



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'Sila
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Thème

Sur les opérateurs multilinéaires compacts dans les espaces asymétriques normés"

Présenté par
BOURAS FATEH

Devant le jury composé de

Hamidi Khaled	M.C.A,	University of M'sila	Président
TALLAB Abdelhamid	M.C.A,	University of M'sila	Encadreur
Mazouz Ahmed	M.A.A,	University of M'sila	Co-Encadreur
Abdelaziz Hellal	M.C.B,	University of M'sila	Examineur

Année universitaire 2024/2025

Dedications

Au nom d'ALLAH le Tout Miséricordieux le Très Miséricordieux

Je dédie ce travail à :

Le

mérite

Me

Cous me

Cous le

l'année universitaire 2024/2025..

Remerciements :

Avant tout, je rends grâce à “ **Allah** ” pour Sa protection et pour m’avoir accordé la force et la persévérance nécessaires afin d’entreprendre et de mener à bien ce travail. J’adresse mes remerciements les plus sincères à mon directeur et sous directeur de mémoire, les professeurs **Tallab Abdelhamid et Mazouz Ahmed** , pour son encadrement bienveillant, ses conseils éclairés et son accompagnement tout au long de ce parcours. Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude au président du jury, le professeur **Hamidi Khaled** , ainsi qu’au rapporteur, **Abdelaziz Hellal** , pour l’honneur qu’ils m’ont fait en acceptant d’évaluer ce travail. Je remercie enfin l’ensemble de mes enseignants du département de mathématiques de l’Université de M’Sila pour leur soutien indéfectible, leurs encouragements constants et leur précieuse contribution à ma formation.

Table des matières

Notations	v
Introduction	vi
1 Preliminaries	1
1.1 Espaces quasi-métriques	2
1.2 Espaces asymétriques normés	3
1.3 Topologie d'une asymétrique norme	4
1.4 Convergence dans un espace asymétrique normé	5
1.5 Complétude dans les espaces asymétriques normés	5
1.6 Opérateurs linéaires continus	6
1.7 Opérateurs multilinéaires entre espaces normés	8
1.7.1 Opérateurs multilinéaires entre espaces normés	9
2 Opérateurs multilinéaires continus entre espaces asymétriques normés	11
2.1 Caractérisation des applications multilinéaires continues.	11
2.2 Formes multilinéaires et topologie w^n	17
2.3 Le conjugué d'un opérateur multilinéaire	21
3 Les opérateurs multilinéaires compacts entre les espaces asymétriques normés	24
3.1 Contenu du chapitre	24
3.2 Ensemble compact dans un espace asymétrique normé	24
3.3 Précompactité dans les espaces quasi-pseudométriques	25
3.4 Opérateurs multilinéaires précompacts	39

3.4.1	H -précompacité dans les groupes topologiques	39
3.5	Propriétés idéales	44
	Bibliography	50

Notations

$d(\cdot, \cdot)$	Distance .
(X, d)	espace quasi-métrique.
$(d(x, y) = d(y, x) = 0)$	espace quasi-semi-métrique.
(X, p)	espace asymétrique normé .
$(B_p(x, \epsilon))$	Boule .
T	Un opérateur .
\mathbb{R}	espace réel .
X^*	duale Topologique de X .
w^*	la topologie–faible .
$T^\#$	Le conjugué de l’opérateur T .
(x_n)	suite .
\mathcal{I}	Un idéal .
\mathcal{T}_p	Topologie de la convergence simple .
$\ \cdot\ $	Norm .
\mathcal{B}_X	La boule unité de X .

Introduction

Les espaces asymétriques normés constituent une généralisation des espaces normés classiques, où la norme ne vérifie pas nécessairement la propriété de symétrie (i.e., $p(x) \neq p(-x)$). Ces espaces apparaissent naturellement dans divers domaines tels que l'optimisation, la théorie des jeux, l'analyse convexe et l'étude des systèmes dynamiques. L'analyse des opérateurs linéaires et multilinéaires sur ces espaces, ainsi que leur compacité, présente des défis théoriques importants en raison de l'absence de symétrie dans la structure métrique sous-jacente. Les premières études sur les structures asymétriques remontent aux travaux de Menger (1942) sur les métriques non symétriques dans [21] et la première utilisation des normes asymétriques, mais celle-ci remonte au moins à 1968, dans un article de Duffin et Karlovitz [3], qui introduisirent le terme de norme asymétrique. Concernant la topologie asymétrique, deux ouvrages de référence sont incontournables : Celui de Murdeshwar et Naimpally [19] Celui de Fletcher et Lindgren [18]. La formalisation des espaces normés asymétriques a été développée plus tard, notamment par Cobzaş [4], qui fournit une étude systématique de leurs propriétés géométriques et topologiques. Une référence importante est également le livre de García-Raffi, Romaguera et Sánchez-Pérez sur les espaces quasi-normés et leurs applications [7].

L'étude des opérateurs linéaires entre espaces asymétriques a été initiée par Alimov et al. dans [1], qui ont généralisé certains résultats classiques du calcul fonctionnel. Pour les applications multilinéaires, les travaux de R. Aron et P. Galindo en 1997 dans [2] sur les polynômes et applications multilinéaires entre espaces de Banach ont été étendus au cadre asymétrique par différents auteurs, notamment dans des articles plus récents comme ceux de Cobzaş and

Mustața dans [6].

La notion de compacité dans les espaces asymétriques est plus subtile en raison de possibles topologies non Hausdorff. Les travaux de Kelly in [14] sur les topologies non symétriques ont jeté les bases de cette étude. Une référence moderne est le papier de Kunzi et al. ([15]) sur les propriétés de compacité dans les espaces quasi-métriques. La théorie des opérateurs compacts dans les espaces asymétriques a été développée par N. Kalton dans [13], en s'inspirant des résultats classiques de Schauder et Grothendieck.

Pour les opérateurs bilinéaires, les travaux de J. Mujica [20] sur la compacité dans les espaces de fonctions ont été adaptés au cadre asymétrique dans des articles plus récents. La première étude des opérateurs multilinéaires sur les espaces asymétriques normés a été initiée par Latreche et Dahia [16]. Puis, Cobzaș a étendu au cadre asymétrique les résultats fondamentaux de Ramanujan, Schock et Ruch concernant les opérateurs bilinéaires compacts dans les espaces de Banach [5]. Ce mémoire élargit le cadre des opérateurs multilinéaires compacts aux espaces normés asymétriques, généralisant ainsi les travaux fondateurs de S. Cobzaș [5] sur le cas bilinéaire. Nos principaux résultats comprennent : Un théorème de type Schauder établissant une correspondance entre la compacité d'un opérateur multilinéaire et celle de son conjugué ; Une caractérisation complète des propriétés idéales dans les espaces d'opérateurs multilinéaires compacts. Ces avancées permettent d'unifier et d'étendre plusieurs résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non symétrique.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres principaux. Chapitre 1 concernant le cadre théorique et notations tel que nous y établissons les notations utilisées dans cette thèse et présentons les résultats fondamentaux concernant : Les normes asymétriques et leurs propriétés, les applications linéaires continues entre espaces normés asymétriques, les définitions et propriétés essentielles des applications multilinéaires continues sur les espaces normés classiques (rappel des principaux résultats), et opérateurs linéaires et multilinéaires continus entre espaces normés. Le chapitre 2 contient : caractérisation des applications multilinéaires continues

contient quelques résultats principaux pour les opérateurs multilinéaire entre les espaces asymétriques normés comme : le théorème de caractérisation complète des applications multilinéaires continues entre espaces normés asymétriques, une étude systématique des propriétés de complétude de : Caractérisation des applications multilinéaires continues, le conjugué d'un opérateur multilinéaire, et les opérateurs multilinéaires compacts entre les espaces asymétriques normés. Le dernier chapitre contient : Les opérateurs multilinéaires compacts entre les espaces asymétriques normés, ensemble compact dans un espace asymétrique normé, précompactité dans les espaces. quasi-pseudométriques, et opérateurs multilinéaires précompacts.

PRELIMINARIES

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts et les résultats utilisés tout au long du mémoire sur les espaces normés asymétriques et les opérateurs multilinéaires entre ces espaces.

Contenu du chapitre

1. Espaces quasi-métriques.
2. Espaces asymétriques normés.
3. Opérateurs multilinéaires.

1.1 Espaces quasi-métriques

Définition 1.1.1. Une **quasi-métrique** sur un ensemble non vide X est une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tous $x, y \in X$, on a $d(x, y) = d(y, x) = 0$ si et seulement si $x = y$,
2. Pour tous $x, y, z \in X$, on a $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (l'inégalité triangulaire).

Le couple (X, d) est appelé un **espace quasi-métrique**.

Remarque 1.1.1.

1) Si $d(x, y) = d(y, x) = 0$ n'implique pas nécessairement que $x = y$ pour certains $x, y \in X$, alors la fonction d est appelée une **quasi-semi-métrique**, et le couple (X, d) est appelé un **espace quasi-semi-métrique**.

2) Si d est une quasi-métrique sur X , alors la fonction d définie sur $X \times X$ par

$$d(x, y) = d(y, x), \quad x, y \in X;$$

est une quasi-métrique sur X appelée la conjuguée de d . Et la fonction d_s définie sur $X \times X$ par

$$d_s(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, x)\}, \quad x, y \in X;$$

est une métrique sur X .

Définition 1.1.2. La convergence d'une suite $(x_n)_n$ vers x par rapport à d , appelée *d-convergence*, et notée :

$$x_n \xrightarrow{d} x$$

peut être caractérisée de la manière suivante :

$$x_n \xrightarrow{d} x \iff d(x, x_n) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Proposition 1.1.1. Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace quasi-métrique (X, d) :

1. Si $(x_n)_n$ est d -convergente vers x et \bar{d} -convergente vers y , alors $d(x, y) = 0$.
2. Si $(x_n)_n$ est d -convergente vers x et $d(y, x) = 0$, alors $(x_n)_n$ est aussi d -convergente vers y .

1.2 Espaces asymétriques normés

Pour une présentation générale de la théorie des espaces asymétriques normés, nous renvoyons le lecteur à la monographie [5] correspondante. Dans ce qui suit, considérons X comme un espace vectoriel réel.

Définition 1.2.1 (Norme asymétrique). Une fonction $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une **asymétrique norme** sur un espace vectoriel réel X si, pour tout $x, y \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on a

1. $p(x) = p(-x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
2. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$ (homogénéité positive).
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (sous-additivité).

On dit que le couple (X, p) est un **espace asymétrique normé**.

Remarque 1.2.1. Si $p(x) = p(-x) = 0$ n'implique pas nécessairement que $x = 0$ pour un certain $x \in X$ (c'est-à-dire que p ne satisfait que les conditions 2) et 3)), alors la fonction p est appelée une **semi-norme asymétrique**, et le couple (X, p) est appelé un **espace vectoriel semi-normé asymétrique**.

Conjuguée asymétrique norme et symétrisation

Définition 1.2.2. En définissant l'asymétrique semi-norme conjuguée \bar{p} et la semi-norme p_s par

$$\bar{p}(x) = p^{-1}(x) = p(-x) \quad \text{et} \quad p_s(x) = \max\{p(x), p(-x)\},$$

Proposition 1.2.1. *Pour $x \in X$, les inégalités deviennent*

$$p(x) \leq p_s(x) \quad \text{et} \quad \bar{p}(x) \leq p_s(x),$$

pour tout $x \in X$. Évidemment, p_s est une norme lorsque p est une norme asymétrique et (X, p_s) est un espace normé.

1.3 Topologie d'une asymétrie normé

Définition 1.3.1. [33] Soit X un espace vectoriel et p une **asymétrie norme** définie sur X . Cette norme induit une **quasi-métrie** p donnée par :

$$d_p(x, y) = p(y - x), \quad \forall x, y \in X.$$

La **topologie associée**, notée τ_p est celle engendrée par les *boules ouvertes asymétriques* :

$$B_p(x, \epsilon) = \{y \in X : p(y - x) < \epsilon\}, \quad \epsilon > 0.$$

Théoreme 1.3.1. *Ces boules forment un **système fondamental de voisinages** autour de chaque point x .*

Remarque 1.3.1. Concernant les propriétés de séparation, la topologie τ_p est toujours T_0 , ce qui signifie que deux points distincts x et y peuvent être distingués par un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre. Cependant, cette topologie **n'est généralement pas Hausdorff**, ce qui implique que deux points distincts ne sont pas forcément séparables par des voisinages disjoints.

Proposition 1.3.1. [5] *Si (X, p) est un espace asymétrique, alors toute boule $B_p(x_0, r)$ est ouverte dans la topologie induite par p et toute boule fermée $B_p[x_0, r]$ est fermée dans cette même topologie.*

De plus, les inclusions suivantes sont vraies :

$$B_p^s(x_0, r) \subseteq B_p(x_0, r) \quad \text{et} \quad B_p^s(x_0, r) \subseteq B_p(x_0, r),$$

avec des inclusions similaires pour les boules fermées.

1.4 Convergence dans un espace asymétrique normé

Définition 1.4.1. La convergence d'une suite (x_n) vers x par rapport à $\tau(p)$ appelée p -convergence et notée $x_n \xrightarrow{p} x$ peut être caractérisée de la manière suivante :

$$x_n \xrightarrow{p} x \iff p(x, x_n) \rightarrow 0.$$

Également

$$x_n \xrightarrow{\bar{p}} x \iff \bar{p}(x, x_n) \rightarrow 0 \iff p(x_n, x) \rightarrow 0.$$

Proposition 1.4.1. Soit Z un sous-espace vectoriel de X . Alors Z est fermé dans (X, p) si et seulement s'il est fermé dans (X, \bar{p}) .

1.5 Complétude dans les espaces asymétriques normés

Ils existent plusieurs notions de suite de Cauchy et encore plus de notions de complétude dans les espaces normés asymétriques. Nous présentons seulement les notions suivantes :

Définition 1.5.1. [5] et [9] Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X est dite K -Cauchy à gauche (resp. à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(x_n, x_k) < \varepsilon \quad (\text{resp. } p(x_k, x_n) < \varepsilon)$$

pour tous $n, k \geq n_0$. L'espace (X, p) est dit K -complet à gauche (resp. à droite) si toute suite K -Cauchy à gauche (resp. à droite) dans X est convergente par rapport à p .

Définition 1.5.2. L'espace (X, p) est dit *bicomplet* (ou *bi-Banach*) si l'espace normé (X, p_s) est complet.

Exemple 1.5.1. [12] Soit u la norme asymétrique sur l'espace vectoriel réel \mathbb{R} définie par :

$$u(x) := \max\{x, 0\}.$$

Dans ce cas :

$$u(x) = \max\{x, 0\} = x_+,$$

et la norme symétrisée correspondante est donnée par :

$$u_s(x) = \max\{u(x), u(-x)\} = \max\{x_+, (-x)_+\} = |x|.$$

De toute évidence, (\mathbb{R}, u) est un espace bi-Banach. La norme asymétrique u est appelée **norme asymétrique usuelle**.

1.6 Opérateurs linéaires continus

Soient (X, p) et (Y, q) deux espaces semi-normés asymétriques. Notons $L_a(X, Y)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires de X à Y .

Définition 1.6.1. Soient (X, p) et (Y, q) deux espaces semi-normés asymétriques. Notons $L_a(X, Y)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires de X à Y . Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ est dit (p, q) -continu s'il est continu par rapport aux topologies τ_p sur X et τ_q sur Y . L'ensemble de tous les opérateurs linéaires (p, q) -continus de X à Y est noté $L_{p,q}(X, Y)$.

L'espace de tous les opérateurs linéaires continus entre les espaces semi-normés associés (X, p^s) et (Y, q^s) est noté par $LC(X, Y)$.

Théorème 1.3.2 [16] $T \in LC(X, Y)$ si et seulement si T est borné.

L'exemple suivant montre que l'ensemble $LC(X, Y)$ n'est pas nécessairement un espace vectoriel mais c'est un cône (ou semi-espace vectoriel normé). C'est-à-dire, si $T, S \in LC(X, Y)$, alors $T + S \in LC(X, Y)$ et $T \in LC(X, Y)$ pour tout $T, S \in LC(X, Y)$ et 0 .

Exemple 1.6.1. [29] Soit la fonction identité de (\mathbb{R}, u) dans elle-même. Il est clair que id est une fonction linéaire continue mais id n'est pas continue, car si $x < 0$, $u(-x) = -x$, alors

$$\sup\{u(-x) : u(x) \leq 1\} = 1$$

Ainsi, nous concluons que $LC(X, Y)$ n'est pas un espace vectoriel en général.

Nous pouvons considérer une norme asymétrique sur le cône $LC(X, Y)$ de toutes les applications linéaires continues T de (X, p) dans (Y, q) définies par la formule

$$p^*q(T) := \sup\{q(T(x)) : p(x) \leq 1\}$$

et aussi

$$p^*q(T) = \inf\{K > 0 : q(T(x)) \leq Kp(x)\}.$$

Proposition 1.6.1 (1.3.4). [29] *Si l'application linéaire*

$$T : (X, p) \rightarrow (Y, q)$$

est continue, alors T est continue pour les semi-normes fortes associées, c'est-à-dire que l'on a l'inclusion

$$LC(X, Y) \subset LC^s(X, Y).$$

Démonstration. Soit $T \in LC(X, Y)$. Alors il existe une constante $K > 0$ telle que

$$q(T(-x)) \leq Kp(x), \quad \forall x \in X.$$

Donc, T est continue de (X, p) à (Y, q) , d'où :

$$q_s(T(x)) \leq \max\{kp(x), kp(-x)\} = Kp_s(x).$$

Nous concluons que T est également continue de (X, p_s) à (Y, q_s) , ce qui montre que :

$$LC(X, Y) \subset LC_s(X, Y).$$

□

Un cas particulier notable d'opérateur linéaire continu entre espaces normés asymétriques se présente lorsque l'on prend $(Y, q) = (\mathbb{R}, u)$. Dans cette situation, la semi-norme p_u se réduit simplement à p , et l'on définit l'espace dual de (X, p) comme suit :

Définition 1.6.2. (Dual d'un espace asymétrique normé)

L'ensemble

$$X^* = \{T : X \rightarrow \mathbb{R}, T \text{ est linéaire et continu}\}.$$

constitue un cône, appelé espace dual de (X, p) . De plus, l'espace (X^*, p^*) est un cône bi-Banach, où la semi-norme duale est définie par :

$$p^*(T) = \sup\{T(x), x \in X, p(x) \leq 1\}.$$

Ainsi, X^* hérite d'une structure d'espace normé asymétrique, où p^* joue un rôle similaire à celui d'une fonction de Minkowski.

1.7 Opérateurs multilinéaires entre espaces normés

Opérateurs linéaires entre espaces normés

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés sur un corps \mathbb{K} (qui est généralement \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Un opérateur linéaire est une application $T : X \rightarrow Y$ qui satisfait :

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \quad \forall x, y \in X, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}. \quad (1.1)$$

Norme d'un opérateur linéaire

L'opérateur T est borné si sa norme est finie, c'est-à-dire :

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| < \infty. \quad (1.2)$$

Si T est borné, alors il est continu. En revanche, un opérateur linéaire continu n'est pas nécessairement borné dans les espaces normés généraux (contrairement au cas des espaces de dimension finie).

Espaces d'opérateurs linéaires

L'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans Y est noté $L(X, Y)$ et est un espace vectoriel normé avec la norme opérationnelle.

Exemple 1.7.1. — Si $X = Y = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n , tout opérateur linéaire est représenté par une matrice et est automatiquement borné.

— L'opérateur d'intégration $T(f) = \int_0^x f(t)dt$ sur $C([0, 1])$ est linéaire et borné.

1.7.1 Opérateurs multilinéaires entre espaces normés

Définition 1.7.1. 1) Soient X_1, \dots, X_n et Y des espaces normés. Un opérateur multilinéaire est une application :

$$T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y \quad (1.3)$$

telle que pour chaque i , l'application $x_i \mapsto T(x_1, \dots, x_n)$ est linéaire lorsque les autres variables sont fixées.

2) Un opérateur multilinéaire T est borné s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\|T(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq C \|x_1\| \cdots \|x_n\|, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n.$$

La plus petite constante C satisfaisant cette inégalité définit la norme opérationnelle :

$$\|T\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_n\| \leq 1} \|T(x_1, \dots, x_n)\|. \quad (1.4)$$

L'ensemble des opérateurs multilinéaires bornés est noté $\mathcal{L}^n(E_1, \dots, E_n; F)$.

Théoreme 1.7.1. L'ensemble des opérateurs multilinéaires bornés $\mathcal{L}^n(X_1, \dots, X_n; Y)$ est un espace normé muni de la norme (1.4).

Théoreme 1.7.2. Soient X_1, \dots, X_m, Y des espaces normés. Pour $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m, Y)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est continue.
2. T est continue en $(0, \dots, 0)$.
3. Il existe une constante $K \geq 0$ telle que

$$\|T(x_1, \dots, x_m)\| \leq K \|x_1\| \cdots \|x_m\|,$$

pour tout $x_j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$).

4. La norme de T , définie par

$$\|T\| := \sup_{\|x_j\| \leq 1, j=1, \dots, m} \|T(x_1, \dots, x_m)\| < \infty,$$

est finie.

Nous écrivons $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m, Y)$ pour l'espace vectoriel de toutes les applications m -linéaires continues. Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$.

Il est facile de voir que

$$\|T\| = \inf\{K \geq 0 \mid \text{l'inégalité ci-dessus est satisfaite}\}$$

définit une norme sur $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m, Y)$, qui est complète lorsque $\|\cdot\|_Y$ est complète.

OPÉRATEURS MULTILINÉAIRES CONTINUS ENTRE ESPACES ASYMÉTRIQUES NORMÉS

Contenu du chapitre

1. Caractérisation des applications multilinéaires continues.
2. Propriétés de complétude.
3. Adjoint d'application multilinéaire.

2.1 Caractérisation des applications multilinéaires continues.

Nous introduisons dans cette section les opérateurs bilinéaires continus sur les espaces normés asymétriques et les espaces correspondants d'opérateurs multilinéaires continus.

Définition 2.1.1. Soient X_1, X_2, \dots, X_n et Z des espaces vectoriels réels. Une application

$$T : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \rightarrow Z$$

est dite *n-linéaire* (ou *multilinéaire*) si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour toute famille fixée $x_j \in X_j$ avec $j \neq i$, l'application

$$x_i \mapsto T(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

est linéaire de X_i vers Z .

Si chaque (X_i, p_i) , pour $i = 1, \dots, n$, ainsi que (Z, q) , sont des espaces vectoriels normés asymétriques, alors nous intéressons aux *propriétés de continuité* de l'opérateur multilinéaire

$$T : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \rightarrow Z.$$

Nous commençons par le lemme démontré par Cobzás dans [5, Lemma] pour les opérateurs multilinéaires, que nous généralisons ici au cas des opérateurs multilinéaires.

Lemme 2.1.1. *Soit $T: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Z$ une application n -linéaire, q une semi-norme sur Z , p_i une semi-norme sur X_i pour $i = 1, \dots, n$, et soient $\beta \geq 0$ et $r > 0$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \frac{\beta}{r^n} \prod_{i=1}^n p_i(x_i)$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$.
2. $q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \beta$, pour tout (x_1, \dots, x_n) tel que $p_i(x_i) \leq r$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii).

Si $p_i(x_i) \leq r$ pour tout i , alors :

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \frac{\beta}{r^n} \prod_{i=1}^n p_i(x_i) \leq \frac{\beta}{r^n} \cdot r^n = \beta.$$

(ii) \Rightarrow (i).

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$.

Si $\prod_{i=1}^n p_i(x_i) > 0$, posons :

$$x_i^0 = \frac{r}{p_i(x_i)} x_i, \quad \text{de sorte que } p_i(x_i^0) = r.$$

Par hypothèse (ii), on a :

$$q(T(x_1^0, \dots, x_n^0)) \leq \beta.$$

Comme

$$T(x_1^0, \dots, x_n^0) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{r}{p_i(x_i)} \right) T(x_1, \dots, x_n),$$

on obtient :

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \frac{\beta}{r^n} \prod_{i=1}^n p_i(x_i).$$

Si pour un certain j , $p_j(x_j) = 0$, alors $p_j(tx_j) = 0$ pour tout $t > 0$. Soient $x_i^0 = \frac{r}{p_i(x_i)} x_i$ pour $i \neq j$, et définissons

$$f(t) := q(T(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, tx_j, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0)).$$

Comme tous les arguments sauf tx_j ont une semi-norme $\leq r$, on a $f(t) \leq \beta$ pour tout $t > 0$. Par n -linéarité, on a

$$f(t) = t \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{r}{p_i(x_i)} \right) q(T(x_1, \dots, x_n)),$$

ce qui implique :

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \frac{\beta}{t} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{p_i(x_i)}{r} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Donc $q(T(x_1, \dots, x_n)) = 0 = \frac{\beta}{r^n} \prod_{i=1}^n p_i(x_i)$.

Les cas $p_i(x_i) = 0$ se traitent de manière analogue. □

Les propositions suivantes ont été introduite par Cobzaş dans [5, Proposition 2.1.1., Proposition 2.1.2] pour les opérateurs bilinéaires, et nous allons les généraliser aux opérateurs multilinéaires.

Proposition 2.1.1. *Soient $(X_1, p_1), \dots, (X_n, p_n)$ et (Z, q) des espaces normés asymétriques, et soit*

$$T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$$

un opérateur multilinéaire. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) *T est continue ;*
- (ii) *Il existe une constante $\beta \geq 0$ telle que*

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \beta p_1(x_1) \cdots p_n(x_n), \quad \text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n.$$

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) : Par la continuité de T en $(0, \dots, 0)$, il existe $r > 0$ tel que

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq 1 \quad \text{pour tout } x_i \in rB_{p_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

D'après un lemme classique (généralisation du Lemme 2.1.1), il en résulte que

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \frac{1}{r^n} p_1(x_1) \cdots p_n(x_n).$$

- (ii) \Rightarrow (i) : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ et une suite $(x_{1,k}, \dots, x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$p_i(x_{i,k} - x_i) \rightarrow 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

On a le développement suivant :

$$T(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) - T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n T(x_1, \dots, x_{j,k} - x_j, \dots, x_n),$$

et chaque terme de cette somme est majoré par

$$q(T(x_1, \dots, x_{j,k} - x_j, \dots, x_n)) \leq \beta p_j(x_{j,k} - x_j) \prod_{i \neq j} p_i(x_i).$$

Donc

$$q(T(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) - T(x_1, \dots, x_n)) \rightarrow 0,$$

ce qui montre la continuité de T . □

Proposition 2.1.2. [5] Soient $(X_1, p_1), (X_2, p_2), \dots, (X_n, p_n), (Z, q)$ des espaces normés asymétriques et

$$T : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$$

un opérateur multilinéaire.

1. L'opérateur T est continu si et seulement si $\|T\|_{p_1, \dots, p_n; q} < \infty$. Dans ce cas, $\|T\|_{p_1, \dots, p_n; q}$ est la plus petite constante semi-Lipschitz pour T .
2. L'espace $L_{p_1, \dots, p_n; q}^n(X_1, \dots, X_n; Z)$ est un cône dans l'espace $L^n(X_1, \dots, X_n; Z)$. L'application $\|\cdot\|_{p_1, \dots, p_n; q}$ est une norme sur celui-ci et

$$\|T\| \leq \|T\|_{p_1, \dots, p_n; q}, \quad \text{pour tout } T \in L_{p_1, \dots, p_n; q}^n(X_1, \dots, X_n; Z).$$

Démonstration. 1. Par commodité, nous notons la norme de T par $\|T\|$. Si $\|T\| < \infty$, alors par le Lemme 2.1.1, on a

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \|T\| \cdot p_1(x_1) \cdots p_n(x_n), \quad \text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n.$$

Par la Proposition 2.1.1, cela montre que T est continu et que $\|T\|$ est une constante semi-Lipschitz pour T . Si β est une constante semi-Lipschitz pour T , alors, en utilisant encore une fois le Lemme 2.1.1 (pour $r = 1$), il s'ensuit que $\|T\| \leq \beta$.

2. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$. Alors

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \|T\| \cdot p_1(x_1) \cdots p_n(x_n) \leq \|T\| \cdot p_1^s(x_1) \cdots p_n^s(x_n),$$

et

$$\bar{q}(T(x_1, \dots, x_n)) = q(T(-x_1, x_2, \dots, x_n)) \leq \|T\| \cdot p_1(-x_1) p_2(x_2) \cdots p_n(x_n) \leq \|T\| \cdot p_1^s(x_1) \cdots p_n^s(x_n),$$

impliquant

$$q^s(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \|T\| \cdot p_1^s(x_1) \cdots p_n^s(x_n).$$

Par conséquent, $T \in L^n(X_1, \dots, X_n; Z)$ et $\|T\| \leq \|T\|_{p_1, \dots, p_n; q}$. Le fait que $L^n_{p_1, \dots, p_n; q}(X_1, \dots, X_n; Z)$ est un cône annulatif dans $L^n(X_1, \dots, X_n; Z)$ est facilement vu.

Il est connu que dans le cas des espaces de Banach un opérateur multilinéaire séparément continu est globalement continu. Ce résultat a été étendu au cas asymétrique par Latreche [17]. Pour complétude, nous présentons ici la preuve simple dans le cas des opérateurs multilinéaires qu'a été introduit par Cobzaş dans [5, Proposition 2.1.3.] et on la présente pour le cas multilinéaire. □

Proposition 2.1.3. Soient $(X_1, p_1), \dots, (X_n, p_n)$ des espaces asymétriques normés, avec (X_1, p_1) de seconde catégorie de Baire au sens de (p_1, \bar{p}_1) , et (Z, q) un espace normé asymétrique. Si

$$T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$$

est un opérateur multilinéaire séparément continu, alors T est $((p_1 \times \dots \times p_n); q)$ -continu.

Démonstration. Supposons que T n'est pas continu en $(0, \dots, 0) \in X_1 \times \dots \times X_n$. Alors il existe $r > 0$ et une suite

$$(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{p_1 \times \dots \times p_n} (0, \dots, 0)$$

telle que

$$q(T(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})) \geq r \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, définissons $A_k : X_1 \rightarrow Z$ par

$$A_k(x) := T(x, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}).$$

Alors A_k est linéaire, et par la continuité séparée de T , on a $A_k \in \mathcal{L}_{p_1, q}(X_1, Z)$, donc il existe $\lambda_k \geq 0$ tel que

$$q(A_k(x)) \leq \lambda_k p_1(x), \quad \text{pour tout } x \in X_1. \quad (2.2)$$

De plus, pour tout $x \in X_1$, comme $x_j^{(k)} \rightarrow 0$ pour $j \geq 2$, on a

$$A_k(x) = T(x, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \xrightarrow{q} 0,$$

ce qui implique que $\sup_k q(A_k(x)) < \infty$ pour tout x , c'est-à-dire que la famille $(A_k)_k$ est bornée ponctuellement.

Par le théorème de Banach-Steinhaus dans le cas asymétrique, on a :

$$\beta := \sup_k \sup_{x \in B_{p_1}} q(T(x, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})) < \infty,$$

où $B_{p_1} := \{x \in X_1 : p_1(x) \leq 1\}$.

D'après (2.2) et (2.1), on a :

$$r \leq q(T(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})) \leq \lambda_k p_1(x_1^{(k)}),$$

ce qui implique $p_1(x_1^{(k)}) > 0$ pour tout k . En posant

$$\tilde{x}_1^{(k)} := \frac{x_1^{(k)}}{p_1(x_1^{(k)})},$$

on a $p_1(\tilde{x}_1^{(k)}) = 1$ et donc

$$q(T(\tilde{x}_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})) \leq \beta.$$

Par multilinéarité, il vient :

$$q(T(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})) = p_1(x_1^{(k)}) \cdot q(T(\tilde{x}_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})) \leq \beta p_1(x_1^{(k)}) \rightarrow 0,$$

ce qui contredit (2.1). Donc T est continu en $(0, \dots, 0)$, et par multilinéarité, il est continu partout. □

Remarque 2.1.1. La Proposition 2.1.3 reste valable lorsque (X, p_1) est un espace normé de seconde catégorie de Baire — en particulier, lorsqu'il s'agit d'un espace de Banach.

2.2 Formes multilinéaires et topologie w^n

Définition 2.2.1. L'espace des formes multilinéaires, noté

$$\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}(X_1, \dots, X_n),$$

qui est constitué des formes multilinéaires de $X_1 \times \dots \times X_n$ dans \mathbb{R} qui sont $p_1 \times \dots \times p_n$ à u -continues. C'est un **cône cancellatif**, normé par

$$\begin{aligned} \|b\|_{p_1, \dots, p_n} &= \sup \{ u(b(x_1, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in B_{p_1} \times \dots \times B_{p_n} \} \\ &= \sup \{ b(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in B_{p_1} \times \dots \times B_{p_n} \}, \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1. 1) D'après la Proposition 2.1.3,

$$\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n) \subseteq \mathcal{L}^n(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{L}_{p_1^s, \dots, p_n^s; |\cdot|}^n(X_1, \dots, X_n; \mathbb{R}),$$

et on a l'inégalité suivante entre les normes :

$$\|b\| \leq \|b\|_{p_1, \dots, p_n},$$

où $\|b\| = \|b\|_{p_1^s, \dots, p_n^s}$.

2) On définit une fonctionnelle

$$\delta : \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n) \times \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n) \rightarrow [0, \infty]$$

pour $b_1, b_2 \in \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n)$, par :

$$\delta(b_1, b_2) = \begin{cases} p(b) & \text{si } b_2 = b_1 + b \text{ pour un certain } b \in \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n), \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci définit une **quasi-pseudométrie étendue** sur le cône $\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n)$.

Nous introduisons maintenant sur $\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n)$ l'analogue de la topologie w^* -faible sur le dual d'un espace asymétrique normé.

Définition 2.2.2. 1) Soit θ la forme multilinéaire nulle. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$, $\varepsilon > 0$ et $b_0 \in \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n)$, on définit :

$$V_{x_1, \dots, x_n; \varepsilon}(b_0) := \{b \in \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n) : b(x_1, \dots, x_n) - b_0(x_1, \dots, x_n) < \varepsilon\}.$$

On note w^n la topologie sur $\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n)$ engendrée par la famille d'ensembles

$$\{V_{x_1, \dots, x_n; \varepsilon}(b_0) : (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, \varepsilon > 0\}$$

comme **sous-base de voisinages** en chaque $b_0 \in \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n)$.

2) Un ensemble V est un voisinage w_n -de b_0 si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in X_1 \times \dots \times X_n$ pour $k = 1, \dots, m$, et $\varepsilon > 0$, tels que :

$$V_{(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \dots, (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}); \varepsilon}(b_0) := \left\{ b \in \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n) : b(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - b_0(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) < \varepsilon \right\}$$

pour tout $k = 1, \dots, m \subseteq V$.

La **convergence** w^n d'un filet dans $\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; u}^n(X_1, \dots, X_n)$ peut maintenant être caractérisée comme suit :

Proposition 2.2.1. [5] Soit $(T_i)_{i \in I}$ un filet dans $\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_m; q}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ et soit $T \in \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_m; q}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le filet $(T_i)_{i \in I}$ est w^2 -convergent vers T ;
2. Pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$, on a

$$T_i(x_1, \dots, x_m) \xrightarrow{u} T(x_1, \dots, x_m) \quad \text{dans } \mathbb{R};$$

3. Pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$, on a

$$T_i(x_1, \dots, x_m) \xrightarrow{|\cdot|} T(x_1, \dots, x_m) \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

Démonstration. Nous prouvons l'équivalence des trois assertions suivantes :

(i) $b_i \xrightarrow{w_n} b$

(ii) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, b_i(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{u} b(x_1, \dots, x_n)$

(iii) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, b_i(x_1, \dots, x_n) \rightarrow b(x_1, \dots, x_n)$ dans la norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}

□

(i) \Leftrightarrow (ii)Cela découle de la définition de la convergence w_n :

$$b_i \xrightarrow{w_n} b \Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, \forall \varepsilon > 0, \exists i_0 \in I, \forall i \geq i_0, b_i \in V_{x_1, \dots, x_n; \varepsilon}(b)$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, \forall \varepsilon > 0, \exists i_0 \in I, \forall i \geq i_0, b_i(x_1, \dots, x_n) - b(x_1, \dots, x_n) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, b_i(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{u} b(x_1, \dots, x_n)$$

(i) \Rightarrow (iii)Supposons que $b_i \xrightarrow{w_n} b$. Alors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ et $\varepsilon > 0$, on définit :

$$W_{x_1, \dots, x_n; \varepsilon}(b) := V_{x_1, \dots, x_n; \varepsilon}(b) \cap V_{-x_1, \dots, -x_n; \varepsilon}(b) = \{w \in L^n(X_1, \dots, X_n) : |w(x_1, \dots, x_n) - b(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon\}$$

C'est un voisinage w_n de b , donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists i_0 \in I, \forall i \geq i_0, b_i \in W_{x_1, \dots, x_n; \varepsilon}(b) \Rightarrow |b_i(x_1, \dots, x_n) - b(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow b_i(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{| \cdot |} b(x_1, \dots, x_n)$$

(iii) \Rightarrow (i)

Puisque $b_i(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{| \cdot |} b(x_1, \dots, x_n)$ implique $b_i(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{u} b(x_1, \dots, x_n)$, par l'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii), il s'ensuit que $b_i \xrightarrow{w_n} b$. L'analogie du théorème d'Alaoglu-Bourbaki reste valable dans ce cas également, comme l'a démontré Cobzaş in [Théorème 3.8][5] pour les opérateurs bilinéaires, et nous l'étendons au cas multilinéaire.

Théoreme 2.2.1. [5] (Compacité de type Alaoglu-Bourbaki pour w^n) La boule unité fermée

$$B = \{b \in \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; |\cdot|}^n(X_1, \dots, X_n) : \|b\|_{p_1, \dots, p_n; u} \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie w^n .

Démonstration. Soit $\Lambda = \mathbb{R}^{X_1 \times \dots \times X_n}$ muni de la topologie produit τ . Alors un filet (λ_i) dans Λ converge vers $\lambda \in \Lambda$ pour τ si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, \lambda_i(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{|\cdot|} \lambda(x_1, \dots, x_n)$$

D'après la Proposition 2.2.1, cela équivaut à $b_i \xrightarrow{w_n} b$. Ainsi, la convergence w_n coïncide avec la convergence ponctuelle dans la topologie produit.

Définissons, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$:

$$\Delta_{x_1, \dots, x_n} = [-p_1^s(x_1) \cdots p_n^s(x_n), p_1^s(x_1) \cdots p_n^s(x_n)]$$

Puis, définissons l'ensemble produit :

$$\Gamma = \prod_{(x_1, \dots, x_n)} \Delta_{x_1, \dots, x_n}$$

Chaque $\Delta_{x_1, \dots, x_n} \subset \mathbb{R}$ est compact, donc par le théorème de Tychonoff, Γ est compact pour la topologie produit τ . Puisque $B \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^{X_1 \times \dots \times X_n}$, et que B est fermé dans Γ pour τ , il s'ensuit que B est τ -compact, c'est-à-dire compact pour w_n . Maintenant, par la Remarque 2.1.1, pour tout $b \in B$,

$$|b(x_1, \dots, x_n)| \leq p_1(x_1) \cdots p_n(x_n),$$

ou, de manière équivalente,

$$b(x_1, \dots, x_n) \in \Delta_{x_1, \dots, x_n},$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$. Cela montre que

$$B \subseteq \Gamma.$$

La conclusion du théorème sera une conséquence du fait suivant.

Fait I. B est un sous-ensemble τ -fermé de Γ .

Si $(b_i : i \in I)$ est un filet dans B qui converge au sens de τ vers $\gamma \in \Gamma$, alors

$$b_i \xrightarrow{\tau} \gamma \iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, b_i(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{|\cdot|} \gamma(x_1, \dots, x_n).$$

Pour tous $x_k, x'_k \in X_k, s, t \in \mathbb{R}$, et $1 \leq k \leq n$, les égalités

$$b_i(x_1, \dots, sx_k + tx'_k, \dots, x_n) = s b_i(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) + t b_i(x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n),$$

valent pour tout $i \in I$. En passant à la limite lorsque $i \in I$, on obtient

$$\gamma(x_1, \dots, sx_k + tx'_k, \dots, x_n) = s \gamma(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) + t \gamma(x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n),$$

ce qui montre que γ est une forme multilinéaire sur $X_1 \times \dots \times X_n$.

De même, les inégalités

$$b_i(x_1, \dots, x_n) \leq p_1(x_1) \cdots p_n(x_n)$$

impliquent

$$\gamma(x_1, \dots, x_n) \leq p_1(x_1) \cdots p_n(x_n),$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$, montrant que $\gamma \in B$. □

2.3 Le conjugué d'un opérateur multilinéaire

Définition 2.3.1. Soient $(X_1, p_1), \dots, (X_n, p_n)$ et (Z, q) des espaces normés asymétriques, et

$$T \in \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; q}(X_1, \dots, X_n; Z).$$

Le conjugué de l'opérateur T est l'opérateur

$$T^\# : Z^{[q]} \rightarrow \mathcal{L}^n(X_1, \dots, X_n)$$

défini pour tout $\psi \in Z^{[q]}$ par

$$(T^\# \psi)(x_1, \dots, x_n) = \psi(T(x_1, \dots, x_n)), \quad (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n. \quad (3.8)$$

Proposition 2.3.1. *soient $(X_1, p_1), \dots, (X_n, p_n), (Z, q)$ et T comme ci-dessus.*

1. *L'opérateur $T^\#$ est bien défini, linéaire (additif et positivement homogène dans chaque variable) et continu de*

$$(Z^{[q]}, q^\#) \rightarrow (\mathcal{L}^n(X_1, \dots, X_n), \|\cdot\|),$$

et

$$\|T^\#\|_{q^\#, \|\cdot\|} = \|T\|_{p_1, \dots, p_n; q}.$$

2. *L'opérateur $T^\#$ est aussi continu par rapport aux topologies $w^\#$ sur $Z^{[q]}$ et w_n sur $\mathcal{L}^n(X_1, \dots, X_n)$.*

Preuve 1. 1. Estimation de la norme de l'opérateur adjoint multilinéaire

Pour simplifier, on note les normes par $\|\cdot\|$, sans indices.

Soit $\psi \in Z^\#$ et $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$. Alors :

$$(T^\#[\psi])(x_1, \dots, x_n) = \psi(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \|\psi\|_{q^\#} \cdot q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \|\psi\|_{q^\#} \cdot \|T\| \cdot \prod_{i=1}^n p_i(x_i).$$

Donc :

$$\|T^\#[\psi]\| \leq \|T\| \cdot \|\psi\|_{q^\#},$$

ce qui montre que $T^\# \in \mathcal{L}_{q^\#, \|\cdot\|}(Z^\#, \mathcal{L}^n(X_1, \dots, X_n))$, et que :

$$\|T^\#\| \leq \|T\|.$$

D'après le Théorème 2.2.2 de [37], pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in B_{p_1} \times \dots \times B_{p_n}$ tel que $T(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, il existe $\psi \in Z^\#$ tel que $\|\psi\|_{q^\#} = 1$ et :

$$\psi(T(x_1, \dots, x_n)) = q(T(x_1, \dots, x_n)).$$

Donc :

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) = \psi(T(x_1, \dots, x_n)) = (T^\#[\psi])(x_1, \dots, x_n) \leq \|T^\#\| \cdot \prod_{i=1}^n p_i(x_i) \leq \|T^\#\|.$$

En prenant le supremum sur $(x_1, \dots, x_n) \in B_{p_1} \times \dots \times B_{p_n}$, on obtient :

$$\|T\| \leq \|T^\#\|.$$

Donc $\|T\| = \|T^\#\|$.

2. Continuité *-faible de l'application adjointe multilinéaire

Il faut montrer que :

$$\psi_i \xrightarrow{w^*} \psi \quad \Rightarrow \quad T^\#[\psi_i] \xrightarrow{w^n} T^\#[\psi],$$

pour tout réseau $(\psi_i)_{i \in I} \subset Z^\#$ qui converge faiblement-* vers $\psi \in Z^\#$.

En tenant compte de la Proposition 2.2.1, cela résulte des implications suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_i \xrightarrow{w^*} \psi &\Leftrightarrow \forall z \in Z, \psi_i(z) \xrightarrow{u} \psi(z) \\ &\Rightarrow \forall (x_1, \dots, x_n), \psi_i(T(x_1, \dots, x_n)) \xrightarrow{u} \psi(T(x_1, \dots, x_n)) \\ &\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n), (T^\#[\psi_i])(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{u} (T^\#[\psi])(x_1, \dots, x_n) \\ &\Leftrightarrow T^\#[\psi_i] \xrightarrow{w^n} T^\#[\psi]. \end{aligned}$$

LES OPÉRATEURS MULTILINÉAIRES COMPACTES ENTRE LES ESPACES ASYMÉTRIQUES NORMÉS

3.1 Contenu du chapitre

1. Ensemble compact dans un espace normé asymétrique
2. Précompactité dans les espaces quasi-pseudométriques.
3. Propriétés idéales.

3.2 Ensemble compact dans un espace asymétrique normé

Dans le cadre des **espaces asymétriques normés**, la notion de compacité est définie de manière similaire à celle des espaces normés classiques, mais avec des spécificités dues à la **non-symétrie** de la norme. Un ensemble compact dans un espace normé asymétrique est un ensemble fermé et borné, et toute suite dans cet ensemble admet une sous-suite convergente, avec la convergence définie par la norme asymétrique.

Définition 3.2.1. [30] Un sous-ensemble A de X est q -borné s'il existe une constante positive M telle que $q(x) \leq M$ pour tout $x \in A$.

Il est évident de démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *Un ensemble A est q -borné et q^{-1} -borné, alors A est q^s -borné.*

Bien que, dans le cas des espaces normés, la précompactité et la précompactité extérieure soient des propriétés équivalentes, l'extension de la notion de précompactité n'est pas directe dans le cas des espaces linéaires normés asymétriques. Ce fait motive la définition suivante.

Définition 3.2.2. [22] Un ensemble $K \subset X$ est **compact** dans un espace normé asymétrique (X, p) si :

- **Borné** : Il existe un réel $M > 0$ tel que $p(x) \leq M$ pour tout $x \in K$,
- **Fermé** : Si une suite (x_n) dans K converge vers une limite x , alors $x \in K$,
- **Séquentiellement compact** : Toute suite (x_n) dans K admet une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un point $x \in K$.

Exemple 3.2.1. [14]

Considérons l'ensemble $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : p(x) \leq M\}$, où M est une constante.

Cet ensemble est **compact** car :

- **Il est borné** : Toutes les points de K satisfont $p(x) \leq M$, donc la norme est limitée.
- **Il est fermé** : Si une suite (x_n) dans K converge vers un point x , alors $p(x_n - x) \rightarrow 0$ et donc $x \in K$.
- **Il est séquentiellement compact** : Toute suite dans K admet une sous-suite convergente vers un point dans K .

3.3 Précompactité dans les espaces quasi-pseudométriques

Définition 3.3.1. Un sous-ensemble Y d'un espace quasi-pseudométrique (X, d) est appelé :

- **d-précompact** si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini Z de Y tel que

$$Y \subseteq \bigcup_{z \in Z} B_d(z, \varepsilon);$$

- **hors d-précompact** si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini Z de X tel que

$$Y \subseteq \bigcup_{z \in Z} B_d(z, \varepsilon);$$

- **héréditairement d-précompact** si chaque sous-ensemble de Y est d-précompact.

Des notions similaires peuvent être définies pour \bar{d} et d_s .

Remarque 3.3.1. Soit (X, d) un espace quasi-pseudométrique.

1. Un sous-ensemble **d-précompact** de X est **hors d-précompact**. Il existe des ensembles **hors d-précompacts** qui ne sont pas **d-précompacts**.
2. Un sous-ensemble **d_s-précompact** est **d-précompact** et \bar{d} -précompact. Il existe des ensembles qui sont à la fois **d-précompacts** et \bar{d} -précompacts, mais qui ne sont pas **d_s-précompacts**.
3. Il existe des ensembles **d-précompacts** qui ne sont pas **héréditairement d-précompacts**. Les propriétés de **hors d-précompacité** et \bar{d} -précompacité ainsi que **d_s-précompacité** sont héréditaires.

Pour une discussion, des relations avec la compacité et des preuves, voir la sous-section 1.2.2 de [32]. Nous mentionnons seulement le résultat suivant prouvé dans [31], l'analogie d'un résultat bien connu dans les espaces métriques.

Proposition 3.3.1. [30] Soit (X, q) un espace vectoriel normé asymétrique. Une partie $A \subset X$ est q -précompacte si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tel que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^q(x_i) \quad \text{et} \quad B_\varepsilon^q(x_i) \cap A \neq \emptyset \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n,$$

où

$$B_\varepsilon^q(x_i) = \{x \in X : q(x - x_i) < \varepsilon\}.$$

Démonstration. L'implication directe découle immédiatement de la définition d'un ensemble q -précompact.

Pour la réciproque, fixons $\varepsilon > 0$. Choisissons un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tel que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon/2}^q(x_i) \quad \text{et} \quad B_{\varepsilon/2}^q(x_i) \cap A \neq \emptyset.$$

Pour chaque i , prenons $a_i \in B_{\varepsilon/2}^q(x_i) \cap A$. Montrons que

$$B_{\varepsilon/2}^q(x_i) \subset B_\varepsilon^q(a_i).$$

En effet, si $x \in B_{\varepsilon/2}^q(x_i)$, alors

$$q(x - a_i) \leq q(x - x_i) + q(x_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, A est q -précompact. □

Remarque 3.3.2. La q -précompacité n'implique pas nécessairement la q -compacité. Par exemple, dans (\mathbb{R}, q) avec

$$q(x) = x^+ = \max(x, 0),$$

l'ensemble \mathbb{R}^- est q -précompact mais pas q -compact car il existe un recouvrement q -ouvert sans sous-recouvrement fini :

$$\mathbb{R}^- \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}]-\infty, -\frac{1}{n}[.$$

Si A est q -précompact, alors A est q -borné.

De plus, la q^s -précompacité (pour la semi-norme symétrisée) implique la q -précompacité ainsi que la q^{-1} -précompacité, mais cette condition n'est pas suffisante.

Exemple 3.3.1. [30] Considérons ℓ^∞ avec la norme asymétrique définie par

$$q((\alpha_i)_{i=1}^\infty) := \sup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^+, \quad \text{où } \alpha_i^+ := \max(\alpha_i, 0).$$

La boule unité

$$B_{\leq 1}^{q^s}(0) = \{x \in \ell^\infty : q^s(x) \leq 1\}$$

est q -précompacte. En effet, pour $x_0 = (1, 1, 1, \dots)$ et tout $\varepsilon > 0$, on a clairement

$$B_{\leq 1}^{q^s}(0) \subset x_0 + B_\varepsilon^q(0).$$

Notons que

$$B_{\leq 1}^{q^s}(0) = -B_{\leq 1}^{q^s}(0),$$

donc $B_{\leq 1}^{q^s}(0)$ est aussi q^{-1} -précompacte (en prenant $x_0 = (-1, -1, -1, \dots)$).

Cependant, $B_{\leq 1}^{q^s}(0)$ n'est pas q^s -précompacte puisque (ℓ^∞, q^s) est un espace normé de dimension infinie, et il n'existe pas de voisinages précompacts de 0. Remarquons que dans les espaces vectoriels normés asymétriques, la limite d'une suite n'est en général pas un point unique, puisque la topologie n'est pas nécessairement Hausdorff [8]

Proposition 3.3.2. [30] Soit une suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dans un espace (X, q) avec une asymétrique norme q . Si $\{x_n\}$ est q -convergente et que $x_0 \in \lim_n x_n$, alors l'ensemble

$$\{x_0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

est q -précompact.

Démonstration. Par hypothèse $x_0 \in \lim_n x_n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_n \in B_\varepsilon^q(x_0) \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Ainsi, on a :

$$\{x_0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{i=0}^{n_0} B_\varepsilon^q(x_i).$$

Ce qui montre la q -précompactité. \square

L'inclusion du point-limite est nécessaire pour la Proposition 3.3.2, comme le montre l'exemple suivant. \square

Exemple 3.3.2. [30] Considérons l'espace ℓ^∞ muni de l'asymétrique norme

$$q((\alpha_i)_{i=1}^\infty) = \sup_i \alpha_i^+,$$

où $\alpha_i^+ = \max(\alpha_i, 0)$.

On définit la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ par :

$$x_1 = (1, 0, 0, \dots), \quad x_2 = (1, 1, 0, \dots), \quad x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}, 0, 0, \dots).$$

Soit

$$z = (1, 1, 1, \dots).$$

Calculons :

$$q(x_n - z) = q((0, \dots, 0, -1, -1, \dots)) = 0,$$

donc la suite $\{x_n\}$ est q -convergente vers z .

Par la proposition précédente, l'ensemble

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$$

est q -précompact.

Montrons par l'absurde que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

n'est pas q -précompact.

Supposons que ce soit le cas. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un ensemble fini d'indices

$$\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$$

tel que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{j=1}^p B_{\frac{1}{2}}^q(x_{i_j}).$$

Pour $n > i_p$, il existe $i_k \in \{i_1, \dots, i_p\}$ tel que

$$x_n \in B_{\frac{1}{2}}^q(x_{i_k}).$$

Ou, on a

$$q(x_n - x_{i_k}) = 1,$$

ce qui est impossible. D'où la contradiction.

Notons que dans ce cas,

$$\lim_n x_n = \{y \geq (1, 1, \dots) : y \in \ell^\infty\}.$$

L'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est q -borné mais non q -précompact.

Proposition 3.3.3. [30] Soit (X, q) un espace vectoriel asymétrique normé.

1. La somme finie et l'union finie d'ensembles q -précompacts sont q -précompacts.
2. L'enveloppe convexe d'un ensemble q -précompact est q -précompact.

Démonstration. **(1)** Ce résultat est une conséquence immédiate de la définition. Nous écrivons la preuve dans le cas de la somme de deux ensembles q -précompacts A_1 et A_2 .

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\varepsilon/2$, et considérons des ensembles finis :

$$\{x_1^1, \dots, x_n^1\} \subset A_1, \quad \{y_1^2, \dots, y_m^2\} \subset A_2$$

tels que :

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon/2}^q(x_i^1), \quad A_2 \subset \bigcup_{j=1}^m B_{\varepsilon/2}^q(y_j^2).$$

Soit $z \in A_1 + A_2$, alors $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in A_1$ et $z_2 \in A_2$. Il existe donc des x_i^1 et y_j^2 tels que :

$$q(z_1 - x_i^1) < \varepsilon/2, \quad q(z_2 - y_j^2) < \varepsilon/2.$$

Alors, par inégalité triangulaire :

$$q(z - (x_i^1 + y_j^2)) = q((z_1 - x_i^1) + (z_2 - y_j^2)) \leq q(z_1 - x_i^1) + q(z_2 - y_j^2) < \varepsilon.$$

Donc, l'ensemble :

$$\{x_i^1 + y_j^2 : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$$

est un ensemble fini de centres de boules q -ouvertes de rayon ε qui recouvrent $A_1 + A_2$. Cela montre que $A_1 + A_2$ est q -précompact.

(2) Soit $A \subset X$ un sous-ensemble q -précompact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A$ tel que :

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon/2}^q(x_i) \subset \{x_1, \dots, x_n\} + B_{\varepsilon/2}^q(0).$$

Notons $\text{convex}(A)$ l'enveloppe convexe de A . Alors :

$$\text{convex}(A) \subset \text{convex}(\{x_1, \dots, x_n\}) + B_{\varepsilon/2}^q(0).$$

Comme $\text{convex}(\{x_1, \dots, x_n\})$ est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini, elle est compacte (dans un espace vectoriel topologique localement convexe), donc est q -précompacte. Il existe donc un ensemble fini $\{y_1, \dots, y_p\} \subset \text{convex}(\{x_1, \dots, x_n\})$ tel que :

$$\text{convex}(\{x_1, \dots, x_n\}) \subset \bigcup_{j=1}^p B_{\varepsilon/2}^q(y_j) \subset \{y_1, \dots, y_p\} + B_{\varepsilon/2}^q(0).$$

En déduit que :

$$\text{convex}(A) \subset \{y_1, \dots, y_p\} + B_{\varepsilon/2}^q(0) + B_{\varepsilon/2}^q(0) \subset \{y_1, \dots, y_p\} + B_{\varepsilon}^q(0).$$

Cela montre que $\text{convex}(A)$ est q -précompact. □ □

Remarque 3.3.3. L'adhérence d'un ensemble q -précompacte n'est pas nécessairement q -précompacte.

Contre-exemple

Considérons l'espace vectoriel asymétrique normé (\mathbb{R}, q) où la norme est définie par :

$$q(x) = x^+ = \max(x, 0)$$

Prenons la partie négative de \mathbb{R} :

$$\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

On observe que :

— Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{R}^- \subset -\varepsilon + B_{\varepsilon}^q(0) \Rightarrow \mathbb{R}^- \text{ est } q\text{-précompact}$$

— Mais l'adhérence de \mathbb{R}^- est :

$$\overline{\mathbb{R}^-}^q = \mathbb{R}$$

qui n'est pas q -précompacte.

Ainsi, l'adhérence (dans la topologie définie par q) d'un ensemble q -précompact ne peut pas être q -précompacte.

Proposition 3.3.4. [30] *Un sous-ensemble $A \subset (X, q)$ est q -précompact si et seulement si l'adhérence $\overline{A}^{q^{-1}}$ (dans la topologie associée à q^{-1}) est q -précompacte.*

Démonstration. Sens direct (\Rightarrow)

Si A est q -précompact, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A$ tel que :

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon/2}^q(x_i)$$

Les boules $B_{\leq, \varepsilon/2}^q(x_i)$ sont fermées dans la topologie q^{-1} . Donc :

$$\overline{A}^{q^{-1}} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n B_{\leq, \varepsilon/2}^q(x_i)}^{q^{-1}} \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{B_{\varepsilon}^q(x_i)}^{q^{-1}}$$

Donc $\overline{A}^{q^{-1}}$ est aussi q -précompact.

Sens réciproque (\Leftarrow)

Si $\overline{A}^{q^{-1}}$ est q -précompact, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \overline{A}^{q^{-1}}$ tel que :

$$A \subset \overline{A}^{q^{-1}} \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + B_{\varepsilon/2}^q(0))$$

Comme $x_i \in \overline{A}^{q^{-1}}$, pour chaque i il existe $a_i \in A$ tel que :

$$q^{-1}(a_i - x_i) = q(x_i - a_i) < \varepsilon/2$$

Pour tout $y \in x_i + B_{\varepsilon/2}^q(0)$, on a :

$$q(y - x_i) < \varepsilon/2 \Rightarrow q(y - a_i) \leq q(y - x_i) + q(x_i - a_i) < \varepsilon$$

Donc :

$$x_i + B_{\varepsilon/2}^q(0) \subset a_i + B_{\varepsilon}^q(0)$$

On en déduit que :

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n a_i + B_{\varepsilon}^q(0) \Rightarrow A \text{ est } q\text{-précompact}$$

□

Corollaire 3.3.1. [30] Soient A et B deux sous-espaces de (X, q) tels que

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \text{ est } q\text{-précompact.}$$

Si A est q^{-1} -dense dans B , alors A est aussi q -précompact.

□

Remarque 3.3.4. Si A est q -précompact, alors $\text{conv}(A)$ est aussi q -précompact, comme conséquence de la Proposition 3.3.4.

On a besoin les lemmes suivantes pour démontrer la Proposition 3.3.5.

Lemme 3.3.1. [34, Lemma4] Soit (E, q) un espace vectoriel normé asymétrique et soit $A \subset E$ un ensemble ouvert. Alors :

$$A = A + \theta(0).$$

Démonstration. Il est évident que $A \subset A + \theta(0)$.

Soit $z \in A + \theta(0)$. Alors, on peut écrire $z = x + y$ où $x \in A$ et $y \in \theta(0)$.

Comme A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(x) \subset A$. En tenant compte du fait que $B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x) + \theta(0)$ (par le lemme précédent), on en déduit que $z \in A$. □

Lemme 3.3.2. [34, Lemma5] Soit une famille $\{A_i : i \in I\}$ de sous-ensembles de (E, q) , alors :

$$\bigcup_{i \in I} (A_i + \theta(0)) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) + \theta(0).$$

Démonstration. Si $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i + \theta(0))$, alors il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0} + \theta(0)$, ce qui signifie que $x = x_{i_0} + z$ avec $x_{i_0} \in A_{i_0}$ et $z \in \theta(0)$. Comme $x_{i_0} \in \bigcup_{i \in I} A_i$, on a $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) + \theta(0)$.

Réciproquement, si $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) + \theta(0)$, alors il existe $x_i \in A_i$ pour un certain $i \in I$ et $z \in \theta(0)$ tels que $x = x_i + z$. On a donc $x \in A_i + \theta(0) \subset \bigcup_{i \in I} (A_i + \theta(0))$. □ □

Proposition 3.3.5. [30, Proposition 11] Soit (X, q) un espace linéaire normé asymétrique. Si $K \subset X$ vérifie :

$$K_0 \subset K \subset K_0 + \theta_0,$$

où K_0 est q^s -compact (compact pour la topologie symétrisée), alors K est q -compact.

Démonstration. Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un recouvrement q -ouvert de K . Puisque $K_0 \subset K$ et les A_i sont q^s -ouverts pour, alors $\{A_i\}_{i \in I}$ est aussi un recouvrement q^s -ouvert de K_0 . Par compacité de K_0 , il existe un sous-recouvrement fini $\{A_{i_j}\}_{j=1}^n$ tel que

$$K_0 \subset \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}.$$

D'après les Lemmata 3.3.1 et 3.3.2, on a :

$$K \subset K_0 + \theta_0 \subset \bigcup_{j=1}^n (A_{i_j} + \theta_0) = \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}.$$

Ainsi, K est q -compact. □

Exemple 3.3.3. [30] Dans l'espace (ℓ^1, q) avec

$$q((\alpha_i)_{i=1}^\infty) := \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^+,$$

où $\alpha_i^+ = \max(\alpha_i, 0)$, on définit l'ensemble

$$K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

par :

$$x_0 = (0, 0, 0, \dots),$$

$$x_1 = \left(\frac{2}{10}, -1, 0, 0, \dots \right),$$

$$x_2 = \left(\frac{2}{11}, 0, -1, 0, \dots \right),$$

⋮

$$x_n = \left(\frac{1}{2^{n-1}}, 0, 0, \dots, -1 \text{ (à la position } n+1), 0, \dots \right).$$

Montrons que K est q -compact.

Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un recouvrement q -ouvert de K . Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x_0 \in A_{i_0}$, et un rayon $\delta > 0$ tel que

$$B_q(x_0, \delta) \subset A_{i_0}.$$

Or, pour tout $x_n \in K$,

$$q(x_n - x_0) = q(x_n) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

En choisissant $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \delta$, alors pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n \in B_q(x_0, \delta) \subset A_{i_0}$.

Ainsi,

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n_0-1} A_{i_j} \cup A_{i_0},$$

où chaque $x_j \in A_{i_j}$ pour $j = 1, \dots, n_0 - 1$. Donc K est q -compact.

Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de sous-ensemble $K_0 \subset K$ tel que K_0 est q^s -compact et $K \subset K_0 + \theta_0$.

Si K_0 existe, alors :

- Soit K_0 est fini,
- Soit il contient une sous-suite (x_{n_k}) qui converge dans la topologie q^s .

Mais la suite (x_n) n'a pas de sous-suite q^s -de Cauchy, car pour $j \neq k$ on a :

$$q^s(x_j - x_k) = |x_j^{(1)} - x_k^{(1)}| + 1 + 1 > 2,$$

où $x_j^{(1)}$ désigne la première coordonnée. Donc K_0 ne peut pas être q^s -compact.

Supposons maintenant que K_0 est fini. Alors, il ne peut pas couvrir tout K via $K \subset K_0 + \theta_0$, car cela impliquerait que pour certains $m \neq n$,

$$x_m \in x_n + \theta_0 \Rightarrow q(x_m - x_n) = 0,$$

ce qui est faux. En effet :

- Si $m > n$, alors $q(x_m - x_n) = 1$,
- Si $m < n$, alors $q(x_m - x_n) = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} + 1 \neq 0$.

Donc K est q -compact, mais il n'existe aucun ensemble $K_0 \subset K$ q^s -compact tel que $K \subset K_0 + \theta_0$. Cela montre que la condition de 3.3.5 [Proposition 11] n'est pas une caractérisation de la q -compacité.

Théoreme 3.3.1. [34] Soit (X, q) un espace vectoriel asymétrique normé. Soit K une partie de X . Alors :

1. Si (X, q) est un espace bi-Banach à droite borné avec constante $r = 1$ et si K est q -précompact, alors il existe un sous-ensemble $K_0 \subset X$ qui est q^s -compact tel que :

$$K \subset K_0 + \theta_0.$$

2. Si l'on suppose qu'il existe un sous-ensemble $K_0 \subset X$ qui est q^s -précompact (en particulier si K_0 est q^s -compact) tel que :

$$K \subset K_0 + \theta_0,$$

alors K est q -précompact extérieur.

Démonstration. **(1) Étape 1.**

D'abord, nous construisons une famille spéciale de boules couvrant l'ensemble K afin de trouver un ensemble q^s -compact adéquat. Par définition de la q^s -précompactité, nous avons que pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $\varepsilon = \frac{1}{4}$,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B_{\frac{1}{2}}^q(x_i^1), \quad \{x_1^1, \dots, x_{n_1}^1\} \subset K,$$

et

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B_{\frac{1}{4}}^q(x_i^2), \quad \{x_1^2, \dots, x_{n_2}^2\} \subset K.$$

Il s'ensuit que pour tout $i = 1, \dots, n_2$, il existe un indice $j_i \in \{1, \dots, n_1\}$ tel que

$$x_i^2 \in B_{\frac{1}{2}}^q(x_{j_i}^1).$$

Nous avons aussi que

$$B_{\frac{1}{2}}^q(x_{j_i}^1) \subset B_{\frac{s}{2}}^q(x_{j_i}^1) + \theta_0.$$

Ainsi,

$$x_i^2 = \bar{x}_i^2 + z,$$

avec $\bar{x}_i^2 \in B_{\frac{s}{2}}^q(x_{j_i}^1)$ et $z \in \theta_0$.

Si $y \in B_{\frac{1}{4}}^q(x_i^2)$, alors

$$q(y - \bar{x}_i^2) \leq q(y - x_i^2) + q(z) < \frac{1}{4}.$$

Donc,

$$B_{\frac{1}{4}}^q(x_i^2) \subset B_{\frac{1}{4}}^q(\bar{x}_i^2),$$

et

$$\{B_{\frac{1}{4}}^q(\bar{x}_i^2) : i = 1, \dots, n_2\}$$

définit un q -recouvrement de K .

Suivant cette construction, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, nous obtenons une famille

$$\{\bar{x}_1^N, \dots, \bar{x}_{n_N}^N\},$$

telle que pour chaque $\bar{x}_i^N, i = 1, \dots, n_N$, il existe $\bar{x}_{j_i}^{N-1}$ tel que

$$q_s(\bar{x}_i^N - \bar{x}_{j_i}^{N-1}) < \frac{1}{2^{N-1}},$$

et

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n_N} B_{\frac{1}{2^N}}^q(\bar{x}_i^N).$$

Soit

$$L = \{\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \dots, \bar{x}_{n_1}^1, \bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_{n_2}^2, \dots\},$$

avec $\bar{x}_i^1 = x_i$ pour $i = 1, \dots, n_1$. Nous prouverons d'abord que L est q^s -précompact.

Soit $\varepsilon > 0$, on considère un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N-2}} < \varepsilon$. Nous omettons les indices pour plus de clarté. Prenons un élément $\bar{x}_m \in L$; on distingue deux cas :

Cas 1 : $m \leq N$. Alors,

$$\bar{x}^m \in B_{\varepsilon}^{q^s}(\bar{x}^m) \subset \bigcup_{i=1}^{n_m} B_{\varepsilon}^{q^s}(\bar{x}^m_i) \subset \bigcup_{k=1}^N \bigcup_{i=1}^{n_k} B_{\varepsilon}^{q^s}(\bar{x}^k_i).$$

Cas 2 : $m > N$. Fixé \bar{x}^m , il existe \bar{x}^{m-1} tel que

$$q^s(\bar{x}^m - \bar{x}^{m-1}) < \frac{1}{2^{m-1}}.$$

De même, il existe \bar{x}^{m-2} tel que

$$q^s(\bar{x}^{m-1} - \bar{x}^{m-2}) < \frac{1}{2^{m-2}},$$

et en continuant ainsi, on obtient \bar{x}^N tel que

$$q^s(\bar{x}^k - \bar{x}^{k-1}) < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k = N, \dots, m.$$

Alors,

$$q^s(\bar{x}^m - \bar{x}^N) \leq q^s(\bar{x}^m - \bar{x}^{m-1}) + q^s(\bar{x}^{m-1} - \bar{x}^{m-2}) + \dots + q^s(\bar{x}^{N+1} - \bar{x}^N)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire (ou quasi-triangulaire) de q^s , on obtient :

$$q^s(\bar{x}^m - \bar{x}^N) \leq \sum_{j=N}^{m-1} \frac{1}{2^j}$$

Cette somme est majorée par une série géométrique :

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{N-1}} \cdot 1 = \frac{1}{2^{N-1}}$$

Ainsi :

$$q^s(\bar{x}^m - \bar{x}^N) \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \frac{1}{2^{N-2}} < \varepsilon$$

Donc :

$$\bar{x}^m \in B_{q^s}^\varepsilon(\bar{x}^N)$$

Ce qui implique :

$$\bar{x}^m \in \bigcup_{i=1}^N B_\varepsilon^{q^s}(\bar{x}^{iN})$$

Ainsi,

$$L \subset \bigcup_{k=1}^N \bigcup_{i=1}^{n_k} B_\varepsilon^{q^s}(\bar{x}^{ik}),$$

ce qui prouve que L est q^s -précompact. Donc L^{q^s} est q^s -compact.

Étape 2. Soit $K_0 = L^{q^s}$. Nous devons prouver que

$$K \subset K_0 + \theta_0.$$

Si $x \in K$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe \bar{x}^n dans la famille correspondante obtenue à l'étape précédente (indices omis pour plus de clarté) tel que

$$x \in B_{\frac{1}{2^n}}^q(\bar{x}^n) = B_{s\frac{1}{2^n}}^q(\bar{x}^n) + \theta_0.$$

Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in B_{\frac{1}{2^n}}^{q^s}(\bar{x}^n)$ et $z^n \in \theta_0$ tels que $x = y^n + z^n$.

Considérons la suite $\{\bar{x}^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^{q^s}$; puisque L^{q^s} est q^s -compact, il existe une sous-suite $\{\bar{x}^{n_k}\}_k$ q^s -convergente vers $x_0 \in L^{q^s}$.

Nous prouvons maintenant que $q(x - x_0) = 0$.

Pour $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$,

$$q_s(\bar{x}_{n_k} - x_0) < 2\varepsilon.$$

Notez que

$$q_s(\bar{x}_{n_k} - y_{n_k}) < \frac{1}{2^{n_k}}.$$

Si nous choisissons k_1 tel que

$$\frac{1}{2^{n_k}} < 2\varepsilon,$$

pour tout $k \geq k_1$, et considér

□

3.4 Opérateurs multilinéaires précompacts

3.4.1 H -précompacité dans les groupes topologiques

Définition 3.4.1. [35] Soit G un groupe topologique, et H un sous-groupe de G . On dit que G est H -précompact si :

Pour tout voisinage U de l'élément neutre de G , il existe un ensemble fini $F \subset G$ tel que :

$$G = UFH = \bigcup_{f \in F} UfH$$

Exemple 3.4.1. Considérons le groupe $G = \mathbb{R}$ muni de l'addition, et le sous-groupe $H = \mathbb{Z}$. Alors, \mathbb{R} est \mathbb{Z} -précompact : pour tout voisinage U de 0 (par exemple $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$), on peut trouver un ensemble fini $F \subset \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbb{R} = UF\mathbb{Z}$$

Définition 3.4.2. Soient $(X_1, p_1), (X_2, p_2), \dots, (X_n, p_n)$ et (Z, q) des espaces quasi-pseudométriques. Un opérateur multilinéaire $T : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$ est dit :

- q -précompact si $T(B_{p_1} \times B_{p_2} \times \dots \times B_{p_n})$ est un sous-ensemble q -précompact de Z ;
- q^s -précompact si $T(B_{p_1} \times B_{p_2} \times \dots \times B_{p_n})$ est un sous-ensemble q^s -précompact de Z ;
- h -précompact si $T(B_{p_1} \times B_{p_2} \times \dots \times B_{p_n})$ est un sous-ensemble héréditairement q -précompact de Z .

Remarque 3.4.1. Dans la définition précédente, la q -précompacité est comprise comme la précompacité par rapport à la *quasi-métrique*

$$d_q(x, y) = q(y - x)$$

induite par la norme asymétrique q , et de même pour q^s .

Rappelons que nous désignons par B_p la boule unité fermée d'un espace normé asymétrique (W, p) .

Si q est une norme asymétrique sur un cône Z , alors par q -précompacité, on entend la précompacité par rapport à la *quasi-métrique étendue* correspondant à q .

Nous désignons par $\mathcal{K}_{p_1, \dots, p_n; q}^n(X_1, \dots, X_n; Z)$ (ou $\mathcal{K}_{p_1, \dots, p_n; q^s}^n(X_1, \dots, X_n; Z)$) l'ensemble de tous les *opérateurs multilinéaires* qui sont q -précompacts (ou q^s -précompacts), et par $h\mathcal{K}_{p_1, \dots, p_n; q}^n(X_1, \dots, X_n; Z)$ l'ensemble de tous les *opérateurs multilinéaires* qui sont h -précompacts.

La proposition suivante montre que les *opérateurs multilinéaires précompacts* sont en réalité *continus*.

Proposition 3.4.1. *Les conditions suivantes sont remplies :*

(i) *un opérateur multilinéaire q -précompact est $(p_1 \times \cdots \times p_n, q)$ -continu ;*

(ii) *un opérateur multilinéaire q^s -précompact est $(p_1 \times \cdots \times p_n, q^s)$ -continu.*

Démonstration.

(i) Pour $\varepsilon = 1$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, (x_1^m, \dots, x_n^m) \in B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_n}$ tels que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_n}$, il existe $k \in \{1, \dots, m\}$ avec

$$q(T(x_1, \dots, x_n) - T(x_1^k, \dots, x_n^k)) \leq 1.$$

Alors

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq q(T(x_1, \dots, x_n) - T(x_1^k, \dots, x_n^k)) + q(T(x_1^k, \dots, x_n^k)) \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq m} q(T(x_1^i, \dots, x_n^i)) =: \beta,$$

ce qui, d'après le lemme 2.1.1, implique

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq \beta p_1(x_1) \cdots p_n(x_n).$$

La preuve de (ii) est similaire.

Concernant les relations entre les différentes classes d'opérateurs multilinéaires précompacts, nous remarquons les inclusions suivantes. □

Proposition 3.4.2. *Les conditions suivantes sont remplies :*

(i) *un opérateur multilinéaire q^s -précompact est q -précompact ;*

(ii) *un opérateur multilinéaire q -précompact est continu, et donc un opérateur q^s -précompact est également continu.*

Démonstration. L'affirmation (i) découle de l'inégalité

$$q(T(x_1, \dots, x_n) - T(x_1^k, \dots, x_n^k)) \leq q^s(T(x_1, \dots, x_n) - T(x_1^k, \dots, x_n^k)).$$

Démontrons (ii).

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, (x_1^n, \dots, x_n^n)$ dans $B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_n}$ tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_n}, \exists k_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ avec } q(T(x_1, \dots, x_n) - T(x_1^{k_0}, \dots, x_n^{k_0})) \leq 1.$$

Mais alors

$$q(T(x_1, \dots, x_n)) \leq q(T(x_1, \dots, x_n) - T(x_1^{k_0}, \dots, x_n^{k_0})) + q(T(x_1^{k_0}, \dots, x_n^{k_0})) \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} q(T(x_1^k, \dots, x_n^k)).$$

Pour tout

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \in B_{p_1} \times B_{p_2} \times \dots \times B_{p_m},$$

par conséquent, T est continue et

$$\|T\| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} q(T(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk})).$$

□

Le résultat suivant constitue l'analogie multilinéaire, dans le cadre asymétrique, du célèbre théorème de Schauder concernant la compacité de l'adjoint d'un opérateur linéaire compact et il était démontré dans [5, Theorem 4.4] pour les opérateurs bilinéaires.

Théorème 3.4.1. *Si l'opérateur multilinéaire*

$$T \in L_{p_1, p_2, \dots, p_n; q}^n(X_1, X_2, \dots, X_n; Z)$$

est q^s -précompact, alors l'opérateur conjugué

$$T^\flat : Z_{q^\flat} \rightarrow L_{p_1, p_2, \dots, p_n}^n(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

est q^\flat -précompact..

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par la q^s -précompacité de T , il existe $n \in \mathbb{N}$ et

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in B_{p_1} \times B_{p_2}$$

tels que

$$\forall (x, y) \in B_{p_1} \times B_{p_2}, \exists k_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } q^s(T(x, y) - T(x_{k_0}, y_{k_0})) \leq \varepsilon. \quad (3.1)$$

Pour $\varphi \in B_{q^\#}$,

$$W(T^\#) = \{b \in L_{p_1, p_2}^2(X, Y) : |b(T(x_k, y_k)) - (T^\# \varphi)(x_k, y_k)| < \varepsilon; k = 1, \dots, n\}$$

est un voisinage w_2 -ouvert de $T^\# \varphi$ et

$$\{W(T^\# \varphi); \varphi \in B_{q^\#}\}$$

est un recouvrement w_2 -ouvert de l'ensemble $T^\#(B_{q^\#})$.

Par le théorème d'Alaoglu-Bourbaki (Théorème 2.1.2), la boule $B_{q^\#}$ est $w^\#$ -compact. Par la Proposition 2.3.1, l'opérateur $T^\#$ est aussi $w^\#$ à w_2 -continu, de sorte que l'ensemble $T^\#(B_{q^\#})$ est w_2 -compact.

Il s'ensuit qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m \in B_{q^\#}$$

tels que pour tout $\varphi \in B_{q^\#}$, il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$|(T^\# \varphi)(x_k, y_k) - (T^\# \varphi_i)(x_k, y_k)| < \varepsilon; \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Soit $\varphi \in B_{q^\#}$. Choisir d'abord $\varphi_i \in B_{q^\#}$, pour un certain $i \in \{1, \dots, m\}$, selon (3.2). Maintenant, pour $(x, y) \in B_{p_1} \times B_{p_2}$, choisir $k_0 \in \{1, \dots, n\}$, selon (3.1). Alors

$$\begin{aligned} (T^\# \varphi - T^\# \varphi_i)(x, y) &= T(x, y) - T(x_{k_0}, y_{k_0}) \\ &\quad + (T^\# \varphi)(x_{k_0}, y_{k_0}) - (T^\# \varphi_i)(x_{k_0}, y_{k_0}) \\ &\quad + \varphi_i(T(x_{k_0}, y_{k_0}) - T(x, y)) \\ &< \varepsilon + 2qs(T(x, y) - T(x_{k_0}, y_{k_0})) \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Il en découle

$$|(T^\# \varphi - T^\# \varphi_i)(x, y)| \leq 3\varepsilon;$$

pour tout $(x, y) \in B_{p_1} \times B_{p_2}$.

Par la Proposition 2.1.2, cela implique

$$\|T^\# \varphi - T^\# \varphi_i\|_{p_1, p_2} \leq 3\varepsilon;$$

montrant que $T^\# \varphi_i; i = 1, \dots, m$ est un 3ε -réseau pour $T^\#(B_{q^\#})$ par rapport à la norme asymétrique 2.2.1 sur $L^2(X, Y)$. □

3.5 Propriétés idéales

On sait que l'espace des opérateurs multilinéaires compacts sur un n -uplet d'espaces de Banach (X_1, \dots, X_n) est un idéal fermé dans l'espace de tous les opérateurs multilinéaires continus de $X_1 \times \dots \times X_n$ dans un espace de Banach Z .

Pietsch [23, 24] a défini les idéaux d'opérateurs multilinéaires et a esquissé un programme de travail. Ses idées ont été développées par plusieurs auteurs comme Cobzaş [5] pour la classe des opérateurs bilinéaires entre les espaces asymétriques normés. Dans cette section nous présentons le cas des opérateurs multilinéaires d'ordre n . Pour tout $(n + 1)$ -uplet $(X_1, \dots, X_n; Z)$ d'espaces normés.

Notation 3.1. L'ensemble $\mathcal{L}_n(X_1, \dots, X_n; Z)$ dénote l'espaces de tous les opérateurs multilinéaires continus.

Et L'ensemble $\mathcal{K}_n(X_1, \dots, X_n; Z)$ dénote l'ensemble l'espace de tous les opérateurs multilinéaires précompacts de $X_1 \times \dots \times X_n$ à Z , respectivement.

Notons \mathcal{B}^{n+1} la classe de tous les $(n + 1)$ -uplets $(X_1, \dots, X_n; Z)$ d'espaces de Banach.

Considérons l'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{B}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{Ban}$ qui attribue à chaque $(n + 1)$ -uplet $(X_1, \dots, X_n; Z) \in \mathcal{B}^{n+1}$ l'espace $\mathcal{L}_n(X_1, \dots, X_n; Z)$.

Définition 3.5.1. Un idéal des opérateurs multilinéaires (ou **m-idéal**) est une application \mathcal{I}_n définie sur \mathcal{B}_n , telle que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) $\mathcal{I}_n(X_1, \dots, X_n; Z)$ est un sous espace linéaire de $\mathcal{L}_n(X_1, \dots, X_n; Z)$, pour tout $(X_1, \dots, X_n; Z) \in \mathcal{B}_n$.
- (b) Pour tout $(X_1, \dots, X_n; Z) \in \mathcal{B}_n$ et tout espace de Banach Z_1 , on a $R \circ T \in \mathcal{I}_n(X_1, \dots, X_n; Z_1)$ pour tout $T \in \mathcal{I}_n(X_1, \dots, X_n; Z)$ et $R \in \mathcal{L}(Z, Z_1)$.
- (c) Pour tout $(X_1, \dots, X_n; Z) \in \mathcal{B}_n$, tous espaces de Banach X'_1, \dots, X'_n , et pour tous opérateurs linéaires $S_i \in \mathcal{L}(X'_i, X_i)$ (pour $i = 1, \dots, n$), on a :

$$T \circ (S_1, \dots, S_n) \in \mathcal{I}_n(X'_1, \dots, X'_n; Z),$$

où l'application $(S_1, \dots, S_n) : X'_1 \times \dots \times X'_n \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ est donnée par :

$$(S_1, \dots, S_n)(x'_1, \dots, x'_n) = (S_1 x'_1, \dots, S_n x'_n).$$

Définition 3.5.2. Un m -idéal \mathcal{I}_n est dit **fermé** si $\mathcal{I}_n(X_1, \dots, X_n; Z)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}_n(X_1, \dots, X_n; Z)$ pour tout $(X_1, \dots, X_n; Z) \in \mathcal{B}^n$.

Apparemment, sans connaître les travaux de **Pietsch**, Ramanujan et Schock dans [36] ont également introduit une notion de bi-idéal. Cette notion a aussi été introduite par Cobzás dans le cas asymétrique dans [5], où, en plus des conditions (a) et (c), on ajoute — comme le fait Cobzás pour la notion de m -idéal — une condition supplémentaire.

(d) Pour tout $(X_1, \dots, X_n; Z) \in \mathcal{B}_n$, $\varphi \otimes z \in \mathcal{I}_n(X_1, \dots, X_n; Z)$ pour toute forme n -linéaire continue $\varphi \in L_n(X_1, \dots, X_n; \mathbb{R})$ et tout $z \in Z$, où :

$$(\varphi \otimes z)(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n)z.$$

L'article mentionné contient également d'autres exemples de m -idéaux : les opérateurs n -linéaires à image finie, ainsi que les analogues n -linéaires des opérateurs nucléaires et absolument sommants. Un résultat de factorisation y est également démontré :

Théoreme 3.5.1. *Un opérateur n -linéaire est **précompact** si et seulement s'il admet une factorisation à travers certains sous-espaces de c_0 .*

La démonstration de ce dernier résultat contenait certaines erreurs qui ont été corrigées par **Ruch** dans [25](voir aussi [26]).

Définition 3.5.3. Un opérateurs multilinéaires $T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$ est dit **compact** si l'image $T(B_{X_1} \times \dots \times B_{X_n})$ est relativement compacte dans Z .

Proposition 3.5.1. *La classe des opérateurs n -linéaires compacts forment un **m -idéal fermé** dans \mathcal{L}_n .*

Démonstration. Il est clair qu'ils forment un bi-idéal. Soit $(W_n)_n \in \mathcal{L}(X_1 \times \dots \times X_n; Y)$ une suite d'applications précompactes telle que $W_n \rightarrow W$ (en norme). Alors, W_n est compact pour tout n , et $W_n \rightarrow W$ en norme, car

$$\|W_n - W\| = \|(W_n - W)(x, y)\| \rightarrow 0.$$

Ainsi, W est limite uniforme de compacts, donc W est compact, ce qui implique qu'il est aussi précompact. \square

L'idée d'utiliser les opérateurs multilinéaires précompacts, c'est-à-dire les opérateurs T pour lesquels $T(B_{X_1} \times \cdots \times B_{X_n})$ est **précompacte** dans l'espace normé Z , revient à **Ruch** [25], qui a également donné un exemple d'un opérateur multilinéaire précompact qui n'est pas compact comme suit :

Exemple 3.5.1. Définissons $T : c_0 \times c_0 \rightarrow \ell_1$ par :

$$T((x_k), (y_k)) = \left(\frac{x_k y_k}{k} \right)_k.$$

Soit $Z = \text{span}(\text{Range}(T))$ et considérons T comme une application de $c_0 \times c_0$ dans Z .

Définissons, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une suite d'opérateurs :

$$T_n((x_k), (y_k)) = \left(x_1 y_1, \frac{x_2 y_2}{2}, \dots, \frac{x_n y_n}{n}, 0, 0, \dots \right).$$

Chaque T_n est bilinéaire et précompact, et on a $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Par le théorème précédent, cela implique que T est précompact. Cependant, considérons la suite $t_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \in c_0$, avec n fois le 1. Alors $\|t_n\| = 1$, mais la suite $\{T(t_n, t_n)\}_n$ n'admet aucune sous-suite convergente dans Z . Par conséquent, T n'est pas compact.

L'idée a été introduite par Cobzaş dans le cadre bilinéaire dans [5]. Dans ce qui suit, nous étudierons la fermeture et les propriétés idéales des opérateurs multilinéaires compacts définis sur des espaces normés asymétriques. Afin de traiter la question de la fermeture, nous introduisons les quasi-métriques étendues.

Définition 3.5.4. Soient les quasi-métriques d et d^s sur

$$\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_m; q}^m(X_1, \dots, X_m; Z) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{p_1, \dots, p_m; q^s}^m(X_1, \dots, X_m; Z)$$

données par

$$d(T_1, T_2) = \sup \left\{ q(T_2(x_1, \dots, x_m) - T_1(x_1, \dots, x_m)) : (x_1, \dots, x_m) \in B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_m} \right\}, \quad (4.3)$$

et par

$$d^s(T_1, T_2) = \sup \{ q^s(T_2(x_1, \dots, x_m) - T_1(x_1, \dots, x_m)) : (x_1, \dots, x_m) \in B_{p_1} \times \dots \times B_{p_m} \}, \quad (4.4)$$

pour T_1, T_2 dans $\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_m; q}^m(X_1, \dots, X_m; Z)$ ou dans $\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_m; q^s}^m(X_1, \dots, X_m; Z)$, respectivement.

Notez que d^s est en fait une métrique étendue, et que d et d^s ne sont rien d'autre que les quasi-métriques étendues analogues à [5, remarque 2.6 (2.14)], correspondant respectivement à $k \cdot \|\cdot\|_{p_1, \dots, p_m; q}$ et $k \cdot \|\cdot\|_{p_1, \dots, p_m; q^s}$.

Proposition 3.5.2. *Soient $(X_1, p_1), \dots, (X_n, p_n)$ et (Z, q) des espaces asymétriques normés. Soit (T_n) une suite d'opérateurs q^s -précompacts n -linéaires dans $\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; q^s}^n(X_1, \dots, X_n; Z)$ et $T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$ une application. Si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$, la suite $(T_n(x_1, \dots, x_n))$ est q_s -convergente vers $T(x_1, \dots, x_n)$, uniformément sur $B_{p_1} \times \dots \times B_{p_n}$, alors T est un opérateur n -linéaire q^s -précompact. En particulier, le cône $\mathcal{K}_{p_1, \dots, p_n; q^s}^n(X_1, \dots, X_n; Z)$ est d^s -fermé dans $\mathcal{L}_{p_1, \dots, p_n; q^s}^n(X_1, \dots, X_n; Z)$.*

Démonstration. La n -linéarité de T découle de la convergence ponctuelle de la suite (T_n) , de la n -linéarité de chaque T_n et du fait que q^s est une norme sur Z . En effet, pour chaque variable, on a par exemple :

$$\begin{aligned} & q^s(T(x_1, \dots, \alpha x_i, \dots, x_n) - \alpha T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \\ & \leq q^s(T(x_1, \dots, \alpha x_i, \dots, x_n) - T_n(x_1, \dots, \alpha x_i, \dots, x_n)) \\ & + q^s(\alpha T_n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - \alpha T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ce qui implique la linéarité dans chaque variable.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme sur $B_{p_1} \times \dots \times B_{p_n}$ implique l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$q^s(T_n(x_1, \dots, x_n) - T(x_1, \dots, x_n)) \leq \varepsilon,$$

pour tout $n \geq n_0$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in B_{p_1} \times \dots \times B_{p_n}$.

La q^s -précompacité de T_{n_0} implique l'existence de $(x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, (x_1^m, \dots, x_n^m) \in B_{p_1} \times \dots \times B_{p_n}$ tels que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in B_{p_1} \times \dots \times B_{p_n}$, il existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$q^s(T_{n_0}(x_1, \dots, x_n) - T_{n_0}(x_1^k, \dots, x_n^k)) \leq \varepsilon.$$

Pour un point arbitraire $(x_1, \dots, x_n) \in B_{p_1} \times \dots \times B_{p_n}$, on choisit $k \in \{1, \dots, m\}$ selon ce qui précède. Alors,

$$\begin{aligned} & q^s(T(x_1, \dots, x_n) - T(x_1^k, \dots, x_n^k)) \\ & \leq q^s(T(x_1, \dots, x_n) + T_{n_0}(x_1, \dots, x_n)) \\ & + q^s(T_{n_0}(x_1, \dots, x_n) - T_{n_0}(x_1^k, \dots, x_n^k)) + q^s(T_{n_0}(x_1^k, \dots, x_n^k) - T(x_1^k, \dots, x_n^k)) \\ & \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que T est q^s -précompact.

□

La proposition suivante traite des propriétés idéales des opérateurs multilinéaires précompacts et peut être vue comme une généralisation et présentée dans [5, Proposition 4.8].

Proposition 3.5.3. *Soient (X, p_1) , (Y, p_2) et (Z, q) des espaces asymétriques normés. On a*

1. *Soit (Z_1, q_1) un autre espace asymétrique normé et $R : Z \rightarrow Z_1$ un opérateur linéaire. Si $T : X \times Y \rightarrow Z$ est q -précompact et R est (q, q_1) -continu, ou q^s -précompact et R est (q^s, q_1^s) -continu, alors RT est q_1 -précompact, respectivement q_1^s -précompact. La même propriété vaut pour les notions de q -précompacité extérieure et héréditaire pour R (q, q_1) -continu.*
2. *Soient (X_0, p_1^0) , (Y_0, p_2^0) deux autres espaces normés asymétriques, $S_1 : X_0 \rightarrow X$, $S_2 : Y_0 \rightarrow Y$ des opérateurs linéaires continus, et $S : X_0 \times Y_0 \rightarrow X \times Y$ défini par :*

$$S(x_0, y_0) = (S_1 x_0, S_2 y_0)$$

pour tout $(x_0, y_0) \in X_0 \times Y_0$. Si $T : X \times Y \rightarrow Z$ est un opérateur multilinéaire q^s -précompact, alors $T \circ S : X_0 \times Y_0 \rightarrow Z$ est aussi q^s -précompact et multilinéaire.

Démonstration. Soit $T : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Z$ un opérateur n -linéaire, et soient p_i, p_i^0 des semi-normes sur X_i (pour $i = 1, \dots, n$), ainsi que q, q^s des semi-normes sur Z . On note B_{p_i} la boule unité fermée associée à p_i , etc.

1. Soit $\gamma \in \{q, q^s\}$. Soit $R : Z \rightarrow W$ un opérateur linéaire continu, avec norme $\|R\|$. Supposons que $T(B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_n})$ est γ -précompact. Par définition, il existe un ε -réseau fini $\{(x_1^k, \dots, x_n^k)\}_{k=1}^m \subseteq B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_n}$ tel que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_n}$, il existe un $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que :

$$\gamma(T(x_1, \dots, x_n) - T(x_1^k, \dots, x_n^k)) \leq \varepsilon.$$

Alors,

$$\gamma(R(T(x_1, \dots, x_n)) - R(T(x_1^k, \dots, x_n^k))) \leq \|R\| \cdot \gamma(T(x_1, \dots, x_n) - T(x_1^k, \dots, x_n^k)) \leq \|R\| \cdot \varepsilon,$$

ce qui montre que $R \circ T$ est également γ -précompact.

2. Soient $S_i : X_i^0 \rightarrow X_i$ des opérateurs linéaires continus pour $i = 1, \dots, n$, et soient $\beta_i > 0$ tels que :

$$p_i(S_i x_i^0) \leq \beta_i p_i^0(x_i^0), \quad \forall x_i^0 \in X_i^0.$$

Posons $\beta := \max\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. Alors, on a :

$$(S_1 \times \cdots \times S_n)(B_{p_1^0} \times \cdots \times B_{p_n^0}) \subseteq \beta^{-1}(B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_n}).$$

Donc :

$$(T \circ (S_1 \times \cdots \times S_n))(B_{p_1^0} \times \cdots \times B_{p_n^0}) \subseteq \beta^{-1}T(B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_n}),$$

et comme $T(B_{p_1} \times \cdots \times B_{p_n})$ est q^s -précompact, il en est de même pour

$$(T \circ (S_1 \times \cdots \times S_n))(B_{p_1^0} \times \cdots \times B_{p_n^0}).$$

□

Bibliographie

- [1] Alimov and Chentsov, "Finite-Dimensional Asymmetrically Normed Spaces") étudient la géométrie des boules unités asymétriques(2000).
- [2] Aron, R. et al., "Polynomials on Asymmetric Normed Spaces". J. London Math. Soc, (1997).
- [3] R.J. Duffin and L.A. Karlovitz, Formulation of linear programs in analysis. I.A pproximation theory, SIAM J. Appl. Math. 16 (1968), 662–675.
- [4] S. COBZAŞ, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Front. Math., Birkhäuser, Basel, 2013.
- [5] S. COBZAŞ, Compact bilinear operators on asymmetric normed spaces." *Topology and its Applications* 306 (2022) : 107922.
- [6] S. COBZAŞ and D. MUSTAŢA, *Multilinear Maps on Asymmetric Normed Spaces*, 2012.
- [7] L. M. Garcà-Raffi, S. Romagura, E. A. Sánchez-Pérez, The dual space of an asymmetric normed linear space, *Quaestiones Math.*, 26 (2003) 83–96.
- [8] L.M. García Raffi, S. Romaguera, E.A. Sánchez Pérez, On Hausdorff asymmetric normed linear spaces, *Houston J. Math.* 29 (2003) 717–728.
- [9] L. M. GARCÀ-RAFFI, S. ROMAGURA, E. A. SÁNCHEZ-PÉREZ, *Sequence in Asymmetric Normed Spaces*, *Journal of Mathematical Analysis*, 2020.
- [10] B. KHUR, *Asymmetric Normed Spaces*, qui examine les propriétés de ces espaces et introduit des outils pour analyser les applications adjointes dans ce contexte, 2015.
- [11] N. B. BAKH KHUR, *Asymmetric Normed Spaces*, Springer, 2012.
- [12] A. ALON, *Topics in Asymmetric Topology*, Springer, 2019.

- [13] N. Kalton, Compact Operators in Non-Symmetric Functional Analysis". Trans. AMS, (2008).
- [14] Kelly, J. C. (1958). Bitopological Spaces. Proceedings of the London Mathematical Society, s3-8(1), 71-89.
- [15] H. P. Künzi, Compactness and Completeness in Quasi-Metric Spaces". Topology Appl, (2006).
- [16] F. LATRECHE, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Front. Math., Birkhäuser, Basel, 2013.
- [17] F. LATRECHE AND E. DAHIA, *Multilinear Operators Between Asymmetric Normed Spaces*, Colloq. Math. 161 (2020), no. 2, 157–171.
- [18] P. Fletcher and W. F Lindgren, Quasi-Uniform Spaces. Marcel Dekker. New York.1982.
- [19] M. G. Murdeshwar and S. A. Naimpally, Quasi-uniform Topological Spaces, Nordhof, Groningen. 1966.
- [20] J. Mujica, Complex analysis in Banach spaces, Dover Publications, Dover, 2010
- [21] K. Menger. Statistical Metrics. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, (1942) 28(12), 535–537.
- [22] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.
- [23] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals (Part I)*, Reference 30.
- [24] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals (Part II)*, Reference 31.
- [25] D. K. Ruch, Characterizations of compact bilinear maps, Linear and Multilinear Algebra 25 (1989), no. 4, 297307. 1, 19.
- [26] D. K. Ruch, Completely continuous and related multilinear operators, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 45 (1996), no. 3, 377396. 1, 19.
- [27] R. Arens, The adjoint of a bilinear operation, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 839–848.
- [28] R. Arens, Operations induced in function classes, Monatsh. Math. 55 (1951), 1–19.

- [29] M. Bachir et G. Flores, Index of symmetry and topological classification of asymmetric normed spaces, arXiv :2002.10166 [math.FA], 2020.
- [30] C. Alegre, I. Ferrando, L. M. García-Raffi, E. A. Sánchez Pérez . Compactness in asymmetric normed spaces. *Topology and its Applications*, (2008) 155(6), 527-539.
- [31] H.-P. A. Künzi, M. Mrševi ?, I. L. Reilly, and M. K. Vamanamurthy, Convergence, precompactness and symmetry in quasi-uniform spaces, *Math. Japon.* 38 (1993), 239253.
- [32] Functional analysis in asymmetric normed spaces, *Frontiers in Mathematics*, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.
- [33] Romaguera, S., Sánchez-Pérez, E. A. (2007). Some topics on asymmetric normed spaces. *Nonlinear Analysis*, 68(12), 3881–3892.
- [34] L.M. García-Raffi, Compactness and finite dimension in asymmetric normed linear spaces, *Topology Appl.* 153 (2005) 844–853.
- [35] J. Dixmier, *Les C-algèbres et leurs représentations**, Gauthier-Villars, 1969
- [36] M. S. Ramanujan and E. Schöck, Operator ideals and spaces of bilinear operators, *Linear and Multilinear Algebra* 18 (1985), no. 4, 307318. 1, 19.
- [37] Functional analysis in asymmetric normed spaces, *Frontiers in Mathematics*, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.6

الملخص:

يتناول هذا العمل تطوير مفهوم المؤثرات المتعددة الخطية المتراسة بين الفضاءات المعيارية غير المتناظرة، وذلك بتمديد حالة الثنائي الخطي الذي قدمه س. كوبزاش. كما سوف يتم إثبات مبرهنة من نوع شودار تصف خاصية التراص للمؤثر الثنائي لمؤثر متعدد خطي متراس. بالإضافة إلى ذلك، تتم دراسة خصائص المثاليات في فضاءات المؤثرات المتعددة الخطية المتراسة.

الكلمات المفتاحية: فضاء غير متماثل، المؤثرات الخطية، المؤثرات المتعددة الخطية، المؤثرات المتعددة الخطية المتراسة.

Résumé : Ce travail développe le concept d'opérateurs multilinéaires compacts entre des espaces normés asymétriques, en prolongeant le cadre bilinéaire introduit par S. Cobzaş dans [5]. Un théorème de type Schauder est établi, caractérisant la compacité du conjugué d'un opérateur multilinéaire compact. De plus, les propriétés idéales des espaces d'opérateurs multilinéaires compacts sont étudiées.

Mots-Clés : Espace quasi-métrique, Espace asymétrique, Opérateurs linéaires, Opérateurs multilinéaires, Opérateurs multilinéaires compacts.

Abstract : This work develops the concept of compact multilinear operators between asymmetric normed spaces, extending the bilinear framework introduced by S. Cobzaş in [5]. A Schauder-type theorem is established, characterizing the compactness of the conjugate of a compact multilinear operator. In addition, the ideal properties of spaces of compact multilinear operators are investigated.

Key-words : quasi-metric space, asymmetric space, linear operators, multilinear operators, compact multilinear operators.