



# UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DE MATHEMATIQUE ET D'INFORMATIQUE

**Département de Mathématiques**

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématique

**Option :** Géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique

**Par**

**Sabrina MOSTEFAOUI**

**Sujet**

## **Sur les opérateurs multilinéaires p-semi-intégrales**

Soutenu publiquement le :17/06/2012 devant le jury composé de :

|               |                            |            |
|---------------|----------------------------|------------|
| Mr. L. Mezrag | Prof. Université de M'sila | Président  |
| Mr. D. Achour | MC(A) Université de M'sila | Rapporteur |
| Mr. D. Drihem | MC(A) Université de M'sila | Examineur  |

**Promotion: 2011/2012**

# Remerciements

*Je tiens à remercier très vivement mon encadreur :*

*Monsieur D. ACHOUR*

*pour son entière disponibilité, ses conseils et encouragements*

*qui m'ont poussé à donner le meilleur de moi-même.*

*pour tous ses conseils précieux, ses critiques constructives.*

*Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.*

*Je n'oublie pas de le remercier pour son patience.*

*Je remercie très vivement les membres du jury :*

*Messieurs L. MEZRAG et D. DRIHEM*

*pour avoir accepté de juger ce modeste travail.*

*Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé pour*

*accomplir ce travail.*

*Merci.*

*S.MOSTEFAOUI*

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>2</b>  |
| <b>1 Produit tensoriel</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1 Préliminaires . . . . .  | 4         |
| 1.2 Produit tensoriel . . . . .  | 8         |
| 1.3 Représentation sur un produit tensoriel . . . . .                          | 10        |
| <b>2 L'idéal des opérateurs multilinéaires p-semi-intégrales</b>               | <b>13</b> |
| 2.1 Opérateurs multilinéaires p-semi-intégrales . . . . .                      | 13        |
| 2.2 Caractérisation des opérateurs multilinéaires p-semi-intégrales . . . . .  | 18        |
| 2.3 Propriétés . . . . .   | 25        |
| <b>3 Représentation tensoriel des opérateurs m-linéaires p-semi-intégrales</b> | <b>30</b> |
| 3.1 La norme tensoriel $\widetilde{\sigma}_p$ . . . . .                        | 30        |
| 3.2 Dualité . . . . .  | 39        |
| <b>Bibliographie</b>   | <b>46</b> |

# Introduction

Le concept des opérateurs linéaires absolument  $p$ -sommants a été introduit par Grothendieck dans les années cinquante pour  $p = 1$ . Mais en 1967 et 1968 Pietsch, Lindenstrauss et Pelczynski ont clarifié la précieuse idée de Grothendieck et on décisivement contribué au développement vigoureux de cette théorie; ils ont défini la classe pour tout  $p$  et ont démontré les résultats principaux; on y trouve le théorème de domination, les théorèmes d'inclusions, les propriétés d'idéal ... ect.

Dans les années quatre vingts Pietsch a généralisée la théorie des idéaux linéaires au cas  $m$ -linéaires. Motivés par l'importance de cette théorie, plusieurs auteurs ont développé et étudié plusieurs concepts relatifs à la sommabilité. On peut citer par exemple Alencar, Matos, Pérez-Garcia, Dimant, Pellegrino, Achour-Mezrag.

Dans la théorie des opérateurs multilinéaire absolument  $p$ -sommant n'y a pas d'analogue pour le théorème de Pietsch mais l'espace associé est un espace de Banach. Pour cela, le concept des opérateurs  $m$ -linéaires  $p$ -semi-intégrales ( $1 \leq p < \infty$ ) a été introduit par R. Alencar, M. C. Matos dans [AM89] (pour  $p = 1$ ) comme une extension du théorème de domination de Pietsch version linéaire aux opérateurs  $m$ -linéaires, et généralisée par E. Çaliskand, D. M. Pellegrino dans [ÇP07] pour  $p \geq 1$ .

Le but de ce mémoire consiste à l'étude de l'espace  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  des opérateurs  $m$ -linéaires  $p$ -semi-intégrales, on s'est proposé de démontrer que cet espace est un Banach multi-idéal, et on obtient une caractérisation de cet espace par la représentation tensoriel.

Notre travail est organisé comme suit :

Le premier chapitre porte sur les notions générales. Commençons par rappeler quelques résultats sur les normes tensorielles raisonnables. On définit une norme tensorielle raisonnable  $\pi$  ( qui s'appelle la norme projective) sur le produit tensoriel algébrique  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$  et montre que l'espace  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y^*)$  est isométriquement isomorphe au dual topologique de  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y$  associée à  $\pi$ .

L'objet du deuxième chapitre est d'étudier le concept d'opérateurs multilinéaires  $p$ -semi-intégrales. On donnera quelques propriétés élémentaires et le théorème de caractérisation pour cette classe, comme conséquence nous montrons que l'espace des opérateurs multilinéaires  $p$ -semi-intégrales est un multi-idéal de Banach.

On termine ce travail par le chapitre trois, on introduit donc une norme raisonnable  $\tilde{\sigma}_p$  tel que l'espace  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y^*)$  de Banach des opérateurs  $m$ -linéaires  $p$ -semi-intégrales est isométriquement isomorphe au dual topologique de  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y$  associée à  $\tilde{\sigma}_p$ .

# Chapitre 1

## Produit tensoriel

### 1.1 Préliminaires

Soient  $X_1, \dots, X_m, X, Y$  et  $Z$  des espaces de Banach, l'application  $B : X \times Y \rightarrow Z$  est dite bilinéaire ou 2-linéaire (resp.  $B : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$  est dite  $m$ -linéaire, ) si elle est linéaire par rapport à chaque variable, c'est-à-dire

Pour toute suite finie  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), on a

$$B(x, \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B(x, y_i).$$

(resp. pour tout  $j = 1, \dots, m$  et pour toute suite finie  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), on a

$$B(x^1, \dots, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^j, \dots, x^m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B(x^1, \dots, x_i^j, \dots, x^m).$$

Autrement dit,  $B : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$  est multilinéaire si les opérateurs  $x^j \in X_j \mapsto B(x^1, \dots, x^j, \dots, x^m) \in Y$  sont linéaires).

On dit que l'application bilinéaire  $B : X \times Y \rightarrow Z$  est bornée si

$$\exists c > 0, \forall x \in X, \forall y \in Y \quad \|B(x, y)\| \leq c \|x\| \|y\|.$$

On note  $\mathcal{L}(X, Y; Z)$  l'espace de Banach des applications bilinéaires bornées muni de la norme

$$\|B\| = \sup_{(x, y) \in B_X \times B_Y} \|B(x, y)\|.$$

Si  $Z = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on note simplement  $\mathcal{L}(X, Y)$  l'espace des formes bilinéaires bornées.

**Notation.** On notera  $L(X_1, \dots, X_m; Y)$  l'ensemble de tous les application de  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $Y$  et  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  l'ensemble de tous les opérateurs multilinéaires continus. Lorsque tous les espaces  $X_j$  sont égaux à un même espace  $X$ , l'espace des opérateurs multilinéaires (resp. continus) sera noté  $L({}^m X; Y)$  (resp.  $\mathcal{L}({}^m X; Y)$ ). Si  $Y = \mathbb{K}$  alors  $L({}^m X; \mathbb{K}) = L({}^m X)$ , (resp.  $\mathcal{L}({}^m X; \mathbb{K}) = \mathcal{L}({}^m X)$ ). Si  $m = 1$  et  $Y = \mathbb{K}$  alors on utilise  $\mathcal{L}(X) = X^*$ , et  $L(X) = X'$ . On désigne par  $X^*$  le dual topologie de  $X$  *i.e.*, l'espace des formes linéaires et continues sur  $X$ .

**Théorème 1.1.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach alors, on peut identifier les deux espaces  $\mathcal{L}(X, Y)$  et  $\mathcal{L}(X; Y^*)$  tel que  $\mathcal{L}(X; Y^*)$  désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés de  $X$  dans  $Y^*$ .*

### Preuve

Pour toute forme bilinéaire bornée  $B \in \mathcal{L}(X, Y)$  on associer un opérateur linéaire  $L_B \in \mathcal{L}(X; Y^*)$  défini par

$$\langle y, L_B(x) \rangle = B(x, y), \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

L'application  $\psi : \mathcal{L}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{L}(X; Y^*)$  tel que  $\psi(B) = L_B$  est une isométrie car,

$\forall B \in \mathcal{L}(X, Y)$  on a

$$\begin{aligned}
\|\psi(B)\| &= \|L_B\| = \sup_{x \in B_X} \|L_B(x)\| \\
&= \sup_{x \in B_X} \sup_{y \in B_Y} |\langle y, L_B(x) \rangle| \\
&= \sup_{x \in B_X} \sup_{y \in B_Y} |B(x, y)| \\
&= \|B\|.
\end{aligned}$$

$\psi$  est surjective par construction, alors on a l'identification

$$\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(X; Y^*). \quad \blacksquare$$

**Théorème 1.1.2.** *Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach; toute forme bilinéaire bornée  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  se prolonge à une forme bilinéaire bornée  $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ .*

**Preuve**

Soient  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $S \in \mathcal{L}(X; Y^*)$  tels que  $A(x, y) = \langle y, Sx \rangle$ , on considère la forme bilinéaire  $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$  telle que  $\tilde{A}(x^{**}, y^{**}) = \langle S^*y^{**}, x^{**} \rangle$  d'où  $S^* : Y^{**} \rightarrow X^{**}$  est l'adjoint de  $S$ . Pour  $x \in X$  et  $y \in Y$  on a

$$\tilde{A}(x, y) = \langle S^*y, x \rangle = \langle y, Sx \rangle = A(x, y)$$

$\tilde{A}$  est une extension de  $A$ , de plus on a

$$\|A\| = \|S\| = \|S^*\| = \|A^*\|.$$

Ce qui termine la preuve.  $\blacksquare$

**Proposition 1.1.3.** *Soient  $X, Y, Z$  trois espaces normés dont  $Z$  est de Banach,  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  les complétés de  $X$  et  $Y$  respectivement; toute application bilinéaire bornée  $B \in$*

$\mathcal{L}(X, Y; Z)$  admet une extension bornée  $\tilde{B} \in \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{Y}; Z)$  et en plus on a  $\|B\| = \|\tilde{B}\|$ .

**Proposition 1.1.4** [Din99, p.02]. Si  $X, Y$  et  $G$  trois espaces vectoriels sur  $\mathbb{C}$  et  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , alors les opérateurs  $I_n$  et  $J_n$  sont isomorphismes linéaires, définies comme suite

$$\begin{aligned} I_n & : L^{(n+m)X; Y} \longrightarrow L^{(nX; L^{(m)X; Y})} \\ [I_n T(x)](y) & := T(x, y) \end{aligned}$$

où  $T \in L^{(n+m)X; Y}$ ,  $x \in X^n$  et  $y \in X^m$

$$\begin{aligned} J_n & : L^{(nX; L^{(m)Y; G})} \longrightarrow L^{(mY; L^{(n)X; G})} \\ [J_n T(y)](x) & := [T(x)](y) \end{aligned}$$

où  $T \in L^{(nX; L^{(m)Y; G})}$ ,  $x \in X^n$  et  $y \in Y^m$ .

En particulier, dans le cas linéaire, l'isomorphisme  $I_1$ , où  $m = 1$  et  $Y = \mathbb{C}$ , donne :

$$L^{(2)X} \approx L(X; X^*).$$

**Proposition 1.1.5** [Muj86, p. 03]. L'isomorphisme canonique entre  $L^{(m+n)X; Y}$  et  $L^{(m)X; L^{(n)X; Y}}$ , il donne un isométrie entre  $\mathcal{L}^{(m+n)X; Y}$  et  $\mathcal{L}^{(m)X; \mathcal{L}^{(n)X; Y}}$ .

- Rappelons qu'un opérateur multilinéaire  $T$  induit des opérateurs linéaires

$$\Psi_j^{(m)}(T) : X_j \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\dots}, X_m; Y),$$

où

$$\Psi_j^{(m)}(T)(x^j)(x^1, \overset{[j]}{\dots}, x^m) = T(x^1, \overset{(m)}{\dots}, x^m),$$

ce qui permet d'identifier l'espace  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  avec  $\mathcal{L}(X_j; \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\dots}, X_m; Y))$  pour tout  $j = 1, \dots, m$  (Proposition 1.1.5). Un cas particulier est souvent utilisé dans la théorie linéaire, lorsqu'on prend  $m = 2$  et  $Y = \mathbb{K}$  :

$$\mathcal{L}(X_1, X_2) = \mathcal{L}(X_1; X_2^*) \quad (\mathcal{L}(X_1, X_2; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}(X_2; \mathbb{K})).$$

## 1.2 Produit tensoriel

Il y a plusieurs manières de présenter le produit tensoriel algébrique des espaces vectoriels  $X, Y$ . Nous choisissons la suivante :

Pour  $(x, y) \in X \times Y$  on définit la forme bilinéaire  $u_{x,y} : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathbb{K}$  c'est-à-dire  $u_{x,y} \in [\mathcal{L}(X, Y)]^*$  par

$$u_{x,y}(A) = A(x, y), \forall A \in \mathcal{L}(X, Y)$$

Observons que l'application  $\otimes : X \times Y \rightarrow [\mathcal{L}(X, Y)]^*$  telle que  $x \otimes y = u_{x,y}$ , obtenu de cette façon est bilinéaire. Alors l'espace vectoriel  $X \otimes Y$  engendré par l'image  $\otimes(X \times Y)$  de l'application  $\otimes$  est dite produit tensoriel algébrique de  $X$  et  $Y$ .

Les éléments de  $X \otimes Y$  sont écrits sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i,$$

tels que  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in X$ ,  $y_i \in Y$ , et  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ . Cette représentation de  $u$  n'est pas unique.

Si  $u \in X \otimes Y$  et  $\phi$  est une forme bilinéaire sur  $X \times Y$  alors,

$$\begin{aligned} u(\phi) &= \langle \phi, u \rangle \\ &= \left\langle \phi, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(x_i, y_i). \end{aligned}$$

La valeur de cette expression est indépendante du choix de  $u$ .

On observe que l'application  $(x, y) \mapsto x \otimes y$  est un espace de multiplication de  $X \times Y$  à valeur dans l'espace  $X \otimes Y$ , ce produit est bilinéaire, on a par exemple

- (i)  $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$ .
- (ii)  $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$ .
- (iii)  $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$ .

$$(iv) 0 \otimes y = y \otimes 0 = 0.$$

On déduit, par la propriété (iii) que l'élément  $u \in X \otimes Y$  tel que

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i$$

est écrit de la façon suivante

$$u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i.$$

**Proposition 1.2.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces vectoriels, si  $\{e_i, i \in I\}$  et  $\{f_j, j \in J\}$  deux bases de  $X$  et  $Y$  resp, alors  $\{e_i \otimes f_j, (i, j) \in I \times J\}$  est une base de  $X \otimes Y$ .*

**Remarque 1.2.2.**

a) Si  $\dim X < \infty$  et  $\dim Y < \infty$  alors,  $\dim X \otimes Y = \dim X \dim Y$ .

b)  $\dim X \otimes \mathbb{K} = \dim X$  et  $\dim \mathbb{K} \otimes Y = \dim Y$  alors,  $X \otimes \mathbb{K}$  et  $\mathbb{K} \otimes Y$  sont isomorphe à  $X$  et  $Y$  respectivement.

**Proposition 1.2.3.** *Pour  $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $u = 0$ ,
- (ii)  $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \psi(y_i) = 0$ , pour tout  $\varphi \in X^*, \psi \in Y^*$ ,
- (iii)  $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) y_i = 0$ , pour tout  $\varphi \in X^*$ ,
- (iv)  $\sum_{i=1}^n \psi(y_i) x_i = 0$ , pour tout  $\psi \in Y^*$ .

**Définition 1.2.4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. Une norme  $\alpha$  sur le produit tensoriel  $X \otimes Y$  est dite raisonnable, si on a les deux conditions suivantes

- (i)  $\alpha(x \otimes y) \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$ .
- (ii) Si  $x^* \in X^*$  et  $y^* \in Y^*$ ,  $(x^* \otimes y^*) \in (X \otimes Y)^*$  et  $\|x^* \otimes y^*\| \leq \|x^*\| \|y^*\|$ .

**Exemples 1.2.5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach, sur le produit tensoriel  $X \otimes Y$ , Grothendieck [Gro56] a définie deux normes tensorielles raisonnables de la manière suivante :

Pour tout  $u \in X \otimes Y$ , on pose

$$\begin{aligned} \pi(u) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| \right\}, \text{ norme projective.} \\ \varepsilon(u) &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \langle x^*, x_i \rangle \langle y^*, y_i \rangle \right|, \quad x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*} \right\}, \text{ norme injective.} \end{aligned}$$

La borne inférieure et la borne supérieure étant calculée sur l'ensemble des représentations de  $u$  de la forme

$$u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i.$$

De plus on a  $\pi \geq \varepsilon$  (voir [Rya02]) et

$$\pi(x \otimes y) = \varepsilon(x \otimes y) = \|x\| \|y\|, \quad \text{pour tout } x \in X, y \in Y.$$

### 1.3 Représentation sur un produit tensoriel

Soient  $X_1, \dots, X_m$  des espaces de Banach, sur le produit tensoriel on définit

(i) La norme projective par

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|, \quad u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations possible de  $u$ .

(ii) La norme injective

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \langle \varphi_j, x_i^j \rangle \right|, \quad \varphi_j \in B_{X_j^*}, u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \right\}.$$

On note  $X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_m$  le produit tensoriel  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$  muni de la norme projective  $\pi$ , cette espace n'est pas complet en général, alors on note  $X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m$  sont complété. L'espace de Banach  $X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m$  s'appelle le produit tensoriel projective. L'espace de Banach  $X_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \dots \hat{\otimes}_\varepsilon X_m$  s'appelle le produit tensoriel injective des espace de Banach  $X_1, \dots, X_m$ .

**Proposition 1.3.1.** (voir [Rya02]) A chaque opérateur  $m$ -linéaire  $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ , on peut associer un opérateur linéaire appelé linéarisation de  $T$  et noté  $\tilde{T} : X_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi X_m \longrightarrow Y$

défini par  $\tilde{T}(x^1 \otimes \dots \otimes x^m) = T(x^1, \dots, x^m)$ .

Où

$$\tilde{T} \left( \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \right) = \sum_{i=1}^n T(x_i^1, \dots, x_i^m),$$

il est bien défini, car il ne dépend pas de représentation choisie. De plus  $\tilde{T}$  est unique et  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

En effet, soit  $u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m$ , on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(u)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n T(x_i^1, \dots, x_i^m) \right\| \\ &\leq \|T\| \sum_{i=1}^n \|x_i^1\| \dots \|x_i^m\|, \end{aligned}$$

comme  $u$  est arbitraire  $\|\tilde{T}\| \leq \|T\| \|u\|_\pi$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|T(x^1, \dots, x^m)\| &= \left\| \tilde{T}(x^1 \otimes \dots \otimes x^m) \right\| \\ &\leq \|\tilde{T}\| \|x^1 \otimes \dots \otimes x^m\|_\pi \\ &\leq \|\tilde{T}\| \|x^1\| \dots \|x^m\|. \end{aligned}$$

Donc  $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$ .

Soit maintenant  $\tilde{B}$  un autre opérateur linéaire de  $T$ , pour tout  $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ ,

on a

$$\begin{aligned}\tilde{B}(x^1 \otimes \dots \otimes x^m) &= T(x^1, \dots, x^m) \\ &= \tilde{T}(x^1 \otimes \dots \otimes x^m).\end{aligned}$$

Par linéarité de  $\tilde{B}$  et  $\tilde{T}$  sont identiques sur  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ , et enfin, par densité, ils sont identiques sur  $X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m$ .

**Proposition 1.3.2.** On a

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y) \quad (1.1)$$

Car l'application

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) &\longrightarrow \mathcal{L}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y) \\ T &\longmapsto \psi(T) = \tilde{T}\end{aligned}$$

est une isomorphisme isométrique.

Cas particulier, si  $Y = \mathbb{K}$ , on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m) &= \mathcal{L}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m) \\ &= (X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m)^*.\end{aligned}$$

Cette dualité donne une nouvelle formule pour la norme projective

$$\|u\|_\pi = \sup_{T \in B\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)} |\langle u, T \rangle|.$$

**Remarque 1.3.3.** Dans le cas linéaire,  $\mathcal{L}(X; Y^*)$  s'identifie à  $(X \hat{\otimes}_\pi Y)^*$ ; ici, d'après (1.1), on a l'identification isométrique

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y^*) = (X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)^*.$$

# Chapitre 2

## L'idéal des opérateurs multilinéaires p-semi-intégrales

Le théorème de domination de Pietsch est un résultat important dans la théorie d'opérateurs linéaires. La généralisation du théorème de domination de Pietsch n'est pas vraie dans le cas des opérateurs  $m$ -linéaires  $p$ -sommants ( $m \geq 2$ ). Pour cela introduisons le concept de semi-intégrale aux opérateurs multilinéaires, cette définition vérifie l'analogue du théorème de domination de Pietsch. La notion des opérateurs semi-intégrale a été introduite et étudiée par Alencar-Matos dans [AM89] pour  $p = 1$  et généralisée par Çaliskan-Pellegrino dans [ÇP07] pour  $p \geq 1$ .

### 2.1 Opérateurs multilinéaires p-semi-intégrales

Nous commencerons par quelques définitions et terminologies concernant les espaces de Banach.

Soit  $X$  un espace de Banach et  $1 \leq p \leq \infty$  (où  $p^*$  est le conjugué de  $p$ ; i.e.,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ ). On note par  $l_p^n(X)$  ( resp.  $l_p(X)$  ) l'espace des suites  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  ( resp.  $(x_i)$  ) dans  $X$  muni

de la norme  $\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_p = (\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$  (resp.  $\|(x_i)\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ ).

On désigne aussi par  $l_{p,\omega}^n(X)$  ( resp.  $l_{p,\omega}(X)$  ) l'espace des suites  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  ( resp.  $(x_i)$  )

dans  $X$  muni de la norme  $\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{p,\omega} = \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}$

( resp.  $\|(x_i)\|_{p,\omega} = \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, \xi \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ ), où  $X^*$  est le dual (topologique) de  $X$ . La boule unité fermée de  $X$  est notée  $B_X$ . Si  $p$  est infini on prend le sup.

Nous dirons que l'espace de Banach  $X$  possède la propriété d'Orlicz si  $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$  pour toute suite  $(x_i)_{i=1}^{\infty}$  dans l'espace  $l_1^\omega(X)$ .

Par exemple : Orlicz a été montré que l'espace  $L_p[0, 1]$  ( $1 \leq p \leq 2$ ), possède cette propriété.

Un opérateur linéaire  $T : X \longrightarrow Y$  entre espaces de Banach, est dite  $p$ -sommant si

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.1)$$

ou, schématiquement :

$$T : l_p^\omega(X) \longrightarrow l_p(Y).$$

La meilleure constante  $C$  possible est notée  $\|T\|_{as,p}$ .

On note :

$$\Pi_{as,p}(X; Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaires absolument } p\text{-sommants}\}.$$

Nous allons donner la notion des opérateurs  $p$ -semi-intégrales introduite par Alencar-Matos dans [AM89] pour  $p = 1$  et généralisée par Çaliskan-Pellegrino dans [ÇP07] pour  $p \geq 1$ , avec quelques propriétés fondamentales :

**Définition 2.1.1.** Soient  $X_1, \dots, X_m, Y$  des espace de Banach. Un opérateur  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est  $p$ -semi-intégrale ( $p \geq 1$ ) si et seulement s'il existe une constante  $C > 0$  et une mesure de probabilité régulière  $\mu$  sur  $\sigma$ -algèbre de Borel  $\mathcal{B}(B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*})$

de  $B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}$  muni par le produit de la topologie  $*$ -faible  $\sigma(X_j^*, X_j)$  telle que pour tout  $x^j \in X_j$ , et tout  $\varphi_j \in X_j^*$  ( $j = 1, \dots, m$ ), on a

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.2)$$

La classe des opérateurs  $m$ -linéaires  $p$ -semi-intégrale de  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $Y$  notée  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ . On note  $\|T\|_{si,p}$  le plus petit nombre  $C$  tel que l'inégalité (2.2) est vraie pour tout  $x^j \in X_j$ . Il est clair que la norme  $p$ -semi-intégrale domine la norme d'opérateur :  $\|T\|_{si,p} \geq \|T\|$ .

**Proposition 2.1.2.** Soient  $X_1, \dots, X_m$  des espaces vectoriels normés et  $Y$  un Banach, alors  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est aussi un espace de Banach pour la norme d'opérateurs  $m$ -linéaires  $p$ -semi-intégrales.

$$\|T\|_{si,p} = \inf \{C \text{ vérifiant (2.2)}\}.$$

### Preuve

Soient  $X_1, \dots, X_m, Y$  des espace de Banach.

(1) Soient  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ , on a

$$\begin{aligned} & \|(T_1 + T_2)(x^1, \dots, x^m)\| \\ &= \|T_1(x^1, \dots, x^m) + T_2(x^1, \dots, x^m)\| \\ &\leq \|T_1(x^1, \dots, x^m)\| + \|T_2(x^1, \dots, x^m)\| \\ &\leq \|T_1(x^1, \dots, x^m)\| + \|T_2(x^1, \dots, x^m)\| \\ &\leq \left( \|T_1\|_{si,p} + \|T_2\|_{si,p} \right) \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

D'où,  $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ , et  $\|T_1 + T_2\|_{si,p} \leq \|T_1\|_{si,p} + \|T_2\|_{si,p}$ .

(2) Soient  $T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ , on a

$$\begin{aligned}
\|\alpha T(x^1, \dots, x^m)\| &= \left\| T\left(\alpha^{\frac{1}{m}} x^1, \dots, \alpha^{\frac{1}{m}} x^m\right) \right\| \\
&\leq \|T\|_{si,p} \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} \left| \varphi_1\left(\alpha^{\frac{1}{m}} x^1\right) \dots \varphi_m\left(\alpha^{\frac{1}{m}} x^m\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|T\|_{si,p} \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} \left| \alpha (\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \|T\|_{si,p} \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} \left| \varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'où,  $\alpha T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $\|\alpha T\|_{si,p} \leq |\alpha| \|T\|_{si,p}$ .

D'autre part

$$\|T\|_{si,p} = \left\| \frac{1}{\alpha} (\alpha T) \right\|_{si,p} \leq \frac{1}{|\alpha|} \|(\alpha T)\|_{si,p}$$

ce qui implique

$$\|\alpha T\|_{si,p} = |\alpha| \|T\|_{si,p}.$$

(3) Soit  $T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$

$$\begin{aligned}
\|T\| \leq \|T\|_{si,p} = 0 &\iff \|T\| = 0 \\
&\iff T = 0.
\end{aligned}$$

Il reste de vérifier que  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est complet, soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, k \in \mathbb{N}, \forall n > k > n_0 : \|T_n - T_k\|_{si,p} < \varepsilon.$$

On a

$$\|T_n - T_k\| \leq \|T_n - T_k\|_{si,p} < \varepsilon$$

donc  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Alors elle est convergente vers une limite  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $x^1, \dots, x^m \in X_1 \times \dots \times X_m$ , tel que

$$\begin{aligned} & \| (T_n - T)(x^1, \dots, x^m) \| = \lim_{k \rightarrow \infty} \| (T_n - T_k)(x^1, \dots, x^m) \| \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \| T_n - T_k \|_{si,p} \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \varepsilon \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

On déduit que  $(T_n - T) \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $\|T_n - T\|_{si,p} < \varepsilon$ .

Enfin, on a

$$T = T - T_n + T_n$$

par conséquent  $T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

Ce qui prouve que  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un espace de Banach.  $\blacksquare$

**Théorème 2.1.3.** (Théorème d'inclusion). Soient  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $1 \leq p \leq q < \infty$ , on a

$$\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{si,q}(X_1, \dots, X_m; Y),$$

et

$$\forall T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y), \quad \|T\|_{si,q} \leq \|T\|_{si,p}.$$

### Preuve

Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $x^j \in X_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Supposons que  $T$  est  $p$ -semi-intégrale, puisque  $p \leq q$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\|T(x^1, \dots, x^m)\| &\leq \|T\|_{si,p} \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|T\|_{si,p} \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)|^q d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent  $T$  est  $q$ -semi-intégrale et  $\|T\|_{si,q} \leq \|T\|_{si,p}$ . ■

## 2.2 Caractérisation des opérateurs multilinéaires $p$ -semi-intégrales

La caractérisation d'opérateurs multilinéaires  $p$ -semi-intégrales est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.2.1** ([AM89] et [CP07]). Soit  $T$  un opérateur multilinéaire continu de  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $Y$ . Il est équivalent de dire.

- (i) L'opérateur  $T$  est dans  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ ;
- (ii) Il existe une constante positive  $C$ , telle que pour tous  $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ),

$$\left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, 1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3)$$

aussi,

$$\|T\|_{si,p} = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité (2.3)}\}.$$

**Preuve**

(i) $\implies$ (ii). Soit  $T$  un opérateur  $p$ -semi-intégrale, pour tous  $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ),

on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \\
& \leq \|T\|_{si,p} \sum_{i=1}^n \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \right) \\
& = \|T\|_{si,p} \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} \left\{ \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \right\} \right) \\
& \leq \|T\|_{si,p} \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, 1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(ii) $\implies$ (i) On considère les ensembles

$$F_1 = \{f \in C(B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}); f < C^{-p}\}$$

$$F_2 = co \{f \in C(B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}); \text{il existe } x^j \in X_j \text{ (} j = 1, \dots, m),$$

$$\text{tel que } \|T(x^1, \dots, x^m)\| = 1 \text{ et } f(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)|^p \}.$$

Où  $co \{.\}$  noté l'enveloppe convexe.

Il est claire que  $F_1$  et  $F_2$  sont deux ensembles convexes et  $F_1$  est ouvert, on a  $F_1 \cap F_2 = \phi$ .

En effet, si  $h \in F_2$ , alors  $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, n \in \mathbb{N}, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  et

$$f_i(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p, \forall \varphi_j \in B_{X_j^*}.$$

Par l'hypothèse on a

$$\begin{aligned}
\|h\| & = \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n \left| \varphi_1 \left( \alpha_i^{\frac{1}{p}} x_i^1 \right) \varphi_2(x_i^2) \dots \varphi_m(x_i^m) \right|^p \right) \\
& \geq C^{-p} \sum_{i=1}^n \left\| T \left( \alpha_i^{\frac{1}{p}} x_i^1, \dots, x_i^m \right) \right\|^p \\
& = C^{-p} \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i^{\frac{1}{p}} \right)^p \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \\
& = C^{-p}.
\end{aligned}$$

Alors  $h \notin F_1$ . D'après le théorème de séparation de Hahn-Banach, il existe  $\lambda > 0$  et  $\psi \in C(B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*})^*$  tel que

$$\psi(f) < \lambda \leq \psi(g) \quad , \forall f \in F_1, g \in F_2.$$

Il est clair que toutes les fonctions négatives de  $C(B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*})$  à  $F_1$ , nous avons  $\psi(nf) < \lambda$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ce qui donne  $\psi(f) < 0$  ( $\psi(f) < \frac{\lambda}{n}$ ) et  $\psi$  est une fonction positive ( $\psi(f) = -\psi(-f) \geq 0$ ). Alors il existe une mesure de probabilité régulière  $\mu$  sur l'espace compact  $K = (B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}, \sigma(X_j^*, X_j))$  tels que

$$\psi(f) = \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} f d\mu.$$

Maintenant, on définit la suite  $(f_n)_{n>0}$  par  $f_n = C^{-p} - \frac{1}{n}$ , c'est clair que  $(f_n)_{n>0} \subset F_1$  alors, on a

$$\int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} f_n d\mu = C^{-p} - \frac{1}{n} < \lambda, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

ce qui donne  $\lambda \geq C^{-p}$ . Ainsi, pour tout  $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$  on définit la fonction  $f$  par

$$f(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)|^p \text{ avec } \|T(x^1, \dots, x^m)\| = 1.$$

Pour tout  $f \in F_2$ , on a

$$\int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} f d\mu = \psi(f) \geq C^{-p} = C^{-p} \|T(x^1, \dots, x^m)\|. \quad (2.4)$$

Et puisque  $\|T(x^1, \dots, x^m)\| = 1$ , nous obtenons

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

si  $\|T(x^1, \dots, x^m)\| \neq 0$ , et en remplaçant  $x^1$  par  $x^1 \|T(x^1, \dots, x^m)\|^{-1}$  dans (2.4), nous trouvons

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \left( \int_{B_{X_1^*} \times \dots \times B_{X_m^*}} |\varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ceci la preuve est établie. ■

**Théorème 2.2.2.** Si  $T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors  $\psi_1^{(m)}(T) \in \Pi_{as,p}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y))$  tel que

$$\left\| \psi_1^{(m)}(T) \right\|_{as,p} \leq \|T\|_{si,p},$$

et  $\psi_1^{(m)}(T) \in \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}_{si,p}(X_2, \dots, X_m; Y))$  tel que

$$\left\| \psi_1^{(m)}(T) \right\| \leq \|T\|_{si,p}.$$

### Preuve

Pour  $x^1 \in X_1$  et  $x_i^j \in X_j$  ( $j = 2, \dots, m$ ) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^n \left\| \Psi_1^{(m)}(T)(x^1)(x_i^2, \dots, x_i^m) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \|T(x^1, x_i^2, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\|_{si,p} \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x^1) \varphi_2(x_i^2) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\|_{si,p} \|x^1\| \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, j=2, \dots, m} \sum_{i=1}^n |\varphi_2(x_i^2) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\Psi_1^{(m)}(T)(x^1) \in \mathcal{L}_{si,p}(X_2, \dots, X_m; Y) \text{ et } \left\| \Psi_1^{(m)}(T)(x^1) \right\|_{si,p} \leq \|T\|_{si,p} \|x^1\|,$$

ensuite

$$\Psi_1^{(m)}(T) \in \mathcal{L}(X_1; \mathcal{L}_{si,p}(X_2, \dots, X_m; Y)) \text{ avec } \left\| \Psi_1^{(m)}(T) \right\| \leq \|T\|_{si,p}.$$

Nous considérons  $y_i \in X_1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pour  $\delta > 0$  et d'après la définition de  $\left\| \Psi_1^{(m)}(T)(y_i) \right\|$ , il existe  $x_i^k \in B_{X_k^*}$  ( $k = 2, \dots, m$ ) tel que pour  $i = 1, \dots, n$

$$\left\| \Psi_1^{(m)}(T)(y_i) \right\|^p \leq \left\| \Psi_1^{(m)}(T)(y_i)(x_i^2, \dots, x_i^m) \right\|^p + \frac{\delta}{n}$$

ensuite

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\| \Psi_1^{(m)}(T)(y_i) \right\|^p &\leq \delta + \sum_{i=1}^n \left\| \Psi_1^{(m)}(T)(y_i)(x_i^2, \dots, x_i^m) \right\|^p \\ &= \delta + \sum_{i=1}^n \|T(y_i, x_i^2, \dots, x_i^m)\|^p \\ &\leq \delta + \|T\|_{si,p}^p \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(y_i) \varphi_2(x_i^2) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \\ &\leq \delta + \|T\|_{si,p}^p \sup_{\varphi_1 \in B_{X_1^*}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(y_i)|^p. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\left( \sum_{i=1}^n \left\| \Psi_1^{(m)}(T)(y_i) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \delta + \|T\|_{si,p}^p \sup_{\varphi_1 \in B_{X_1^*}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(y_i)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall \delta > 0.$$

Lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , nous obtenons

$$\left( \sum_{i=1}^n \left\| \Psi_1^{(m)}(T)(y_i) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\|_{si,p} \left( \sup_{\varphi_1 \in B_{X_1^*}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et par conséquent

$$\Psi_1^{(m)}(T) \in \Pi_{as,p}(X_1; \mathcal{L}(X_2, \dots, X_m; Y)) \text{ et } \left\| \Psi_1^{(m)}(T) \right\|_{as,p} \leq \|T\|_{si,p}.$$

D'où le résultat. ■

**Remarque 2.2.3.** D'après le Théorème 2.2.1 et (2.1), il est important de noter que  $\Pi_{as,p}(X_1; Y) = \mathcal{L}_{si,p}(X_1; Y)$  pour  $m = 1$  (théorème de domination de Grothendieck-Pietsch). Donnons deux exemples simples (Exemple 2.2.8) montrent que pour  $m = 2$  et  $Y = \mathbb{K}$ , cette égalité n'existe pas.

La définition de fonctionnelles absolument  $p$ -sommants  $m$ -linéaires est due à Pietsch [Pie83]. Dans [AM89], Alencar et Matos ont présenté une définition de valeurs vectorielles.

**Définition 2.2.4.** Un opérateur  $m$ -linéaire  $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$  est absolument  $p$ -sommant ( $1 \leq p < \infty$ ), s'il existe  $C > 0$  telle que pour tous  $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j (j = 1, \dots, m)$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^m \left\| (x_i^j)_{i=1}^n \right\|_{l_p^{n,w}(X_j)}. \quad (2.5)$$

Autrement dit ; l'opérateur  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est appelé absolument  $p$ -sommant, si pour toute suite faiblement  $p$ -sommable  $(x_i^j)_{i=1}^\infty$  dans  $X_j (j = 1, \dots, m)$ , la suite  $(T(x_i^1, \dots, x_i^m))_{i=1}^\infty$  est absolument  $p$ -sommable dans  $Y$ .

On note  $\mathcal{L}_{as,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  l'espace de Banach des opérateurs  $m$ -linéaires absolument  $p$ -sommants muni de la norme

$$\|T\|_{as,p} = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité 2.5}\}.$$

En revanche, les opérateurs multilinéaires absolument  $p$ -sommants ne sont pas faiblement compacts et le théorème de factorisation n'est plus vérifié.

**Proposition 2.2.5.** Si  $m \geq 2$  et  $X_1, \dots, X_m$  possédant la propriété d'Orlicz, alors

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}_{as,1}(X_1, \dots, X_m; Y),$$

pour tout espace de Banach  $Y$ .

### Preuve

Nous considérons  $(x_i^j)_{i=1}^\infty \in l_1^{n,w}(X_j), (j = 1, \dots, m)$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la propriété  $l_p \subset l_q$  continument pour  $p \leq q$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^n \|x_i^1\| \dots \|x_i^m\| \leq \prod_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n \|x_i^j\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Alors, si  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  nous avons

$$\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\| \leq \|T\| \sum_{i=1}^n \|x_i^1\| \dots \|x_i^m\| < \infty,$$

et  $T$  est absolument sommant. ■

**Remarque 2.2.6.** La proposition précédente n'est pas vraie pour  $m = 1$ , aussi d'après le théorème de Dvoretzky-Rogers dans [DJT95, p.50]; un opérateur identique entre les espaces de Banach de dimension infinies n'est pas absolument sommants.

**Théorème 2.2.7.** (A. Defant-J. Voigt, voir [AM89, Théorème 3.10]) Pour tous les espaces de Banach  $X_1, \dots, X_m$ , l'espace  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$  est isométrique identiquement à l'espace  $\mathcal{L}_{as,1}(X_1, \dots, X_m)$ .

**Exemple 2.2.8.**

(1)  $\mathcal{L}_{si}(l_2, l_2; \mathbb{K}) \neq \mathcal{L}_{as}(l_2, l_2; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(l_2, l_2; \mathbb{K})$ .

Nous considérons  $T \in \mathcal{L}(l_2, l_2; \mathbb{K})$  donné par

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2.$$

Dans ce cas  $\Psi_1^{(2)}(T)$  est l'opérateur identique de  $l_2$  dans  $l_2^* = l_2$  et n'est pas absolument sommant. D'après le Théorème 2.2.2 on a  $T \notin \mathcal{L}_{si}(l_2, l_2; \mathbb{K})$ .

(2)  $\mathcal{L}_{si}(l_1, l_1; \mathbb{K}) \neq \mathcal{L}_{as}(l_1, l_1; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(l_1, l_1; \mathbb{K})$ .

Nous considérons  $T \in \mathcal{L}(l_1, l_1; \mathbb{K})$  donné par

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \sum_{k=1}^i x_k, \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_1.$$

Dans ce cas  $\Psi_1^{(2)}(T) \in \mathcal{L}(l_1; l_{\infty})$  donné par

$$\Psi_1^{(2)}(T)(x) = \left( \sum_{k=1}^i x_k \right)_{i=1}^{\infty}, \quad \forall x \in l_1.$$

Puisque  $\Psi_1^{(2)}(T)$  n'est pas faiblement compact (tel que  $\overline{\Psi_1^{(2)}(T)(B_{l_1})}$  non faiblement compact de  $l_\infty$ ), de sorte que  $\Psi_1^{(2)}(T)$  n'est pas absolument sommant. Il résulte du Théorème 2.2.2 que  $T \notin \mathcal{L}_{si}(l_1, l_1; \mathbb{K})$ .

## 2.3 Propriétés

Nous utilisons dans ce paragraphe la caractérisation d'opérateur multilinéaire  $p$ -semi-intégrale pour montrer que l'espace  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un multi-idéal de Banach.

**Définition 2.3.1** (*opérateur de rang fini*). Un opérateur  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est de rang fini s'il est somme finie des opérateurs de la forme

$$\begin{aligned} T &= T_{y \otimes x_j^*}^m = x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^* \otimes y : X \times \dots \times X_m \longrightarrow Y \\ & \qquad \qquad \qquad (x^1, \dots, x^m) \longrightarrow x_1^*(x^1) \dots x_m^*(x^m) y. \end{aligned}$$

où  $x_j^* \in X_j^*$ ,  $y \in Y$ .

L'espace des opérateurs  $m$ -linéaires de rang fini sera noté  $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

**Définition 2.3.2** (*idéal des opérateurs  $m$ -linéaires*). Un idéal des opérateurs  $m$ -linéaires (ou multi idéal)  $\mathcal{M}$  est une classe d'opérateurs  $m$ -linéaires bornés tels que pour tout  $X_1, \dots, X_m$  et  $Y$  des espaces de Banach on a :

- (1)  $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$
- (2) (*Propriété d'idéal*) si  $T \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$ ,  $u_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j)$  et  $v \in \mathcal{L}(Y; F)$ , alors  $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

De plus, si  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  satisfait :

- (i)  $(\mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$  est un espace normé (de Banach)
- (ii)  $\|A^m : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}; A^m(x^1, \dots, x^m) = x^1 \dots x^m\|_{\mathcal{M}} = 1$
- (iii)  $\|v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \prod_{j=1}^m \|u_j\| \|T\|_{\mathcal{M}}$ .

Alors  $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$  s'appelle idéal normé (Banach) des opérateurs  $m$ -linéaires.

**Proposition 2.3.3**

(i) (Propriété d'idéal). Soit  $m \in \mathbb{N}$ , Soient  $X_1, \dots, X_m, Y, G$  et  $E_1, \dots, E_m$  des espace de Banach. Soient  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ ,  $S \in \mathcal{L}(Y; G)$  et  $A_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j) (j = 1, \dots, m)$ .

Si  $T$  un opérateur multilinéaire  $p$ -semi-intégrale, alors  $S \circ T \circ (A_1, \dots, A_m)$  est  $p$ -semi-intégrale, et

$$\|S \circ T \circ (A_1, \dots, A_m)\|_{si,p} \leq \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{j=1}^m \|A_j\|.$$

(ii) Si  $i : Y_0 \longrightarrow Y$  est une isométrie, alors

$$T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y_0) \iff iT \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y).$$

Dans ce cas, on a  $\|i \circ T\|_{si,p} = \|T\|_{si,p}$ .

**Preuve**

(i) Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $e_1^j, \dots, e_n^j \in E_j (j = 1, \dots, m)$  et  $\|A_j\| \neq 0$ . Il suffit d'après (2.3) de démontre que

$$\left( \sum_{i=1}^n \|S \circ T \circ (A_1, \dots, A_m) (e_i^1, \dots, e_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \sup_{\psi_j \in B_{E_j^*}, 1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |\psi_1 (e_i^1) \dots \psi_m (e_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.6)$$

tel que

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & \times \dots \times & E_m & & & & \\ \downarrow A_1 & & & \downarrow A_m & & & \\ X_1 & \times \dots \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{S} & G. \end{array}$$

On pose  $C = \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{j=1}^m \|A_j\|$ , on a

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=1}^n \|ST(A_1(e_i^1), \dots, A_m(e_i^m))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \|S\| \left( \sum_{i=1}^n \|T(A_1(e_i^1), \dots, A_m(e_i^m))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \|S\| \|T\|_{si,p} \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, 1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(A_1(e_i^1)) \dots \varphi_m(A_m(e_i^m))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{j=1}^m \|A_j\| \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, 1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\varphi_1(A_1(e_i^1))}{\|A_1\|} \dots \frac{\varphi_m(A_m(e_i^m))}{\|A_m\|} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

On a  $E_j \xrightarrow{A_j} X_j \xrightarrow{\varphi_j} \mathbb{K}$ ,

on pose  $\psi_j = \varphi_j \circ \frac{A_j}{\|A_j\|}$ , alors

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=1}^n \|ST(A_1(e_i^1), \dots, A_m(e_i^m))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{j=1}^m \|A_j\| \left( \sup_{\psi_j \in B_{E_j^*}, 1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |\psi_1(e_i^1) \dots \psi_m(e_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

ce qui entraîne (2.6).

Ce qui implique  $S \circ T \circ (A_1, \dots, A_m)$  est  $p$ -semi-intégrale, et

$$\|S \circ T \circ (A_1, \dots, A_m)\|_{si,p} \leq \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{j=1}^m \|A_j\|.$$

(ii) Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $x^j \in X_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Comme

$$\|i \circ T(x^1, \dots, x^m)\| = \|i(T(x^1, \dots, x^m))\| = \|T(x^1, \dots, x^m)\|,$$

d'après la caractérisation (2.3) et la Proposition **2.3.3** (i), d'où le résultat.

Ceci la preuve est achevée ■

**Proposition 2.3.4.** Soit  $T \in \mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors  $T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  pour  $1 \leq p < \infty$ .

**Preuve**

Soient  $T$  un opérateur  $m$ -linéaire de rang fini de  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $Y$ , par définition de  $T$ , on a

$$T = \sum_{i=1}^n \bigotimes_{j=1}^m x_i^{*j} \otimes y_i.$$

L'opérateur  $T$  s'écrit comme la somme d'opérateurs  $m$ -linéaires de la forme

$$T(x^1, \dots, x^m) = x^{*1}(x^1) \dots x^{*m}(x^m) y.$$

Puis, il suffit de prouver que les opérateurs de la forme

$$T = T_{y \otimes_{j=1}^m x^{*j}} = x^{*1} \otimes \dots \otimes x^{*m} \otimes y,$$

pour  $x^{*j} \in X_j^*$  ( $1 \leq j \leq m$ ) et  $y \in Y$ , sont dans l'espace  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ . En effet, soit  $(x_i^j)_{i=1}^n$  dans  $X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \|x^{*1} \otimes \dots \otimes x^{*m} \otimes y(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \\ &= \sum_{i=1}^n \|x^{*1}(x_i^1) \dots x^{*m}(x_i^m) y\|^p \\ &\leq \|y\|^p \sum_{i=1}^n |x^{*1}(x_i^1) \dots x^{*m}(x_i^m)|^p \\ &= \|y\|^p \prod_{j=1}^m \|x^{*j}\|^p \sum_{i=1}^n \left| \frac{x^{*1}(x_i^1)}{\|x^{*1}\|} \dots \frac{x^{*m}(x_i^m)}{\|x^{*m}\|} \right|^p \\ &\leq \|y\| \prod_{j=1}^m \|x^{*j}\| \left( \sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}, 1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y) \text{ et } \|T\|_{si,p} = \|y\| \prod_{j=1}^m \|x^{*j}\|. \quad \blacksquare$$

**Corollaire 2.3.5.**  $(\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y), \|T\|_{si,p})$  est un multi-idéal de Banach.

**Preuve**

Il est immédiate par la Proposition **2.3.3** et Proposition **2.3.4**. ■

# Chapitre 3

## Représentation tensoriel des opérateurs m-linéaires p-semi-integrales

Dans ce chapitre, on définira une norme tensorielle raisonnable  $\tilde{\sigma}_p(\cdot)$  sur le produit tensoriel  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y$  et on montrera que son dual topologique muni de cette norme s'identifie isométriquement à l'espace  $\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y^*)$ .

### 3.1 La norme tensoriel $\tilde{\sigma}_p$

Soient  $X_1, \dots, X_m$  et  $Y$  des espaces de Banach. Soient  $p \geq 1$  et  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y$ , on considère

$$\tilde{\sigma}_p(u) = \inf \left\| (\lambda_i)_{i=1}^n \right\|_q \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left\| (y_i)_{i=1}^n \right\|_\infty,$$

où l'infimum porte sur toutes les représentation de  $u$  de la forme

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i ,$$

avec  $x_i^j \in X_j, y_j \in Y, \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, n, m \in \mathbb{N}$  et  $q \geq 1$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Proposition 3.1.1.**  $\tilde{\sigma}_p$  est une norme tensorielle raisonnable sur  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y$ .

Pour la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.1.2.** Soit  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y$ , pour tout  $\delta > 0$ , on peut trouver une représentation de  $u$  de la forme

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i ,$$

tel que

$$\begin{aligned} \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q &\leq [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{q}} , \\ \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p &\leq (1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u) , \\ \|(y_i)_{i=1}^n\|_\infty &= 1. \end{aligned}$$

### Preuve

Prenons une constante  $\delta > 0$ . Il est clair par la définition de  $\tilde{\sigma}_p$ , que nous pouvons choisir une représentation de  $u$  de la forme

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i ,$$

telle que

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_p(u) &= \inf \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \| (y_i)_{i=1}^n \|_\infty \\
&\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \| (y_i)_{i=1}^n \|_\infty \\
&\leq [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{p}} \tag{*}
\end{aligned}$$

Ainsi dans une première étape, nous pouvons réorganiser la représentation de  $u$  en multipliant et en divisant  $\|(y_i)_{i=1}^n\|_\infty$  avec une constante convenable  $c > 0$  de sorte que

$$\|(y_i^*)_{i=1}^n\|_\infty = \|(cy_i)_{i=1}^n\|_\infty = 1,$$

et

$$\|(\lambda_i^*)_{i=1}^n\|_q = \left\| \left( \frac{1}{c} \lambda_i \right)_{i=1}^n \right\|_q.$$

On observe que la représentation de  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i^* x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i^*$  satisfait (\*) avec

$$\|(\lambda_i^*)_{i=1}^n\|_q \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{q}} [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{p}}.$$

Maintenant, comme une deuxième étape, pour cette représentation de  $u$ , par exemple, si

$$\left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} > [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{p}}, \tag{**}$$

encore, on peut choisir une constante convenable  $C > 0$  telle que

$$\left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(Cx_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{p}}.$$

Donc, nous avons que

$$\begin{aligned} \|(\lambda_i^*)_{i=1}^n\|_q \frac{1}{C} \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(Cx_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \| (y_i^*)_{i=1}^n \|_\infty \leq \\ [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{q}} [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

et cela implique que

$$\|(\lambda_i^*)_{i=1}^n\|_q \frac{1}{C} \leq [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{q}}.$$

Maintenant, on prend  $\|(\lambda_i^{**})_{i=1}^n\|_q = \|(\frac{1}{C}\lambda_i^*)_{i=1}^n\|_q$  et  $x_i^{1*} = Cx_i^1, i = 1, \dots, n$ , on obtient une représentation de  $u$  de la forme

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{**} x_i^{1*} \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i^*,$$

satisfait (\*) et les conditions

$$\begin{aligned} \|(\lambda_i^{**})_{i=1}^n\|_q \leq [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{q}}, \\ \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^{1*}) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \leq (1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u), \end{aligned}$$

$$\|(y_i^*)_{i=1}^n\|_\infty = 1.$$

Noter que, dans la deuxième étape ci-dessus, si, au lieu de (\*\*), il serait

$$\|(\lambda_i^*)_{i=1}^n\|_q > [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{q}}, \quad (***)$$

puis, nous allons procéder tout à fait de la même manière pour obtenir une représentation adéquate de  $u$  satisfaisant (\*) et les conditions ci-dessus. Notez également que, en tant que conséquence de l'inégalité (\*), il ne peut pas arriver (\*\*\*) et (\*\*\*) simultanément. ■

### Preuve du Proposition 3.1.1

On montre que  $\tilde{\sigma}_p(u) = 0$  implique  $u = 0$  supposons que  $\tilde{\sigma}_p(u) = 0$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il y a une représentation  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i$  de  $u$  tel que

$$\|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(y_i)_{i=1}^n\|_\infty < \varepsilon$$

d'après l'ingalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ \varphi \in B_{Y^*} \\ j=1, \dots, m}} \left| \varphi_1 \times \dots \times \varphi_m \times \varphi \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i \right) \right| \\ &= \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ \varphi \in B_{Y^*} \\ j=1, \dots, m}} \left| \sum_{i=1}^n \varphi_1(\lambda_i x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m) \varphi(y_i) \right| = \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ \varphi \in B_{Y^*} \\ j=1, \dots, m}} \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m) \varphi(y_i) \right| \\ &\leq \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ \varphi \in B_{Y^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\lambda_i \varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m) \varphi(y_i)| \\ &\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ \varphi \in B_{Y^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m) \varphi(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i)_{i=1}^n\|_\infty \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ \varphi \in B_{Y^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\left| \sum_{i=1}^n \varphi_1(\lambda_i x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m) \varphi(y_i) \right| \leq \varepsilon \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_m\| \|\varphi\|,$$

pour tout  $\varphi_j \in X_j^*, j = 1, \dots, m, \varphi \in Y^*$ .

Puisque la valeur de la somme  $\left| \varphi_1 \times \dots \times \varphi_m \times \varphi \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i \right) \right|$  est indépendante de la représentation de  $u$ , il s'ensuit que

$$\sum_{i=1}^n \varphi_1 (\lambda_i x_i^1) \dots \varphi_m (x_i^m) \varphi (y_i) = 0$$

pour tout  $\varphi_j \in X_j^*, j = 1, \dots, m, \varphi \in Y^*$ .

Par conséquent, par la version multinéaire de Proposition **1.2.3**, il s'ensuit que  $u = 0$ .

Pour prouver l'inégalité triangulaire, prendre  $u, v \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y$ . Pour toute  $\delta > 0$ , par le Lemme **3.1.2**, on peut trouver une représentation de  $u$  et  $v$  de la forme

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes a_i, \quad v = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i^1 \otimes \dots \otimes y_i^m \otimes b_i,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|(\alpha_i)_{i=1}^n\|_q &\leq [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u)]^{\frac{1}{q}}, \\ \|(\beta_i)_{i=1}^n\|_q &\leq [(1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(v)]^{\frac{1}{q}}, \\ \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_n(x_i^m)|^p &\leq (1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(u), \\ \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p &\leq (1 + \delta) \tilde{\sigma}_p(v), \\ \|(\alpha_i)_{i=1}^n\|_\infty &= 1 = \|(\beta_i)_{i=1}^n\|_\infty. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \tilde{\sigma}_p(u+v) \\
& \leq \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^q + \sum_{i=1}^n |\beta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \times \left[ \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \left( \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p + \sum_{i=1}^n |\varphi_1(y_i^1) \dots \varphi_m(y_i^m)|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \leq (1+\delta)^{\frac{1}{q}} (\tilde{\sigma}_p(u) + \tilde{\sigma}_p(v))^{\frac{1}{q}} (1+\delta)^{\frac{1}{p}} (\tilde{\sigma}_p(u) + \tilde{\sigma}_p(v))^{\frac{1}{p}} \\
& = (1+\delta) (\tilde{\sigma}_p(u) + \tilde{\sigma}_p(v)).
\end{aligned}$$

Ce qui montre l'inégalité triangulaire. Donc  $\tilde{\sigma}_p(u)$  est une norme sur  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y$ .

Il est facile de voir que  $\tilde{\sigma}_p(x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes y) \leq \|x_1\| \dots \|x_m\| \|y\|$ , pour tout  $x_j \in X_j, j = 1, \dots, m$  et  $y \in Y$ .

Pour montrer que

$$\|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m \otimes \varphi\| \leq \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_m\| \|\varphi\|.$$

Soit  $\varphi_j \in X_j^*$  avec  $\varphi_j \neq 0, j = 1, \dots, m$ , soit  $\varphi \in Y^*$  avec  $\varphi \neq 0$ , et soit  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i$ . Alors par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
& |\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m \otimes \varphi(u)| \\
&= \left| \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m \otimes \varphi \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i \right) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^n \varphi_1(\lambda_i x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m) \varphi(y_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i \varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m) \varphi(y_i)| \\
&\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_m\| \|\varphi\| \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}(x_i^1) \dots \frac{\varphi_m}{\|\varphi_m\|}(x_i^m) \frac{\varphi}{\|\varphi\|}(y_i) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_m\| \|\varphi\| \sup_{\substack{\phi_j \in B_{X_j^*}, \phi \in B_{Y^*} \\ j=1, \dots, m}} \left( \sum_{i=1}^n |\phi_1(x_i^1) \dots \phi_m(x_i^m) \phi(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_m\| \|\varphi\| \sup_{\substack{\phi_j \in B_{X_j^*}, \\ j=1, \dots, m}} \left( \sum_{i=1}^n |\phi_1(x_i^1) \dots \phi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\phi \in B_{Y^*}} \sup_{i=1, \dots, n} |\phi(y_i)| \\
&\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_m\| \|\varphi\| \sup_{\substack{\phi_j \in B_{X_j^*}, \\ j=1, \dots, m}} \left( \sum_{i=1}^n |\phi_1(x_i^1) \dots \phi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(y_i)_{i=1}^n\|_\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient que

$$|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m \otimes \varphi(u)| \leq \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_m\| \|\varphi\| \tilde{\sigma}_p(u),$$

et on a montré que  $\tilde{\sigma}_p$  est une norme raisonnable.  $\blacksquare$

### Remarque 3.1.3.

- 1) On remarque que lorsque  $m = 1$ , en particulier, la norme  $\tilde{\sigma}_p$  est réduite à la norme de Chevet-Saphar  $d_p$  sur  $X \otimes Y$  (voir [Rya02]).
- 2) Dans la Proposition précédente, si l'on prend  $Y = \mathbb{K}$ ,  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes \mathbb{K}$  s'identifie avec  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ , et dans ce cas, la norme raisonnable correspondante sera notée  $\sigma_p$ , qui se décrit comme suit

$$\sigma_p(u) = \inf \left\| (\lambda_i)_{i=1}^n \right\|_q \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, n}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

où l'infimum porte sur toutes les représentation de  $u$  de la forme

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i,$$

avec  $x_i^j \in X_j, y_j \in Y, \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, n, m \in \mathbb{N}$  et  $q \geq 1$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Remarque 3.1.4.** (*commutativité et l'associativité de  $\sigma_p$* ). Soient  $X, Y$  et  $Z$  des espaces de Banach. Étant donné que les isomorphisme algébrique  $X \otimes Y = Y \otimes X$  et  $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$  sont bien connus (voir, par exemple, [Köt79, p. 179]) puis il s'ensuit, par la même définition de  $\sigma_p$  que, les espaces normés (resp. de Banach)  $(X \otimes Y, \sigma_p)$  et  $(Y \otimes X, \sigma_p)$  (resp.  $(X \tilde{\otimes} Y, \sigma_p)$  et  $(Y \tilde{\otimes} X, \sigma_p)$ ) sont isométrique isomophe dans la voie canonique.

**Remarque 3.1.5.** Soient  $X_1, \dots, X_m$  et  $Y$  des espaces de Banach et soit  $p \geq 1$ .

- (i) Il résulte des définitions de  $\sigma_p$  et  $\tilde{\sigma}_p$  que  $\sigma_p(u) \leq \tilde{\sigma}_p(u)$ , pour tout  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y$ .
- (ii) Pour chaque tensor  $u \in X_1^* \otimes \dots \otimes X_m^*$  correspond un opérateur canonique  $T_u : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow \mathbb{K}$  définie par

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i^1 \otimes \dots \otimes \varphi_i^m \longmapsto T_u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i^1 \otimes \dots \otimes \varphi_i^m,$$

avec  $\lambda_i \in \mathbb{K}, \varphi_i^j \in X_j^*, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ .

Par une application facile de l'inégalité de Hölder on remarque que

$$\|T_u\| \leq \sigma_p(u), \quad \text{pour tout } u \in X_1^* \otimes \dots \otimes X_m^*.$$

## 3.2 Dualité

On suivons l'idée développée dans [AM89, *Théorème 4.8*] nous prouvons que l'espace des opérateurs  $m$ -linéaires  $p$ -semi intégrale est isométriquement isomorphe au dual topologique de l'espace du produit tensoriel  $(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y, \tilde{\sigma}_p)$ .

**Théorème 3.2.1.** Soit  $X_1, \dots, X_m$  des espaces de Banach. Alors, pour tout espace de Banach  $Y$  et  $p \geq 1$ , l'espace  $(\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y^*), \|\cdot\|_{si,p})$  est isométriquement isomorphe à  $(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y, \tilde{\sigma}_p)^*$  par l'application

$$T \longrightarrow \phi_T,$$

où

$$\phi_T(x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes y) = T(x_1, \dots, x_m)(y),$$

pour tout  $x_j \in X_j, j = 1, \dots, m$  et  $y \in Y$ .

### Preuve

Il est facile de voir que

$$T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y^*) \longrightarrow \phi_T \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y, \tilde{\sigma}_p)^*,$$

définie par

$$\phi_T(x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes y) = T(x_1, \dots, x_m)(y), \quad x_j \in X_j, j = 1, \dots, m, \text{ et } y \in Y,$$

et linéaire et injective.

Pour montrer la surjectivité, soit

$$\phi \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y, \tilde{\sigma}_p)^*$$

et considérons l'application  $m$ -linéaire correspondante

$$T_\phi \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y^*)$$

définie par

$$T_\phi(x_1, \dots, x_m)(y) = \phi(x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes y), \quad \text{pour } x_j \in X_j, j = 1, \dots, m, \text{ et } y \in Y.$$

On considère  $x_i^j \in X_j, j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $y_i \in Y$ , avec  $\|y_i\| = 1, i = 1, \dots, n$ , telle que

$$\begin{aligned} \|(T_\phi(x_i^1, \dots, x_i^m))_{i=1}^n\|_p^p &= \sum_{i=1}^n \|T_\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^n |T_\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)(y_i)|^p = (*). \end{aligned}$$

Maintenant, on peut choisir  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  avec  $|\lambda_i| = 1, i = 1, \dots, n$ , tel que

$$\begin{aligned} (*) &= \varepsilon + \sum_{i=1}^n |\phi(x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i)|^p \\ &= \varepsilon + \left| \sum_{i=1}^n |\phi(x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i)|^{p-1} \lambda_i \phi(x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i) \right| = (**). \end{aligned}$$

Partant de ce point, par la continuité de  $\phi$  et de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} (**) &\leq \varepsilon + \|\phi\|_{(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y, \tilde{\sigma}_p)^*} \tilde{\sigma}_p \\ &\quad \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i |\phi(x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i)|^{p-1} x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i \right) \\ &\leq \varepsilon + \|\phi\|_{(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y, \tilde{\sigma}_p)^*} \left\| \left( \lambda_i |\phi(x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i)|^{p-1} \right)_{i=1}^n \right\|_q \\ &\quad \times \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, n}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(y_i)_{i=1}^n\|_\infty \\ &= \varepsilon + \|\phi\|_{(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y, \tilde{\sigma}_p)^*} \|(T_\phi(x_i^1, \dots, x_i^m))_{i=1}^n\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &\quad \times \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, n}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire et  $p - (p/q) = 1$ , on obtient

$$\left\| (T_\phi(x_i^1, \dots, x_i^m))_{i=1}^n \right\|_p \leq \|\phi\|_{(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y, \tilde{\sigma}_p)^*} \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j} \\ j=1, \dots, n}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ce qui montre que

$$T_\phi \in \left( \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y^*), \|\cdot\|_{si,p} \right),$$

et

$$\|T_\phi\|_{si,p} \leq \|\phi\|_{(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y, \tilde{\sigma}_p)^*}.$$

Inversement, soit  $T$  est une forme multilinéaire  $p$ -semi-intégrale de  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $Y^*$ . Nous définissons une fonction linéaire sur  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y$  par

$$\phi_T(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i^1, \dots, x_i^m)(y_i),$$

pour

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \otimes y_i,$$

où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ,  $x_i^j \in X_j$ ,  $y_i \in Y$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Ainsi, d'après l'inégalité de Hölder et Théorème **2.2.1**, il resulte que

$$|\phi_T(u)|^p \leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q^p \| (y_i)_{i=1}^n \|_\infty^p \|T\|_{si,p}^p \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, m}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p.$$

Donc

$$|\phi_T(u)| \leq \|T\|_{si,p} \tilde{\sigma}_p(u),$$

ce qui montre que  $\phi_T$  est  $\tilde{\sigma}_p$ -continue et  $\|\phi_T\|_{(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes Y, \tilde{\sigma}_p)^*} \leq \|T\|_{si,p}$ . ■

**Corollaire 3.2.2.** Si  $Y = \mathbb{K}$ , l'espace des forme  $m$ -linéaire  $p$ -semi-intégrale  $(\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m), \|\cdot\|_{si,p})$  est isométrique à  $(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes \mathbb{K}, \tilde{\sigma}_p)^*$ .

**Proposition 3.2.3.** Soit  $X_1, \dots, X_m$  des espaces de Banach, et soit  $p \geq 1$ . Alors  $(\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m), \|\cdot\|_{si,p})$  est isométriquement isomorphe à  $(X_1 \otimes \dots \otimes X_m, \sigma_p)^*$  par l'opérateur  $T \longrightarrow \phi_T$ , où

$$\phi_T(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) = T(x_1, \dots, x_m).$$

pour tout  $x^j \in X_j, j = 1, \dots, m$ .

**Remarque 3.2.4.** Il est intéressant d'observer que  $(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes \mathbb{K}, \tilde{\sigma}_p)^*$  n'est pas isométrique à  $(X_1 \otimes \dots \otimes X_m, \tilde{\sigma}_p)^*$ , mais comme une conséquence du Théorème 3.2.1 et Proposition 3.2.3 nous voyons que  $(X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes \mathbb{K}, \tilde{\sigma}_p)^*$  est isométrique à  $(X_1 \otimes \dots \otimes X_m, \sigma_p)^*$ .

**Proposition 3.2.5.** Soient  $X_1, \dots, X_m$  et  $Y$  des espaces de Banach et soit  $p \geq 1$ . Alors,

(i) Si  $T : X_1 \otimes \dots \otimes X_m \longrightarrow Y$  est un opérateur linéaire, alors  $T \in \mathcal{L}((X_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} X_m, \sigma_p); Y)$  si et seulement si  $\varphi \circ T \in (X_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} X_m, \sigma_p)^*$  pour tout  $\varphi \in B_{Y^*}$ . Dans ce cas on a

$$\|T\|_{\mathcal{L}((X_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} X_m, \sigma_p); Y)} = \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \|\varphi \circ T\|_{(X_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} X_m, \sigma_p)^*}.$$

(ii) L'opérateur  $m$ -linéaire  $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$  est  $p$ -semi-intégrale si l'opérateur linéaire associé  $\tilde{T} : X_1 \otimes \dots \otimes X_m \longrightarrow Y$  donné par

$$\tilde{T}(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) = T(x_1, \dots, x_m),$$

pour tout  $x^j \in X_j, j = 1, \dots, m$ , est  $\sigma_p$ -continu et  $p$ -semi-intégrale. Dans ce cas, on a

$$\|T\| \leq \|T\|_{si,p} \leq \|\tilde{T}\|_{si,p}.$$

Inversement, si  $T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ , alors l'opérateur linéaire associé  $\tilde{T}$  est  $\sigma_p$ -continu,

c-à-d  $T \in \mathcal{L}((X_1 \otimes \dots \otimes X_m, \sigma_p); Y)$ . Dans ce cas, on a

$$\|T\| \leq \left\| \tilde{T} \right\|_{\mathcal{L}((X_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} X_m, \sigma_p); Y)} \leq \|T\|_{si,p}.$$

### Preuve

(i) L'implication non trivial de la première assertion est facile par conséquence du théorème du graphe fermé. Pour montrer la deuxième assertion, soit  $u_0 \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m$  avec  $T_{u_0} \neq 0$ . Alors par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire  $\varphi_0 \in B_{Y^*}$  telle que

$$\varphi_0(T_{u_0}) = \|T_{u_0}\|.$$

Donc pour tout  $\varphi \in B_{Y^*}$ , on a

$$\|T_{u_0}\| \leq \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} |\varphi \circ T(u_0)| \leq \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \|\varphi \circ T\|_{(X_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} X_m, \sigma_p)^* \sigma_p}(u_0),$$

ceci montre que

$$\|T\|_{\mathcal{L}((X_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} X_m, \sigma_p); Y)} \leq \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \|\varphi \circ T\|_{(X_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} X_m, \sigma_p)^*}.$$

L'inégalité inverse est immédiate, on a (i).

(ii) Supposons que  $\tilde{T} \in \mathcal{L}_{si,p}((X_1 \otimes \dots \otimes X_m, \sigma_p); Y)$ . Alors par la Proposition **3.2.3** et

le Théorème **2.2.1**, on a

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left\| \tilde{T} \right\|_{si,p} \left( \sup_{\varphi \in B_{(X_1 \otimes \dots \otimes X_m, \sigma_p)}^*} \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| \tilde{T} \right\|_{si,p} \left( \sup_{S \in B_{(\mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m), \|\cdot\|_{si,p})}^*} \sum_{i=1}^n |S(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left\| \tilde{T} \right\|_{si,p} \left( \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, n}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

ce qui montre que  $T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$  avec  $\|T\|_{si,p} \leq \left\| \tilde{T} \right\|_{si,p}$ . Il est clair par définition que  $\|T\| \leq \|T\|_{si,p}$ .

Pour montrer la réciproque, supposons maintenant  $T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ , et soit  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ . On choisit une représentation

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m,$$

D'après l'inégalité de Hölder et Théorème **2.2.1** il resulte que

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{T}(u) \right\|^p &\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q^p \sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \\
&\leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_q^p \|T\|_{si,p} \sup_{\substack{\varphi_j \in B_{X_j^*} \\ j=1, \dots, n}} \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)|^p.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left\| \tilde{T}(u) \right\|^p \leq \|T\|_{si,p} \sigma_p(u),$$

et donc  $\tilde{T}$  est  $\sigma_p$ -continu avec

$$\left\| \tilde{T} \right\|_{\mathcal{L}((X_1 \otimes \dots \otimes X_m, \sigma_p); Y)} \leq \|T\|_{si,p}.$$

Enfin, comme  $\sigma_p$  est une norme raisonnable, alors

$$\|T\| \leq \left\| \tilde{T} \right\|_{\mathcal{L}((X_1 \otimes \dots \otimes X_m, \sigma_p); Y)}.$$

Ce qui achève la preuve. ■

**Remarque 3.2.6.** On ne sait pas si, en général,  $\tilde{T} \in \mathcal{L}_{si,p}((X_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} X_m, \sigma_p); Y)$  quand  $T \in \mathcal{L}_{si,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .

# Bibliographie

- [AM89] R. ALENCAR, M. C. MATOS. Some classes of multilinear mappings between Banach spaces, Publ. Dep. An. Math. Univ. Complutense de Madrid **12**(1989).
- [DJT95] J.DIESTEL, H.JARCHOW, A.TONGE, Absolutely summing opérateurs, Cambridge University.Press. Cambridge, 1995.
- [Din99] J.DINEEN, *Complex analysis on infinite dimensional spaces*, Springer-Verlag. London, 1999.
- [Gro56] A. GROTHENDIECK. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. Bol. Soc. Mat. São-paulo **8** (1956) 1-79.
- [KP80] S. Kwapien, A. PELCZYNSKI. Absolutely summing operators and translation invariant spaces of functions on compact Abelian groups, Math. Nachr. 94, (1983),173-181.
- [Muj86] J. MUJICA, *Complex analysis in Banach spaces*, Mathematical Studies, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [Pie83] A.PIETSCH. Ideals of multilinear functionals (designsof a theory), Proceedings of the second international conference on operator algebras. Ideals. and their applications in theoretical physics(Leibzig). Teubner-Texte, (1983),185-199.
- [Rya02] R. A. RYAN. Introduction to tensor products of Banach spaces, Springer Monogr, Math. Springer, 2002.

- [ÇP07] E. ÇALISKAND, D. M. PELLEGRINO. On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators, Rocky Mountain J Math. 37(2007), no. 4, 1137–1154., Math. Ann. 37 (2007), 1137-1154.
- [Köt79] G. Köthe. Topological vector spaces II. Springer-Verlag, NewYork ? Heidelberg, Berlin, 1979.