



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et numérique

Thème

L'existence d'une classe d'équations différentielles d'ordre fractionnaire en utilisant la mesure de non compacité. APPLICATION : L'opérateur de Hilfer

Présentée par :
MEZAACHE MOUNA

Soutenu Publiquement : Juin 2024

Devant le jury composé de :

NADIR Mostefa
GAGUI Bachir
KHIRANI Amina

Prof,
M.C.A,
M.C.A,

Université de M'sila
Université de M'sila
Université de M'sila

Président
Encadreur
Examinatrice

Année universitaire 2023/2024.

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail. Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur le **Dr. GAGUI Bachir** qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et de m'a voir guidé. Leurs critiques et Leurs conseils m'ont été très précieux. De même je remercie **NADIR Mostefa** et **KHIRANI Amina** qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.

Enfin à toute personne qui a collaborée à la réalisation ,Du présent mémoire.

Merci

Dédicace

Je dédie ce modeste travail:

A mes parents

A mes soeurs

A mes amies

A toute la famille

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

Mouna.

Table des matières

Introduction	iii
1 Mesure de non compacité	1
1.1 Espaces de Banach	1
1.1.1 Espaces métriques	1
1.1.2 Espaces de Banach	2
1.2 Principes fondamentaux des opérateurs	3
1.2.1 Compacité	3
1.2.2 Compacité dans $C(G)$	4
1.3 Mesure de non compacité	5
1.3.1 Mesure de non compacité en général	5
1.4 Mesure de non-compacité de Kuratowski	6
1.5 Mesure de Hausdorff:	7
1.6 Mesure de non compacité des opérateurs	9
1.7 Théorèmes de point fixe	9
2 Calculs fractionnaires et équations différentielles d'ordre fractionnaires	13
2.1 Equations différentielles fractionnaires	13
2.1.1 Fonctions spéciales	13
2.1.2 Intégrale fractionnaire	16
2.1.3 Dérivées fractionnaire	19
2.1.4 Dérivées fractionnaires de Caputo	22
2.1.5 Dérivées fractionnaires de Katugampola	24

2.1.6	Dérivées fractionnaires de Hilfer	25
3	Existence de solution de EDFs par la mesure de non compacité	27
3.1	Application de MNC pour une équation différentielle fractionnaire de type Hilfer dans l'espace de Banach	27
3.2	Résultat d'existence	28
3.2.1	Exemple	34
	Conclusion	36

Introduction

La mesure de non-compacité est un outil largement utilisé dans l'espace de Banach, notamment en théorie des points fixes pour résoudre des équations différentielles, intégrales et intégréo-différentielles, dernièrement, de nombreux travaux ont été réalisés sur l'étude des équations différentielles fractionnaires. La mesure de non-compacité, introduite initialement par le mathématicien Kuratowski en 1930 et par Hausdorff en 1957, notre but dans ce mémoire est comment utiliser la mesure de non compacité pour prouver l'existence de solutions à des problèmes différentiels d'ordre fractionnaire de la forme générale :

$$D^{\alpha,\beta}y(t) = f(t, y(t)).$$

Avec les conditions

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1,$$

Le mémoire se compose de trois chapitres:

Le premier chapitre, Explorons la mesure de non compacité, notamment les mesures de Kuratowski et de Hausdorff, ainsi que leurs propriétés. Nous examinerons également la relation entre les ensembles compacts et relativement compacts, selon la topologie que la mesure, aussi les propriétés des opérateurs sous l'angle la mesure de non compacité .en finir par la théorie du point fixe.

Le deuxième chapitre, concentre du calcul fractionnaire, notamment l'intégration fractionnaire, et la dérivation fractionnaire selon Riemann-Liouville, Hilfer et Katugampola. Nous explorerons leurs propriétés et établirons les liens entre ces trois approches, largement utilisées.

Le dernier chapitre, on traitera l'existence des solutions pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Hilfer à l'aide de la mesure de non compacité.

Chapitre 1

Mesure de non compacité

Dans ce chapitre nous exposons la mesure de non compacité, notamment les mesures de Kuratowski et de Hausdorff, ainsi que leurs propriétés. Nous examinerons également la relation entre les ensembles compacts et relativement compacts, selon la topologie que la mesure, aussi les propriétés des opérateurs sous l'angle la mesure de non compacité et on termine par la théorie du point fixe.

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Espaces métriques

On dispose sur \mathbb{R} de la distance usuelle

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

Définition 1.1.1 Une distance sur un ensemble E est une application

$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que:

1. $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$, (séparation)
2. $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$, (symétrie).
3. $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (inégalité triangulaire).

Le couple $(E;d)$ est appelé un espace métrique.

Définition 1.1.2 Dans un espace métrique (E,d) , on appelle boule ouverte boule fermée de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$, les sous-ensembles

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \{x \in E; d(a; x) < r\} \\ B_f(a; r) &= \{x \in E; d(a; x) \leq r\} \end{aligned}$$

Suites dans les espaces métriques

Définition 1.1.3 Soit (E,d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \in E$, une suite de E ..Soit $x \in E$. On dit que $(x_n)_n \in E$ converge vers x si l'on a:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$$

Définition 1.1.4 Une suite $(x_n)_n \in E$ est de Cauchy si et seulement si:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

Définition 1.1.5 On dit que l'espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

1.1.2 Espaces de Banach

Définition 1.1.6 Soit X un espace vectoriel. Une norme sur E est une application de E dans \mathbb{R}_+ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tous x, y dans E et tout dans \mathbb{k} :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité),
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.1.7 *Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$ noté $(E, \|\cdot\|)$ est appelé un espace vectoriel normé.*

Remarque 1.1.1 *Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.*

Définition 1.1.8 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, notons par A un sous-ensemble de X , et ∂A la frontière de A*

De plus, le diamètre de A :

$$\text{diam}(A) = \sup\{\|x - y\|; x, y \in A\}$$

et leur distance:

$$\text{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\|; x, y \in A\}$$

Définition 1.1.9 *Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension infini on noté l'ensemble des opérateur linéaire de X dans Y par $L(X, Y)$, $L(X) = B(X, X)$ un opérateur linéaire T défini sur X dans Y*

1.2 Principes fondamentaux des opérateurs

1.2.1 Compacité

Définition 1.2.1 *(Compacité) Un ensemble A de E est compact si de toute suite d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de A .*

Définition 1.2.2 1. *Une classe de sous-ensemble de E s'appelle une couverture d'un ensemble G de E , si nous avons $G \subset \cup_j U_j$*

2. *Un ensemble U est dit séquentiellement compact si pour tout suite d'éléments dans E contient une sous-suite converge vers un élément dans U .*

3. *Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement si il est séquentiellement compact.*

4. Un sous-ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compact.

5. Un sous-ensemble G d'un espace normé est totalement borné si il existe une suite finie $i, e:$

$$\forall \varepsilon > 0 : G \subset \cup_{j=1}^n B(\varphi_j, \varepsilon).$$

Définition 1.2.3 (Opérateur Compact): Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans Y .

Définition 1.2.4 (Opérateur borné): Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, tel que :

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E$$

1.2.2 Compacité dans $C(G)$

Dans cette partie, l'espace des fonctions continues définies dans $C(G)$ est muni de la norme maximum,

$$\|\varphi\|_\infty = \max |\varphi(x)|.$$

Théorème 1.2.1 (Arzela-Ascoli): Un ensemble $U \subset C(G)$ est relativement compact si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées $i, e:$

1. L'ensemble U est borné telle que :

$$\forall \varphi \in U : \forall x \in k, \exists M > 0 : |\varphi(x)| \leq M.$$

2. L'ensemble U est équicontinu,

$$: \forall \epsilon > 0 : \forall \varphi \in U : \forall x, y \in k : \exists \delta > 0 \text{ tel. que : } |x - y| \leq \delta \rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \epsilon$$

Définition 1.2.5 : Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans X un ensemble relativement compact $A(G)$ dans Y . Autrement dit, la fermeture $\bar{A}(\bar{G})$ est compact.

Définition 1.2.6 : Une ensemble $G \subset X$ est relativement compact si pour toute suite $\{\varphi_n\}$ il existe une sous suite $\{\varphi_{n(k)}\}$ qui converge dans Y .

Définition 1.2.7 Un opérateur A de X dans Y est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}$ de X , la suite $\{A\varphi_n\}$ contient une sous suite convergent dans Y

1.3 Mesure de non compacité

La mesure de non compacité est un outil très utile dans les espaces de Banach, ils sont largement utilisé dans la théorie du point fixe, les équations différentielles, les équations fonctionnelles, les intégrales et équations integro-différentielles,.....etc([4, 7])

1.3.1 Mesure de non compacité en général

Avant de rappeler la mesure de non compacité, on note par $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, nous désignons par M_E la famille des sous-ensembles bornées non vide de E , et par N_E la famille des sous-ensemble relativement compact de E , et l'enveloppe convexe d'un ensemble $X \subset E$ notons par $\text{conv}(X)$.

Définition 1.3.1 : Une application $\mu : M_E \rightarrow [0, +\infty[$, est appelée mesure de non compacité dans E , qui satisfait les condition suivantes: La famille

$$\ker(\mu) := \{D \in M_E \text{ telle que } \mu(D) = 0\} \neq \phi, \text{ et } \ker(\mu) \subset N_X$$

(\ker est appelé le noyau de MNC)

Théorème 1.3.1 : Soit $A, B \in M_X$, alors:

1. Si $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.
2. $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$.
3. $\mu(\overline{\text{conv } X}) = \mu(X)$.
4. $\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y)$, $\lambda \in [0, 1]$.
5. μ est dit semi-norme si $\left\{ \begin{array}{l} \mu(\lambda X) = |\lambda| \mu(X) (\mu \text{ est dit homogène}) \\ \mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y) (\mu \text{ est dit sub additif}) \end{array} \right\}$
6. Si (X_n) ensemble de suite de M_X telle que $X_{n+1} \subset X_n$ ($n = 1, \dots, n$) et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0$, alors $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ et $X_\infty \in \ker(\mu)$.

Définition 1.3.2 :

1\ Une mesure de non compacité est appelée mesure avec la propriété maximale, si $\max(\mu(A), \mu(B)) = \mu(A \cup B)$

2\ Une mesure de non compacité est dit régulière, si $\ker(\mu) = N_X$, sub- linéaire et possède une propriété maximal.

3\ Une mesure de non compacité est lipschitzienne, si elle satisfait la condition de Lipschitz

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(B(X)) d_H(A, B)$$

Avec:

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, A), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}$$

1.4 Mesure de non-compacité de Kuratowski

Kuratowski fut le premier(1930) a introduire et étudier la notion de la mesure de non-compacité([18])

Définition 1.4.1 : La mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné $A \in M_X$, notée $\alpha(A)$, est définie par:

$$\alpha(A) = \inf \{ \forall \epsilon > 0 : A \subset \cup_{i=1}^n B_i, B_i \subset X, \text{diam}(B_i) < \epsilon, i = 1, 2, \dots, n \}$$

désigne le diamètre de l'ensemble B_i , $\alpha(A) = \inf \{ \epsilon > 0 : \text{admet une recouvrement fini par des ensembles est sous ensemble de } X \text{ et } B \in M_X. \text{On notera que, dans cette définition, l'expression peut être remplacée par } \text{diam } B_i > \epsilon. \text{Il est clair que } \alpha(A) \leq \text{diam } A \text{ pour tout ensemble borné } A \text{ dans } M_X \text{ et que } \alpha(A) = 0 \text{ si } A \text{ est fini. Les propriétés essentielles de la mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné sont résumées dans le théorème suivant:}$

Théorème 1.4.1 ([18]): Soit (X, d) un espace métrique et $A, A_1, A_2 \in M_X$, alors

1. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \bar{A}$ est compact.
2. $A \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(A_1)$.
3. $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$.

4. $\alpha(A_1 \cup A_2) = \max\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}.$
5. $\alpha(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}.$
6. Si X est complet, $(F_n)_n$ une suite des ensembles croissantes d'ensembles non vide, fermés et bornés, telles que :

$\lim_n \alpha(F_n) = 0$, alors $F_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$ est sous-ensemble non vide et compact.

Proposition 1.4.1 : Soit (X, d) un espace normé et $A, A_1, A_2 \in M_X$, alors :

1. $\alpha(A_1 + A_2) \leq \alpha(A_1) + \alpha(A_2).$
2. $\alpha(A + x) = \alpha(A), \forall x \in X.$
3. $\alpha(\lambda A) = |\lambda| \alpha(A).$
4. $\alpha(A) = \alpha(\text{conv}(A))$ où $\text{conv}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A .

1.5 Mesure de Hausdorff:

En 1957, Goldenstein, Goh'berg et Markus ont introduit une autre mesure de non-compacité appelée mesure de non-compacité de Hausdorff.

Définition 1.5.1 La mesure de non-compacité de Hausdorff d'un ensemble borné $A \in M_E$, notée $\chi(A)$, est définie par:

$$\chi(A) = \inf \{ \epsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon, i = 1, \dots, n \}.$$

Où: $B(x_i, r_i)$ désigne la boule de centre x_i et de rayon r_i .

où:

$$\chi(A) = \inf \{ \epsilon > 0, B \text{ admet un recouvrement fini des boules de rayons } < \epsilon \}$$

avec B est la famille des sous espace fermés de X et $B \in M_X$. Dans cette définition, l'inégalité $r_i < \epsilon$, peut être remplacée par $r_i \leq \epsilon$, De plus les centres x_i des boules qui recouvrent l'ensemble A ne sont pas forcément dans l'ensemble ($Ax_i \in X$, en général).

Théorème 1.5.1 : Soit (X, d) un espace de Banach et soit A, A_1, A_2 des sous ensembles bornés.

1. Si A est fini alors $\chi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ totalement bornée $\Leftrightarrow \bar{A}$ est compact.
2. Si A est fini, alors $\chi(A) = 0$.
3. $A \subset A_1 \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(A_1)$
4. $\chi(A) = \chi(\bar{A}) = \chi(\text{con}(A))$.
5. $\chi(A_1 \cup A_2) = \max\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$.
6. $\chi(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$
7. Si X est complet, $(F_n)_n$ une suite décroissante d'ensembles non vides, fermés et bornés telle que $\lim_n (F_n) = \emptyset$, alors $F_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$ est un sous-ensemble non vide et compact.

Proposition 1.5.1 Soient X un espace normé $A, A_1, A_2 \in M_X$. Alors:

1. $\chi(A_1 + A_2) \leq \chi(A_1) + \chi(A_2)$.
2. $\chi(A + x) = \chi(A), \forall x \in X$.
3. $\chi(\lambda A) = |\lambda| \chi(A), \lambda \in \mathbb{k}$.
4. $\chi(A) = \chi(\text{con}(A))$, où $\text{con}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A .

Théorème 1.5.2 : Soit X un espace normé de dimension finie et \bar{B}_x la boule unité fermée dans X . Alors:

1. $\alpha(\bar{B}_x) = 2$.
2. $\chi(\bar{B}_x) = 1$.

1.6 Mesure de non compacité des opérateurs

Définition 1.6.1 : Soient $T : D(T) \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur continu $\alpha(\cdot)$ est la mesure de non compacité de Kuratowski dans X , pour tout $k > 0$, on dit que T est une contraction si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et

$$\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A).$$

Remarque 1.6.1 pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, alors $\alpha(A) > 0$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et

$$\alpha(T(A)) < \alpha(A)$$

Définition 1.6.2 : Soient $T : D(T) \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur continu $\chi(\cdot)$ est la mesure de non compacité de Hausdorff dans X et $k > 0$, T est dit K -boule contraction si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et

$$\chi(T(A)) \leq k\chi(A).$$

1. $\frac{1}{2}\alpha(T) \leq \chi(T) \leq 2\alpha(T)$.
2. $\alpha(T) = 0 \Leftrightarrow \chi(T) = 0 \iff T$ est compact.
3. Si $T, S \in L(X)$, donc $\alpha(TS) \leq \alpha(T)\alpha(S)$ et $\chi(TS) \leq \chi(S)\chi(T)$.
4. Si $k \in K(X)$, donc $\alpha(T+k) = \alpha(T)$ et $\chi(T+k) = \chi(T)$
5. $\alpha(T^*) \leq \chi(T)$ et $\alpha(T) \leq \chi(T^*)$, où T^* désigne l'opérateur dual de T .
6. Si B est un sous-ensemble borné de X , donc $\alpha(T(B)) \leq \alpha(T)\alpha(B)$.
7. Si $A \subset D(T)$, $\alpha(A) > 0$ alors $T(A)$ borné,

1.7 Théorèmes de point fixe

Dans cette section on a rappelle quelques outils et résultats d'analyse fonctionnelle utilisés par la suite pour : principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder,

de Brower résoudre des équations différentielle d'ordre fractionnaire où le deuxième membre est non linéaire, nous besoin des théories du point fixe.

On note par $L^1(I, E)$ L'espace de Banach des fonctions mesurables, $y : I \rightarrow E$ qui sont Bochner intégrales, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^T \|y(t)\| dt.$$

L'espace de Banach des fonctions mesurables $y : I \rightarrow E$ qui sont bornées est noté par $L^\infty(I, E)$ muni de la norme:

$$\|y\|_\infty = \inf \{c > 0, \|y(t)\| < c, \text{ p.p } t \in J\}.$$

On note par $AC^1(I, E)$ l'espace de Banach des fonctions dérivables $y : I \rightarrow E$, ayant la première dérivée absolument continue.

Définition 1.7.1 L'application $f : I \times E \rightarrow E$ est dit de Carathéodory si,

1. $t \rightarrow f(t, u)$ est mesurable $\forall u \in E$.
2. $u \rightarrow f(t, u)$ est continue presque pour tout $t \in I$.
3. $\forall r > 0$, il existe une fonction $\Phi_r \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$, telle que $\forall u \in \mathbb{R}$ avec $\|u\| < r$,

$$\|f(t, u)\| \leq \Phi_r(t).$$

Remarque 1.7.1 Si f vérifie l'assertion 3, alors est dite L^1 Carathéodory.

Définition 1.7.2 Soit X une espace de Banach on dit que F est contractant $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ on a:

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|, 0 < k < 1$$

Théorème 1.7.1 (Schafer). Soient X un espace de Banach et $F : X \rightarrow X$ complément continu. Alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 1.7.2 (Banach). Soit X une espace de Banach, et $F : X \rightarrow X$ est contractant alors: F admet un point fixe unique:

$$\exists y^* \in X \text{ telle que } F(y^*) = y^*$$

Théorème 1.7.3 (Schauder). Soit $(E; d)$ un espace métrique complet et A une partie convexe fermée de E et soit $F : A \rightarrow A$, on a si l'ensemble $\{Fx : x \in A\}$ est relativement compact dans E . Alors F possède ou moins un point fixe.

Définition 1.7.3 On dit que A est convexe:

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in A$$

Définition 1.7.4 L'application $T : C \subset E \rightarrow E$ est dit une α_E contraction s'il existe une constante $k < 1$ positive telle que :

$$\alpha_E(T(W)) \leq k\alpha_E(W), (\forall W \text{ fermé et borné})$$

Théorème 1.7.4 (Darbo-généralisé) soit C un sous ensemble non vide, ,fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E l'application continue

$$T : C \rightarrow C,$$

satisfaisant:

$$\mu(T(W)) \leq \Phi\mu(W), \quad \forall W \subset C,$$

où μ une mesure de non compacité arbitraire et $\Phi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, une fonction strictement croissante (non nécessairement continue), avec:

$$\lim_n \Phi^n(t) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty[.$$

Alors, T admet au moins un point fixe dans C .

Lemme 1.7.1 Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach, $C(I, E)$ et soit G une fonction continue de $I \times I$ et $f : I \times E \rightarrow E$ une fonction qui satisfait les conditions de Carathéodory, et il existe $p \in L^1(I; \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $t \in I$, et pour tout sous ensemble borné $B \subset E$ on a:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(t)\alpha(B); I_{t,h} = [t - h, t] \cap I$$

Si V est un sous ensemble équicontinu de D , alors:

$$\alpha\left(\left\{\int G(t, s) f(s, y(s)) ds : y \in V\right\}\right) \leq \int_I \|G(t, s)\| p(s) \alpha(V(s)) ds.$$

Théorème 1.7.5 (Darbo-sadovskii) Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E et soit l'application continue

$$T : C \rightarrow C$$

une α_E contraction, alors T admet au moins un point fixe dans C .

Théorème 1.7.6 (Mönch) Soit D un sous espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach, tel que $0 \in D$; et soit N une application continue de D dans D . Si l'implication

$$V = \text{conv } \overline{N(V)} \text{ ou } V = N(V) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(V) = 0.$$

est vérifiée pour tout ensemble V de D , alors N admet un point fixe dans D .

Chapitre 2

Calculs fractionnaires et équations différentielles d'ordre fractionnaires

2.1 Equations différentielles fractionnaires

Cette section sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire, telles que: les fonctions spéciales (Gamma, Beta, Mittag-Leffler), l'intégration fractionnaire de Riemann Liouville et de Katugampola, la dérivation fractionnaire au sens Riemann-Liouville, Caputo, Katugampola, Hilfer qui sont les plus utilisées, ainsi des Lemmes Fondamentaux et théorèmes de point fixe. [11]

2.1.1 Fonctions spéciales

Fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (excepte en certains point)

Définition 2.1.1 *On appelle la fonction Gamma, la fonction définie par:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0).$$

avec $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$.

Lemme 2.1.1 *La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , (resp holomorphe sur le demi plan $x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0$) et,*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\text{resp}, x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0), \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Proposition 2.1.1 *Pour tout $x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0, n \in \mathbb{N}$, on a:*

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2. $\Gamma(n+1) = (n)!$.
3. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$.

Remarque 2.1.1 ([13],[14]) *La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatives non entières par la formule $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, la fonction Gamma n'existe pas pour les valeurs négatives entières.*

Exemple 2.1.1 1. $\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}{\frac{-1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$.

$$2. \Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2}+1\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{\frac{-3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}.$$

Fonction Beta d'Euler

Définition 2.1.2 *La fonction Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par:*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (p, q \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0).$$

Proposition 2.1.2 *On a la relation:*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Preuve. Soit $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy \right) \\ &= \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy \end{aligned}$$

en utilisant un changement de coordonnées

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = uv \\ y = u(1-v) \end{cases},$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u,$$

de même que le domaine D' correspondant à D dans les coordonnées u, v est

$$D' = \{(u, v) / u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}.$$

alors:

$$\begin{aligned} \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \iint_{D'} (uv)^{p-1} [u(1-v)]^{q-1} e^{-u} | -u | dudv \\ &= \iint_{D'} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \right) \left(\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right) \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q), \end{aligned}$$

par conséquent on a:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

Fonction de Mittag-Leffter

Définition 2.1.3 La fonction simple de Mittag-Leffler est définie par:

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0.$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par:

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0.$$

Exemple 2.1.2 1. $E_1 = E_{1,1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$

$$2. E_2 = E_{2,1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh \sqrt{x}.$$

$$3. E_{1,2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x} (e^x - 1).$$

$$4. E_{1,3} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} (e^x - 1 - x).$$

Théorème 2.1.1 ([13],[14]) Pour tout $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^n E_n(\lambda x^n) &= \lambda E_n(\lambda x^n). \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda x^n) &= \lambda x^{\beta-n-1} E_n(\lambda x^n). \end{aligned}$$

2.1.2 Intégrale fractionnaire

Intégrale de Riemann-Liouville

Fonction définies sur $[a, b]$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$. Notons par $(I_{a+}^1 f)$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a, b], (I_{a+}^1 f)(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

L'intégration de $(I_{a+}^1 f)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a . De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} (I_{a+}^1 f)^2(t) &= (I_{a+}^1 f) \circ (I_{a+}^1 f)(t) \\ &= \int_a^t \left(\int_a^u f(x) dx \right) du \\ &= \int_a^t (t-x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, En notant $(I_{a+}^1 f)^n$ la n -ième itération de $(I_{a+}^1 f)$, une récurrence directe montre que

$$(I_{a+}^1 f)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx,$$

si on note $g = (I_{a+}^1 f)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant ,

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, g^{(k)}(a) = 0, g^{(n)} = f.$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante:

Définition 2.1.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, L'intégrale à gauche d'ordre n de f , que l'on note $(I_{a+}^1 f)$ est définie par:

$$(I_{a+}^1 f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx.$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.

C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition de la manière suivante:

Définition 2.1.5 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$, est définie par:

$$\forall t \in [a, b], (I_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$, est définie par:

$$\forall t \in [a, b], (I_{a-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx.$$

Fonctions définies sur \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}

Il est d'étendre la définition aux axes \mathbb{R}^+ et \mathbb{R} , Notons ces opérateurs $(I_{0+}^\alpha f)$ et $(I_+^\alpha f)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, (I_{0+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, (I_+^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx.$$

Proposition 2.1.3 ([13],[14]) Pour $\alpha > 0, \beta > 0$, on a:

$$1. \left(I_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

$$2. \left(I_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}.$$

Théorème 2.1.2 Si $f \in L^1([a, b])$, alors $I_{a+}^\alpha f$ existe pour tout $\alpha > 0$, et $I_{a+}^\alpha f \in L^1([a, b])$.

Proposition 2.1.4 Soit $\alpha > 0, \beta > 0$, et $f \in L^1([a, b])$.

Alors

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f = I_{a+}^{\alpha+\beta} f$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\beta-1} f(s) ds \right) dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^x (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} f(s) ds dx, \quad |\text{changement de l'ordre d'intégration}| \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \int_s^t (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} dx ds, \quad |x = (t-s)u + s, u : 0 \rightarrow 1 \quad u = \frac{x-s}{t-s}| \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) ds, \quad (B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
 &= I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t).
 \end{aligned}$$

■

Intégrale de Katugampola

Nous présentons une généralisation récente introduite par U dite Katugampola ,qui généralise l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et l'intégrale fractionnaire de Hadamard. l'intégrale est maintenant aussi connue sous le nom d'intégrale fractionnaire de Katugampola et donnée par

Définition 2.1.6 ([11])(**Katugampola**) *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $y \in X_c^p [0, T]$ est définie par:*

$$({}^{\rho}I_{0+}^{\alpha}y)(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{s^{\rho-1}y(s)}{(t^{\rho} - s^{\rho})^{1-\alpha}} ds, \quad t \in [0, T].$$

pour $\rho > 0$

Remarque 2.1.2 *Considérons l'espace $X_c^p [0, T]$ ($c \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$) des fonctions mesurables y sur $[0, T]$ pour $\|y\|_{X_c^p} < \infty$, ou la norme définie par:*

$$\|y\|_{X_c^p} = \left(\int_0^T |s^c y(s)|^p \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour le cas $p = \infty$

$$\|y\|_{X_c^p} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} [t^c |y(t)|].$$

Théorème 2.1.3 ([11]) Soient $\alpha > 0$ et $\rho > 0, t \in [0, T]$ Alors

1. $\lim_{\rho \rightarrow 1} ({}^\rho I_{0+}^\alpha y)(t) = (I_{0+}^\alpha y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds,$
2. $\lim_{\rho \rightarrow 0} ({}^\rho I_{0+}^\alpha y)(t) = (J_{\alpha^*}^\alpha y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{y(s)}{s} ds.$

2.1.3 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaire, on va commencer par introduire les trois plus importantes approches de calcul fractionnaire : au sens de Riemann-Liouville, au sens de Caputo et au sens de Katugampola. On présentera quelques propriétés.

Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha] + 1$, Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ I_t^1$, on peut définir une dérivées fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ I_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ I_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 2.1.7 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], D_{a+}^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{a+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx. \end{aligned}$$

De plus, on a vu que la définition, d'intégrale à droit était associée à $-d/dt$.

Définition 2.1.8 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], D_{b^-}^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{b^-}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx \end{aligned}$$

Soit maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées de Liouville.

Définition 2.1.9 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, D_+^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_+^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx \end{aligned}$$

De plus, on a vu que la définition, d'intégrale à droit était associée à $-d/dt$.

Définition 2.1.10 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, D_-^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_-^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx \end{aligned}$$

Remarque 2.1.3 ([15]) Pour $\alpha = 0, n = 1$, on a:

1. $D_+^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} (I_{a^+}^1 f)(t) = f(t)$

2. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} D_{a^+}^\alpha f(t) = D_+^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ D_{b^-}^\alpha f(t) = D_-^\alpha f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{array} \right.$$

Proposition 2.1.5 ([13],[14]) Pour $\alpha \geq 0, \beta > 0$, on a:

1.

$$\left(D_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}$$

2.

$$\left(D_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}$$

Remarque 2.1.4 Pour $\lambda = \beta - 1, a = 0$ on a :

$$\begin{aligned} (D_{0^+}^\alpha t^\lambda) (t) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)\dots(\lambda+1-\alpha) t^{\lambda-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))\dots(1-(\alpha-\lambda)) t^{\lambda-\alpha} \end{aligned}$$

$$(D_{0^+}^\alpha t^\lambda) (t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}, & \text{si } \alpha - \lambda \notin \{1, 2, \dots, n\} \lambda > -1 \\ 0, & \text{si } \alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \implies \alpha - \lambda = m \implies \lambda = \alpha - m, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ c-à-d

$$(D_{0^+}^\alpha t^{\alpha-m}) (t) = 0, m \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Proposition 2.1.6 ([13],[14]) Soit $\alpha > 0, \beta > 0, n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes:

1. Si $f(t) \in L_p([a, b]), (1 \leq p < \infty)$, alors

$$(D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f) (t) = f(t), \text{ et } (D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha f) (t) = f(t).$$

2. Si $\alpha > \beta$, et $f(t) \in L_p([a, b]), (1 \leq p < \infty)$, alors

$$\left(D_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha f \right) (t) = \left(I_{a^+}^{\alpha-\beta} f \right) (t), \text{ et } \left(D_{b^-}^\beta I_{b^-}^\alpha f \right) (t) = \left(I_{b^-}^{\alpha-\beta} f \right) (t),$$

3. Si $f(t) \in C^q([a, b]), q = [\alpha + \beta] + 1$, alors

$$\left(D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f \right) (t) = \left(D_{a^+}^{\alpha+\beta} f \right) (t), \text{ et } \left(D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\beta f \right) (t) = \left(D_{b^-}^{\alpha+\beta} f \right) (t),$$

4. Si $f(t) \in L_1([a, b]), (I_{a^+}^{n-\alpha} f) \in AC^n([a, b])$, alors

$$\begin{aligned} (I_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\alpha f) (t) &= f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(I_{a^+}^{n-\alpha} f)^{(n-K)}(a)}{\Gamma(\alpha-K+1)} (t-a)^K \\ (I_{b^-}^\alpha D_{b^-}^\alpha f) (t) &= f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-K} (I_{b^-}^{n-\alpha} f)^{(n-K)}(b)}{\Gamma(\alpha-K+1)} (b-t)^K. \end{aligned}$$

2.1.4 Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des composition dans la formule de définition ,semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo.

Définition 2.1.11 Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) &= I_{a+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx, \end{aligned}$$

Définition 2.1.12 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par:

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}^C D_{b-}^{\alpha} f(t) &= I_{b-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt} \right)^n f(t) \\ &= \frac{(-1)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.5 ([15]) relation entre la dérivée de Caputo et la dérivée classique

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ {}^C D_{b-}^{\alpha} f(t) = (-1)^n (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)) \end{cases}$$

Remarque 2.1.6 1. On note par $AC([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$; $f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a, b])$ telle que $f = c + \int_a^x \varphi(t) dt$.

2. On note $AC^n([a, b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace des fonctions f définies sur $[a, b]$ a valeurs dans \mathbb{C} qui ont des dérivées continues sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre $n - 1$ donc:

$$AC^n([a, b]) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a, b]), k = 0 \dots n - 1, f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}.$$

Lemme 2.1.2 ([13],[14]) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+/\mathbb{N}$, et $n = [\alpha] + 1$. si $f \in AC^n([a, b])$, alors presque partout:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) &= f^{(n)}(t) \\ \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

Proposition 2.1.7 Pour $\alpha \geq 0, \beta > 0$, on a :

1.

$$\left({}^C D_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$$

2.

$$\left({}^C D_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$$

Théorème 2.1.4 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, possède $(n-1)$ dérivées en (a) et $D_{a^+}^\alpha f(t)$ existe. Alors

$$\left({}^C D_{a^+}^\alpha f\right)(t) = D_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right]$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Remarque 2.1.7 Pour $\lambda = \beta - 1, a = 0$ on a :

$${}^C D_{a^+}^\alpha t^\lambda = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}$$

$$\left({}^C D_{a^+}^\alpha t^\lambda\right)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & \text{si } \lambda \notin \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \\ 0 & , \text{si } \lambda \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \end{cases}, \lambda > -1$$

C-à-d

$$\left({}^C D_0^\alpha t^m\right)(t) = 0, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Proposition 2.1.8 Soit $\alpha > 0, \beta > 0, n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes :

1. Si $f(t) \in C^q([a, b])$, $q = [\alpha + \beta] + 1$, alors :

$$\left({}^C D_{a^+}^\alpha \quad {}^C D_{a^+}^\beta f\right)(t) = \left({}^C D_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(t),$$

et

$$\left({}^C D_{b^-}^\alpha \quad {}^C D_{b^-}^\beta f\right)(t) = \left({}^C D_{b^-}^{\alpha+\beta} f\right)(t).$$

2. Si $f(t) \in C^m([a, b])$, ou $f(t) \in AC^n([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned} \left(I_{a^+}^\alpha \quad {}^C D_{a^+}^\beta f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \\ \left(I_{b^-}^\alpha \quad {}^C D_{b^-}^\beta f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k. \end{aligned}$$

Corollaire 2.1.1 Soit $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$ et $(D_{a^+}^\alpha f), ({}^C D_{a^+}^\alpha f)(t)$ sont existents, on suppose que $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Alors:

$$\left({}^C D_{a^+}^\beta f\right)(t) = \left(D_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(t).$$

2.1.5 Dérivées fractionnaires de Katugampola

Définition 2.1.13 ([12])

Soit $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$ telle que $\alpha > 0, \rho > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. la dérivée fractionnaire de Katugampola, pour $0 \leq t \leq T \leq \infty$, est définie par:

$${}^\rho D_{0^+}^\alpha y(t) = \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \circ ({}^\rho I_{0^+}^{n-\alpha} y)(t) = \frac{\rho^{\alpha-n-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t \frac{s^{\rho-1} y(s)}{(t^\rho - s^\rho)^{\alpha-n+1}} ds$$

Remarque 2.1.8 ([11], [12]) Un exemple de base, nous citons pour $\alpha, \rho > 0$, et $\mu > -\rho$, alors:

$${}^\rho D_{0^+}^\alpha t^\mu = \frac{\rho^{\alpha-1} \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1 - \alpha + \frac{\mu}{\rho}\right)} t^{\mu-\alpha\rho}$$

donne en particulier ${}^\rho D_{0^+}^\alpha t^{\mu(\alpha-m)} = 0$, pour tout $m = 1, 2, \dots, n$.

En fait, pour $\alpha, \rho > 0$, et $\mu > -\rho$, nous avons:

$$\begin{aligned} {}^\rho D_{0^+}^\alpha t^\mu &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t s^{\rho+\mu-1} (t^\rho - s^\rho)^{n-\alpha-1} ds \\ &= \frac{\rho^{\alpha-1} \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1 + n - \alpha + \frac{\mu}{\rho}\right)} \left[n - \alpha + \frac{\mu}{\rho}\right] \left[n - \alpha + \frac{\mu}{\rho} - 1\right] \dots \left[1 - \alpha + \frac{\mu}{\rho}\right] t^{\mu-\alpha\rho} \\ &= \frac{\rho^{\alpha-1} \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1 - \alpha + \frac{\mu}{\rho}\right)} t^{\mu-\alpha\rho} \end{aligned}$$

Si on met $m = \alpha - \frac{\mu}{\rho}$, on obtient de :

$${}^\rho D_{0^+}^\alpha t^{\mu(\alpha-m)} = \rho^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha-m+1)}{\Gamma(n-m+1)} (n-m)(n-m-1) \dots (1-m) t^{-\rho m}$$

Donc, pour $m = 1, 2, \dots, n$. nous avons ${}^\rho D_{0^+}^\alpha t^{\rho(\alpha-m)} = 0, \forall \alpha, \rho > 0$.

$C[0, T]$ désignons l'espace Banach de tout les fonctions continues sur $[0, T]$

$$\|y\|_\infty = \sup \{|y(t)| : 0 \leq t \leq T\}.$$

Remarque 2.1.9 Soit $p, c, T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $p \geq 1, c > 0$, et $T \leq (pc)^{\frac{1}{pc}}$.

il est clair que, $\forall y \in C[0, T]$

$$\|y\|_{X_c^p} = \left(\int_0^T |s^c y(s)|^p \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{T^c}{(pc)^{\frac{1}{p}}} \|y\|_{\infty},$$

et

$$\|y\|_{X_c^\infty} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} [t^c |y(t)|] \leq T^c \|y\|_{\infty},$$

Ce qui implique que $C[0, T] \rightarrow X_c^p[0, T]$, et

$$\|y\|_{X_c^p} \leq \|y\|_{\infty} \text{ pour tous } T \leq (pc)^{\frac{1}{pc}}.$$

Théorème 2.1.5 ([11], [12]) Soit $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$, tels que $\alpha \in (0, 1)$, et $\rho > 0$, alors pour $f, g \in X_c^p[0, T]$, où $1 \leq p \leq \infty$, on a:

Propriété Inverse

$${}^\rho D_{0+}^\alpha {}^\rho I_{0+}^\alpha f(t) = f(t)$$

Propriété de linéarité

$${}^\rho D_{0+}^\alpha (f + g)(t) = {}^\rho D_{0+}^\alpha f(t) + {}^\rho D_{0+}^\alpha g(t)$$

$${}^\rho I_{0+}^\alpha (f + g)(t) = {}^\rho I_{0+}^\alpha f(t) + {}^\rho I_{0+}^\alpha g(t)$$

2.1.6 Dérivées fractionnaires de Hilfer

Définition 2.1.14 ([1]) on appelle dérivée d'ordre α et de type β au sens de Hilfer de f au point "a" la fonction définie par :

$$(D_a^{\alpha, \beta} y)(t) := (I_a^{\beta(m-\alpha)} D^m I_a^{(m-\alpha)(1-\beta)} y)(t), p.p. t \in J.$$

ou $I_a^{(\cdot)}$ est l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville.

Remarque 2.1.10 La dérivée $D_a^{\alpha, \beta}$ est considérée comme une interpolation entre la dérivée de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo puisque

$$D_a^{\alpha, \beta} y = \begin{cases} {}^{RL} D_a^\alpha y, & \text{si } \beta = 0 \\ {}^C D_a^\alpha y & , \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Preuve. Si $\beta = 0$

$$\begin{aligned} (D_a^{\alpha,0}y)(t) &= (I_a^0 \circ \frac{d}{dt} \circ I_a^{1-\alpha}y)(t) \\ &= (\frac{d}{dt}(I_a^{1-\alpha}y))(t) \\ &= ({}^{RL}D_a^\alpha y)(t) \end{aligned}$$

Si $\beta = 1$

$$\begin{aligned} (D_a^{\alpha,1}y)(t) &= (I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dt} \circ I_a^0y)(t) \\ &= (I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dt}y)(t) \\ &= ({}^C D_a^\alpha y)(t) \end{aligned}$$

■

Exemple 2.1.3 Prenons la fonction $f(x)=(x-a)^\delta$

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha,\beta}(x-a)^\delta &= I_a^{\beta(m-\alpha)} D^m (I_{0^+}^{(m-\alpha)(1-\beta)}) \\ &= I_a^{\beta(m-\alpha)} D^m \left(\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma((m-\alpha)(1-\beta)+\delta+1)} (x-a)^{(m-\alpha)(1-\beta)+\delta} \right) \\ &= I_a^{\beta(m-\alpha)} \left(\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma((1-\alpha-m\beta)+\alpha\beta+\delta)} (x-a)^{\delta-\alpha-m\beta+\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma((1+\delta-\alpha))} (x-a)^{\delta-\alpha} \\ &= {}^{RL}D_a^\alpha (x-a)^\delta \end{aligned}$$

Chapitre 3

Existence de solution de EDFs par la mesure de non compacité

Dans ce chapitre on essaye d'appliquer la notion de la mesure de non compacité sur les problèmes de type des équations différentielles d'ordre fractionnaires pour étudier l'existence de solutions.

3.1 Application de MNC pour une équation différentielle fractionnaire de type Hilfer dans l'espace de Banach

Dans ce section, nous étudions l'existence et l'unicité de solutions pour une classe de des équations différentielles fractionnaires non linéaires implicites via l'équation de Banach pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire,

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\beta} y(t) = f(t, y(t)), \text{ pour chaque } t \in J := [0, T]. \\ I_{0+}^{1-\gamma} y(0) = y_0, I_{0+}^{3-\gamma-2\beta} y'(0) = y_1 \\ I_{0+}^{1-\gamma} y(\eta) = \lambda(I_{0+}^{1-\gamma} y(T)), \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta. \end{cases} \quad (3.1)$$

où $D_{0+}^{\alpha,\beta}$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer, $0 < \alpha < 1, 0 \leq \beta \leq 1, 0 < \lambda < 1, 0 < \eta < T$ soit E un espace de muni Banach de la norme $\|\cdot\|$, $f : J \times E \rightarrow E$ est une fonction continue Nous présenterons les résultats d'existence pour le problème (1) qui s'appuient sur le

théorème du point fixe de Mönch. combiné avec la technique de mesure de non-compacité de Kuratowski Nous rappelons que lorsque nous analysons un problème impliquant un opérateur fonctionnel, l'un des meilleurs méthodes consiste à utiliser la technique de mesure de non-compacité([10])

3.2 Résultat d'existence

Dans cette partie on expose le résultat d'existence.....

Définition 3.2.1 On dit qu'une fonction $y \in C_{1-\gamma}(J, E)$ est une solution de problème (1) ,si y satisfait l'équation $D_{0+}^{\alpha,\beta} y(t) = f(t, y(t))$ sur J , et les conditions $I_{0+}^{1-\gamma} y(0) = y_0, I^{3-\gamma-2\beta} y'(0) = y_1$ et $I_{0+}^{1-\gamma} y(\eta) = \lambda(I_{0+}^{1-\gamma} y(T))$

Lemme 3.2.1 Soit $f : J \times E \rightarrow E$ est une fonction telle que $f \in C_{1-\gamma}(J, E)$ pour toute y :On dit qu'une fonction $y \in C_{1-\gamma}^\gamma(J, E)$ est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = I_{0+}^\alpha f(t, y(t)) + \frac{y_0}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} + \frac{y_1}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} t^{\gamma+2\beta-1} + \varsigma(\beta, \gamma, \eta, \lambda) \quad (3.2)$$

si et seulement si y est une solution des équations différentielles fractionnaires PVI

$$D_{0+}^{\alpha,\beta} y(t) = f(t, y(t)), t \in J := [0, T], \quad (3.3)$$

$$I_{0+}^{1-\gamma} y(0) = y_0, I^{3-\gamma-2\beta} y'(0) = y_1, I_{0+}^{1-\gamma} y(\eta) = \lambda(I_{0+}^{1-\gamma} y(T)), \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta. \quad (3.4)$$

Preuve. Par le lemme(), nous réduisons à équation intégrale équivalente ■

$$y(t) = C_0 t^{\gamma-1} + C_1 t^{\gamma+2\beta-2} + C_2 t^{\gamma+4\beta-3} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds$$

pour certaines constantes $C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

de (4) on a:

$$\begin{aligned}
 I_{0+}^{1-\gamma} y(0) &= y_0, \text{ implique. que } C_0 = \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)} \\
 I^{3-\gamma-2\beta} y'(0) &= y_1, \text{ implique. que } C_1 = \frac{y_1}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} \\
 I_{0+}^{1-\gamma} y(\eta) &= \lambda(I_{0+}^{1-\gamma} y(T)), \text{ implique. que} \\
 (I_{0+}^{1-\gamma} y)(\eta) &= (I_{0+}^{1-\gamma} \frac{y_0}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1})(\eta) + (I_{0+}^{1-\gamma} \frac{y_1}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma+2\beta-2})(\eta) + C_2(I_{0+}^{1-\gamma} t^{\gamma+4\beta-3})(\eta) + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(\eta, y(\eta)) \\
 &= y_0 + \frac{y_1}{\Gamma(2\beta)} \eta^{2\beta-1} + C_2 \frac{\Gamma(\gamma + 2(2\beta) - 2)}{\Gamma(4\beta - 1)} \eta^{4\beta-2} + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(\eta, y(\eta)) \\
 I_{0+}^{1-\gamma}(T) &= (I_{0+}^{1-\gamma} \frac{y_0}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1})(T) + (I_{0+}^{1-\gamma} \frac{y_1}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} t^{\gamma+2\beta-2})(T) + C_2(I_{0+}^{1-\gamma} t^{\gamma+4\beta-3})(T) + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(T, y(T)) \\
 &= y_0 + \frac{y_1}{\Gamma(2\beta)} T^{2\beta-1} + C_2 \frac{\Gamma(\gamma + 2(2\beta) - 2)}{\Gamma(4\beta - 1)} T^{4\beta-2} + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(T, y(T)) \\
 \lambda(I_{0+}^{1-\gamma} y)(T) &= \lambda y_0 + \frac{\lambda y_1}{\Gamma(2\beta)} T^{2\beta-1} + C_2 \frac{\lambda \Gamma(\gamma + 2(2\beta) - 2)}{\Gamma(4\beta - 1)} T^{4\beta-2} + \lambda I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(T, y(T))
 \end{aligned}$$

implique que

$$C_2 = \Lambda \left\{ y_0(\lambda - 1) + \frac{\lambda T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} y_1 + \lambda I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(T, y(T)) - I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(\eta, y(\eta)) \right\}.$$

Dans la suite, nous définissons les notations suivantes pour des raisons de commodité de calcul.

$$\Lambda = \frac{\Gamma(4\beta - 1)}{\Gamma(\gamma + 4\beta - 2)(\eta^{4\beta-2} - \lambda T^{4\beta-2})} \quad (3.5)$$

$$\Delta = \left\{ \frac{T^{\alpha-\gamma+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Lambda}{\Gamma(\alpha - \gamma + 2)} \left[\lambda T^{\alpha-\gamma+1} - \eta^{\alpha-\gamma+1} \right] T^{2(2\beta)-2} \right\} \quad (3.6)$$

$$\Lambda_1 = \frac{p^* T^{\alpha-\gamma+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} + |\Lambda| \left[\frac{\lambda p^* T^{\alpha-\gamma+4\beta-1}}{\Gamma(\alpha - \gamma + 2)} + \frac{p^* \eta^{\alpha-\gamma+1} T^{4\beta-2}}{\Gamma(\alpha - \gamma + 2)} \right] \quad (3.7)$$

Théorème 3.2.1

$$\Lambda_2 = \frac{\|y_0\|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{\|y_1\| T^{2\beta-1}}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} + |\Lambda| \left[\|y_0\| (\lambda - 1) + \frac{\lambda T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} \|y_1\| \right] T^{4\beta-2} \quad (3.8)$$

Les hypothèses suivantes seront utilisées dans la suite

(**H**₁) $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait la condition de Carathéodory.

(**H**₂) Il existe $p \in C(J, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\| f(t, y) \| \leq p(t) \| y \|$$

pour $t \in J$ et chaque $y \in E$

(**H**₃) Pour chaque $t \in J$ et chaque ensemble borné $B \subset E$, nous avons.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mu(f(J_{t,h} \times B)) \leq t^{1-\gamma} p(t) \mu(B); J_{t,h} = [t-h, t[\cap J$$

Théorème 3.2.2 *Supposons que (**H**₁) – (**H**₃) soient vérifiés. on suppose*

$$p^* = \sup_{t \in J} p(t) \tag{3.2.1}$$

si

$$p^* \Delta \prec 1 \tag{3.10}$$

alors le BVP (3.3)-(3.4) a au moins une solution.

Preuve. Convertir le problème (3.3)-(3.4) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur, $N : C_{1-\gamma}(J, E) \rightarrow C_{1-\gamma}(J, E)$ défini par

$$\begin{aligned} N(y)(t) = & I_{0+}^\alpha f(t, y(t)) + \frac{y_0}{\Gamma(\gamma)} t^{1-\gamma} + \frac{y_1}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} t^{\gamma+2\beta-2} + \Lambda \\ & \left[y_0(\lambda - 1) + \frac{\lambda T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} y_1 + \lambda I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(T, y(T)) - I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(\eta, y(\eta)) \right] t^{\gamma+2(2\beta)-3} \end{aligned}$$

■

Clairement, les point fixe de l'opérateur N sont des solution du problème (3.3)-(3.4) on suppose

$$R \succ \frac{\Lambda_2}{1 - \Lambda_1}$$

et considérer

$$D = \{y \in C_{1-\gamma}(J, E) : \| y \| \leq R\}$$

Clairement, le sous-ensemble D_{r_0} est fermé, borné et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du théorème Mönch donnée en trois étapes

Étape 1: N est continu. Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \rightarrow y$ dans $C_{1-\gamma}(J, E)$.

Alors pour chaque $t \in J$,

$$\| t^{1-\gamma} N(y_n)(t) - N(y)(t) \| \tag{3.2}$$

$$\leq \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \| ds + \frac{\Lambda t^{4\beta-2}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \tag{3.2}$$

$$\times \left\{ \lambda \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma} \| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \| ds + \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-\gamma} \| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \| ds \right\} \tag{3.2}$$

$$\leq \left(\frac{t^{\alpha-\gamma+1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|\Lambda| t^{4\beta-2}}{\Gamma(\alpha-\gamma+2)} (\lambda T^{\alpha-\gamma+1} + \eta^{\alpha-\gamma+1}) \right) \| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \| \tag{3.2}$$

$$\leq \frac{T^{\alpha-\gamma+1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|\Lambda| T^{4\beta-2}}{\Gamma(\alpha-\gamma+2)} (\lambda T^{\alpha-\gamma+1} + \eta^{\alpha-\gamma+1}) \| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \| \tag{3.2}$$

Puisque f est de type Carathéodory, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\| N(y_n) - N(y) \|_\infty \rightarrow 0, \text{ comme } n \rightarrow \infty$$

Étape 2: N fait correspondre D à lui-même. Pour chaque $y \in D$ par (\mathbf{H}_2) et on a pour chaque $t \in J$,

$$\text{et } Ny(t) \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 & \| t^{1-\gamma} N(y)(t) \| \leq t^{1-\gamma} |f(t, y(t))| + \frac{|y_0|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{|y_1|}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} t^{2\beta-1} + |\Lambda| T^{4\beta-2} \\
 & \quad \times \left\{ |y_0|(\lambda - 1) + \frac{\lambda T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} |y_1| + \lambda I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} |f(T, y(T))| + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} |f(\eta, y(\eta))| \right\} \\
 & \leq t^{1-\gamma} I_{0+}^{\alpha+1} p(t) |y| + \frac{|y_0|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{|y_1|}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} t^{2\beta-1} + |\Lambda| T^{4\beta-2} \\
 & \quad \times \left\{ |y_0|(\lambda - 1) + \frac{\lambda T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} |y_1| + \lambda I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} p(t) |y| + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} p(\eta) |y| \right\} \\
 & \leq T^{1-\gamma} R p^* I_{0+}^{\alpha+1}(1)(T) + \frac{|y_0|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{|y_1|}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} T^{2\beta-1} + |\Lambda| T^{4\beta-2} \\
 & \quad \times \left\{ |y_0|(\lambda - 1) + \frac{\lambda T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} |y_1| + R p^* \{ \lambda I_{0+}^{\alpha-\gamma+1}(1)(T) + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1}(1)(\eta) \} \right\} \\
 & \leq \frac{R p^* T^{\alpha-\gamma+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} + |\Lambda| \left[\frac{\lambda R p^* T^{\alpha-\gamma+4\beta-1}}{\Gamma(\alpha - \gamma + 2)} + \frac{\lambda R p^* \eta^{\alpha-\gamma+1} T^{4\beta-2}}{\Gamma(\alpha - \gamma + 2)} \right] \\
 & \quad + \frac{|y_0|}{\Gamma(\gamma)} + \frac{|y_1| T^{2\beta-1}}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} + |\Lambda| \left[|y_0|(\lambda - 1) + \frac{\lambda T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} |y_1| \right] T^{4\beta-2} \\
 & = R\Lambda_1 + \Lambda_2 \leq R.
 \end{aligned}$$

Etape 3: $N(D)$ est bornée et équicontinue. Par l'étape 2, il est évident que $N(D) \subset C_{1-\gamma}(J, E)$ est borné. Pour l'équicontinuité de $N(D)$, soit $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2$ et $y \in D$.

Alors:

$$\begin{aligned}
 & \| t_2^{1-\gamma} Ny(t_2) - t_1^{1-\gamma} Ny(t_1) \| \leq I_{0+}^{\alpha} |t_2^{1-\gamma} f(s, y(s))(t_2) - t_1^{1-\gamma} f(s, y(s))(t_1)| \\
 & + \frac{1}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} |y_1 t_2^{2\beta-1} - y_1 t_1^{2\beta-1}| + |\Lambda| \left(t_2^{2(2\beta)-2} - t_1^{2(2\beta)-2} \right) \\
 & \times \left\{ |y_0(\lambda - 1) + \frac{\lambda T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} y_1 + \lambda I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(T, y(T)) - I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} f(\eta, y(\eta)) \right\} \\
 & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[t_2^{1-\gamma} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds - t_1^{1-\gamma} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + t_2^{1-\gamma} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \right. \\
 & + \frac{|y_1|}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} \left(t_2^{2\beta-1} - t_1^{2\beta-1} \right) + |\Lambda| \left(t_2^{4\beta-2} - t_1^{4\beta-2} \right) \\
 & \left. \times \left\{ |y_0(\lambda - 1)| + \frac{|\lambda| T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} |y_1| + |\lambda| I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} |f(T, y(T))| - I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} |f(\eta, y(\eta))| \right\} \right] \\
 & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ t_2^{1-\gamma} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} |y| p(s) ds - t_1^{1-\gamma} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} |y| p(s) ds \right\} \\
 & + t_2^{1-\gamma} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} |y| p(s) ds + \frac{|y_1|}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} \left(t_2^{2\beta-1} - t_1^{2\beta-1} \right) + |\Lambda| \left(t_2^{4\beta-2} - t_1^{4\beta-2} \right) \\
 & \times \left\{ |y_0(\lambda - 1)| + \frac{|\lambda| T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} |y_1| + |\lambda| I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} |y| p(s)(T) + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1} |y| p(s)(\eta) \right\} \\
 & \leq \frac{Rp^*}{\Gamma(\alpha + 1)} (t_2^{\alpha-\gamma+1} + t_1^{\alpha-\gamma+1}) + \frac{|y_1|}{\Gamma(\gamma + 2\beta - 1)} \left(t_2^{2\beta-1} - t_1^{2\beta-1} \right) + |\Lambda| \left(t_2^{4\beta-2} - t_1^{4\beta-2} \right) \\
 & \times \left\{ |y_0(\lambda - 1)| + \frac{|\lambda| T^{2\beta-1} - \eta^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta)} |y_1| + \frac{Rp^*(\lambda T^{\alpha-\gamma+1} - \eta^{\alpha-\gamma+1})}{\Gamma(\alpha - \gamma + 2)} \right\}
 \end{aligned}$$

Comme $t_1 \rightarrow t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Maintenant, $N(D) \subset D$

D

soit V sous-ensemble de D tel que $V \subset \overline{\text{conv}}(N(V) \cup \{0\})$.

on a $V \subset \overline{\text{conv}}(N(V) \cup \{0\})$ pour, tout $t \in J, NV(t) \subset ND(t), t \in J$, est borné dans E , en utilisant ce fait, (\mathbf{H}_2) et les propriétés de la mesure μ ? et on a pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned}
 t^{1-\gamma}V(t) &\leq \mu(t^{1-\gamma}N(V)(t) \cup \{0\}) \leq \mu(t^{1-\gamma}(NV)(t)) \\
 &\leq \mu(t^{1-\gamma}I_{0+}^{\alpha}f(s, V(s))(t)) \\
 &\quad + |\Lambda| t^{4\beta-2} \{|\lambda| I_{0+}^{\alpha-\gamma+1}f(s, V(s))(T) + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1}f(s, V(s))(\eta)\} \\
 &\leq t^{1-\gamma}I_{0+}^{\alpha} + \mu(f(s, V(s)))(t) \\
 &\quad + |\Lambda| t^{4\beta-2} \{|\lambda| I_{0+}^{\alpha-\gamma+1}\mu(f(s, V(s)))(T) + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1}\mu(f(s, V(s)))(\eta)\} \\
 &\leq t^{1-\gamma}I_{0+}^{\alpha}(p(s)\mu(V(s)))(t) \\
 &\quad + |\Lambda| t^{4\beta-2} \{|\lambda| I_{0+}^{\alpha-\gamma+1}(p(s)\mu(V(s)))(T) + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1}(p(s)\mu(V(s)))(\eta)\} \\
 &\leq p^* \|v\| (T^{1-\gamma}I_{0+}^{\alpha}(1)(T) + |\Lambda| T^{4\beta-2} \{|\lambda| I_{0+}^{\alpha-\gamma+1}(1)(T) + I_{0+}^{\alpha-\gamma+1}(1)(\eta)\}) \\
 &\leq p^* \|v\| \left[\frac{T^{\alpha-\gamma+1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|\Lambda|}{\Gamma(\alpha-\gamma+2)} (|\lambda| T^{\alpha-\gamma+1} + \eta^{\alpha-\gamma+1}) T^{4\beta-2} \right]
 \end{aligned}$$

Cela donne ça

$$\|v\| \leq p^* \Delta \|v\|$$

Par $p^* \Delta$, il s'ensuit que $\|v\| = 0$, c'est-à-dire $v(t) = 0$ pour tout $t \in J$, et alors $V(t)$ est relativement compact dans E .

d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, V a relativement compact dans D . En appliquant maintenant le théorème(), nous concluons que N a un point fixe qui est une solution du problème (3)-(4)

3.2.1 Exemple

soit $E = l^1 = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty\}$ avec la norme

$$\|y\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

Nous considérons le problème PVI fractionnelle de Hilfer

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha, \beta} y(t) = f(t, y(t)), \text{ pour chaque } (t, y) \in ([0, 1], \mathbb{R}). \\ I_{0+}^{1-\gamma} y(0) = y_0, I^{3-\gamma-2\beta} y'(0) = y_1, I_{0+}^{1-\gamma} y(\eta) = \lambda(I_{0+}^{1-\gamma} y(T)) \end{cases} \quad (3.11)$$

où $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{3}{4}, \lambda = \frac{1}{2}, T = 1$

and

$$f(t, y(t)) = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{ct^2}{e^{t+4}} (|y(t)| + 1), t \in [0, 1] \right.$$

$$c = \frac{e^3}{10} \sqrt{\pi}$$

Clairement, la fonction f est continue. pour tout $y \in E$ et, $t \in [0, 1]$ on a

$$\| f(t, y(t)) \| \leq \frac{ct^2}{e^{t+4}} \|y\|$$

Par conséquent, l'hypothèse (\mathbf{H}_2) est satisfaite avec $p^* = ce^{-3}$. Nous allons montrer cette condition (4.20) est valable avec $T = 1$. En effet,

$$p^* \left[\frac{T^{\alpha-\gamma+1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|\Lambda|}{\Gamma(\alpha-\gamma+2)} \left[\lambda T^{\alpha-\gamma+1} + \eta^{\alpha-\gamma+1} \right] T^{4\beta-2} \right] \simeq$$

$0.6 < 1$

Par conséquent, le théorème (3.2.1) implique que le problème (3.11) a au moins une solution définie sur $[0, 1]$.

Conclusion

Le travail que l'on a fait dans ce mémoire a un résultat très important, c'est l'étude de l'existence de la solution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire dont le problème posé est de type aux limites avec l'opérateur différentiel de Hilfer, en utilisant la théorie de point fixe et les propriétés de la mesure de non compacité de Kuratowski.

Bibliographie

- [1] Y AHMAD. A. Salamooni et D. Pawar ,'Existance and uniqueness of boundary value probmems for hilfer-hadamard-type fractional differential equation,AMS Classification-34A08, 35R11 2018 2.
- [2] R.P.Agarwal ,M.Benchohra ,et D. Seba ,on the Application of Measure of Non compactness to the Existence of solution for fractional Differential Equation ,Birkhauser Verlag Basel /Switzerland,vol 55 (2009), 221-230.
- [3] R.P. Agarwal ,M.Benchohra,S.Hamani, *Boundary value problems for differentiel inclusions with fractional order*,.Adv.Stud.Contemp.Math, 12 (2) (2008), 181-196.
- [4] J. Banas and M. Mursaleen, *Sequence spaces and measures of non compactness with applications to differential and integral equations*,.Springer, 2014.
- [5] A. Belarbi, M. Benchohra,A.Ouahab, *Existance results for functional differential equations of fractional order*,.Appl.Anal.,85 (2006), 1459-1470.
- [6] M. Benchohra, S. Hamani,S.K.Ntouyas, *Boundary value problems for differential equations with fractional order*,.Surveys Math.Appl.,3 (2008), 1-12.
- [7] M. Benchohra,J.Henderson,S.K.Ntouyas, A.Ouahab, *Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay*.J.Math.Anal.Appl.332 (2) (2008), 1340-1350.
- [8] M. Benchohra,J.E.Lazreg, *Existence results for non linear implicit fractional differential equations*,Surv.Math.Appl.,9 (2014), 79-92.

-
- [9] CH. Belabbaci, *Mesure de non compacité et spectre essentiel*, thèse de doctorat LMD , université Laghouat, 2017.
- [10] Boutiara Abdellatif On some fractional problems thèse de doctorat LMD , université de ghardaia,2020/2021
- [11] U.N.Katugampola, *New approach to a generalized fractionnal integral*, Appl.Math.Comput, 218(2011),no.3, 860-865.
- [12] U.N.Katugampola, *New approach to a generalized fractionnal derivatives*,Math.Anal.Appl, 6(2014),no.4, 1-15.
- [13] A.A.Kilbas,H.H.Sriva stava,J.J.Trullillo,*Theory and Applications of Fractional Dieren-tial Equations*, Elsevier Science B.V.Amsterdam,2006.
- [14] A.A.Kilbas,J.J.Trullillo, *Diferential equations of fractional order,methods,results and problems II*, Appl.Anal.81 (2002);435-493.
- [15] H.Medjekal, *Existence et Unicité de la Solution d'une équation Différentielle Fraction-naire de Temps infini dans un Espace de Banach*,Thèse Doctorat en sciences,Univ de Annaba ,2015.
- [16] M.Nadir, *Cours sur les équations intégrales* ,Université de M'sila, 2016.
- [17] M.Nadir, *Généralité sur les équations différentielles ordinaires*, Université de M'sila, 2016.
- [18] S.Szufla, *On the application of non-compactness to existence theorems* ,Rend.Sem.Mat.Unive.Padova, 75(1986),1-14.
- [19] Y. Arioua, *Introdiction aux calcul fracionnaire et application*, Master EDP et applica-tion (M1-semester 2), 2022.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'existence et l'unicité de solution d'équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Hilfer en utilisant la théorie du point fixe de Mönch combinée à la mesure de Kuratouskii.

Abstract

In This Work, we study the existence and unity of the solution of Hilfer –type fractional differential equations using fixed point theory combined with the Kuratouskii measure of noncompactness.

ملخص

قمنا في هذه المذكرة بدراسة وجود ووحداية الحل للمعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية من نوع هيلفر باستعمال نظرية النقطة الثابتة لمونك مقترنة بمقياس كيراتوسكي.