{1}{2}(\delta P_n + \delta P_m)\right) - (\Psi - U)\right\|_2^2 + 2\alpha\left\|\frac{1}{2}(\delta P_n + \delta P_m)\right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\|H(\delta P_n + \delta P_m) - 2(\Psi - U)\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|\delta P_n + \delta P_m\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\|H(\delta P_n + \delta P_m)\|_2^2 + 4\|\Psi - U\|_2^2 - 4\langle H(\delta P_n + \delta P_m), \Psi - U \rangle\right) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2}\|\delta P_n + \delta P_m\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\|H(\delta P_n + \delta P_m)\|_2^2 + 2\|\Psi - U\|_2^2 - 2\langle H(\delta P_n + \delta P_m), \Psi - U \rangle \\
&\quad + \frac{\alpha}{2}\|\delta P_n + \delta P_m\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

En remplaçant (3.17) dans (3.16) on obtient

$$\begin{aligned}
F_\alpha(\delta P_n) + F_\alpha(\delta P_m) &= 2F_\alpha\left(\frac{1}{2}(\delta P_n + \delta P_m)\right) + \frac{1}{2}\|H(\delta P_n - \delta P_m)\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|\delta P_n - \delta P_m\|_2^2 \\
&\geq 2I + \frac{\alpha}{2}\|\delta P_n - \delta P_m\|_2^2.
\end{aligned}$$

On a $F_\alpha(\delta P_n) + F_\alpha(\delta P_m) \rightarrow 2I$ quand n, m tend vers l'infini donc,

$$\|\delta P_n - \delta P_m\|_2^2 \leq 0.$$

Ceci montre que (δP_n) est une suite de Cauchy et donc convergente puisque l'espace euclidien est un espace de Hilbert. Soit $\delta P^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta P_n$, nous avons $\delta P^\alpha \in \mathbb{R}^{m+1}$, et de la continuité de F_α , nous concluons que $F_\alpha(\delta P_n) \rightarrow F_\alpha(\delta P^\alpha)$, alors $F_\alpha(\delta P^\alpha) = I$. Cela prouve l'existence d'un minimum de F_α . \square

3.2.4 Résultat d'unicité

Corollaire 3.1. (voir [2]). F_α admet un minimum unique $\delta P^\alpha \in \mathbb{R}^{m+1}$. Ce minimum δP^α est la solution unique de l'équation normale

$$\alpha\delta P^\alpha + H^T H \delta P^\alpha = H^T(\Psi - U).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que l'équation normale admet une solution unique parce que nous avons un équivalence entre (3.14) et (3.15).

Nous avons l'équation normale

$$(\alpha I + H^T H) \delta P^\alpha = H^T(\Psi - U),$$

pour montrer que cette équation admet une solution unique, il doit montrer que la matrice $(\alpha I + H^T H)$ est définie positive.

Alors, $\forall \delta P \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle (\alpha I + H^T H) \delta P, \delta P \rangle &= \langle \alpha \delta P, \delta P \rangle + \langle H^T H \delta P, \delta P \rangle \\ &= \alpha \|\delta P\|_2^2 + \|H \delta P\|_2^2. \end{aligned}$$

On a

$$\|H \delta P\|_2^2 \geq 0,$$

et

$$\|\delta P\|_2^2 > 0,$$

donc,

$$\alpha \|\delta P\|_2^2 + \|H \delta P\|_2^2 > 0,$$

alors,

$$\langle (\alpha I + H^T H) \delta P, \delta P \rangle > 0.$$

Cela prouve que la matrice $(\alpha I + H^T H)$ est définie positive donc inversible implique que l'équation (3.15) admet une solution unique, alors, nous concluons que F_α admet un minimum unique. \square

Par conséquent, une perturbation peut être déterminée par (3.15)

$$\delta P^\alpha = (\alpha I + H^T H)^{-1} H^T (\Psi - U). \quad (3.18)$$

Ainsi, une solution optimale peut être approchée par la procédure d'itération (3.7) tant que le nombre d'itérations est atteint, ou que la perturbation satisfait à une précision convergente prescrite donnée par

$$\|\delta P^\alpha\|_2 \leq \varepsilon.$$

Où ε est une précision convergente donnée.

3.3 Algorithme d'inversion

Étape 1 : Donn e l'itération initiale P , et le pas différentiel numérique τ , et la précision convergente ε , est la condition supplémentaire $\psi(t)$;

 tape 2 : Résoudre le problème direct par le système linéaire (2.20), obtenir $u(\ell, t_n; P)$ et $u(\ell, t_n; (p_0, \dots, p_i + \tau, \dots, p_m))$, pour $n = 1, 2, \dots, N$ et $i = 0, 1, \dots, m$, puis obtenir le vecteur U , et la matrice H par la formule (3.12);

 tape 3 : Choisir un paramètre de régularisation appropri e $\alpha \geq 0$, et obtenir un vecteur de perturbation δP^α en utilisant la formule (3.18), puis obtenir δD^α ;

 tape 4 : S'il y a $\|\delta P^\alpha\|_2 \leq \varepsilon$, alors l'algorithme d'inversion est termin e, et $D + \delta D^\alpha$ est consid er e comme la solution que nous voulons juste déterminer; Sinon, passez à l'étape 2 en remplaçant P par $P + \delta P$.

3.4 Inversions numériques

Dans cette section on prend, le terme source $r(x, t) = 0$, $T = 1$, $\ell = 1$, la condition initiale $f(x) = x$, le nombre de grilles spatiales $M = 20$ et le nombre de grilles de temps $N = 20$.

3.4.1 Exemple 1 :fonction linéaire

Dans cet exemple, nous allons prendre une fonction linéaire

$$D(x) = 1 + x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

comme le coefficient de diffusion exact. Nous avons r ealis e l'algorithme d'inversion en utilisant la formule (3.18). En choisissant le paramètre de régularisation $\alpha = 0$, l'itération initiale $P^0 = (0, 0.65)$, le pas différentiel numérique $\tau = 0.4$, la précision convergente $\varepsilon = 1e - 6$ et l'ordre fractionnaire $\gamma = 0.4$.

Le coefficient de diffusion et leur inversion sont repr esent es dans Figure 3.1.

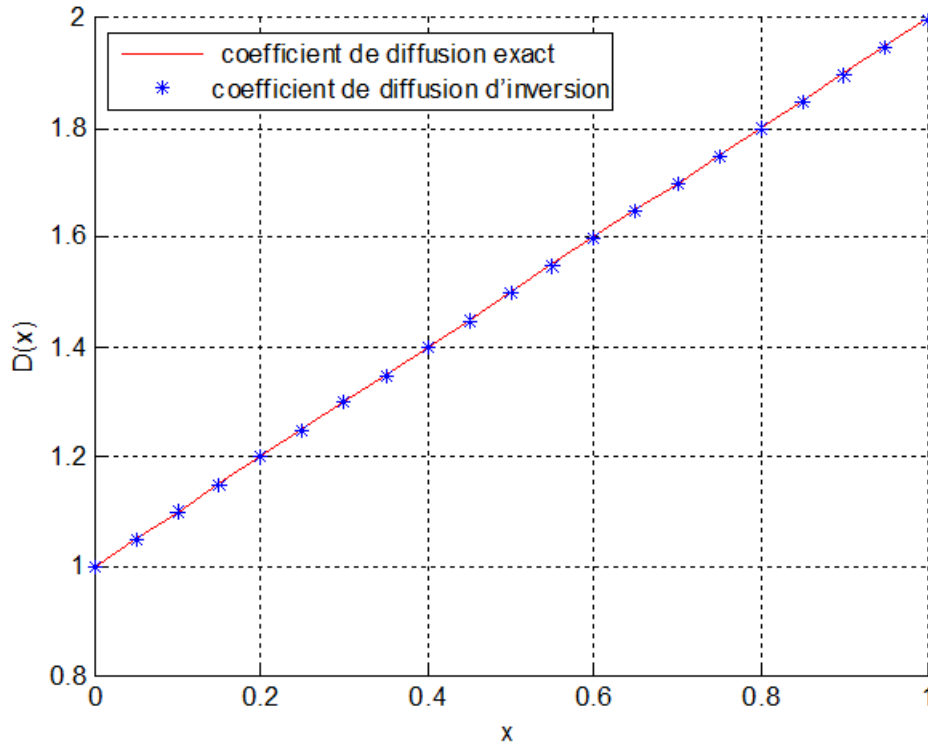


FIGURE 3.1 – Coefficient de diffusion affine et leur inversion

3.4.2 Exemple 2 : fonction du second ordre

Dans cet exemple, nous allons prendre une fonction du second ordre

$$D(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

comme le coefficient de diffusion exact. Nous avons réalisé l'algorithme d'inversion en utilisant la formule (3.18). En choisissant le paramètre de régularisation $\alpha = 1e - 9$, l'itération initiale $P^0 = (3.4, 0, 1.12)$, le pas différentiel numérique $\tau = 0.5$, la précision convergente $\varepsilon = 1e - 7$ et l'ordre fractionnaire $\gamma = 0.8$.

Le coefficient de diffusion et leur inversion sont représentés dans Figure 3.2.

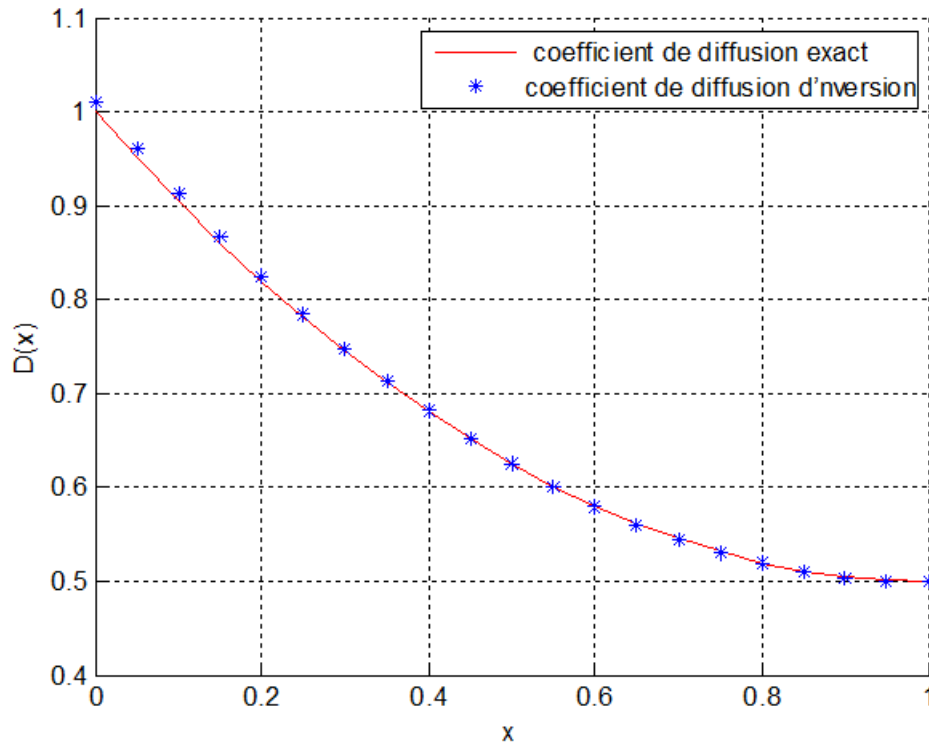


FIGURE 3.2 – Coefficient de diffusion quadratique et leur inversion

- Remarque 3.1.** 1. On remarque que si le coefficient du diffusion est linéaire, la solution exacte et approchée sont identiques.
2. L'algorithme d'inversion est efficace au moins pour ce problème.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour déterminer numériquement un coefficient de diffusion dépendant de l'espace dans une équation de diffusion fractionnaire temporelle de Caputo en dimension un avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Problème direct** : nous avons étudié un problème direct pour une équation de diffusion fractionnaire, un schéma de différence implicite pour le problème direct est introduit, et la stabilité numérique et la convergence du système linéaire sont prouvées avec une analyse spectrale à la matrice de coefficients du schéma, et un exemple numérique est présenté.
- ✓ **Problème inverse** : nous avons étudié un problème inverse pour déterminer numériquement un coefficient de diffusion dépendant de l'espace dans une équation de diffusion fractionnaire temporelle de Caputo en dimension un avec des conditions initiales et aux limites de Dirichlet-Neumann et une condition supplémentaire à un point final en appliquant un algorithme basé sur la méthode des moindres carrés avec régularisation de Tikhonov. Grâce à un schéma de différences finies implicites pour le problème direct, les inversions numériques pour le coefficient de diffusion dépendant de l'espace sont effectuées dans un espace approximatif différent, et une unicité numérique sur l'algorithme d'inversion est obtenue.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Identification numérique le coefficient de réaction a pour un problème de réaction-diffusion fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x, t) = u_{xx}(x, t) + a(x)u(x, t) + f(x, t), & 0 < x \leq 1, 0 < t < T, 0 < \gamma < 1, \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

- ☞ Identification numérique la condition initiale $g(x)$ pour un problème de diffusion avec dérivée de temps fractionnaire de Caputo :

$$\begin{cases} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x, t) = u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, 0 < \gamma < 1. \\ u(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] E. E. Adams and L.W. Gelhar. Field study of dispersion in a heterogeneous aquifer 2 : Spatial moments analysis. *Water Resources Research*, 28 :3293–3307, 1992.
- [2] A.Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [3] H. Scher B. Berkowitz and S. E. Silliman. Anomalous transport in laboratory-scale heterogeneous porous media. *Water Resources Research*, 36 :149–158, 2000.
- [4] C. Bolley. *Analyse numérique*. École Centrale de Nantes, 2012.
- [5] P. G. Ciarlet. *Introduction à L'analyse Numérique matricielle et à L'optimisation*. Université Pierre et Marie Curie, 1988.
- [6] S. D. Eidelman and A. N. Kochubei. Cauchy problem for fractional diffusion equations. *Journal of Differential Equations*, 199 :211–255, 2004.
- [7] V. Anh F.Liu, P.Zhuang and I.Turner. Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, 191 :12–20, 2007.
- [8] G. S. Li G. S. Chi and X. Z. Jia. Numerical inversions of source term in fade with dirichlet boundary condition by final observations. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(4) :1619–1626, 2011.
- [9] G.Allaire. *Analyse Numérique et optimisation*. Pris, Janvier 2005.
- [10] G.Li and al. Simultaneous inversion for the space-dependent diffusion coefficient and the fractional order in the time-fractional diffusion equation. *Inverse Problems*, 29 :1–36, 2013.
- [11] G.Li, W.Gu, and X.Jia. Numerical inversions for space-dependent diffusion coefficient in the time fractional diffusion equation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 20 :339–366, 2012.
- [12] Y. Hatano and N. Hatano. Dispersive transport of ions in column experiments : An explanation of long-tailed profiles. *Water Resources Research*, 34 :1027–1033, 1998.
- [13] M. Yamamoto J. Cheng, J. Nakagawa and T. Yamazaki. Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation. *Inverse Problems*, 25 :115002, 2009.
- [14] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.
- [15] R.J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. University of Washington, Seattle, Washington, 2007.
- [16] Y. Luchko. Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 59 :1766–1772, 2010.

- [17] S. Gerbelli M. Giona and H. E. Roman. Fractional diffusion equation and relaxation in complex viscoelastic materials. *Physica A*, 191 :449–453, 1992.
- [18] M. M. Meerschaert and C. Tadjeran. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 172 :65–77, 2004.
- [19] F.Nec Merguntur. *Méthodes numériques et optimisation*. Paris, 2015.
- [20] R. Metzler and J. Klafter. Boundary value problems for fractional diffusion equations. *Physica A*, 278 :107–125, 2000.
- [21] D. A. Murio. Stable numerical solution of fractional-diffusion inverse heat conduction problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 53 :1492–1501, 2007.
- [22] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [23] F. Liu Q. Yang and I. Turner. Numerical methods for fractional partial differential equations with riesz space fractional derivatives. *Applied Mathematical Modelling*, 34 :200–218, 2010.
- [24] Y. Luchko R. Gorenflo and P. P. Zabrejko. On solvability of linear fractional differential equations in banach spaces. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 2 :63–176, 1999.
- [25] R.Herbin. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Université Aix Marseille 1, 2008.
- [26] S.G.Samko, A.A.Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [27] G. Huang Y. Xiong and Q. Huang. Modeling solute transport in one-dimensional homogeneous and heterogeneous soil columns with continuous time random walk. *Journal of Contaminant Hydrology*, 86 :163–175, 2006.
- [28] Y. Zhang and X. Xu. Inverse source problem for a fractional diffusion equation. *Inverse Problems*, 27 :035010, 2011.
- [29] L. Zhou and H. M. Selim. Application of the fractional advection-dispersion equations in porous media. *Soil Science Society of America Journal*, 67 :1079–1084, 2003.

ملخص: في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة مسألة عكسية لتعيين معامل الانتشار المتعلق بمتغير الفضاء في معادلة الانتشار الكسرية لكابوتو. تم تقديم مخطط ضمني للمسألة المباشرة والذي يعتمد على تقطيع المشتق الجزئي لكابوتو. كما أثبتنا الاستقرار والتقارب لهذا المخطط الضمني باستخدام التحليل المصفوفي، وباستعمال طريقة طوماس بحساب الحل التقريبي للمسألة المباشرة من خلال مثال عددي. تم إدخال خوارزمية تعتمد على طريقة التريبيعات المصغرة مع تنظيم تيخونوف لتحديد معامل الانتشار في فضاء تقريبي مختلف . أظهرت لنا هذه الخوارزمية أنها فعالة على الأقل في هذه المسألة العكسية عبر مثالين عدديين.

كلمات مفتاحية: التحليل المصفوفي، استقرار، تقارب، تريبيعات مصغرة، طريقة طوماس ، مخطط ضمني، معادلة الانتشار الكسرية، معادلة ناظرية.

In this memoir, we studied an inverse problem to numerically determine a space-dependent diffusion coefficient in a time-fractional diffusion equation. An implicit difference scheme for the direct problem is presented and based on the discretization of the fractional derivative of Caputo, and the stability and convergence of the implicit scheme are proved using matrix analysis. With Thomas's method, we calculated the numerical solution of direct problem by a numerical example. An inversion algorithm based on the least squares method with Tikhonov regularization is introduced to numerically determine the diffusion coefficient in a different approximate space, and numerical inversions are performed by two numerical examples. This inversion algorithm is effective at least for this inverse problem.

Mots-Clés : Analyse matricielle, Convergence, Équation de diffusion fractionnaire, Équation normale, Moindres carrés, Méthode de Thomas, Schéma implicite, Stabilité.

In this memoir, we studied an inverse problem to numerically determine a space-dependent diffusion coefficient in a time-fractional diffusion equation. An implicit difference scheme for the direct problem is presented and based on the discretization of the fractional derivative of Caputo, and the stability and convergence of the implicit scheme are proved using matrix analysis. With Thomas's method, we calculated the numerical solution of direct problem by a numerical example. An inversion algorithm based on the least squares method with Tikhonov regularization is introduced to numerically determine the diffusion coefficient in a different approximate space, and numerical inversions are performed by two numerical examples. This inversion algorithm is effective at least for this inverse problem.

Keywords : Convergence, Fractional diffusion equation, Implicit scheme, Least squares, Matrix analysis, Normal equation, Stability, Thomas method.