



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Discrètes

Par

Aiche asma

Sujet

Sur certains invariants des formes trilinéaires
(le commutant)

Devant le jury :

Mr. D.MIHOUBI

Prof. Univ de M'sila

Président

Mr. N.MIDOUNE

MCA. Univ de M'sila

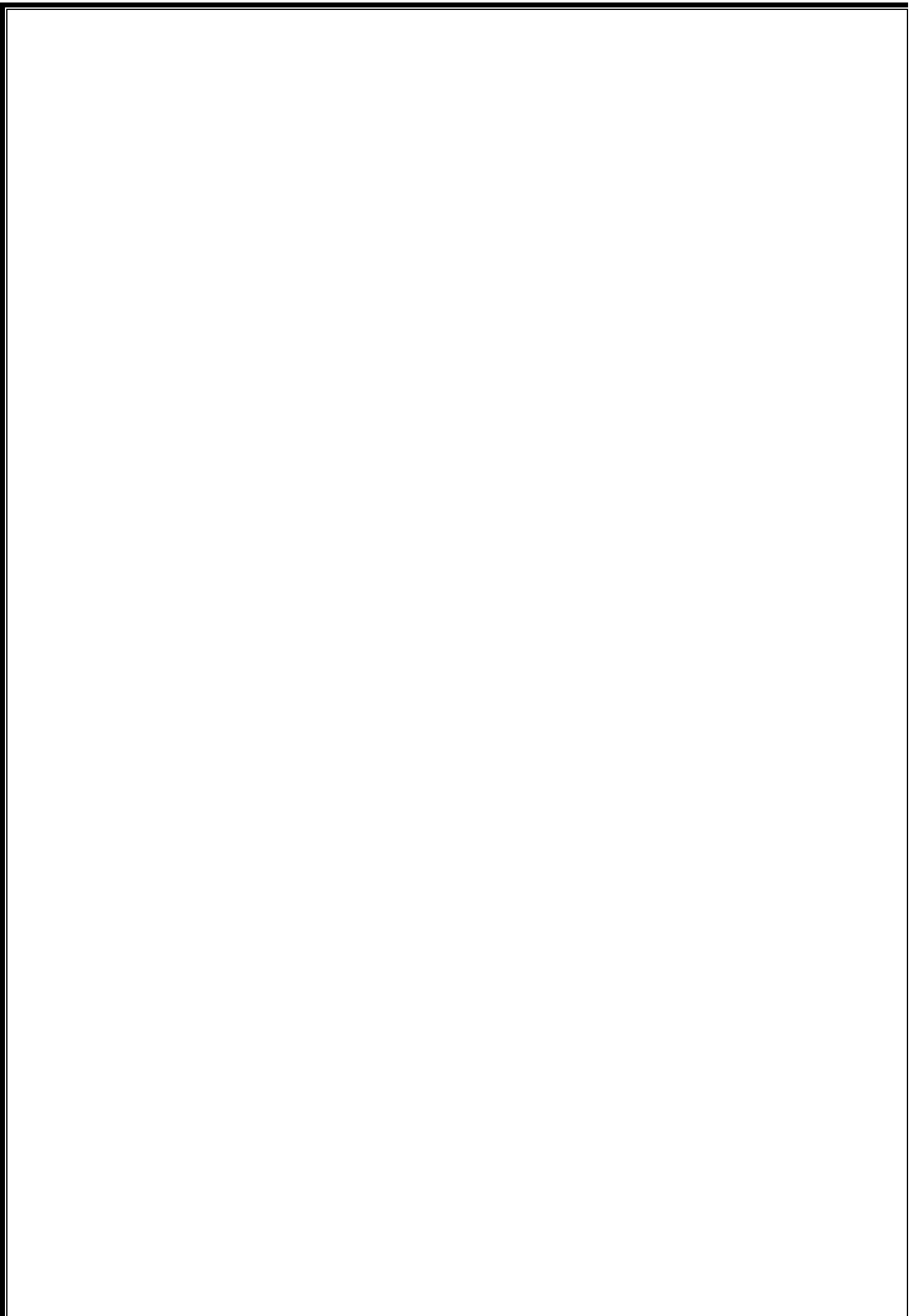
Rapporteur

Mr. N.GHADBANE

MCB. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2016 / 2017



Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

*Je tiens à remercier mon promoteur: le professeur **M.Noureddine** pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience.*

Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Merci

Table des matières

Introduction	1
1 Algèbre extérieure	2
1.1 Produit tensoriel	2
1.1.1 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels	2
1.1.2 Algèbre tensorielle	3
1.2 Algèbre extérieure	3
1.2.1 Définition et propriétés de base	5
1.2.2 Formes alternées	8
1.3 L'action gauche	8
1.3.1 Support et Rang	9
1.3.2 Vecteur décomposable	9
1.3.3 Le commutant	11
1.3.4 Invariant numérique $d_1(\omega)$	11
1.3.5 Vecteur divisible	12
1.3.6 Parties stables	12
1.3.7 Éléments scindables	16
1.3.8 Suite exacte	17
2 Classification des bivecteurs	18
2.1 Classification	18
2.2 Groupe symplectique	20
2.3 Propriétés des formes bilinéaires alternées	21
3 Classification des trivecteurs	30
3.1 Classification des trivecteurs en dimension inférieure à 6	30
3.2 Classification des trivecteurs en dimension 6	30
3.3 Classification des trivecteurs en dimension 7	31
3.4 Classification des trivecteurs en dimension 8	31
3.5 Le commutant	32
3.5.1 Commutant d'un trivecteur de rang inférieure ou égale à 6	34

3.5.2	Commutant d'un trivecteur de <i>rang</i> 6	39
3.5.3	Commutant d'un trivecteur de <i>rang</i> 8	40
	Conclusion	41
	Bibliographie	42

Introduction

L'une des applications de la théorie des groupe est liée au problème de classification .

La classification des trivecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\bigwedge^3 E$. Comme $\bigwedge^3 E^* \simeq \left(\bigwedge^3 E\right)^*$, on parle indifféremment des formes trilinéaires alternées et des trivecteurs.

Pour classifier les trivecteurs, il est nécessaire de déterminer le commutant .

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des formes trilinéaires alternées (trivecteurs). Ce travail est composé des trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, on donne des généralités où apparaissent les notions du produit tensoriel, le produit extérieur, scindabilité, , le commutant.
- Au deuxième chapitre, nous rappelons le principal résultat connu sur la classification des bivecteurs ainsi que des propriétés sur les formes bilinéaires alternées.
- Les troisième chapitre contient la classification des trivecteurs en dimension ≤ 8 .

On détermine le commutant des trivecteurs de $\text{rang} \leq 8$.

Chapitre 1

Algèbre extérieure

1.1 Produit tensoriel

1.1.1 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels

Soit K un corps commutatif, et soient E, F deux espaces vectoriels sur K .

Théorème 1.1

i) Il existe un espace vectoriel sur K , noté $E \otimes F$ qui se lit E tenseur F , et une application bilinéaire $j \in \beta(E, F; E \otimes F)$ tels que, pour tout espace vectoriel G et toute application bilinéaire $b \in \beta(E, F; G)$ il existe une unique application linéaire

$$c : E \otimes F \longrightarrow G,$$

telle que $b = c \circ j$.

$$\begin{array}{ccc} E \times F & & \\ j \downarrow & \searrow b & \\ E \otimes F & \xrightarrow{\exists! c} & G \end{array}$$

ii) Le couple $(E \otimes F, j)$ est unique à unique isomorphisme près. Ce qui signifie que si $(E \otimes F, j)$ et $((E \otimes F)', j')$ sont deux solutions de i), il existe un unique isomorphisme

$$I : E \otimes F \longrightarrow (E \otimes F)',$$

tel que $j' = I \circ j$.

Pour résumer, l'ensemble des application bilinéaires de $E \times F$ dans G , s'identifie à l'ensemble des application bilinéaires de $E \otimes F$ dans G .

$$\beta(E, F; G) \simeq \mathfrak{L}(E \otimes F; G).$$

1.1.2 Algèbre tensorielle

On pose : $T^0(E) = K$, $T^1(E) = E$, et pour $p > 1$

$$T^p(E) = \underbrace{E \otimes E \otimes \dots \otimes E}_{P\text{-fois}}.$$

Définition 1.1

On appelle algèbre tensorielle de E que l'on note

$$T(E) = \bigoplus_{p \geq 0} T^p(E).$$

Le produit évident $T^p(E) \times T^q(E) \longrightarrow T^{p+q}(E)$ qui associe à $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p$, et $y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_q \longrightarrow x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_q$ en fait une algèbre (non commutative).

Se rappeler que $K \otimes E = E$.

1.2 Algèbre extérieure

Le produit extérieur a des applications dans toutes les branches des mathématiques, par exemple en géométrie différentielle.

Définition 1.2

On note $\Lambda^p E$ le quotient de $T^p(E)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p$ où $x_i = x_j$ pour 2 indices $i \neq j$. On appelle $\Lambda^p E$ la puissance extérieure p -ième de E .

On note $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$ la classe dans ce quotient de l'élément $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p$ cet élément se lit x_1 extérieur x_2 extérieur x_3 extérieur... extérieur x_p .

On note $\Lambda^*(E) = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p E = K \oplus E \oplus \Lambda^2 E \oplus \dots$

Le produit $T^p(E) \times T^q(E) \longrightarrow T^{p+q}(E)$ passe évidemment au quotient et

induit un produit dit “produit extérieur”

$$\Lambda : \Lambda^p(E) \times \Lambda^q(E) \longrightarrow \Lambda^{p+q}(E)$$

Remarque 1.1

La puissance extérieure $\Lambda^p E$ est définissable d’une manière analogue au produit tensoriel.

On appelle forme p -linéaire alternée sur E , à valeur dans F une application p -linéaire $E^p \longrightarrow F$, nulle chaque fois que deux vecteurs sont égaux.

Pour toute application p -linéaire alternée $\rho : E^p \longrightarrow F$. Il existe une unique application linéaire :

$$f : \Lambda^p E \longrightarrow F,$$

telle que :

$$\begin{array}{ccc} E^p & & \\ c \downarrow & \searrow \rho & \\ \Lambda^p E & \xrightarrow{f} & F \end{array} \quad \rho = f \circ c,$$

où c est l’application p -linéaire alternée définie par $c(x_1, \dots, x_p) = x_1 \wedge \dots \wedge x_p$.

Proposition 1.1

Soient $X \in \Lambda^p E$ et $Y \in \Lambda^q E$. On a :

$$X \wedge Y = (-1)^{pq} Y \wedge X \in \Lambda^{p+q}(E).$$

Preuve.

Puisque les éléments de la forme $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ et $y_1 \wedge \dots \wedge y_q$ engendrent respectivement $\Lambda^p(E)$ et $\Lambda^q E$ il suffit de montrer la formule pour ceux-ci.

En fait dans $\Lambda^2(E)$ on a $x \wedge y = -y \wedge x$, puisque :

$$\begin{aligned} (x + y) \wedge (x + y) &= 0 \\ &= x \wedge x + y \wedge y + x \wedge y + y \wedge x \\ &= 0 + 0 + x \wedge y + y \wedge x. \end{aligned}$$

La formule en découle. ■

Corollaire 1.1

- i) Si $\dim E = n$, Soit $e_1 \dots e_n$ une base de E . Les C_n^p élément $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ où $i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$, forment une base de $\Lambda^p E$. En particulier la dimension de $\Lambda^p E$ est C_n^p .
- ii) Le produit extérieurement $\Lambda : \Lambda^* E \times \Lambda^* E \longrightarrow \Lambda^* E$ fait de $\Lambda^* E$ une algèbre. On exprime la (proposition 1.1) en disant que c'est une algèbre commutative au sens gradué.

1.2.1 Définition et propriétés de base

On utilise le symbole \wedge pour noter aussi le produit dans $\bigwedge(E)$. Ce produit est appelé produit extérieurement (ou produit alterné). Si $x, y \in E$, alors $x \wedge y = -y \wedge x$ comme on le voit en développant :

$$(x + y) \wedge (x + y) = 0.$$

Pour chaque application linéaire $f : E \rightarrow F$, on obtient une application :

$$\bigwedge(f) : \bigwedge(E) \rightarrow \bigwedge(F),$$

telle que, pour $x_1, \dots, x_r \in E$,

$$\bigwedge(f)(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_r),$$

de plus, $\bigwedge(f)$ est un homomorphisme de K -algèbres .

Proposition 1.2

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K . Si $r > n$, alors $\bigwedge^r(E) = 0$. Soit (v_1, \dots, v_n) une base de E sur K . Si $1 \leq r \leq n$, alors $\bigwedge^r(E)$ est libre sur K et les éléments :

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r} \quad \text{avec} \quad i_1 < \dots < i_r,$$

forment une base de $\bigwedge^r(E)$ sur K . On a :

$$\dim_K \bigwedge^r(E) = \binom{n}{r}.$$

Preuve.

On va d'abord donner la preuve pour le cas $r = n$. Tout élément de E s'écrit sous la forme $\sum a_i v_i$, à l'aide de la formule $x \wedge y = -y \wedge x$, on voit que $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ engendre $\bigwedge^n(E)$. Par ailleurs, la théorie des déterminants montre que pour $a \in K$, il existe une unique forme multilinéaire alternée f_a sur E telle que :

$$f_a(v_1, \dots, v_n) = a.$$

Par suite, il existe une unique application linéaire :

$$\bigwedge^n(E) \rightarrow K,$$

prenant la valeur a sur $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. On en déduit que $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ est une base de $\bigwedge^n(E)$ sur K .

Considérons maintenant le cas général $1 \leq r \leq n$. Supposons que :

$$0 = \sum a_{(i)} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r},$$

avec $i_1 < \dots < i_r$ et $a_{(i)} \in K$. Soit $(j) = (j_1, \dots, j_r)$ (avec $j_1 < \dots < j_r$) un r -uplet correspondant à un terme de la somme et soient j_{r+1}, \dots, j_n les indices n'apparaissant pas parmi les j_1, \dots, j_r .

On forme le produit extérieur avec $v_{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge v_{j_n}$.

Tous les termes sauf le (j) -ième s'annulent, car ils contiennent des facteurs identiques. On obtient ainsi

$$0 = a_{(j)} v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_r} \wedge \dots \wedge v_{j_n}.$$

En permutant $v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_n}$ en $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, on ne fait que changer le signe de l'expression de droite. D'après le résultat démontré pour le cas $r = n$, on déduit que $a_{(j)} = 0$. et on a ainsi la démonstration pour $1 \leq r \leq n$.

Pour $r = 0$, on a un produit vide et 1 est une base de $\bigwedge^0 = K$ sur K . Le cas $r > n$ est trivial.

L'assertion sur la dimension est conséquence de la bijection entre l'ensemble des éléments de la base et les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$. ■

On exprime le dual de $\Lambda^p(E)$ au moyen de E^* . En effet :

Etant donné p formes linéaires $f_1, f_2, \dots, f_p \in E^*$ et p éléments

$x_1, x_2, \dots, x_p \in E$, Formons d'abord la matrice A du type (p, p) qui a pour termes $A_{i,j} = f_i(x_j)$.

On sait que tout déterminant est une fonction multilinéaire alternée de ces lignes et de ces colonnes, par suite, étant donnée une liste f de formes linéaires $|A|$ est une fonction p -linéaire alternée de x_1, x_2, \dots, x_p .

Puisque $(x_1, x_2, \dots, x_p) \longrightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$ est une application universelle de ce type, il existe une application linéaire $t(f_1, f_2, \dots, f_p) : \Lambda^p(E) \longrightarrow K$ telle que :

$$[t(f_1, f_2, \dots, f_p)](x_1, x_2, \dots, x_p) = |A|; A_{i,j} = f_i(x_j).$$

Chaque $t(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est donc un élément de $[\Lambda^p(E)]^*$. Puisque le déterminant $|A|$ est une fonction multilinéaire alternée de ces lignes, l'application $(f_1, f_2, \dots, f_p) \longrightarrow t(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est alternée et multilinéaire.

Comme $(f_1, f_2, \dots, f_p) \longrightarrow f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p \in \Lambda^p(E^*)$ est universelle, il existe une application linéaire $\Psi : \Lambda^p(E^*) \longrightarrow [\Lambda^p(E)]^*$ telle que :

$$\Psi(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p) = t(f_1, f_2, \dots, f_p),$$

c'est-à-dire :

$$\Psi(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p)(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p) = |A| \dots (1)$$

A ayant pour termes $A_{i,j} = f_i(x_j)$ pour $i, j \in p$.

Théorème 1.2

Si E un espace vectoriel de dimension finie n , sur un corps commutatif K alors pour tout entier naturel p l'application linéaire Ψ de (1) est un isomorphisme.

$$\Psi : \Lambda^p(E^*) \cong [\Lambda^p(E)]^* \dots (2)$$

Preuve.

Prenons une base x_1, x_2, \dots, x_p de E et la base duale f_1, f_2, \dots, f_p de E^* , on a donc $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j \in n$. $\Lambda^p(E^*)$ a alors pour base l'ensemble des $f_n = f_{n_1} \wedge \dots \wedge f_{n_p}$, pour toutes les listes strictement croissantes $h : p \longrightarrow n$, tandis que $\Lambda^p(E)$ a pour base l'ensemble des $x_k = x_{k_1} \wedge \dots \wedge x_{k_p}$.

Pour toutes les listes strictement croissantes $k: n \rightarrow p$, $[\Psi f_n](x_k) = |A|$, A étant la matrice (p, p) qui a pour termes $A_{i,j} = f_{k_i}(x_{k_j})$. Etant donné un indice i de cette matrice, $f_{k_i}(x_{k_j})$ est nul sauf si $k_j = h_i$. Il ya donc une ligne de A qui s'annule à moins que chaque h_i ne soit pas égal à un k_j , cela ne peut se produire que si les deux listes croissantes sont égales, $k = h$. Dans ce cas, A est la matrice unité du type (p, p) , qui a pour déterminant 1.

Par suite $[\Psi f_n](x_k)$ est égal à zéro ou un, suivant que $h \neq k$ ou $h = k$.

Cela établit que les éléments Ψf_n forment une base de $[\Lambda^p(E)]^*$ duale de la base x_k de $\Lambda^p(E)$.

Autrement dit, Ψ transforme une base $\Lambda^p(E^*)$ en une base de $[\Lambda^p(E)]^*$, c'est donc bien un isomorphisme. ■

1.2.2 Formes alternées

Les espaces vectoriels $\Lambda^p(E)$ qu'on rencontre dans l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel E de dimension finie peuvent être définis d'une autre manière en utilisant les formes alternées pour tout espace vectoriel E sur le corps commutatif K l'ensemble $ALT_p(E)$ des formes p -linéaires alternées $h: E^p \rightarrow K$ est lui-même un K espace vectoriel pour les opérations terme à terme habituelles.

Proposition 1.3

Pour tout espace vectoriel E sur A , toute forme linéaire $t: \Lambda^p(E) \rightarrow K$ détermine une forme p -linéaire alternée $h: E^p \rightarrow K$ par l'intermédiaire de

$$h(x_1, x_2, \dots, x_p) = t(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p).$$

L'application $t \rightarrow h$ est un isomorphisme.

$$[\Lambda^p(E)]^* \cong ALT_p(E).$$

1.3 L'action gauche

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K . La classification des p -vecteurs est l'étude de l'action gauche du groupe linéaire

$GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^p E$ définie par :

$$\forall f \in GL(E), \forall \omega \in \Lambda^p E, f \cdot \omega = (\Lambda^p f)(\omega).$$

$$\Lambda^p f: \Lambda^p E \longrightarrow \Lambda^p E,$$

définie par :

$$\Lambda^p f(x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_p) = f(x_1) \wedge f(x_2) \dots \wedge f(x_p),$$

est un endomorphisme de $\Lambda^p E$.

Remarque 1.2

Du fait de l'isomorphisme $\Lambda^p E^ \approx (\Lambda^p E)^*$, on emploiera le langage des formes alternées ou des p -vecteurs.*

1.3.1 Support et Rang

On appelle support de ω et on note S_ω le plus petit sous-espace F de E tel que $\omega \in \Lambda^3 F$, La dimension de S_ω s'appelle le *rang* de ω qu'on note $d_0(\omega)$ ou $rg(\omega)$.

Le *rang* est invariant par l'action du groupe linéaire $GL(E)$ et par extension des scalaires.

1.3.2 Vecteur décomposable

Un p -vecteur non nul ω est décomposable s'il existe x_1, x_2, \dots, x_p dans E tel que $\omega = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$. Le support de ω est le sous-espace vectoriel engendré par x_1, x_2, \dots, x_p , donc $S_\omega = \langle x_1, x_2, \dots, x_p \rangle$, dans ce cas $d_0(\omega) = \dim S_\omega = p$.

Un trivecteur est somme de trivecteurs décomposables.

Lemme 1.1

Etant donnée qu'il existe un isomorphisme entre $\Lambda^3 K^4$ et $\Lambda^1 K^4$, il n'y a pas de trivecteurs de rang 4.

Preuve.

Mettons, d'abord en évidence l'isomorphisme entre $\Lambda^3 K^4$ et $\Lambda^1 K^4$.

Soient une base de $\Lambda^1 K^4$ donnée par $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, et une autre de $\Lambda^3 K^4$ donnée par $\{\omega_1 = e_1 e_2 e_3, \omega_2 = e_2 e_3 e_4, \omega_3 = e_1 e_3 e_4, \omega_4 = e_1 e_2 e_4\}$. Et considérons

f définie par :

$$\begin{aligned} f: \Lambda^1 K^4 &\longrightarrow \Lambda^3 K^4 \\ x = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i &\longrightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \omega_i \end{aligned}$$

f tel qu'elle est définie, est linéaire bijective et donc c'est un isomorphisme. Montrons qu'il n'y a pas de trivecteurs de *rang* 4. Du fait de l'isomorphisme f tout élément de $\Lambda^3 K^4$ s'écrit sous la forme $\omega = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \omega_i$.

Soit ω non nul, et étudions son rang si :

- $\omega = \alpha_i \omega_i$ $\alpha_i \neq 0$ $i \in \overline{1,4}$ donc $rg(\omega) = rg(\omega_i) = 3$.
- $\omega = \alpha_i \omega_i + \alpha_j \omega_j$ $i \neq j$ $i, j \in \overline{1,4}$ comme $\dim(S_{\omega_i} \cap S_{\omega_j}) = 2 \quad \forall i \neq j \quad i, j \in \overline{1,4}$.

Donc l'écriture de ω se ramène à un trivecteur décomposable donc $rg(\omega) = 3$.

- Si $\omega = \alpha_i \omega_i + \alpha_j \omega_j + \alpha_k \omega_k$ avec $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_j \neq 0$, $\alpha_k \neq 0$, $i \neq j \neq k$ $i, j, k \in \overline{1,4}$.

On envisage quatre cas possibles dans l'étude du *rang* de chaque trivecteur est identique.

Traisons par exemple :

Le cas où $\omega = \alpha_1 e_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_2 e_3 e_4 + \alpha_3 e_1 e_3 e_4$, avec $\alpha_i \neq 0$, $i \in \overline{1,3}$. on peut écrire $\omega = e_3 (\alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_4 e_2 + \alpha_3 e_4 e_1)$.

Soit $u = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_4 e_2 + \alpha_3 e_4 e_1$. Comme $\gamma_2(u) = \frac{u^2}{2!} = 0 \Rightarrow rg u = 2$. $e_3 \notin S_u$ D'où $rg(\omega) = 3$.

Si :

- $\omega = \alpha_1 e_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_2 e_3 e_4 + \alpha_3 e_1 e_3 e_4 + \alpha_4 e_1 e_2 e_4$, avec $\alpha_i \neq 0$, $i \in \overline{1,4}$.
- $\omega = e_2 e_3 (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) - e_1 e_4 (\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)$.
- $\omega = \alpha_4^{-1} (\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2) e_3 (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) - \alpha_1^{-1} (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) e_4 (\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)$.
- $\omega = (\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2) (\alpha_4^{-1} e_3 + \alpha_1^{-1} e_4) (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4)$.

On en déduit que $rg(\omega) = 3$ car les vecteurs qui le composent, sont linéairement indépendants. Alors dans tout les cas $rg(\omega) = 3$, ainsi il n'y a pas de trivecteurs de *rang* 4. ■

1.3.3 Le commutant

Le commutant de ω a été introduit par B . Si $\omega \in \Lambda^p E^*$, on note $C(\omega)$ l'ensemble des endomorphismes $f : E \rightarrow E$ tels que l'application :

$$(x_1, \dots, x_p) \rightarrow \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, fx_i, x_{i+1}, \dots, x_p) \text{ ne dépende pas de } i.$$

On la note $\omega_f(x_1, \dots, x_p)$ et c'est clairement une forme p -linéaire alternée.

Groupe d'automorphismes

Le groupe des automorphismes de ω , $Aut(\omega)$ est le stabilisateur de ω dans l'action de $GL(E)$ c'est à dire le sous-groupe de $GL(E)$ des automorphismes de E qui laissent ω invariant :

$$Aut(\omega) = \{f \mid f \in GL(E) \text{ et } \wedge^p f(\omega) = \omega\} = \{f \mid f \in GL(E) \text{ et } f.\omega = \omega\}.$$

L'orbite de ω par $GL(E)$ est alors en bijection avec l'ensemble des classes à gauche $GL(E)/Aut(\omega)$.

1.3.4 Invariant numérique $d_1(\omega)$

On associe à un 3-vecteur (trivecteur) d'autre invariant numérique que son *rang*.

Soit $G_1(E)$ l'espace projectif $IP(E)$ et considérons la projection :

$$P_\alpha : \Lambda^3 E \longrightarrow \Lambda^3(E/\alpha)$$

Pour $\alpha \in G_1(E)$, on appelle $\varpi(\alpha)$ l'image de ω par P_α , et on pose :

$$d_1(\omega) = \inf_{\alpha} (\text{rang } \varpi(\alpha)), \alpha \in G_1(E).$$

On a $d_0(\omega) = \text{rg}(\omega) > d_1(\omega)$, $d_1(\omega)$ est invariant par l'action de $GL(E)$.

Lemme 1.2

Soit E un espace vectoriel de dimension paire et ω un trivecteur de rang maximal alors : $d_1(\omega) \neq 0$, en particulier si $\dim E = 8$, $d_1(\omega) \neq 0$.

Preuve.

On a $d_1(\omega) = \inf_{\alpha} (\text{rang } \varpi(\alpha))$, où α parcourt l'espace projectif $IP(E)$ des droites de E .

Si $d_1(\omega) = 0$, il existe $\alpha = Kx$, $x \neq 0$ tel que $\varpi(\alpha) = 0$.

Soit \dot{E} un supplémentaire de Kx dans E , De $E = E' \oplus Kx$, résulte :

$$\Lambda^3 E \approx \Lambda^3 E' \oplus (Kx \otimes \Lambda^2 E'),$$

alors $\omega = ux + \omega'$ et $\varpi(\alpha) = 0$ signifie que ω' est nul, de plus $S_\omega = S_u \oplus Kx = E$. Comme ω est de rang maximal, $S_u = E'$ et E' est de dimension paire ce qui contredit l'hypothèse sur la dimension de E . ■

1.3.5 Vecteur divisible

Soit ω un trivecteur non nul, ω est un trivecteur divisible s'il existe un

$$x \in E / \{0_E\} \text{ et } u \in \Lambda^2 E_2 \text{ telque } E = Kx \oplus E_2 \text{ et } \omega = x \wedge u.$$

Proposition 1.4

ω est un vecteur divisible si et seulement si $d_1(\omega) = 0$.

Preuve.

- Si $\omega = x \wedge u \Rightarrow d_1(\varpi(Kx)) = 0$.
- Si $d_1(\omega) = 0 \Rightarrow \exists \alpha \in G_1 / \text{rg}(\varpi(\alpha)) = 0$, d'où $\varpi(\alpha) = 0$.

Donc si on prend $\alpha = Kx$ on obtient : $\omega = y \wedge u$ ce qu'il fallait montrer. ■

Remarque 1.3

Comme $d_1(\omega) \neq 0$, si ω est de rang maximal, alors on en déduit qu'il n'y a pas de trivecteur de rang 8 divisible.

1.3.6 Parties stables

Lemme 1.3

Soit E un espace vectoriel sur le corps K et considérons la forme bilinéaire alternée par $f^x(y, z) = f(x, y, z)$ ($y, z \in E$ et f une forme trilinéaire alternée) alors l'ensemble $\bar{R}_i = \{x \in E / \text{rg} f^x = 2i\}$ ($0 \leq 2i \leq n$) est stable par $\text{Aut}(\omega)$.

Lemme 1.4

L'ensemble $R_i(\omega) = \{x \in E / \varpi(x) \text{ est de type } \omega_i\}$ une partie stable pour $\text{Aut}(\omega)$.

Preuve.

Prenons $E = \langle x \rangle \oplus E'$, alors ω s'écrit : $\omega = xu + \omega'$ avec $\omega' \in \Lambda^3 E'$ telle que $(\dim E' = n - 1)$ et $\varpi(x) = \varpi'(x)$, comme $x \notin E'$ alors ϖ' est de même type que $\varpi(x)$. D'où $\varpi(f(x)) = \overline{\Lambda^3 f(\omega') f(x)}$.

Comme f est une application linéaire bijective, elle transforme le trivecteur ω' à un trivecteur de même type, c'est à dire $f(\omega')$ est dans l'orbite de ω' , par suite $\varpi(f(x))$ est de type ω_i d'où $f(x) \in R_i(\omega)$ et $f(R_i(\omega)) \subset R_i(\omega)$. ■

Lemme 1.5

Soit E un espace vectoriel sur le corps K de dimension finie, V_1, V_2 deux sous espaces de E différents et tel que $\dim V_1 = \dim V_2$, si f est un endomorphisme de E qui laisse stable la réunion de V_1 et V_2 c'est à dire $(f(V_1 \cup V_2) \subset (V_1 \cup V_2))$ alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2) \\ \text{ou} \\ (f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1) \end{array} \right.$$

Preuve.

Comme on a $(f(V_1) \cup f(V_2)) \subset (V_1 \cup V_2)$ on tire :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(V_1) \subset (V_1 \cup V_2) \\ f(V_2) \subset (V_1 \cup V_2) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(V_1) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_1) \\ f(V_2) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_2) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (f(V_1) \cap V_1) \cup (f(V_1) \cap V_2) = f(V_1) \text{ I} \\ (f(V_2) \cap V_1) \cup (f(V_2) \cap V_2) = f(V_2) \text{ II} \end{array} \right.$$

Or la réunion de deux sous espaces vectoriels est un sous espaces vectoriel si et seulement si l'un est inclus dans l'autre ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} ((f(V_1) \cap V_1) \subset (f(V_1) \cap V_2)) \text{ ou } ((f(V_1) \cap V_2) \subset (f(V_1) \cap V_1)) \\ \text{et} \\ ((f(V_2) \cap V_1) \subset (f(V_2) \cap V_2)) \text{ ou } ((f(V_2) \cap V_2) \subset (f(V_2) \cap V_1)) \end{array} \right.$$

On remplace dans I et II on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} ((f(V_1) \cap V_1) = f(V_1)) \text{ ou } ((f(V_1) \cap V_2) = f(V_1)) \\ \text{et} \\ ((f(V_2) \cap V_1) = f(V_2)) \text{ ou } ((f(V_2) \cap V_2) = f(V_2)) \end{array} \right.$$

Ce qui implique que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(V_1) \subset V_1) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2) \\ \text{et} \\ (f(V_2) \subset V_1) \text{ ou } (f(V_2) \subset V_2) \end{array} \right.$$

On a quatre cas qui figurent :

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1) \\ \text{et} \\ (f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_1) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_2) \end{array} \right.$$

Les deux derniers cas sont impossibles car par exemple :

Si $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_1$ comme $\dim f(V_1) = \dim V_1$
et $\dim f(V_2) = \dim V_2$.

D'où $f(V_1) = V_1$ et $f(V_2) = V_1 \Rightarrow V_1 = V_2$ (f injective) ce qui est absurde car $V_1 \neq V_2$. ■

Lemme 1.6

Soit $\lambda \in K^*$, $u \in K$ et $\dim_K E = 7$.

- $h_{\lambda,u} = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6 + ue_2e_3e_6$.
- $h_\lambda = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4e_5e_6$.

Alors $h_{\lambda,u}$ et h_λ sont des trivecteurs de rang 6 du type $\omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$.

Preuve.

Soit $f \in GL(E)$ définie par :

$$f(e_1) = e_1 - ue_6, \quad f(e_2) = e_2 - \lambda^{-1}e_6, \quad f(e_4) = e_4 - \lambda^{-1}e_3.$$

$$f(e_i) = e_i \quad \forall i = 3, 5, 6, 7.$$

$$\begin{aligned} f.h_{\lambda,u} &= (e_1 - ue_6)(e_2 - \lambda^{-1}e_6)e_3 + (e_1 - ue_6)(e_4 - \lambda^{-1}e_3)e_6 + e_3e_5e_6 + \\ &\quad \lambda(e_4 - \lambda^{-1}e_3)e_5e_6 + u(e_2 - \lambda^{-1}e_6)e_3e_6. \end{aligned}$$

$$f.h_{\lambda,u} = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4e_5e_6 = h_\lambda.$$

Donc $h_{\lambda,u}$ est équivalente à h_λ .

Montrons que h_λ est du type $\omega_{6,1}$, soit $g \in GL(E)$ définie par :

$$g(e_5) = e_5 + \lambda^{-1}e_1, \quad g(e_i) = e_i \quad \forall i \neq 5.$$

$$g.h_\lambda = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4(e_5 + \lambda^{-1}e_1)e_6.$$

$$g.h_\lambda = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4e_5e_6 + e_4e_1e_6.$$

$$g.h_\lambda = e_1e_2e_3 + \lambda e_4e_5e_6 \text{ c'est un trivecteur du type } \omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6. \quad \blacksquare$$

Lemme 1.7

Soit E un K -espace vectoriel de dimension 7 et ω un trivecteur donné par :

$$\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + ue_1e_2e_3 + \lambda e_4e_5e_6 \text{ avec } u, \lambda \in K.$$

Si $u = 0$ ou $\lambda^2 u = -4\omega$ est du type $\omega_{6,2}$ et il est ω du type $\omega_{6,1}$ dans les autres cas.

Preuve.

Si $u = 0$, $\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6$.

Considérons $f \in GL(E)$ définie par : $f(e_3) = e_3 - \lambda e_4$, $f(e_i) = e_i \quad \forall i \neq 3$.

$$\Lambda^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + (e_3 - \lambda e_4)e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6.$$

$$\Lambda^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 \text{ du type } \omega_{6,2}.$$

Supposons que $u \neq 0_K$.

Comme K est un corps algébriquement clos alors l'équation $x^2 = u$ (I) admet des solutions dans K .

Soit a une solution de (I) et considérons $f \in GL(E)$ définie par : $f(e_4) = ae_4$
 $f(e_i) = a^{-1}e_i \quad i = 1, 2, \quad f(e_j) = ae_j \quad j = 3, 5, 6, 7$.

d'où :

$$\Lambda^3 f(\omega) = a^{-1}e_1(ae_4)e_5 + a^{-1}e_2ae_4e_6 + e_3e_5e_6 + ua^{-2}e_1e_2e_3 + \lambda ae_4e_5e_6.$$

$$\Lambda^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + e_1e_2e_3 + \lambda ae_4e_5e_6.$$

Si on pose $\lambda' = \lambda a$, on remarque que l'étude du type trivecteur ω ($u \neq 0$) revient à l'étude du trivecteur ω lorsque $u = 1$.

$$\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda' e_4e_5e_6. \quad \lambda' \in K.$$

Soit $g \in GL(E)$, définie par :

$$g(e_1) = e_1 + \alpha e_6 \quad g(e_2) = e_2 + \gamma e_5 \quad g(e_3) = e_3 + \xi e_4.$$

$$g(e_6) = e_6 + \beta e_1 \quad g(e_5) = e_5 + \delta e_2 \quad g(e_4) = e_4 + \eta e_3.$$

avec $\alpha, \xi, \beta, \delta, \eta, \gamma \in K \quad \alpha\beta \neq 1, \quad \gamma\delta \neq 1, \quad \xi\eta \neq 1$. Alors :

$$\Lambda^3 f(\omega) = \begin{cases} (1 - \gamma\beta + \beta\xi - \gamma\xi + \beta\lambda') e_1e_4e_5 + (\beta - \delta - \beta\delta\xi + \xi - \beta\lambda'\delta) e_1e_2e_4 + \\ (\eta - \beta\gamma\eta + \beta - \gamma + \beta\lambda'\eta) e_1e_3e_5 + (-\delta\eta + \beta\eta - \beta\delta + 1 - \beta\delta\lambda'\eta) e_1e_2e_3 + \\ (\alpha - \gamma + \xi - \xi\gamma\alpha + \lambda') e_4e_5e_6 + (-\alpha\delta + 1 - \xi\delta - \alpha\xi - \lambda'\delta) e_2e_4e_5 + \\ (1 + \alpha\eta - \gamma\eta - \alpha\gamma + \lambda'\eta) e_3e_5e_6 + (\eta - \delta - \alpha\eta\delta + \alpha - \lambda'\eta\delta) e_2e_3e_6 \end{cases}$$

Supposons que la caractéristique de K est impaire et posons : $\gamma = \delta = \alpha = 0$
 et $\beta = \eta = -\xi = 1/2\lambda$ alors :

$$\Lambda^3 g(\omega) = (1 + 1/4\lambda'^2) e_1e_4e_5 + e_1e_2e_3 + e_2e_4e_6 + e_1e_5e_6.$$

- si $\lambda'^2 + 4 = 0$ dans ce cas $\Lambda^3 g(\omega)$ est du type $\omega_{6,2}$,
(car ω est du type $\omega_{6,2} = e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_5 + e_1 e_3 e_6$).

- si $\lambda'^2 u = -4$, si $\lambda' = 0$, $\omega = e_1 e_4 e_5 + e_2 e_4 e_6 + e_3 e_5 e_6 + e_1 e_2 e_3$.

On applique la transformation g avec $\beta = \delta = \gamma = 1$ et $\alpha = \gamma = \xi = -1$. On obtient $\Lambda^3 g(\omega) = 2(e_1 e_3 e_5 + e_2 e_4 e_6)$ ainsi ω est équivalent à type $\omega_{6,1}$.

Supposons maintenant que la caractéristique de K est paire. et soit $\Psi \in K^*$ tel que : $\alpha = \delta = \gamma = 0$ et $\beta = \gamma = \xi = \Psi$, d'où :

$$\Lambda^3 g(\omega) = e_1 e_2 e_3 + e_2 e_4 e_6 + e_3 e_5 e_6 + \lambda' e_4 e_5 e_6.$$

- Si $\lambda' = 0_K$. ω est équivalent à $\omega_{6,2}$ et $\lambda' \neq 0_K$. ω est équivalent à $\omega_{6,2}$. ■

1.3.7 Éléments scindables

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , $\Lambda^p E$ s'identifie à :

$$\bigoplus_{k=0}^{k=p} (\Lambda^k E_1 \otimes \Lambda^{p-k} E_2).$$

Un élément $\omega \in \Lambda^p E$ est dit scindable s'il existe une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ telle que : $\omega \in E_1 \otimes \Lambda^{p-1} E_2$ vu comme facteur direct de $\Lambda^p E$. Si $\dim E_1 = r$, on dit que ω est r -scindable. La scindabilité est une généralisation de la divisibilité. en effet ω est divisible si et seulement si ω est 1-scindable, propriété qui ne dépend pas du corps de base car c'est équivalent à dire que l'application :

$$\begin{array}{l} E \longrightarrow \Lambda^{p+1} E \\ x \longrightarrow x\omega \end{array} \quad \text{n'est pas injective,}$$

notons aussi que ω r -scindable implique $d_r(\omega) = 0$. car $\bar{\omega}_{E_1} = 0$.

Soit ω un élément r -scindable et $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de E_1 , $\omega = \sum_{i=1}^r e_i u_i$ où $u_i \in \Lambda^{p-1} E_2$. Les u_i sont déterminés de façon unique par la base e_1, \dots, e_r de E_1 car $u_i = d_{e_i^*}(\omega)$ où $e_i^* \in E^*$ est définie par : $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ et $e_i^*(E_2) = 0$. Alors w est déterminé par le sous-espace vectoriel F de $\Lambda^{p-1} E_2$ engendré par les u_i , en effet, si on change de base dans E_1 , et si la nouvelle base f_j est donnée par

$$e_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} f_j,$$

$$\omega = \sum_1^r e_i u_i = \sum_{j=1}^r f_j \left(\sum_{i=1}^r a_{ij} u_i \right) = \sum_{j=1}^r f_j v_j,$$

les v_j s'obtiennent donc à partir des u_i par le changement de base contragrédient de celui qui fait passer de la base $\{f_j\}$ à la base $\{e_i\}$. Cela se voit aussi en utilisant l'isomorphisme naturel entre $E_1 \otimes \Lambda^{p-1} E_2$ et $\text{Hom}(E_1^*, \Lambda^{p-1} E_2)$, si φ est l'élément de $\text{Hom}(E_1^*, \Lambda^{p-1} E_2)$ canoniquement associé à ω , F n'est autre que $\varphi(E_1^*)$.

Pour classifier les éléments r -scindables de rang maximal dans $\Lambda^p E$, il suffit donc d'étudier l'action de $GL(E_2)$ sur la grassmannienne $Gr_r(\Lambda^{p-1} E_2)$ des sous-espaces vectoriels de dimension r de $\Lambda^{p-1} E_2$. C'est ce qui est fait pour $p = 3$ et pour certaines valeurs du couple $(r = \dim E_1, n - r = \dim E_2)$ qui permettent d'aborder la classification des 3-vecteurs en petite dimension.

Le cas où $n - r$ est pair est plus simple car on peut y utiliser les puissances divisées sous la forme de pfaffiens.

Remarquons qu'un même p -vecteur peut être scindable pour plusieurs de valeurs l'entier r .

1.3.8 Suite exacte

$$\text{Soit } G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G''$$

Une suite d'homomorphismes de groupes. Nous dirons que cette suite est exacte si :

$$\text{Im } f = \ker g.$$

Par exemple, si H est un sous groupe distingué de G , la suite

$$H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\varphi} G/H,$$

est exacte (j étant l'injection et φ la projection canonique).

Dire, par exemple, que :

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \longrightarrow 0,$$

est exacte, signifie que f est injectif, que $\text{Im } f = \ker g$ et que g est surjectif.

Chapitre 2

Classification des bivecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K , muni d'une forme bilinéaire alternée φ .

2.1 Classification

Définition 2.1

On dit que E est un plan hyperbolique si $\dim E = 2$ et φ est non dégénérée.

Définition 2.2

Si E est somme orthogonale de plans hyperboliques, on dit que E est un espace hyperbolique.

Théorème 2.1

Soit E un K -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire alternée φ . Alors E est somme orthogonale du radical de φ et d'un sous-espace hyperbolique.

Si φ est non dégénérée, E est hyperbolique et de dimension paire.

Preuve.

Soit $\{e_1, \dots, e_p, \dots, e_n\}$ une base de E telle que $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une base du radical de φ , posons $E_1 = \text{Vect}\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$, alors $E = R_\varphi \oplus^\perp E_1$ (il s'agit d'une somme orthogonale car : $\varphi(e_i, e_j) = 0$, pour $i \leq p$ et $j \geq p+1$) et $\varphi|_{E_1}$ est non dégénérée. Pour $x \in E_1 - \{0\}$ il existe $y \in E_1 - \{0\}$ tel que : $\varphi(x, y) \neq 0$, donc on peut choisir un élément y de $E_1 - \{0\}$ de sorte que $\varphi(x, y) = 1$, ce qui montre que $P = \text{Vect}\{x, y\}$ est un plan hyperbolique, par suite $E_1 = P \oplus^\perp P^\perp$.

Comme $\varphi|_{P^\perp}$ est non dégénérée, la démonstration se conclut par récurrence sur la dimension de E .

Si φ est non dégénérée, $E = E_1$ est un espace hyperbolique, donc de dimension paire. ■

Corollaire 2.1

Soit ω un bivecteur de rang maximal de $\Lambda^2 E$, il existe une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E de sorte que :

$$\omega = \sum_{i=1}^k e_{2i-1}e_{2i} \quad \text{et} \quad 2k \leq n \leq 2k + 1.$$

Preuve.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent en considérant ω comme une forme bilinéaire alternée sur $E^* : E^* = R_\omega \oplus E_1$. Alors E_1 est somme orthogonale de k plans hyperboliques P_i , pour chacun d'eux, il existe une base $\{x_{2i-1}, x_{2i}\}$ telle que $\omega(x_{2i-1}, x_{2i}) = 1$. On complète alors $\{x_1, \dots, x_{2k}\}$ en une base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de E^* en prenant les x_i , $i > 2k$, dans R_ω . La base $\{e_1, \dots, e_n\}$ cherchée est la base duale de la base $\{x_1, \dots, x_n\}$.

D'après ce qui précède, on conclut que si $\dim E = n$, $\Lambda^2 E$ admet $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ orbites par l'action du groupe linéaire $GL(E)$. Dans une base (e_i) , $1 \leq i \leq n$, de E un représentant de chaque orbite est donné par $\sum_{i=1}^m e_{2i-1}e_{2i}$ où $0 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Tout élément ω de $\Lambda^2 E$ est scindable, en effet ω s'écrit $\sum_{i=1}^m e_{2i-1}e_{2i}$ dans une base convenable (e_i) et il suffit de prendre $E_1 = Vect\{e_1, e_3, \dots, e_{2n-1}\}$ et $E_2 = Vect\{e_2, \dots, e_{2m}\}$, $\omega \in E_1 \otimes E_2$.

Notons enfin que pour tout bivecteur ω , les invariants $d_k(\omega)$ sont donnés par $d_k(\omega) = \sup(0, r(\omega) - 2k)$. ■

Corollaire 2.2

Soit E un espace vectoriel de dimension paire et ω un trivecteur de rang maximal $d_1(\omega) \neq 0$.

Rappelons que $d_1(\omega) = \inf_\alpha (rg \overline{\omega_\alpha})$, où α parcourt l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ des droites de E . Si $d_1(\omega) = 0$, il existe $\alpha = Kx$, $x \neq 0$, tel que $\overline{\omega_\alpha} = 0$.

Soit E' un supplémentaire de Kx dans E , de $E = E' \oplus Kx$, résulte :

$$\Lambda^3 E \simeq \Lambda^3 E' \oplus Kx \otimes \Lambda^2 E'.$$

Alors $\omega = \omega' + ux$ et $\overline{\omega_\alpha} = 0$, signifie que ω' est nul, de plus $S_\omega = S_u \oplus Kx = E$.

Comme ω est de rang maximal, $S_u = E'$ et E' est de dimension paire ce qui contredit l'hypothèse sur la dimension de E .

2.2 Groupe symplectique

Dans ce qui suit on suppose que $\dim E = 2m$ et φ non dégénérée. Dans le paragraphe précédent on a montré l'existence d'une base (e_i) , $1 \leq i \leq 2m$, dans laquelle φ s'écrit :

$$\sum_{i=1}^m e_{2i-1}^* e_{2i}^*$$

cette base est dite "base symplectique".

Le groupe symplectique $Sp(\varphi)$ est le sous-groupe de $GL(E)$ des automorphismes de E qui laisse φ invariante :

$$\forall f \in Sp(\varphi), \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y).$$

Il est clair que f transforme toute base symplectique en une autre :

$\varphi(f(e_{2i-1}), f(e_{2i})) = \varphi(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1$ et $\varphi(f(e_k), f(e_l)) = 0$ si $\{k, l\}$ n'est pas de la forme $\{2i-1, 2i\}$.

Si $\{u_1, \dots, u_{2m}\}$ est une base symplectique de E , on définit un élément f de $Sp(\varphi)$ par $f(e_i) = u_i$, $1 \leq i \leq 2m$. Donc $Sp(\varphi)$ est en bijection avec l'ensemble des bases symplectiques de E .

On note $Sp_{2m}(K)$, le groupe $Sp(\varphi)$ où φ est la forme bilinéaire alternée canonique sur K^{2m} .

Remarque 2.1

De ce qui précède et de l'isomorphisme entre $\Lambda^{n-p}E^*$ et $\Lambda^p E$ on déduit la classification des p -vecteurs dans $\Lambda^p K^{p+2}$. Ainsi il existe $\left[\frac{p}{2}\right] + 2$ orbites dans $\Lambda^p K^{p+2}$, par exemple, dans $\Lambda^4 K^6$, il y a 4 orbites dont des représentants respectifs sont donnés, dans une base (e_i) , par 0 , $e_1 e_2 e_3 e_4$, $e_1 e_2 (e_3 e_4 + e_5 e_6)$ et $e_1 e_2 (e_3 e_4 + e_5 e_6) + e_3 e_4 e_5 e_6$.

2.3 Propriétés des formes bilinéaires alternées

Lemme 2.1

Soit $u \in \Lambda^2 E^*$ une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension finie. Soit W un sous-espace de codimension k de E , W° son orthogonal dans E^* et ω un k -vecteur non nul de $\Lambda^k W^\circ \subset \Lambda E^*$, ω est totalement isotrope pour u si et seulement si $u\omega = 0$.

Soient $\{f_1, \dots, f_k\}$ une base de W° telle que $\omega = f_1 f_2 \dots f_k$, complétée en une base $\{f_1, \dots, f_n\}$ de E^* et $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base duale de E , $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ est une base de W . Ecrivons $u = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} f_i f_j$, $u\omega = 0$, équivaut à $a_{ij} = 0$ pour $k < i < j$.

Comme $a_{ij} = u(e_i, e_j)$, ω est totalement isotrope pour u .

Remarque 2.2

Si u et ω sont des bivecteurs tels que $S_\omega \subset S_u$ et $(rg(u), rg(\omega)) = (4, 2)$ et $u\omega = 0$, $\omega = xy$ et $u = ax + by$, où $a, b, x, y \in E^*$. Si par contre $u\omega \neq 0$ $\gamma_2(u - \lambda\omega)$ est un polynôme du premier degré en λ , et il existe λ non nul tel que $u = \lambda\omega + v$ avec $rg(v) = 2$, $u = \lambda xy + ab$, $a, b, x, y \in E^*$.

Supposons maintenant que u est un bivecteur de rang 6, ω un trivecteur de rang 3, $S_\omega \subset S_u$, et $u\omega = 0$ alors $\omega = xyz$ et $u = ax + by + cz$, où a, b, c, x, y et z sont dans E^* .

Si par contre $u\omega \neq 0$, la restriction de u à S_ω° est de rang 2, il existe un bivecteur v divisant ω tel que $u = v + u_1$ avec $rg(u_1) = 4$, $S_{u_1} \cap S_\omega$ est de dimension 1 et on peut trouver une base $\{a, b, c, x, y, z\}$ de E^* telle que $u = ab + cx + yz$ et $\omega = xyz$. On conclut donc que :

- Si u et ω sont des bivecteurs tels que $S_\omega \subset S_u$ et $(rg(u), rg(\omega)) = (4, 2)$ alors il existe $\{a, x, b, y\}$ une base de S_u telle que :

$$\begin{cases} \text{si } u\omega = 0, & \omega = xy, & \text{et } u = ax + by \\ \text{si } u\omega \neq 0, & \omega = xy, & \text{et } u = \lambda xy + ab \end{cases}$$

- Si u est un bivecteur de rang 6, ω un trivecteur de rang 3 tels que $S_\omega \subset S_u$ alors il existe $\{a, b, c, x, y, z\}$ une base de S_u telle que :

$$\begin{cases} \text{si } u\omega = 0, & \omega = xyz & \text{et } u = ax + by + cz \\ \text{si } u\omega \neq 0, & \omega = xyz & \text{et } u = ab + cx + yz \end{cases}$$

Lemme 2.2

Soit H un plan vectoriel dans $\Lambda^2 K^5$ non contenu dans $\Lambda^2 E$, pour tout hyperplan E de K^5 . Alors H possède une base de l'un des type suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = e_1 e_2 \\ u_2 = e_2 e_3 + e_4 e_5 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4 \\ u_2 = e_1 e_3 + e_4 e_5 \end{array} \right.$$

où $\{e_1, \dots, e_5\}$ est une base convenable de K^5 .

Supposons d'abord que H contient un bivecteur u_1 de rang 2. Tout bivecteur u_2 non collinéaire à u_1 est de rang 4 car $H \subset \Lambda^2 (S_{u_1} + S_{u_2})$. Alors $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est une droite Ke_2 et on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = e_1 e_2 \\ u_2 = e_2 e_3 + e_4 e_5 \end{array} \right.$$

d'où le premier type.

Supposons maintenant que tout élément non nul de H est de rang 4. Soit $\{u_1, u_2\}$ une base de $H : S_{u_1} \cap S_{u_2} = W$ est de dimension 3. Considérons l'application :

$$\pi : \Lambda^2 W \rightarrow \Lambda^4 S_{u_1} \oplus \Lambda^4 S_{u_2},$$

qui à v associe le couple (vu_1, vu_2) .

Comme $\dim \Lambda^2 W = 3$, $\ker \pi$ contient une droite $D = Ke_1 e_4$ de $\Lambda^2 S_H$, en effet, l'hypothèse $\text{rg}(u_i) = 4$ entraîne que l'application $\pi_i : \Lambda^2 W \rightarrow \Lambda^4 S_{u_i}$ définie par $\pi_i(v) = vu_i$, $i = 1, 2$, est surjective, par suite $\dim(\ker \pi_1 \cap \ker \pi_2) = 1$ et $\ker \pi_1 \cap \ker \pi_2$ est une droite $D = Ke_1 e_4$ de $\Lambda^2 H$, on peut écrire :

$$u_i = e_1 x_i + e_4 y_i.$$

Posons $x_1 = e_2$, $y_1 = -e_3$ et $y_2 = e_5$, on a alors $x_2 = \sum_i a_i e_i$, $a_i \in K$. Par un changement de base, on a $u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4$ et $u_2 = e_1 (a_2 e_2 + a_3 e_3) + e_4 e_5$.

Si a_3 était nul, $u_1 - a_2 u_2$ serait de rang 2, par homothétie sur u_2 et e_5 , on peut supposer $a_3 = 1$ et en remplaçant u_2 par $u_2 - a_2 u_1$, on obtient la forme demandée.

Nous avons vu en 1. que la donnée d'un trivecteur scindable ω revient à celle d'un sous-espace vectoriel d'un espace $\Lambda^2 E$, Les trivecteurs 2-scindables de rang 8 s'obtiennent par l'étude des sous-espace de dimension 2 de $\Lambda^2 K^6$. Nous Supposons

maintenant K algébriquement clos et soit H un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\Lambda^2 K^6$, choisissons un générateur φ de $\Lambda^6 K^6$ et $\{u_1, u_2\}$ une base de H .

Tout élément de H s'écrit : $u = xu_1 + yu_2$, $\gamma^3(u) = f(u)\varphi$ et $f(u)$ est une fonction homogène de degré 3 de u .

En fonction des composantes x et y de u , f est donnée par un polynôme homogène de degré 3 en les variables x et y . Effectuer un changement de base dans H revient à effectuer, pour f , un changement de variables linéaire, de sorte que f est un covariant pour H . A changement de variables linéaire près, f peut prendre les 4 formes suivantes : $f = 0$, f est le cube d'une forme linéaire sur H , f est le produit d'une forme linéaire par le carré d'une forme linéaire indépendante de la première ou bien f est le produit de trois formes linéaires deux à deux linéairement indépendantes. Cela signifie qu'en changeant éventuellement de base $\{u_1, u_2\}$ dans H , on a les quatre possibilités suivantes :

$$f = 0, \quad f = x^3, \quad f = x^2y \text{ et } f = xy(x + y).$$

Si $H \subset \Lambda^2 V$ où V est un hyperplan de K^6 (on dit alors que H n'est pas de rang maximal), $\gamma_3(u) = 0$ quelque soit u dans H et donc $f = 0$.

Nous ne considérons maintenant que des sous-espaces H de rang maximal.

Lemme 2.3

$\Lambda^2 K^6$ admet six types de sous-espaces vectoriels de dimension 2 et de rang maximal donnés par une base $\{u_1, u_2\}$:

$$\begin{array}{lll} H_1 & u_1 = e_1e_3 + e_2e_4 & u_2 = e_1e_5 + e_2e_6 \quad \gamma_3 = 0 \\ H_2 & u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6 & u_2 = e_1e_2 \quad \gamma_3 = x^3 \\ H_3 & u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6 & u_2 = e_1e_2 + e_3e_4 \quad \gamma_3 = x^3 \\ H_4 & u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 & u_2 = e_1e_3 + e_5e_6 \quad \gamma_3 = x^2y \\ H_5 & u_1 = e_1e_2 & u_2 = e_3e_4 + e_5e_6 \quad \gamma_3 = x^2y \\ H_6 & u_1 = e_1e_2 + e_5e_6 & u_2 = e_1e_2 + e_3e_4 \quad \gamma_3 = xy(x + y) \end{array}$$

D'ans le premier cas, soit $\{u_1, u_2\}$ une base quelconque de H , comme $f = 0$ $\gamma^3(u_1) = \gamma^3(u_2) = u_1\gamma^2(u_2) = u_2\gamma^2(u_1) = 0$. Les rangs de u_1 et u_2 valent donc 2 ou 4, si par exemple $\text{rang } u_1 = 2$, la relation $u_1\gamma^2(u_2) = 0$ implique $S_{u_1} \cap S_{u_2} \neq \{0\}$, donc H qui est contenu dans $\Lambda^2(S_{u_1} + S_{u_2})$, n'est pas de rang maximal.

Posons $S_i = S_{u_i}$, $\dim S_i = 4$ et $S_1 + S_2 = K^6$, donc $S_1 \cap S_2$ est de dimension 2, il existe une base $\{e_i\}$ de K^6 telle que $\gamma^2(u_1) = e_1e_2e_3e_4$ et $\gamma^2(u_2) = e_1e_2e_5e_6$, $S_1 \cap S_2$ est le plan de base $\{e_1, e_2\}$.

Si $e_1e_2u_1 \neq 0$, $u_1 = \lambda e_1e_2 + v$ où $\text{rg}(v) = 2$ et $u_1\gamma^2(u_2) \neq 0$, c'est donc que $e_1e_2u_1 = e_1e_2u_2 = 0$. On peut donc écrire :

$$\begin{cases} u_1 = e_1x_1 + e_2y_1 \\ \text{et} \\ u_2 = e_1x_2 + e_2y_2 \end{cases}$$

ce qui donne, à un changement de notations près, le résultat annoncé.

Supposons maintenant $f(x, y) = x^3$, il existe une base $\{u_1, u_2\}$ de H telle que : $\gamma^3(u_1) \neq 0$, $\gamma^2(u_1)u_2 = u_1\gamma^2(u_2) = \gamma^3(u_2) = 0$. Le bivecteur u_2 est unique à homothétie près car $\gamma^3(u) = 0$ implique $x = 0$.

Si le rang de u_2 vaut 2, la seule relation à satisfaire est $\gamma^2(u_1)u_2 = 0$, on peut donc écrire :

$$\begin{cases} u_1 = \lambda e_1e_2 + e_1x + e_2y + v \\ \text{et} \\ u_2 = e_1e_2 \end{cases}$$

où x, y et v s'expriment en fonction des quatre derniers vecteurs d'une base $\{e_i\}$ de K^6 . Quitte à enlever à u_1 un multiple de u_2 , on peut supposer $\lambda = 0$, la relation $u_2\gamma^2(u_1) = 0$ signifie que v est de rang 2. Comme $\gamma^3(u_1) = e_1xe_2yv \neq 0$, en changeant les quatre derniers vecteurs de la base $\{e_i\}$, on obtient

$$u_1 = e_1e_3 + e_2e_4 + e_5e_6.$$

Si le rang de u_2 est 4, la relation $u_1\gamma^2(u_2) = 0$ a la signification suivante, $S_{u_2}^0$ est un plan du dual de K^6 sur lequel la forme bilinéaire alternée u_1 est dégénérée.

En effet, sinon u_1 est dégénérée. En effet, sinon u_1 s'écrirait :

$v + \hat{v}$ où $\text{rg}(v) = 2$, $\text{rg}(\hat{v}) = 4$ et $Sv_1 = Su_2$ et on aurait

$$u_1\gamma^2(u_2) = v\gamma^2(u_2) \neq 0.$$

Donc u_1 peut s'écrire : $ax + by + zt$ où $\{x, y, z, t\}$ est une base de S_{u_2}

$$\gamma^2(u_1) = abyx + axzt + byzt.$$

Comme u_2 est de rang 4, $\gamma^2(u_2)$ est proportionnel à $xyzt$ et

$u_2\gamma^2(u_1) = abyxu_2$, Il en résulte que $xyu_2 = 0$ et u_2 peut s'écrire : $xz' + yt'$ où $\{x, y, z', t'\}$ est une autre base de S_{u_2} . Comme $zt = \lambda z''t'' + x\alpha + y\beta$ où λ est un scalaire non nul et α et β deux vecteurs de S_{u_2} , on remplace u_1 par $\lambda^{-1}u_1$ qui s'écrit

$$(\lambda^{-1}a + \alpha)x + (\lambda^{-1}b + \beta)y + z't'.$$

On a donc bien une base $\{u_1^1, u_1\}$ de H et une base $\{e_i\}$ de K^6 dans laquelle :

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6 \\ \text{et} \\ u_2 = e_1e_2 + e_3e_4 \end{cases}$$

Supposons maintenant que $f(x, y) = x^2y = 0$. On a une base $\{u_1, u_2\}$ de H telle que $\gamma^3(u_1) = \gamma^3(u_2) = u_1\gamma^2(u_2) = 0$ et $\gamma^2(u_1)u_2 \neq 0$. Le rang de u_1 est nécessairement 4, celui de u_2 vaut 2 ou 4. S'il vaut 2, $\gamma^2(u_1)u_2 \neq 0$ implique $S_{u_1} \cap S_{u_2} = \{0\}$ et on obtient :

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 \\ \text{et} \\ u_2 = e_5e_6 \end{cases}$$

Si le rang de u_2 est 4, $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est un plan P de base $\{a, b\}$, $u_1 = ax + by + v$ où le support de v est contenu dans un supplémentaire de P dans S_{u_1} . Comme $\gamma^2(u_2)$ est divisible par ab , $u_1\gamma^2(u_2) = v\gamma^2(u_2) = 0$ implique $v = 0$. Comme $\gamma^2(u_1)u_2 \neq 0$, $abu_2 \neq 0$ et $u_2 = ab + cd$, posant, $e_1 = a$, $e_2 = x$, $e_3 = b$, $e_4 = y$, $e_5 = c$ et $e_6 = d$ on obtient les écritures de u_1 et u_2 annoncées.

Supposons maintenant que $f(x, y) = xy(x + y)$, Il existe alors une base $\{u_1, u_2\}$ de H telle que : $\gamma^3(u_1) = \gamma^3(u_2) = 0$ et $u_1\gamma^2(u_2) = u_2\gamma^2(u_1) \neq 0$. L'intersection $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est un plan P de K^6 et $\gamma^2(u_1) = e_1e_2e_3e_4$, $\gamma^2(u_2) = e_3e_4e_5e_6$ où $\{e_3, e_4\}$ est une base de P et $\{e_i\}$ une base de K^6 . Comme $u_1\gamma^2(u_2) \neq 0$ $u_1e_3e_4 \neq 0$, donc $u_1 = \lambda e_3e_4 + v_1$ où v_1 est de rang 2, de la même façon, on a : $u_2 = \mu e_3e_4 + v_2$ avec $\text{rg } v_2 = 2$. De $u_1\gamma^2(u_2) = u_2\gamma^2(u_1)$, on déduit que $\lambda = \mu$, qu'on peut prendre égal à 1, de même en modifiant e_1 et e_2 , et e_5 et e_6 , on trouve la base annoncée.

Soit u un élément de $\Lambda^2 E$. Il existe une base $\{e_1, \dots, e_2\}$ de E pour laquelle $u = \sum_{i=1}^k e_{2i-1}e_{2i}$ et $2k \leq n$. Le support S_u est le sous-espace de E engendré par e_1, \dots, e_{2k} et le rang de u est $2k$.

que $\alpha = 1$. Alors $u_2 = (f_{2n-1} + z)(f_{2n} + t) + v'$, où $S_{v'} \subset S_{u_1}$. De plus,

$$\begin{cases} xu_1 + yu_2 = (xu_1 + yv') + ye_{2n-1}e_{2n} \\ \text{et} \\ \gamma_n(xu_1 + yu_2) = y\gamma_{n-1}(xu_1 + yv')e_{2n-1}e_{2n} \end{cases}$$

de sorte qu'il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à vect $\{u_1, v'\}$, un plan de $\Lambda^2 K^{2n-2}$ (on a posé $e_{2n-1} = f_{2n-1} + z$ et $e_{2n} = f_{2n} + t$).

Les cas non génériques sont plus compliqués à traiter et trop nombreux pour être tous considérés. Il faut distinguer les multiplicités des racines, le cas le plus simple étant celui où $\gamma_n(xu_1 + yu_2) = x^{n-1}y$. On peut alors trouver une base $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ de K^{2n} , où $u_1 = \sum_{j < n} e_{2j-1}e_{2j}$, et il faut discuter suivant le rang de u_2 qui peut varier de 2 à $2n - 2$.

Pour $2n = 8$, cela nous donne trois possibilités pour u_2 qui sont e_7e_8 , $e_1e_3 + e_7e_8$ et $e_1e_3 + e_2e_5 + e_7e_8$. On a donc :

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6, & u_2 = e_7e_8 \\ u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6, & u_2 = e_1e_3 + e_7e_8 \\ u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6, & u_2 = e_1e_3 + e_2e_5 + e_7e_8 \end{cases}$$

Cela montre bien que le cas général est trop compliqué pour qu'il soit vraiment intéressant de donner toutes les possibilités.

Remarque 2.3

1. La donnée d'un trivecteur scindable ω revient à celle d'un sous-espace vectoriel d'un espace $\Lambda^2 E$. Ainsi la lemme (2,3) donne six classes de trivecteurs 2-scindables de rang 8, sur un corps algébriquement clos, qui ne sont pas isomorphes en tant que trivecteurs.
2. Si u et v sont des bivecteurs tels que $S_v \subset S_u$, $\text{rg}(u) = 4$ et $\text{rg}(v) = 2$, alors il existe une base $\{a, b, x, y\}$ de S_u telle que :

$$\begin{cases} \text{si } uv = 0, \text{ alors } v = xy \text{ et } u = ax + by \\ \text{si } uv \neq 0, \text{ alors } v = xy \text{ et } u = \lambda xy + ab \end{cases}$$

3. Si u est un bivecteur de rang 6 et ω est un trivecteur de rang 3 tels que

$S_\omega \subset S_u$, alors il existe une base $\{a, b, c, x, y, z\}$ de S_u telle que :

$$\begin{cases} \text{si } u\omega = 0, \text{ alors } v = xyz \text{ et } u = ax + by + cz \\ \text{si } u\omega \neq 0, \text{ alors } v = xyz \text{ et } u = ab + cx + yz \end{cases}$$

Proposition 2.1

$\Lambda^2 K^7$ admet cinq types de sous-espaces vectoriels de dimension 2 et de rang maximal donnés par une base $\{u_1, u_2\}$:

$$\begin{cases} V_1 : u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 & u_2 = e_4e_5 + e_6e_7 \\ V_2 : u_1 = e_1e_2 & u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7 \\ V_3 : u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 & u_2 = e_2e_5 + e_3e_6 + e_4e_7 \\ V_4 : u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 & u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7 \\ V_5 : u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6 & u_2 = e_1e_4 + e_3e_7 + e_5e_2 \end{cases}$$

où $\{e_1, \dots, e_7\}$ est une base convenable de K^7 .

Preuve.

Soit $V = \text{vect}\{u_1, u_2\}$ un plan vectoriel dans $\Lambda^2 K^7$.

Supposons d'abord le cas où V possède une base $\{u_1, u_2\}$ de bivecteurs de rang 4. Dans ce cas, $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est une droite. On peut donc trouver une base $\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$ de K^7 telle que :

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 \\ \text{et} \\ u_2 = e_4e_5 + e_6e_7 \end{cases}$$

Supposons maintenant que V possède une base $\{u_1, u_2\}$ contenant un bivecteur de rang 6, soit u_1 trois cas se présentent suivant que $rg(u_1) = 2, 4, 6$:

- Si $rg(u_1) = 2$, alors $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est une droite et on peut écrire

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2 \\ \text{et} \\ u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7 \end{cases}$$

- Si $rg(u_1) = 4$, alors $\dim(S_{u_1} \cap S_{u_2}) = 3$. On pose $S_{u_1} \cap S_{u_2} = \text{vect}\{x, y, z\}$ et on écrit $u_1 = ax + yz$. Soit $\omega = xyz$. C'est un trivecteur de rang 3. On a

Chapitre 3

Classification des trivecteurs

Soit K un corps commutatif.

3.1 Classification des trivecteurs en dimension inférieure à 6

- 1) Si $\dim E = 3$, il n'y a qu'une orbite de trivecteurs non nuls si $\omega \in \Lambda^3 E - \{0\}$ il existe $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E telle que $\omega = e_1 e_2 e_3$, alors : $C(\omega) = K$.
- 2) Si $\dim E = 4$, tous les trivecteurs non nuls sont décomposables, donc $\Lambda^3 E$ a deux orbites, dans une base (e_i) , $1 \leq i \leq 4$, un représentant de chaque orbite est donné par $0, e_1 e_2 e_3$.
- 3) Si $\dim E = 5$, l'isomorphisme $\Lambda^3 E \simeq \Lambda^2 E^*$ montre qu'il y a trois orbites dans $\Lambda^3 E$, en effet si un trivecteur est non nul et non décomposable, il est nécessairement de rang maximal, donc divisible par un vecteur $e_1 : \omega = e_1 u$ où u est un bivecteur de rang 4, on peut choisir pour S_u .

Tout supplémentaire de Ke_1 dans E et il existe une base (e_i) , $1 \leq i \leq 5$, de E telle que un représentant de chaque orbite est donné par $0, e_1 e_2 e_3, e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$.

3.2 Classification des trivecteurs en dimension 6

Soit $\omega \in \Lambda^3 E$ est de rang maximal $r(\omega) = \dim E = 6$. Comme la dimension de E est paire, $d_1(\omega) \neq 0$, et on a $d_1(\omega) \in \{3, 5\}$.

Lemme 3.1

Si $d_1(\omega) = 3$, il existe une base (e_i) , $1 \leq i \leq 6$, de E telle que ω s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6 \\ \text{ou} \\ \omega_{6,2} = e_1e_2e_3 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6 \end{array} \right.$$

3.3 Classification des trivecteurs en dimension 7**Théorème 3.1**

Soit E un K -espace vectoriel de dimension 7, et tel que le corps K est algébriquement clos alors il y'a cinq orbites de rang 7, et deux orbites de rang 6, une orbite de rang 5, une orbite de rang 3, et l'orbite 0, c'est à dire :

$$\omega_3 = e_1e_2e_3, \text{ rg}(\omega_3) = 3.$$

$$\omega_5 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5), \text{ rg}(\omega_5) = 5.$$

$$\omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6,$$

$$\omega_{6,2} = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6, \text{ rg}(\omega_{6,1}) = \text{rg}(\omega_{6,2}) = 6.$$

$$\omega_{7,1} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7).$$

$$\omega_{7,2} = \omega_{7,1} + e_2e_4e_6.$$

$$\omega_{7,3} = e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_5e_6e_7.$$

$$\omega_{7,4} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7.$$

$$\omega_{7,5} = \omega_{7,2} + e_3e_5e_7.$$

$$\text{rg}(\omega_{7,i}) = 7, i = \overline{1,5}$$

3.4 Classification des trivecteurs en dimension 8**Théorème 3.2**

Sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, il existe treize classes d'équivalence de trivecteurs de rang 8. Dans une base $(e_i)_{i=1,8}$ de E , un représentant de chaque classe est donné par $\omega_{8,i}$, $1 \leq i \leq 13$, de la table 1.

Table 1

$\omega_{8,i}$	Expression d'un représentant de l'orbite	$d_1(\omega)$
$\omega_{8,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$	3
$\omega_{8,2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_5e_6e_8$	3
$\omega_{8,3}$	$e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$	5
$\omega_{8,4}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_7 + e_4e_8)$	5
$\omega_{8,5}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_3 + e_7e_8)$	5
$\omega_{8,6}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$	5
$\omega_{8,7}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_6 + e_5e_7) + e_2(e_5e_6 + e_7e_8)$	5
$\omega_{8,8}$	$e_1(e_2e_8 + e_3e_6 + e_4e_7) + e_6e_7e_8 + e_3e_4e_5$	6
$\omega_{8,9}$	$e_1[e_2(e_3 + e_4) + e_5e_6] + e_3e_5e_7 + e_4e_6e_8$	6
$\omega_{8,10}$	$e_1(e_2e_8 + e_6e_7) + e_2e_3e_5 + e_3e_4e_6 + e_4e_5e_7$	6
$\omega_{8,11}$	$e_1(e_3e_7 + e_5e_4 + e_8e_2) + e_8(e_4e_3 + e_6e_7) + e_2e_4e_6$	6
$\omega_{8,12}$	$e_1[(e_4 - e_7)(e_3 - e_8) + e_5e_7] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$	7
$\omega_{8,13}$	$e_1[e_5(e_3 - e_7) + e_8e_4] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$	7

3.5 Le commutant

Proposition 3.1

- a) $C(\omega)$ est une sous-algèbre unitaire de $End_K(E)$.
- b) $I = \{f \in End_K(E) / \text{Im } f \subset R_\omega\}$ est un idéal bilatère de $C(\omega)$ et le quotient $C(\omega) / I$ est commutatif.

Preuve.

- a) Il est clair que $C(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $End_K(E)$.

Si pour tout $f, g \in C(\omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
\omega(fgx_1, x_2, \dots, x_p) &= \omega(gx_1, x_2, fx_3, \dots, x_p) \\
&= \omega(x_1, gx_2, fx_3, \dots, x_p) \\
&= \omega(x_1, fgx_2, x_3, \dots, x_p).
\end{aligned}$$

alors $fg \in C(\omega)$.

Comme ω est multilinéaire, $C(\omega)$ contient les homothéties.

- b) I est contenu dans $C(\omega)$ car, si $f \in I$, $\omega(x_1, \dots, fx_i, \dots, x_p) = 0$.

Si $f, g \in I$, $\text{Im}(f - g) \subset R_\omega$, si $h \in C(\omega)$, on a :

$$\omega(hf(x_1), x_2, \dots, x_p) = \omega(f(x_1), h(x_2), \dots, x_p) = 0,$$

donc $hf \in I$ et de même $fh \in I$.

Si f et $g \in C(\omega)$:

$$\begin{aligned} \omega(fgx_1, x_2, \dots, x_p) &= \omega(gx_1, x_2, fx_3, \dots, x_p) \\ &= \omega(x_1, gx_2, fx_3, \dots, x_p) \\ &= \omega(fx_1, gx_2, \dots, x_p) \\ &= \omega(gfx_1, x_2, \dots, x_p). \end{aligned}$$

Donc $[f, g](E) \subset R_\omega$, c'est -à-dire $fg - gf \in I$, ce qui montre que $C(\omega)/I$ est commutatif. On suppose désormais E de dimension finie. ■

Proposition 3.2

Soit ω une p -forme non dégénérée, il existe une décomposition de E en somme directe de sous-espaces vectoriels $E_i, 1 \leq i \leq k$, et des formes p -linéaires $\omega_i \in \Lambda^p E_i^*$ tels que $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$ et $C(\omega)$ est une K -algèbre commutative .

Exemple 3.1 On a $B = (e_1 e_2 e_3)$, $\omega = e_1 e_2 e_3$

$$C(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} f : E \rightarrow E / (e_1, e_2, e_3) \rightarrow (e_1, \dots, e_{i-1}, f(e_i), e_{i+1}, \dots, e_p), \\ \text{ne dépend pas de } i \end{array} \right\}.$$

$$\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$f \in C(\omega), \omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3)).$$

$$\begin{aligned} \omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, e_2, e_3) &= \omega(e_1, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3, e_3) \\ &= \omega(e_1, e_2, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3). \end{aligned}$$

$$\alpha_1 \omega(e_1, e_2, e_3) = \beta_2 \omega(e_1, e_2, e_3) = \gamma_3 \omega(e_1, e_2, e_3).$$

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3, \text{ car } : \begin{cases} \alpha_1 \omega(e_1, e_2, e_3) = 1 \\ \alpha_1 \omega(e_i, e_j, e_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \omega(f(e_1), e_1, e_3) &= \omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, e_1, e_3) \\ &= \alpha_2 \omega(e_2, e_1, e_3) \\ &= -\alpha_2 \omega(e_1, e_2, e_3) \\ &= \alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Après calcul, on trouve :

$$\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha_1 I_3.$$

C'est-à-dire : $C(\omega) \simeq K$.

3.5.1 Commutant d'un trivecteur de rang inférieure où égale à 6

Proposition 3.3

On sait, que $C(\omega)$ est une K -algèbre commutative, on va expliciter $C(\omega)$ quand ω est un trivecteur de rang 6.

Si $\omega = \omega_{6,1} = e_1^* e_2^* e_3^* + e_4^* e_5^* e_6^*$, on a :

$$\begin{cases} \omega(e_1, e_2, e_3) = \omega(e_4, e_5, e_6) = 1 \\ \text{et} \\ \omega(e_i, e_j, e_k) = 0 \end{cases}$$

dans les autres cas, si $f \in C(\omega)$, sa matrice dans la base (e_i) , $1 \leq i \leq 6$, est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A = \lambda I_3$ et $B = \alpha I_3$ $\lambda, \alpha \in K$, autrement dit $C(\omega) \simeq K \times K$.

Preuve.

Soit $f \in C(\omega)$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) & f(e_5) & f(e_6) \\ \lambda_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \mu_1 & \delta_1 \\ \lambda_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \mu_2 & \delta_2 \\ \lambda_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \alpha_3 & \mu_3 & \delta_3 \\ \lambda_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \alpha_4 & \mu_4 & \delta_4 \\ \lambda_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \alpha_5 & \mu_5 & \delta_5 \\ \lambda_6 & \beta_6 & \gamma_6 & \alpha_6 & \mu_6 & \delta_6 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix}$$

On a :

$$\omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3)).$$

$$f(e_1) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6.$$

$$*\omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6, e_2, e_3) = \lambda_1 \omega(e_1, e_2, e_3) +$$

$$\lambda_2 \omega(e_2, e_2, e_3) + \lambda_3 \omega(e_3, e_2, e_3) + \lambda_4 \omega(e_4, e_2, e_3) + \lambda_5 \omega(e_5, e_2, e_3) + \lambda_6 \omega(e_6, e_2, e_3) =$$

$$\lambda_1 = \beta_2 = \gamma_3.$$

$$*\omega(f(e_4), e_5, e_6) = \omega(e_4, f(e_5), e_6) = \omega(e_4, e_5, f(e_6)).$$

$$f(e_4) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6.$$

$$*\omega(f(e_4), e_5, e_6) = \alpha_1 \omega(e_1, e_5, e_6) + \alpha_2 \omega(e_2, e_5, e_6) + \alpha_3 \omega(e_3, e_5, e_6) + \alpha_4 \omega(e_4, e_5, e_6) +$$

$$\alpha_5 \omega(e_5, e_5, e_6) + \alpha_6 \omega(e_6, e_5, e_6) = \alpha_4 = \mu_5 = \delta_6.$$

$$*\omega(f(e_1), e_1, e_2) = \omega(e_1, f(e_1), e_2) = \omega(e_1, e_1, f(e_2)).$$

$$f(e_1) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6.$$

$$*\omega(f(e_1), e_1, e_2) = \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_2) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_2) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_2) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_2) +$$

$$\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_2) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_2) = \lambda_3 = -\lambda_3 = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_1, e_3) = \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_3) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_3) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_3) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_3) +$$

$$\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_3) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_3) = -\lambda_2 = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_1, e_4) = \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_4) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_4) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_4) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_4) +$$

$$\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_4) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_4) = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_1, e_5) = \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_5) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_5) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_5) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_5) +$$

$$\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_5) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_5) = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_1, e_6) = \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_6) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_6) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_6) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_6) +$$

$$\lambda_5\omega(e_5, e_1, e_6) + \lambda_6\omega(e_6, e_1, e_6) = 0.$$

$$\omega(f(e_2), e_2, e_1) = \omega(e_2, f(e_2), e_1) = \omega(e_2, e_2, f(e_1)).$$

$$f(e_2) = \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3 + \beta_4e_4 + \beta_5e_5 + \beta_6e_6.$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_2), e_2, e_1) &= \beta_1\omega(e_1, e_2, e_1) + \beta_2\omega(e_2, e_2, e_1) + \beta_3\omega(e_3, e_2, e_1) + \beta_4\omega(e_4, e_2, e_1) + \\ &\beta_5\omega(e_5, e_2, e_1) + \beta_6\omega(e_6, e_2, e_1) = \beta_3 = -\beta_3 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_2), e_2, e_3) &= \beta_1\omega(e_1, e_2, e_3) + \beta_2\omega(e_2, e_2, e_3) + \beta_3\omega(e_3, e_2, e_3) + \beta_4\omega(e_4, e_2, e_3) + \\ &\beta_5\omega(e_5, e_2, e_3) + \beta_6\omega(e_6, e_2, e_3) = \beta_1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_2), e_2, e_4) &= \beta_1\omega(e_1, e_2, e_4) + \beta_2\omega(e_2, e_2, e_4) + \beta_3\omega(e_3, e_2, e_4) + \beta_4\omega(e_4, e_2, e_4) + \\ &\beta_5\omega(e_5, e_2, e_4) + \beta_6\omega(e_6, e_2, e_4) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_2), e_2, e_5) &= \beta_1\omega(e_1, e_2, e_5) + \beta_2\omega(e_2, e_2, e_5) + \beta_3\omega(e_3, e_2, e_5) + \beta_4\omega(e_4, e_2, e_5) + \\ &\beta_5\omega(e_5, e_2, e_5) + \beta_6\omega(e_6, e_2, e_5) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_2), e_2, e_6) &= \beta_1\omega(e_1, e_2, e_6) + \beta_2\omega(e_2, e_2, e_6) + \beta_3\omega(e_3, e_2, e_6) + \beta_4\omega(e_4, e_2, e_6) + \\ &\beta_5\omega(e_5, e_2, e_6) + \beta_6\omega(e_6, e_2, e_6) = 0. \end{aligned}$$

$$* \omega(f(e_3), e_3, e_1) = \omega(e_3, f(e_3), e_1) = \omega(e_3, e_3, f(e_1))$$

$$f(e_3) = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3 + \gamma_4e_4 + \gamma_5e_5 + \gamma_6e_6$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_3), e_3, e_1) &= \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_1) = \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_1) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_1) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_1) + \\ &\gamma_5\omega(e_5, e_3, e_1) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_1) = \gamma_2 = -\gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_3), e_3, e_2) &= \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_2) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_2) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_2) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_2) + \\ &\gamma_5\omega(e_5, e_3, e_2) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_2) = \gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_3), e_3, e_4) &= \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_4) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_4) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_4) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_4) + \\ &\gamma_5\omega(e_5, e_3, e_4) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_4) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_3), e_3, e_5) &= \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_5) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_5) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_5) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_5) + \\ &\gamma_5\omega(e_5, e_3, e_5) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_5) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_3), e_3, e_6) &= \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_6) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_6) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_6) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_6) + \\ &\gamma_5\omega(e_5, e_3, e_6) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_6) = 0. \end{aligned}$$

$$* \omega(f(e_4), e_4, e_1) = \omega(e_4, f(e_4), e_1) = \omega(e_4, e_4, f(e_1)).$$

$$f(e_4) = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 + \alpha_4e_4 + \alpha_5e_5 + \alpha_6e_6.$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_4), e_4, e_1) &= \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_1) = \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_1) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_1) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_1) + \\ &\alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_1) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_4), e_4, e_2) &= \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_2) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_2) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_2) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_2) + \\ &\alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_2) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_2) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_4), e_4, e_3) &= \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_3) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_3) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_3) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_3) + \\ &\alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_3) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_3) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_4), e_4, e_5) &= \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_5) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_5) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_5) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_5) + \\ &\alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_5) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_5) = \alpha_6 = -\alpha_6 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_4), e_4, e_6) &= \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_6) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_6) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_6) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_6) + \\ &\alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_6) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_6) = -\alpha_5 = 0. \end{aligned}$$

$$* \omega(f(e_5), e_5, e_1) = \omega(e_5, f(e_5), e_1) = \omega(e_5, e_5, f(e_1)).$$

$$f(e_5) = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \mu_5 e_5 + \mu_6 e_6.$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_5), e_5, e_1) &= \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_1) = \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_1) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_1) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_1) + \\ &\mu_5 \omega(e_5, e_5, e_1) + \mu_6 \omega(e_6, e_5, e_1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_5), e_5, e_2) &= \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_2) + \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_2) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_2) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_2) + \\ &\mu_5 \omega(e_5, e_5, e_2) + \mu_6 \omega(e_6, e_5, e_2) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_5), e_5, e_3) &= \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_3) + \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_3) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_3) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_3) + \\ &\mu_5 \omega(e_5, e_5, e_3) + \mu_6 \omega(e_6, e_5, e_3) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_5), e_5, e_4) &= \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_4) + \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_4) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_4) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_4) + \\ &\mu_5 \omega(e_5, e_5, e_4) + \mu_6 \omega(e_6, e_5, e_4) = -\mu_6 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_5), e_5, e_6) &= \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_6) + \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_6) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_6) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_6) + \\ &\mu_5 \omega(e_5, e_5, e_6) + \mu_6 \omega(e_6, e_5, e_6) = \mu_4 = 0. \end{aligned}$$

$$* \omega(f(e_6), e_6, e_1) = \omega(e_6, f(e_6), e_1) = \omega(e_6, e_6, f(e_1)).$$

$$f(e_6) = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4 + \delta_5 e_5 + \delta_6 e_6.$$

$$\begin{aligned} * \omega(f(e_6), e_6, e_1) &= \delta_1 \omega(e_1, e_6, e_1) = \delta_2 \omega(e_2, e_6, e_1) + \delta_3 \omega(e_3, e_6, e_1) + \delta_4 \omega(e_4, e_6, e_1) + \\ &\delta_5 \omega(e_5, e_6, e_1) + \delta_6 \omega(e_6, e_6, e_1) = 0. \end{aligned}$$

$$* \omega(f(e_6), e_6, e_2) = \delta_1 \omega(e_1, e_6, e_2) + \delta_2 \omega(e_2, e_6, e_2) + \delta_3 \omega(e_3, e_6, e_2) + \delta_4 \omega(e_4, e_6, e_2) +$$

dans les autres cas si $f \in C(\omega)$ on a $f = \lambda id_E + \alpha D$ où $\lambda, \alpha \in K$ et

$D : E \longrightarrow E$ l'application linéaire définie par $D(e_2) = de_1, D(e_1) = e_2, D(e_3) = e_5, D(e_4) = de_6, D(e_5) = de_3,$ et $D(e_6) = e_4,$ comme $D^2 = d id_E,$ on a $C(\omega) \simeq K(\sqrt{d}).$

Si $\omega = \omega_{6,1,a}$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(e_1, e_3, e_4) = \omega(e_2, e_3, e_6) = \omega(e_2, e_4, e_5) = \omega(e_2, e_5, e_6) = 1 \\ \omega(e_1, e_5, e_6) = a \\ \omega(e_i, e_j, e_k) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et}$$

dans les autres cas tout élément f de $C(\omega)$ s'écrit $\lambda id_E + \alpha D'$ où l'application linéaire $D' : E \longrightarrow E$ vérifie la relation $D'^2 + D' = a id_E,$ donc $C(\omega) \simeq K(\alpha)$ où $\alpha^2 + \alpha + a = 0.$ ■

3.5.2 Commutant d'un trivecteur de rang 6

Théorème 3.3

Soit $\omega \in \Lambda^3 E^*$ une forme trilinéaire alternée de rang 6. Le K -algèbre $C(\omega)$ caractérise l'orbite de ω sous l'action du groupe linéaire $GL(E).$

En utilisant la définition du commutant, un calcul direct sur les $\omega_{7,i}$ donne le résultat suivant : si ω est de rang 7, $C(\omega) \simeq K.$

Proposition 3.4

Supposons que $\dim E = n,$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) pour tout trivecteur ω de rang $n,$ $C(\omega) \simeq K.$
- ii) $n \in \{3, 5, 7\}.$

Preuve.

L'entier n est supposé supérieur ou égal à 3 et différent de 4. Comme on l'a vu si $n \in \{3, 5, 7\}, C(\omega) \simeq K.$ Supposons donc $n \notin \{3, 5, 7\}, n = 6$ ou $n \geq 8.$

Dans le premier cas, $C(\omega)$ est de dimension 2, donc différent de $K.$ Si $n \geq 8,$ on peut écrire n sous la forme $3p + 5q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $p + q \geq 2.$ Soit α un trivecteur de rang 3 et β un trivecteur de rang 5, la somme orthogonale de p exemplaires de α et de q exemplaires de β est un trivecteur ω de rang n tel que $C(\omega) \simeq K^{p+q}$ donc $C(\omega) \neq K.$

Remarquons enfin que si $n = 3k$ ($k \geq 2$) il existe au moins un trivecteur ω de rang maximal de sorte que $C(\omega) \simeq K[\varepsilon] \times K$. ■

3.5.3 Commutant d'un trivecteur de rang 8

Dans une base $(e_j)_{j=1,8}$ de E , un représentant de chaque Commutant est donné par $\omega_{8,i}$, $1 \leq i \leq 13$, de la table 2.

Table 2

$\omega_{8,i}$	Expression d'un représentant de l'orbite	$C(\omega)$
$\omega_{8,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$	$K \times K$
$\omega_{8,2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_5e_6e_8$	$K[\varepsilon]$
$\omega_{8,3}$	$e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$	$K[\varepsilon]$
$\omega_{8,4}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_7 + e_4e_8)$	K
$\omega_{8,5}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_3 + e_7e_8)$	K
$\omega_{8,6}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$	K
$\omega_{8,7}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_6 + e_5e_7) + e_2(e_5e_6 + e_7e_8)$	K
$\omega_{8,8}$	$e_1(e_2e_8 + e_3e_6 + e_4e_7) + e_6e_7e_8 + e_3e_4e_5$	K
$\omega_{8,9}$	$e_1[e_2(e_3 + e_4) + e_5e_6] + e_3e_5e_7 + e_4e_6e_8$	K
$\omega_{8,10}$	$e_1(e_2e_8 + e_6e_7) + e_2e_3e_5 + e_3e_4e_6 + e_4e_5e_7$	K
$\omega_{8,11}$	$e_1(e_3e_7 + e_5e_4 + e_8e_2) + e_8(e_4e_3 + e_6e_7) + e_2e_4e_6$	K
$\omega_{8,12}$	$e_1[(e_4 - e_7)(e_3 - e_8) + e_5e_7] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$	K
$\omega_{8,13}$	$e_1[e_5(e_3 - e_7) + e_8e_4] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$	K

Conclusion

Dans ce mémoire, on a pu découvrir des invariants arithmétiques et algébriques que l'on peut associer à un p -vecteur qui permettent de mieux comprendre la classification des formes trinéaires alternées est interprétable pour d'écrire certaines classifications des courbes elliptiques .

Bibliographie

- [1] **A. Cohen and A. Helminck**, *Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7*, Commun. Algebra 16 (1988), pp. 1-25 .
- [2] **D. Z. Djokovic**, *Classification of trivectors of an eight-dimensional real vector space*, Linear. Multilinear Algebra 13 (1983), pp. 3-39 .
- [3] **Eh. B. Vinberg and A. G. Ehlahvili**, *Classification of trivectors of a 9-dimensional space*, (English) J.Sel. Math. Sov. 7 (1988), pp. 63-98 (Translation from Tr. Semin. Vektorn. Tensorn. Anal. Prilozh. Geom. Mekh. Fiz. 18, 179-233(Russian) (1978; Zbl 0441. 15010)) .
- [4] **E. M. Rains and J. A. Slone**, *Self-dual codes*, in *Handbook of Coding Theory*, V. S. Pless and W. C. Huffman, eds, Elsevier, Amsterdam, 1998, pp. 177-294 .
- [5] **G. B. Gurevich**, *Foundations of the theory of algebraic invariants*, Noordhoff. Math. Rev.MR183733, 1964 .
- [6] **J. A. Schouten**, *Klassifizierung der alternierenden Grössen dritten Grades in 7 dimensionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo 55 (1931), pp. 137-156 .
- [7] **L. Noui and N. Midoune**, *K-forms of 2-step splitting trivectors*, Int. J. Algebra 2 (2008), pp. 369-382 .
- [8] **L. Noui and Ph. Revoy**, *Algèbres de lie orthogonales et formes trilinéaires alternées*, Commun. Algebra 25 (1997), pp. 617-622 .
- [9] **L. Noui and Ph. Revoy**, *Formes multilinéaires alternées*, Ann. Math. Blaise Pascal 1 (1994), pp. 43-69 .
- [10] **L. Noui**, *Classification des trivecteurs par l'action du groupe linéaire*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, France, 1995 .
- [11] **L. Noui**, *Transvecteurs de rang 8 sur un corps algèbriquement clos*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I : Algèbre 324 (1997) ,pp.611-614 .

- [12] **M. Abou Hashih and L. Bénéteau**, *An alternative way to classify some generalized elliptic curves and their isotopic loops*, Comment. Math. Univ. Carolinae 45 (2004), pp. 237-255 .
- [13] **N. Midoune**, *Classification des formes trinéaires alternées de rang 8 sur les corps finis*, Thèse de Doctorat en Sciences, Université de Batna, Algérie, 2009 .

Résumé :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , sur un corps commutatif K .

Le groupe linéaire $GL(E)$ agit de façon naturelle sur l'espace $\wedge^3 E$.

Trouver les orbites par cette action nécessite d'abord, une classification sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, ensuite, la détermination complète des stabilisateurs par les suites exactes, en leur choisissant des parties stables convenables.

Dans ce travail nous intéressons le commutant des trivecteurs de rang ≤ 8 .

Mots clés : p -vecteur, classification, le commutant, orbite.

Abstract:

Let E be a finite dimensional K vector space. The linear group $GL(E)$

Operates naturally over the space $\wedge^3 E$.

The study of orbits needs, first, a classification over an arbitrary algebraically closed field, then complete description of stabilizer by the exact suit.

This work will focus on the commutant of the trivectors of rank ≤ 8 .

Keywords : p -vector, classification, the commutant, orbit.

الملخص :

ليكن E فضاء شعاعيا بعده n على حقل تبديلي K . الزمرة الخطية $GL(E)$ تؤثر طبيعيا على الفضاء $\wedge^3 E$ ، تعيين المدارات، يتم أو لا بالتصنيف على حقل مغلق جبريا وبمميز كيفي، ثم يجب تحديد المستقرات بصيغة نهائية و ذلك باستعمال المتتاليات التامة مع اختيار الأجزاء الصامدة الملائمة.

تهتم هذه الدراسات بالأشعة الثلاثية من الرتبة ≥ 8 .

كلمات مفتاحية : متعدد الأشعة التصنيف المدار

