REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Application des méthodes variationnelles à l'existence de solutions d'une équation différentielle de second ordre impulsive.

Présentée par :
M^{lle} HASNI Ilhem

Membres de jury :

Mr. Rabah MECHETER	M.C.B,	Université de M'sila	**Président**.
Mr. Dahmane BOUAFIA	M.C.A,	Université de M'sila	**Encadreur**.
Mr. Noureddine DECHOUCHA	M.A.A,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2022/2023.

Remerciements

Au nom d'Allah le miséricordieux

Premièrement et particulièrement, je tiens à remercier ALLAH le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années. Ainsi, je tiens également à exprimer ma vifs remerciements à notre encadreur Dahmane BOUAFIA, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses encouragement. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et a tous les membres du département des mathématiques. Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail. Et tous mes remerciements particuliers à mes parents pour leur soutien et leurs encouragements continus.

♡

❖ *Ilhem*

Dédicaces

Au nom d'Allah le miséricordieux

Je dédie ce travail :

-A ma chère mère et à mon cher père qui m'ont soutenu tout

au long de me

-A me

famille qui ont toujours été à me

toute

-A toute

-A toute

A vous cher lecteur .

Table des matières

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

H	Espace de Hilbert.
X'	Dual topologique de X.
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et $\exists C > 0\ : \vert u(x)\vert \leq C\ p.p\ sur\ \Omega\}$.
$\Vert u\Vert_{L^\infty}$	$\inf\{C > 0 : \vert u(x)\vert \leq C$ p.p sur $\Omega\}$.
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω.
$D(A)$	Domaine de définition d'un opérateur borné A.
$R(A)$	Image de A qui est noté aussi par ImA.
(X, d)	Espace métrique .
$< ., . >$	Un produit scalaire.
$\mathcal{L}(X, Y)$	: Ensemble des applications linéaires continues.
$\hookrightarrow$	On écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	On écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est compacte.
p.p	Presque partout.
$\partial_v F$	Dérivée directionnelle de F dans la direction v.
dF	Dérivée au sens de Fréchet qui est noté aussi par F'.
$d_G F$	Dérivée au sens de Gâteaux.
$s.c.i$	Semi continue inférieur.
$s.c.s$	Semi continue supérieur.
$f.s.c.i$	Faiblement semi continue inférieur.
$f.s.c.s$	Faiblement semi continue supérieur .
(PS)	Condition de Palais-Smale.

$(PS)_c$	Condition de Palais-Smale au niveau c.
(AR)	la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz.
$AC(I)$	les fonctions absolument continues sur un intarvalle I.
$\Delta u'(x_j)$	$u'(x_j^+) - u'(x_j^-) = \lim\limits_{x \to x_i^+} u'(x) - \lim\limits_{x \to x_i^-} u'(x)$.

Introduction générale

La théorie des équations différentielles impulsives est non seulement plus riche que la théorie correspondante des équations différentielles mais qu'elle représente également un cadre plus naturel pour la modélisation mathématique des phénomènes du monde réel. Il est donc devenu un outil efficace outil pour étudier certains problèmes de biologie, de médecine, de physique, etc. Important des progrès ont été réalisés dans la théorie des systèmes d'équations différentielles impulsives vingt dernières années. On considère généralement impulsions en position u et u pour l'équation différentielle du second ordre $u'' = f(t, u, u')$. Cependant, il est bien connu que dans le mouvement des engins spatiaux, les impulsions instantanées dépendent sur la position, ce qui se traduit par des discontinuités de saut de vitesse, sans changement de la position. Dans ce mémoire on va présenter un travail qui à est puplier par les auteurs Zhiguo Luo, Jingli Xie, et Guoping Chen [21]. Le travail consiste à l'existence et multiplicité de solutions pour un problème aux limites de second ordre impulsif sur l'interval borné fermé $[0, T]$. La preuve du résultat principal repose sur théorie du point critiques, le lemme du Col et théorème de point selle.

Le principe de lemme du Col établit l'existence d'un point Col (point critique), l'intuition qui sous-tend ce lemme se trouve dans le mot « Col » lui-même. Supposons que I désigne l'altitude. Il existe alors deux points bas : l'origine, car $J(0) = 0$, et un autre point v où $J(v) \leq 0$. Entre ces deux points se situe une chaîne de montagnes (à distance $\|u\| = r$ de l'origine) où l'altitude est élevée (plus grande que $a > 0$). Pour aller de l'origine à v en suivant un chemin γ, il faut traverser les montagnes, c'est-à-dire d'abord monter, puis redescendre. Comme J est plus ou moins régulière, elle doit atteindre un point critique quelque part entre les deux. L'intuition suggère que si un tel point se situe sur un chemin qui traverse les montagnes à l'altitude la plus basse, ce sera presque toujours un point Col. Ce mémoire comprend trois chapitre :

Le premier chapitre est préliminaires qui contient quelque outils de base dont on fréquemment usagé par la suite. Nous avons devise le chapitre par des sections, le premier section contient quelques notions sur les opérateurs de Banach comme la continuité et la compacité, injection continue et injection compact et les propriétés de semi-continuité de fonctionnelles. Nous avons présenté dans la deuxième section an va présent la fonctions convexes. dans la section troisième un rappel sur l'espace de Lebesgue et de Sobolev comme l'espace L^p et l'espace H^1, lemme de compacité. Ensuite, dans la section quatrième on donnons la théorie des points comme points critique, suite minimisante et infimum. Dans la cinquième section an va présent la Théorème de Lax-Milgram. Dans la sixième section on va présenté le lemme du Col de la montagne et la condition de compacité de Palais-Smale, notée (PS) et le lemme du Col en dimension infinie. Dans le septième section, nous expliquons ce que l'on entend par la méthode variationnelle appliquée à un problème aux limites et la relation de ses solutions à la fonctionnelle d'Euler, dans le dernier section nous donnons un sens d'une équation différentielle impulsive.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous discutons l'existence de solution pour un problème aux limites de second ordre impulsif suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x, u(x)), \quad x \neq x_j, \ x \in [0, T], T > 0, \\ -\Delta u'(x_j) = I_j(u(x_j)), \quad j = 1, 2, ..., m, \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0. \end{cases}$$

Enfin, dans le dernier chapitre on a étudié la multiplicité des solutions pour le même problème que nous avons étudié dans le chapitre précédent.

Pour obtenir les résultats, nous avons utilisé les conditions et les hypothèses suivantes :

(H1) Il existe $a, b, a_j, b_j > 0, \gamma, \gamma_j \in [0, 1), j = 1, 2, ..., m,$ tel que

$$|f(x, u)| \leq a + b|u|^{\gamma}, \quad |I_j(u)| \leq a_j + b_j|u|^{\gamma_j},$$

pour tout $x \in [0, T]$.

(H2) $\lim\limits_{u \longrightarrow 0} \frac{f(x,u)}{u} = 0$ uniformément pour tout $x \in [0, T]$, $\lim\limits_{u \longrightarrow 0} \frac{I_j(u)}{u} = 0$.

(H3) il existe des constantes $\mu > 2$ et $r \geq 0$ telles que pour chaque $x \in [0, T]$ et $u \in \mathbb{R}$ avec $|u| \geq r$,

$$0 < \mu F(x, u) \leq u f(x, u), \quad 0 < \mu \int_0^u I_j(s) ds \leq u I_j(u), \quad j = 1, 2, ..., m,$$

où $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$.

(H4) $f(x, u)$ et $I_j, j = 1, 2, \ldots, m,$ sont impaires par rapport à u.

CHAPITRE 1

QUELQUES OUTILS DE BASE

Dans ce chapitre, on donne quelques notions élémentaires qui sont nécessaire par la suite.

1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach

Soit X et Y, deux espaces de Banach normés.

Définition 1.1. (Opérateur linéaire borné)[19] Soit A un opérateur linéaire, tel que $D(A) = X$ et $R(A) \subset Y$. On dit que A est borné, s'il est borné sur la boule unité $\bar{B}(0,1)$. C'est-à-dire, si l'ensemble

$$\{\|Ax\|, \quad \|x\| \quad \leq 1\}$$

est borné.

Conformément à cette définition, si A est borné, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour x avec $\|x\| \leq 1$, on a l'inégalité

$$\|Ax\| \leq c.$$

Théorème 1.1. *[19] A est borné, si est seulement si, il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\|Ax\| \leq c\|x\|,$$

pour tout $x \in X$.

Définition 1.2. (Espace dual)[17] L'ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé constitue un espace vectoriel. On l'appelle dual de l'espace X et on note $X^{'}$. On munit $X^{'}$ de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} | \langle f, x \rangle |, \quad \forall f \in X^{'}.$$

$X^{'}$ muni de cette norme est un espace de Banach et on a l'inégalité

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X, \quad \forall f \in X^{'}, \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.3. (**Espace réflexif**) Soit X un espace de Banach et soit i l'injection canonique de X dans X''. On dit que X est réflexif, si $i(X) = X''$, où X'' est le bidual de X.

Définition 1.4. (**Espace séparable**) Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est séparable si X admet une partie dénombrable et dense.

Définition 1.5 (Opérateur coercitif). Un opérateur $T : E \to E'$ est dit coercitif si

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle T(x), x \rangle}{\|x\|} = \infty.$$

Définition 1.6. On dit que M est borné et faible séquentiellement fermé, c'est-à-dire, pour tout suite (u_n) dans M telle que, $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to \infty$, nous avons toujours $u \in M$.

Définition 1.7. (fonctions absolument continues) Soit I un intarvalle borné. On dite qu'une fonction u est absolument continue $(AC(I))$ si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour suite finie d'intervalles disjoints $\Big( ]a_i, b_i[\Big)_{i=0,1,\ldots m}$ de I on a

$$\sum_{i=0}^{m} |b_i - a_i| < \delta \Longrightarrow \sum_{i=0}^{m} |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.2. *[8] On dit que X un espace de Banach est réflexif, si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.*

Lemme 1.1. *[8] Si X est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\| \leq M$ contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\| \leq M$.*

1.1.1 Continuité et compacité des opérateurs

On va considérer des opérateurs T de X dans Y et on va donner une définition concernant les propriétés de la continuité de T.

La notion plus simple est la suivante

Définition 1.8. L'opérateur $T : X \to Y$ est dit continu en X, si pour tout suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.
T est dit continu sur $\Omega \subset X$ si T est continu en tout point $x \in \Omega$.

Définition 1.9. Un opérateur $T : X \to Y$ est dit compact s'il est continu et a la propriété. Pour suite (x_n) bornée dans X, la suite $(T(x_n))$ admet une sous suite convergente.

Définition 1.10. Soit $(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_2)$ deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \to Y$ est dit complètement continu s'il est continu et l'image de tout ensemble borné de X est relativement compact dans Y.

1.1.2 L'injection continu et compact

L'injection définissent les relations qui existent entre différents espaces fonctionnels. Ils sont très importants dans l'analyse moderne et les problèmes aux limites.

Définition 1.11. Soient X et Y deux espaces de Banach. On dit que X est injecté dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$, si pour tout $x \in X$ on a $x \in Y$ et $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, où la constante c ne dépend pas de $x \in X$. On définit l'opérateur d'injection $i : X \to Y$, qui nous permet de considérer le même élément $x \in X$ comme un élément de Y.
$X \hookrightarrow Y$ est équivalent à dire que l'opérateur d'injection $i : X \to Y$ est un opérateur linéaire continu.
Si $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, pour tout $x \in X$ alors $\|i(x)\|_Y \leq c$ si $\|x\|_X \leq 1$.

Définition 1.12. Si $X \hookrightarrow Y$ et l'opérateur d'injection $i : X \to Y$ est un opérateur compact, alors on dit que X est injecté de manière compacte dans Y, et on écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$. La compacité de l'opérateur $i : X \to Y$ est équivalent à dire que tout sous-ensemble borné de X est un sous-ensemble compact de Y.

1.1.3 Semi-continuité

Définition 1.13. (Semi continuité fort)

1. On dit qu'une fonctionnelle $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement $(s.c.i)$ au point x_0, si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \to x_0$, on a
$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$
2. On dit que f est semi-continue supérieurement $(s.c.s.)$ au point x_0, si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \to x_0$, on a
$$f(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Exemple 1.1. 1. Soit la fonctionnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ x > 0. \end{cases}$$

Alors f est semi-continue inférieurement $(s.c.i.)$ à $x_0 = 0$ mais n'est pas semi-continue supérieurement.

2. Soit la fonctionnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

Alors f est semi-continue supérieurement $(s.c.s.)$ à $x_0 = 0$ mais n'est pas semi-continue inférieurement.

Définition 1.14. (Semi continuité faible)

1. Une fonctionnelle $f : X \to \mathbb{R}$ est dite faiblement semi-continue inférieurement $(f.s.c.i.)$ au point x_0, si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

2. On dit que f est faiblement semi-continue supérieurement $(f.s.c.s.)$ au point x_0, si pour suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Exemple 1.2. Soit la fonctionnelle J définie sur un espace de Hilbert H comme suit

$$J : u \to \|u\|^2,$$

alors J est faiblement semi-continue inférieure $(f.s.c.i.)$. En effet, soit (u_n), telle que $u_n \rightharpoonup u$, on montre que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= (u_n - u, u_n - u) \\ &= \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

et comme $H^{'} = H$ et $u_n \rightharpoonup u$, donc

$$\forall u \in H : (u_n, u) \to (u, u) = \|u\|^2.$$

Alors

$$\|u_n\|^2 \geq \|u\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il résulte que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2.$$

Remarque 1.1.

1. Il est facile de voir que si f est continue en x_0, alors f est $(s.c.s.)$ et $(s.c.i)$ et inversement.
2. Si f est faiblement continue en x_0, alors f est $(f.s.c.s.)$ et $(f.s.c.i.)$ et inversement.

Proposition 1.1. *[8] Soit (x_n) une suite de X. On a*

1. *Si $x_n \longrightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$.*
2. *Si $x_n \rightharpoonup x$, alors (x_n) est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Proposition 1.2. *[8] Soit X est un espace de dimension finie, une suite (x_n) converge faiblement, si et seulement si, elle converge fortement.*

Définition 1.15. (La dérivée au sens de Fréchet) Soit $u \in U$ et $F : U \to Y$. On dit que F est différentiable au point u s'il existe une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que si on considère

$$R(h) = F(u + h) - F(u) - A.h, \text{ pour } h \in X, \text{ petit.}$$

Alors

$$\frac{R(h)}{\|h\|} \to 0 \text{ lorsque } \|h\| \to 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|h\|_X \leq \delta, \text{ alors } \|R(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X.$$

Si une telle application $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe, elle est forcément unique. On note par

$$A = dF(u).$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de F en u, ou encore application linéaire tangente à F en u. En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Fréchet.

Proposition 1.3. *[15]*

i) *Soit F et G deux applications de U vers Y. Si F et G sont différentiables en $u \in U$. Alors $\forall \lambda, \mu$ réels $\lambda F + \mu G$ est différentiable en u, et*

$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u).$$

ii) *Soit X, Y et Z trois espaces de Banach, U un ouvert de X, et V un ouvert de Y. Soit $F : U \to Y$ et $G : V \to Z$, tels que $F(U) \subset V$. Si F est différentiable en u et G est différentiable en $v = F(u)$, alors $G \circ F$ est différentiable en u et*

$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u), \quad v = F(u),$$

c'est-à-dire

$$d(G \circ F)(u)h = dG(v)[dF(u)h].$$

La différentielle de $G \circ F$ est donc la composition des applications linéaires continues $dF(u)$ et $dG(v)$, pour $v = F(u)$.

Définition 1.16. (Dérivée directionnelle) Soit $F : U \to Y$, $u \in U$. Soit $v \in X,\ v \neq 0$. On appelle dérivée directionnelle en u de F dans la direction v, notée $\partial_v F(u)$, la limite lorsqu'elle existe.

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}.$$

La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si F est Fréchet différentiable, alors pour $v \in X$ la dérivée directionnelle dans la direction v est donnée par

$$\partial_v F(u) = dF(u)v.$$

En effet,

$$F(u + tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv).$$

Donc

$$\frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = dF(u)(v) + \frac{R(tv)}{t},$$
$$\frac{R(tv)}{t} \to 0, \quad lorsque\ t \to 0.$$

Définition 1.17. (Différentiabilité au sens de Gâteaux) On dit que $F : U \to Y$ est Gâteaux différentiable en u (G-différentiable en u), s'il existe une application linéaire continue A de X vers Y, c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que pour $v \in X$, la dérivée directionnelle de F en u dans la direction v existe et est égale à $A(v)$, c'est-à-dire

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = A(v), \quad t \to 0, \ \forall v \in X.$$

On vérifie alors que, si une telle application A existe, elle est unique. On note

$$A = d_G F(u).$$

Proposition 1.4. *[15] Si F est Fréchet différentiable en u, elle est Gâteaux différentiable en u et*

$$\partial_G F(u) = dF(u).$$

La réciproque est fausse en général, même en dimension finie.

Exemple 1.3. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & si \ y \neq 0, \\ 0, & si \ y = 0, \end{cases}$$

est G-différentiable à $(0, 0)$, mais pas différentiable au sens de Frechet à $(0, 0)$.

Remarque 1.2. La G-différentiabilité n'implique pas la continuité de F.

Théorème 1.3. *[15] Soit $F : U \to Y$ une application G-différentiable (U ouvert de X). On suppose que l'application $v \mapsto d_G F(v)$ est continue sur U. Alors F est Fréchet différentiable sur U et*

$$dF(v) = d_G F(v), \quad \forall v \in U.$$

Démonstration - Soit $r \in (0, 1]$ tel que $B_r(u) \subset U$. Puisque $d_G F : U \to X'$ est continue à u, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta \in (0, 1]$ tel que

$$\|d_G F(u + tv) - d_G F(u)\| < \varepsilon \quad \text{pour } \|v\| < \delta, \ |t| < 1. \tag{1.1}$$

D'autre par, pour chaque $v \in B_r(0)$ la fonction

$$t \in [0, 1] \mapsto (d_G F(u + tv), v),$$

est la dérivée de la fonction

$$g(x) = F(u + tv) \quad t \in [0, 1].$$

Par conséquent

$$\int_0^1 (d_G F(u + tv), v) dt = g(1) - g(0) = F(u + v) - F(u).$$

Donc

$$F(u + v) - F(u) - (d_G F(u), v) = \int_0^1 (d_G F(u + tv) - d_G F(u), v) dt. \tag{1.2}$$

Soit

$$R(u, v) = \int_0^1 (d_G F(u + tv) - d_G F(u), v) dt.$$

D'après (1.1), pour $v \in B_\delta(0)$, nous avons que

$$\begin{aligned} \|R(u, v)\| &\leq \int_0^1 \|d_G F(u + tv) - d_G F(u)\| \|v\| dt \\ &\leq \varepsilon \|v\|. \end{aligned}$$

Pour cette raison $R(u, v) = o(\|v\|)$ quand $\|v\| \to 0$. Ensuite, (1.2) montre que $d_G F(u)$ est le dérivé de Fréchet de F à u. ■

Remarque 1.3. En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que F est C^1, il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentiable $d_G F$ est continue.

1.2 Fonctionnelles convexes

Définition 1.18. Soit E un espace de Banach, une fonctionnelle $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dit convexe si :

$$\forall u, v \in E, \quad \forall x \in]0, T[: \quad J(xu + (1 - x)v) \leqslant xJ(u) + (1 - x)J(v),$$

et on la dit strictement convexe si :

$$\forall u, v \in E, \quad \forall x \in]0, T[: \quad J(xu + (1 - x)v) < xJ(u) + (1 - x)J(v).$$

Théorème 1.4. *Soit $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle continu convexe sur E. Alors J est f.s.c.i, c-à-d :*

$$\forall (u_n) \subset E : u_n \longrightarrow u \ \textit{dans } E \Longrightarrow J(u) \leqslant \liminf_{n \longrightarrow +\infty} J(u_n)$$

1.3 Espace L^p et H^1

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

1.3.1 Espace L^p

Définition 1.19. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \ \text{ mesurable et } \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty\}.$$

est sa norme définie par

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.20. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \ \text{ mesurable et } \exists C > 0 : |f(x)| \ \leq C \text{ p.p sur } \ \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \ \text{ p.p sur } \ \Omega\}.$$

Théorème 1.5. ***(La convergence dominée de Lebesgue)****[8] Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que*

(a) *$(f_n(x)) \to f(x)$ p.p. Sur Ω.*

(b) *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$, telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. Sur Ω.*

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \ \textit{ et } \ \|f_n - f\|_{L^1} \to 0, \ n \to \infty.$$

Théorème 1.6. *[8] L'espace L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$, et son dual est L^q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

1.3.2 Espace H^1

Définition 1.21. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ i = 1, ..., N\right\}$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens distribution de v.
L'espace $H^1(\Omega)$ est équipé du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left(uv + \Sigma_i^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx.$$

et la norme correspondante

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \Big[\int_\Omega \Big(v^2 + \Sigma_i^N \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 \Big) dx \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.4. Par définition de la dérivée distributionnelle, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $v \in H^1(\Omega)$
2. $v \in L^2(\Omega)$ il existe $g_1, g_2, ..., g_N \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega g_i \varphi dx = \Sigma \int g_i \varphi dx.$$

Alors, par définition, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = g_i$ au sens de la distribution.

Définition 1.22. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Notons ici que la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ est $H_0^1(\Omega)$ (avec en général $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$).
Alors que la fermeture de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.5. *Soit $u \in H^1(\Omega)$. La fonction u appartient à $H_0^1(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$. En particulier, si $\Omega =]0; 1[$, et $u \in H_0^1(\Omega)$, Alors $u(0) = u(1) = 0$. Par ailleurs,*

$$H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Théorème 1.7. ***(Théorème de Rellich)****[8] Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

Théorème 1.8. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)****[8] Soit f et $g \in L^2(\Omega)$. Alors, nous avons que*

$$\int_\Omega |fg| \leq \Big(\int_\Omega |f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |g|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.9. ***(Inégalité de Hölder)****[8] Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on note q l'exposant conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suppose que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors*

(i) $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

(ii) $\int_\Omega |fg| \leq \Big(\int_\Omega |f|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |g|^q \Big)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q.$

Proposition 1.6. ***(Inégalité de Poincaré)****[16] On suppose que le domaine Ω est borné. Alors il existe une constance C (dépendante de $|\Omega|$) telle que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dans les sections suivantes, nous présenterons la théorie des points critiques et on va définies les points, valeures critiques et la suite minimisante. Puis, on vas donner le Lemme du Col et point selle. Nous introduirons également une condition de compacité connue sous le nom de condition Palais-Smale (PS). La condition (PS) sont nécessaire pour montrer les résultats qui sont utilisant le Lemme du Col (de dimension infinie) d'Ambrosetti et de Rabinowitz (voir [15] et [11]).

1.4 Théorie des points critiques

Définition 1.23. (**Points critiques**) Soit J une fonctionnelle différentiable de X vers $\mathbb{R}$. Un point $u \in X$ est dit critique pour J si et seulement si

$$dJ(u) = 0.$$

Définition 1.24. **(Valeures critiques)** On appelle valeur critique, de la fonctionnelle J, de classe C^1 définie sur X, un nombre $c \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe $u \in X$, tel que

$$J(u) = c, \quad dJ(u) = 0.$$

Proposition 1.7. *[15] Soit X un espace de Banach, et J une application de X vers $\mathbb{R}$, soit $u \in X$. On suppose que*

$$J(u) = \inf_{v \in X} J(v),$$

c'est-à-dire

$$J(u) \leq J(v), \ \forall v \in X.$$

Alors, si J est Gâteaux-différentiable en u, on a

$$d_G J(u) = 0.$$

Démonstration - Sous l'hypothèse de ce proposition, supposons sans perte de généralité que u_0 est un point minimum (sinon considérons la fonction $-J$ au lieu de J).

Comme $u_0 \in U$ et U est ouvert, il existe un nombre réel positif r tel que la boule ouverte $B_r(u_0)$ est contenu dans U.
Maintenant, soit $h \in X \setminus \{0\}$. Alors, pour chaque t tel que

$$|t| \leq \frac{r}{\|h\|}, \quad \text{on a,} \quad J(u_0 + th) \geq J(u_0),$$

et ainsi par le Gâteaux différentiabilité de J à u_0, nous avons

$$d_G J(u_0)(h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}[J(u_0 + th) - J(u_0)] \geq 0.$$

Il s'ensuit également que $d_G J(u_0)(-h) \geq 0$, i.e., $d_G J(u_0)(h) \leq 0$, par linéarité de $d_G J(u_0)$.
Par conséquent, on trouve $d_G J(u_0)(h) = 0$, pour $h \in X$. Ainsi $d_G J(u_0) = 0$. ■

Définition 1.25. Soit $u_0 \in X$. On dit que u_0 est un minimum local pour J si il existe $\delta > 0$ tel que

$$J(u_0) \leq J(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta), \quad v \neq u_0.$$

Proposition 1.8. *[15] Soit $u_0 \in X$, un minimum local de J. Alors si J est Gâteaux différentiable en u_0, alors*

$$d_G J(u_0) = 0.$$

Pour les fonctionnelles convexes (ou espaces convexes), un résultat classique est donné par le théorème suivant

Théorème 1.10. *[17] Soit C un ensemble convexe fermé de X, Banach réflexif.*
Soit $J : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose

i) *J coercive et $J \neq +\infty$, c'est-à-dire*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} J(u) = +\infty.$$

ii) *J $(s.c.i)$ pour la convergence faible. Alors il existe $u \in C$, tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in C} J(v) \quad (< +\infty).$$

Si de plus J est Gâteaux-différentiable en u, alors $d_G J(u) = 0$.

1.4.1 Suite minimisante et infimum

Définition 1.26. (Suite minimisante) Une suite minimisante d'une fonctionnelle $J : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est une suite (x_n) telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x)$$

Théorème 1.11. *[15] Soit X un espace de Banach réflexif, et J une fonctionnelle définie sur X, telle que*

1. *J est $(f.s.c.i)$,*
2. *la suite minimisante de J est bornée sur X,*

alors J atteint son infimum sur X.

1.5 Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$, de norme associée notée $\|.\|$.

Définition 1.27. 1. Soit a une forme bilinéaire définie sur $H \times H$ vérifiant les conditions,

(i) Continue, s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

(ii) Coercive, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2, \quad \forall u \in H.$$

2. L est une forme linéaire définie sur H de plus,

(i) L est continue, l existe une constante $C > 0$ telle que,

$$|L(v)| \leq C\|v\|, \quad v \in H.$$

Théorème 1.12. *[1] Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive et L une forme linéaire continue sur H Alors, il existe un unique élément u de H solution du problème*

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, u est l'unique solution du problème de minimisation suivant,

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in H,$$

où J est défnie sur H par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

1.6 Lemme du Col

1.6.1 Suite et condition de Palais-Smale

Définition 1.28. [20] Soit E un espace Banach et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. On dit que J satisfait la condition de Palais-Smale, notée (PS), s'il y a une suite (u_n) dans E telle que

$$(J(u_n)) \text{ bornée, et } \ J'(u_n) \to 0, \text{quand } \ n \to +\infty \tag{1.3}$$

admet une sous-suite convergente.
Toute suite satisfaisante (1.3) est appelée suite de Palais-Smale.

Définition 1.29. On dit que M est borné et faible fermé séquentiellement, c'est-à-dire, pour toute suite (u_n) dans M telle que, $u_n \rightharpoonup u$ quand $n \to \infty$, nous avons toujours $u \in M$.

1.6.2 Lemme du Col en dimension infinie

Théorème 1.13. ***(Lemme du Col)****[15], [11],*
Soit E un espace de Banach réel et $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfait $(PS)_c$ la condition de Palais-Smale au niveau c, avec $J(0) = 0$. Supposons que

(a) *Il existe $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $J(u) \geq \alpha$ pour $u \in E$ avec $\|u\| = \rho$;*

(b) *Il existe $e \in E$, $\|e\|_E > \rho$ tel que $J(e) < 0$.*

Alors J admet une valeur critique $c \geq \alpha$. De plus, c peut être caractérisée par
On définit

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0,1], E) \mid \quad \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}. \tag{1.4}$$

Alors

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq x \leq 1} J(\gamma(x)) \geq \alpha, \tag{1.5}$$

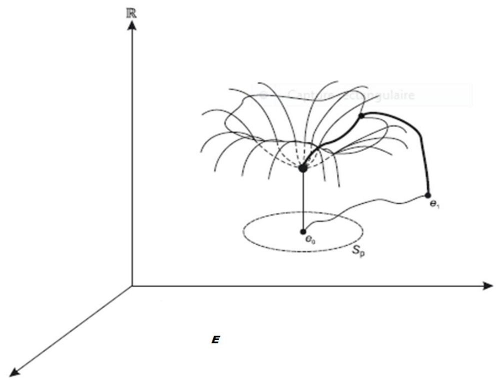
est une valeur critique de $J(u)$.

Remarque 1.5. Géométriquement, lorsque $E = \mathbb{R}^2$ les hypothèses (a) et (b) signifient que l'origine se situe dans une vallée entourée d'une montagne

$$\Gamma_\gamma = \{(x, \gamma(x)) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in \mathbb{R}^2\}.$$

Il doit donc exister un Col de montagne joignant $(0,0)$ et $(1, \gamma(1))$ qui contient une valeur critique (voir figure en-dessous).

FIGURE 1.1 – Col de la montagne entre "villages" e_0 et e_1, qui illustration les conditions géométriques (a) et (b) de Lemme 1.13.



Remarque 1.6. Notez que la condition (PS) est essentielle dans le théorème 1.13.

1.7 Méthode variationnelle

Soit (Eq) une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles), on veut l'étudier par une méthode variationnelle. Les solutions sont alors cherchées comme points critiques d'une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach X bien précis telle que :

i) J est au moins Gateaux-différentiable.

ii) L'équation d'Euler correspondante : $d_G J(u) = 0$ est équivalente à (Eq).

Dans le cas où J est minorée (respectivement majorée), il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum (respectivement le maximum) est atteint.

1.8 Équation différentielle impulsive

Une équation différentielle impulsive est une équation différentielle qui contient des impulsions ou des sauts dans la fonction dérivée. Plus précisément, une équation différentielle impulsive peut être écrite sous la forme :

$$u''(x) = f(x, u(x)), \quad x \in [0, T],$$

avec des conditions initiales $u(0) = u_0$, et des conditions d'impulsion de la forme :

$$u(x^+) - u(x^-) = I(x, u(x)), \quad x \in [0, T],$$

où $u(x^+)$ et $u(x^-)$ représentent les limites droite et gauche de la fonction u à l'instant x, et $I(x, u(x))$ est une fonction donnée. Cette condition signifie que la fonction u subit un saut à l'instant x, et le saut est déterminé par la fonction I.

CHAPITRE 2

EXISTENCE DE SOLUTION D'UN PROBLÈME AUX LIMITES DE SECOND ORDRE IMPULSIF PAR LA MÉTHODE VARIATIONNELLE

Dans ce chapitre, nous discutons l'existence de solution pour une équation de second ordre impulsive. Pour obtenir nos résultats, nous utilisons la méthode variationnelle. En particulier, nous utilisons un théorème de minimisation et le technique de coercivité. Nous avons utilisé comme exemple l'article [21] qui a été publié par les auteurs Zhiguo Luo, Jingli Xie and Guoping Chen en 2014.

2.1 Introduction

Nous étudions le problème impulsif suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x, u(x)), \quad x \neq x_j, \ x \in [0, T], T > 0, \\ -\Delta u'(x_j) = I_j(u(x_j)), \quad j = 1, 2, ..., m, \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), g \in L^\infty[0, T], g(x) > 0, I_j \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), 0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_m < x_{m+1} = T, \alpha, \beta$ sont des constantes avec $\alpha \geq 0, \beta > 0$, et l'opérateur Δ est défini comme,

$$\Delta u'(x_j) = u'(x_j^+) - u'(x_j^-) = \lim_{x \to x_i^+} u'(x) - \lim_{x \to x_i^-} u'(x).$$

2.2 Structure variationnelle

2.2.1 Les espaces convalable

Nous présentons maintenant l'espace de Hilbert $H^1(0, T)$ qui convient à l'étude de notre problème. Soit l'espace de Hilbert H^1 telle que

$$H^1([0, T]) = \left\{ u \in L^2([0, T]) : u' \in L^2([0, T]) \right\},$$

et soit l'espace $H^2([0,T])$ qui définie comme

$$H^2([0,T]) = \left\{u \in L^2([0,T]) : u', u'' \in L^2([0,T])\right\},$$

on prendre $H = \{u \in H^1([0,T]) : u(0) = 0\}$. Alors H est un espace de Hilbert, et muni par le produit scalaire,

$$(u,v) = \int_0^T u'(x)v'(x)\, dx + \int_0^T g(x)u(x)v(x)\, dx,$$

et la norme associée

$$\|u\| = \left(\int_0^T (u'(x))^2\, dx + \int_0^T g(x)u^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit l'espace des fonctions définies et continue sur $[0,T]$, i.e,

$$C[0,T] = \{u : [0,T] \to \mathbb{R},\ \text{telle que u continue }\},$$

muni par sa norme usuelle

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in[0,T]} |u(x)|.$$

2.2.2 La fonctionnelle d'Euler-Lagrange

Nous définissons maintenant la fonction d'Euler-Lagrange associée au problème (2.1).
Alors J définie sur $H([0,T])$, par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \Big[(u'(x))^2 + g(x)u^2\Big]dx - \int_0^T F(x,u)\, dx - \sum_{j=1}^{m}\int_0^{u(x_j)} I_j(u)dx + \frac{\alpha}{2\beta}u^2(T), \qquad (2.2)$$

telle que $F(x,u) = \int\limits_0^u f(x,s)ds$.

Remarque 2.1. On montre que, pour tous $u, v \in H$ et pour tout $x \in [0,T]$:

$$-\int_0^T u''(x)v(x)\, dx = \int_0^T u'(x)v'(x)\, dx - \sum_{j=1}^{m} I_j\Big(u(x_j)\Big)v(x_j) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)v(T),$$

pour tout $u, v \in H(0,T)$. Donc, on a :

$$-\int_0^T u''(x)v(x)\, dx = -\int_0^{x_1^-} u''(x)v(x)\, dx - \int_{x_1^+}^{x_2^-} u''(x)v(x)\, dx - \ldots - \int_{x_{m-1}^+}^{x_m^-} u''(x)v(x)\, dx - \int_{x_m^+}^{T} u''(x)v(x)\, dx.$$

En utilisant de l'intégration par parties, nous avons que :

$$\begin{aligned}
-\int_0^{x_1^-} u''(x)v(x)\, dx &= -\Big[u'(x)v(x)\Big]_0^{x_1^-} + \int_0^{x_1^-} u'(x)v'(x)\, dx \\
&= -u'(x_1^-)v(x_1^-) + u'(0)v(0) + \int_0^{x_1^-} u'(x)v'(x)\, dx,
\end{aligned}$$

en utilisant les conditions aux limites dans (2.1), on trouve

$$-\int_0^{x_1^-} u''(x)v(x)\,dx = -u'(x_1^-)v(x_1^-) + \int_0^{x_1^-} u'(x)v'(x)\,dx,$$

aussi :

$$\begin{aligned} -\int_{x_1^+}^{x_2^-} u''(x)v(x)\,dx &= -\Big[u'(x)v(x)\Big]_{x_1^+}^{x_2^-} + \int_{x_1^+}^{x_2^-} u'(x)v'(x)\,dx \\ &= -u'(x_2^-)v(x_2^-) + u'(x_1^+)v(x_1^+) + \int_{x_1^+}^{x_2^-} u'(x)v'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Ainsi de suite,

$$\begin{aligned} -\int_{x_{m-1}^+}^{x_m^-} u''(x)v(x)\,dx &= -\Big[u'(x)v(x)\Big]_{x_{m-1}^+}^{x_m^-} + \int_{x_{m-1}^+}^{x_m^-} u'(x)v'(x)\,dx \\ &= -u'(x_m^-)v(x_m^-) + u'(x_{m-1}^+)v(x_{m-1}^+) + \int_{x_{m-1}^+}^{x_m^-} u'(x)v'(x)\,dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\int_{x_m^+}^{T} u''(x)v(x)\,dx &= -\Big[u'(x)v(x)\Big]_{x_m^+}^{T} + \int_{x_m^+}^{T} u'(x)v'(x)\,dx \\ &= -u'(T)v(T) + u'(x_m^+)v(x_m^+) + \int_{x_m^+}^{T} u'(x)v'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Et comme,

$$\Delta u'(x_1)v(x_1) = \big(u'(x_1^+) - u'(x_1^-)\big)\,v(x_1) ... \Delta u'(x_m)v(x_m) = \big(u'(x_m^+) - u'(x_m^-)\big)\,v(x_m).$$

Donc par définition de impulsives et les conditions aux limites dans (2.1), on a

$$\begin{aligned} \Delta u'(x_1)v(x_1) + \Delta u'(x_2)v(x_2) + ... + \Delta u'(x_m)v(x_m) &= \sum_{j=1}^{m} \Delta u'(x_j)v(x_j) \\ &= -\sum_{j=1}^{m} I_j\Big(u(x_j)\Big)v(x_j), \end{aligned}$$

et comme, on a

$$\alpha u(T) + \beta u'(T) = 0 \Longrightarrow u'(T) = -\frac{\alpha}{\beta}u(T).$$

Alors, par substitution on a :

$$\int_0^{x_1^-} u'(x)v'(x)\,dx + \int_{x_1^+}^{x_2^-} u'(x)v'(x)\,dx + \int_{x_{m-1}^+}^{x_m^-} u'(x)v'(x)\,dx + \int_{x_m^+}^{T} u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^T u'(x)v'(x)\,dx,$$

donc, en résulte que

$$-\int_0^T u''(x)v(x)\,dx = \int_0^T u'(x)v'(x)\,dx - \sum_{j=1}^{m} I_j\Big(u(x_j)\Big)v(x_j) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)v(T).$$

Proposition 2.1. *[21] La fonctionnelle J est continuement différentiable et la dérivée de Fréchet de J s'écrit sous la forme*

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_0^T [u'(x)v'(x) + g(x)u(x)v(x)]\, dx - \int_0^T f(x, u(x))v(x)dx - \sum_{j=1}^m I_j\Big(u(x_j)\Big)v(x_j) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)v(T), \tag{2.3}$$

pour tout $v \in H^1([0,T])$.

Démonstration - **Étape 1 :** Montrons que J est Gâteaux-différentiable. Pour tout $v \in H^1([0,T])$ et $0 < x < T$, on a

$$\begin{aligned}
J(u+tv) - J(u) &= \frac{1}{2}\int_0^T \Big[\Big((u+tv)'\Big)^2 + g(u+tv)^2\Big]dx - \int_0^T F(u+tv)dx - \sum_{j=1}^m \int_0^{u+tv} I_j(x)dx \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\beta}(u+tv)^2 - \frac{1}{2}\int_0^T \Big[(u)^2 + g(u)^2\Big]dx + \int_0^T F(u)\, dx + \sum_{j=1}^m \int_0^u I_j(x)\, dx \\
&\quad - \frac{\alpha}{2\beta}(u)^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T (u')^2\, dx + \frac{1}{2}t^2 \int_0^T (v')^2\, dx + t\int_0^T u'v'\, dx + \frac{1}{2}\int_0^T gu^2\, dx + \frac{1}{2}t^2\int_0^T gv^2\, dx \\
&\quad + t\int_0^T guv\, dx - \int_0^T F(u+tv)dx - \sum_{j=1}^m \int_0^{u(x_j)} I_j(u+tv)dx + \frac{\alpha}{2\beta}u^2 + \frac{\alpha}{2\beta}t^2v^2 \\
&\quad + \frac{\alpha t}{\beta}uv - \frac{1}{2}\int_0^T (u')^2\, dx - \frac{1}{2}\int_0^T gu^2\, dx + \int_0^T F(u)dx + \sum_{j=1}^m \int_0^{u(x_j)} I_j(u)dx \\
&\quad - \frac{\alpha}{2\beta}u^2 \\
&= \frac{1}{2}t^2\int_0^T (v')^2\, dx + t\int_0^T u'v'\, dx + \frac{1}{2}t^2\int_0^T gv^2\, dx + t\int_0^T guv\, dx + \frac{\alpha}{2\beta}t^2v^2 + \frac{\alpha t}{\beta}uv \\
&\quad - \int_0^T \Big[F(u+tv) - F(u)\Big]dx - \sum_{j=1}^m \Big[\int_0^{u+tv} I_j(x)\, dx - \int_0^u I_j(x)\, dx\Big],
\end{aligned}$$

en utilisant la formule des accroissements finis, on a

$$F(u+tv) - F(u) = t\int_0^T f(u+t\theta v)v\, dx,$$

et

$$\int_0^{u+tv} I_j(x)\, dx - \int_0^u I_j(x)\, dx = tv(x_j)I_j\Big(u(x_j) + \theta v(x_j)\Big),$$

òu $0 < \theta < T$ et puis

$$\begin{aligned}
\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} &= \frac{1}{2}t\int_0^T (v')^2\, dx + \int_0^T u'v'\, dx + \frac{1}{2}t\int_0^T gv^2\, dx + \int_0^T guv\, dx + \frac{\alpha}{2\beta}tv^2 + \frac{\alpha}{\beta}uv \\
&\quad - \int_0^T f(u+t\theta v)vdx - \sum_{j=1}^m v(x_j)I_j\Big(u(x_j) + \theta v(x_j)\Big),
\end{aligned}$$

soit $t \longrightarrow 0$, alors

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_0^T \Big[u'v' + guv\Big]\, dx - \int_0^T f(x,u)v\, dx - \sum_{j=1}^m I_j(u)v\, dx + \frac{\alpha}{\beta}uv.$$

Étape 2 : J' est continue. En effet, soit u_n une suite dans H tel que $u_n \longrightarrow u$, alors

$$\langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle = \int_0^T \Big[(u_n' - u')v' + g(u_n - u)v\Big]\, dx - \int_0^T \Big(f_\varepsilon(u_n) - f(u)\Big)v - \sum_{j=1}^m I_j(u_n - u)v\, dx$$
$$+ \frac{\alpha}{\beta}(u_n - u)v\, dx,$$

à partir du théorème de convergence dominé de Lebesgue 1.5, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^T f(u_n)v\, dx &= \int_0^T f(u)v\, dx.\\
\lim_{n\to+\infty}\int_0^T u_n'v'\, dx &= \int_0^T u'v'\, dx.\\
\lim_{n\to+\infty}\int_0^T gu_nv\, dx &= \int_0^T guv\, dx.
\end{aligned}$$

Et d'aprés la continuité de f, on passant à la limite dans $\langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle$ quand $n \to +\infty$ nous obtenons que $J'(u_n) \to J(u)$ dans $H^{-1}(0,T)$. Donc J' est continue. Finalement, J est Gâteaux-différentiable et continue. Alors J est continument différentiable. ∎

Définition 2.1. On dit que $u \in H^1(0,T)$ est une solution faible du problème (2.1), si pour tout $v \in H^1(0,T)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle J'(u), v\rangle &= \int_0^T u'(x)v'(x)\, dx + \int_0^T g(x)u(x)v(x)\, dx - \sum_{j=1}^m I_j\Big(u(x_j)\Big)v(x_j) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)v(T)\\
&= \int_0^T f(x,u(x))v(x)dx.
\end{aligned}$$

2.2.3 Point critique et solution classique

Lemme 2.1. *[21] Si la fonction $u \in H$ est un point critique de la fonction J, alors u est une solution classique du système (2.1).*

Démonstration - En utilisant l'équation (2.3), on a

$$\int_0^T \left[u'(x)v'(x) + g(x)u(x)v(x)\right] \, dx - \int_0^T f(x,u(x))v(x) \, dx - \sum_{j=1}^{m} I_j\Big(u(x_j)\Big)v(x_j) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)v(T)$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\Big(\Delta u'(x_j) + I_j(u(x_j))\Big)v(x_j) + \int_0^T \Big(-u''(x) + g(x)u(x)\Big)v(x) \, dx - \int_0^T f(x,u(x))v(x) \, dx + \Big(u'(T) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)\Big)v(T), \tag{2.4}$$

tel que

$$\begin{aligned}\int_0^T u'(x)v'(x) \, dx &= \Big[u'(x)v(x)\Big]_0^T - \int_0^T u''(x)v(x) \, dx \\ &= u'(T)v(T) - \int_0^T u''(x)v(x) \, dx.\end{aligned}$$

Combiner (2.3) et (2.4), on a

$$-\sum_{j=1}^{m}\Big(\Delta u'(x_j) + I_j(u(x_j))\Big)v(x_j) + \int_0^T \Big(-u''(x) + g(x)u(x)\Big)v(x) \, dx - \int_0^T f(x,u(x))v(x) \, dx + \Big(u'(T) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)\Big)v(T) = 0, \quad \forall v \in H. \tag{2.5}$$

Pour tout $j \in 1,2,...,m$, nous choisissons $v \in H$ avec $v(x) = 0$ pour tout $x \in \Big[0, x_j\Big] \bigcup \Big[x_{j+1}, T\Big]$, alors

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(-u''(x) + g(x)u(x) - f(x,u(x))\right) v(x)dx = 0.$$

On a

$$-u''(x) + g(x)u(x) = f(x,u(x)) \;\; \forall x \in (x_j, x_{j+1}),$$

alors u satisfait l'équation dans (2.1). Par conséquent, d'après (2.6), nous avons

$$-\sum_{j=1}^{m}(\Delta u'(x_j) + I_j(u(x_j)))v(x_j) + \left(u'(T) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)\right) v(T) = 0, \; \forall v \in H. \tag{2.6}$$

Ensuite, nous prouvons que u satisfait la condition impulsive et les conditions aux limites dans (2.1). Si la condition impulsive dans (2.1) ne pas satisfaite, alors il existe des $j \in 1,2,...,m$, tel que

$$\Delta u'(x_j) + I_j(u(x_j)) \neq 0.$$

On prendre $v(x) = \prod_{i=0,i\neq j}^{m+1}(x - x_i)$, tel que

$$\prod_{i=0,i\neq j}^{m+1}(x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_j)...(x - x_m)(x - T).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{m}\Big(\Delta u'(x_j) + I_j(u(x_j))\Big)v(x_j) + \Big(u'(T) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)\Big)v(T) \\
&\quad = -\sum_{j=1}^{m}\Big(\Delta u'(x_j) + I_j(u(x_j))\Big)\prod_{i=0,i\neq j}^{m+1}(x_j - x_i) + \Big(u'(T) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)\Big)\prod_{i=0,i\neq j}^{m+1}(x_{m+1} - x_i),
\end{aligned}$$

en utilisant la définition la condition impulsive dans (2.1), on a,

$$-\Delta u'(x_1) - I_j(u(x_1)) = \quad I_j(u(x_1)) - I_j(u(x_1)), \quad \forall i \neq j = 0,$$

et

$$-\Delta u'(x_2) - I_j(u(x_2)) = \quad I_j(u(x_2)) - I_j(u(x_2)), \quad \forall i \neq j = 0.$$

Ainsi de suite,

$$-\Delta u'(x_m) - I_j(u(x_m)) = \quad I_j(u(x_m)) - I_j(u(x_m)), \quad \forall i \neq j = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{m}\Big(\Delta u'(x_j) + I_j(u(x_j))\Big)v(x_j) + \left(u'(T) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)\right)v(T) \\
&\quad = -\Big(\Delta u'(x_j) + I_j(u(x_j))\Big)\prod_{i=0,i\neq j}^{m+1}(x_j - x_i) \neq 0.
\end{aligned}$$

C'est une contradiction. Donc u satisfait la condition impulsive dans (2.1) et (2.6) implique

$$\left(u'(T) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)\right)v(T) = 0, \ \ \forall v \in H.$$

Si, $\alpha u(T) + \beta u'(T) \neq 0$, on prendre $v(x) = \prod_{i=0,i\neq j}^{m+1}(x - x_i)$, on trouve,

$$\begin{aligned}
&\Big(u'(T) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)\Big)\prod_{i=0}^{m+1}(x_{m+1} - x_i) \\
&= \Big(u'(T) + \frac{\alpha}{\beta}u(T)\Big)(x_{m+1} - x_1)(x_{m+1} - x_2)...(x_{m+1} - x_{m+1}) \neq 0.
\end{aligned}$$

C'est une contradiction, donc u satisfait la condition aux limites. Donc, u est une solution classique du système (2.1). $\blacksquare$

Lemme 2.2. *[21] Si une fonction $u \in H$ est un point critique d'une fonction J Fréchet différentiable, alors u est une solution faible du système (2.1).*

Remarque 2.2. Puisque le terme non linéaire f est continue, alors une solution classique de problème (2.1) est une solution faible.

2.2.4 Quelques lemmes et théorèmes importantes

Théorème 2.1. ***(Théorèmes de minimisation)****[14] Soient X un espace de Banach réflexif, et J une fonctionnelle définie sur X, telle que*

1. $\|x\|_X \longrightarrow +\infty, \quad J(x) = +\infty$ *(coercivité uniforme).*
2. *J est faiblement semi-continue inférieurement,*

alors J est bornée inférieurement sur X et atteint sa borne inférieure en un point x_0. De plus, si J est Gâteaux différentiable en x_0, alors $Grad\ J(x_0) = 0$.

Lemme 2.3. *[21] L'espace H s'injecte de manière continue dans $C[0,T]$, et $\|u\|_\infty = \max_{x\in[0,T]} |u(x)|$, telle que*

$$\|u\|_\infty \leq T^{\frac{1}{2}}\|u\|, \quad \forall u \in H.$$

Démonstration - Soit $u \in H$, on a

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^x u'(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^x |u'(s)|\, ds \leq \int_0^T |u'(x)|\, dx, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz , nous avons

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \left(\int_0^T dx \right)^{1/2} \left(\int_0^T |u'(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \\ \max_{x\in[0,T]} |u(x)| &\leq \sqrt{T}\|u\|. \end{aligned}$$

D'ou

$$\|u\|_\infty \leq \sqrt{T}\|u\|.$$

■

Lemme 2.4. *L'espace H s'injecte de manière continue dans $L^2[0,T]$, telle que*

$$\|u\|_2 \leq T\|u\|, \quad \forall u \in H.$$

Démonstration - Soit $u \in H$, d'aprés lemme 2.3, on a

$$|u(x)|^2 \leq T\|u\|^2,$$

et on intégré sur $[0, T]$

$$\int_0^T |u(x)|^2 dx \leq T\|u\|^2 \int_0^T \, dx$$
$$\int_0^T |u(x)|^2 dx \leq T^2\|u\|^2$$
$$\left(\int_0^T |u(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(T^2\|u\|^2\right)^{1/2},$$

d'ou

$$\|u\|_2 \leq T\|u\|.$$

∎

Remarque 2.3. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $H^1([0, T])$, alors il existe une sous-suite (u_{n_k}) on note aussi (u_n), telles que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \;\; H^1[0, T], \\ u_n \longrightarrow u \quad \text{dans} \;\; C[0, T], \\ u_n(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{pour tout} \;\; x \in [0, T]. \end{cases}$$

Lemme 2.5. *[21] La fonctionnelle J est continue, continuement différentiable, et faiblement semi-continue inférieurement.*

Démonstration - D'après la proposition 2.1, la fonctionnelle J est continue, continuement différentiable, donc, il reste de démontrer que J est faiblement semi-continue inférieurement. Pour montrer que J est faiblement semi-continue inférieurement, supposons que $\{u_n\}$ une suite converge faiblement vers u dans H, alors

$$\|u\| \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|u_n\|,$$

et d'après l'injection compact de l'espace $H = H^1([0, T])$ dans $C[0, T]$, (voir remarque 2.3), alors, la suite $\{u_n\}$ converge uniformément vers u quand $n \to \infty$, dans $C[0, T]$, et on a, donc,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} J(u_n) &= \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_0^T F(x, u(x))dx - \sum_{j=1}^m \int_0^{u(x_j)} I_j(x)dx + \frac{\alpha}{2\beta}u_n^2(T)\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^T F(x, u(x))dx - \sum_{j=1}^m \int_0^{u(x_j)} I_j(x)dx + \frac{\alpha}{2\beta}u^2(T) \\ &= J(u). \end{aligned}$$

Donc J est faiblement semi-continue inférieurement. ∎

Lemme 2.6. *Soient H un espace de Hilbert et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire bornée. Si a est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in H$,*

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2,$$

alors pour tout $\sigma \in H'$ (l'espace dual de H), il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = (\sigma, v),$$

pour tout $v \in H$.

Lemme 2.7. *[13] Si J est une fonctionnelle faiblement semi-continue inférieurement sur un espace de Banach réflexif X et possède une suite minimisant bornée, alors J possède un minimum sur X.*

Remarque 2.4. L'existence d'une suite minimisant bornée sera notamment assurée lorsque la fonctionnelle J est coercitive.

2.3 Existence d'une solution unique

Dans cette section, nous déduisons les conditions sous lesquelles le système (2.1) admet une solution unique.

Théorème 2.2. *[21] Supposons que $d_j (j = 1, 2, ..., m)$, sont des constantes fixes, $f(x,u) = \sigma(x) \in L^2[0,T]$ et $I_j(x) = d_j (j = 1, 2, ..., m)$. Alors, le système (2.1) admet une solution unique u, et u minimise la fonctionnelle J.*

Démonstration - On définit la forme bilinéaire

$$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; a(u,v) = \int_0^T \Big(u'(x)v'(x) + g(x)u(x)v(x) \Big) dx + \frac{\alpha}{\beta} u(T)v(T),$$

et l'opérateur linéaire

$$l : H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l(v) = \int_0^T \sigma(x)v(x)dx - \sum_{j=1}^{m} d_j v(x_j).$$

1. La forme bilinéaire a est continue : Pour tout $u, v \in H$, on a

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left| \int_0^T \Big(u'(x)v'(x) + g(x)u(x)v(x) \Big) dx + \frac{\alpha}{\beta} u(T)v(T) \right| \\ &\leq \left| \int_0^T u'(x)v'(x)dx \right| + \left| \int_0^T g(x)u(x)v(x)dx \right| + \left| \frac{\alpha}{\beta} u(T)v(T) \right|, \end{aligned}$$

en utilisant par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq \|u'\|_2\|v'\|_2 + \|g\|_\infty\|u\|_2\|v\|_2 + \frac{|\alpha|}{|\beta|}\|u\|_2\|v\|_2 \\ &\leq \|u\|\|v\| + \|g\|_\infty\|u\|\|v\| + \frac{|\alpha|}{|\beta|}\|u\|\|v\| \\ &\leq \|u\|\|v\|\Big(1 + \|g\|_\infty + \frac{|\alpha|}{|\beta|}\Big) \\ &\leq C_1\|u\|\|v\|,\end{aligned}$$

où la constante C_1 est donnée par

$$C_1 = 1 + \|g\|_\infty + \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Alors la forme bilinéaire a est continue sur $H \times H$.

2. a est symétrique : Pour tout $u, v \in H$, on a

$$\begin{aligned}a(u,v) &= \int_0^T \Big(u'(x)v'(x) + g(x)u(x)v(x)\Big)dx + \frac{\alpha}{\beta}u(T)v(T) \\ &= \int_0^T \Big(v'(x)u'(x) + g(x)v(x)u(x)\Big)dx + \frac{\alpha}{\beta}v(T)u(T) \\ &= a(v,u).\end{aligned}$$

3. a est coercive : Soit $u \in H$, on a

$$\begin{aligned}a(u,u) &= \int_0^T \Big(u'(x)^2 + g(x)u(x)^2\Big)dx + \frac{\alpha}{\beta}u^2(T) \\ &= \|u\|^2 + \|g\|_\infty\|u\|^2 + \frac{\alpha}{\beta}\|u\|_\infty \\ &\geq \|u\|^2,\end{aligned}$$

alors

$$a(u,u) \geq C_2\|u\|^2,$$

tel que $C_2 = 1$.

4. l est borné : Soit $v \in H$, on a

$$|l(v)| = \left|\int_0^T \sigma(x)v(x)dx - \sum_{j=1}^m d_j v(x_j)\right| \leq \left|\int_0^T \sigma(x)v(x)dx\right| + \left|\sum_{j=1}^m d_j v(x_j)\right|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour premier terme :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \sigma(x)v(x)dx\right| &\leq \left(\int_0^T \sigma^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_0^T v^2(x)dx\right)^{1/2}\\ &\leq \|\sigma\|_2\|v\|.\end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans l'inégalité initiale, nous obtenons :

$$\begin{aligned}|l(v)| &\leq \|\sigma\|_2\|v\| + \left|\sum_{j=1}^m d_j v(x_j)\right|\\ &\leq \|\sigma\|_2\|v\| + \sum_{j=1}^m |d_j||v(x_j)|\\ &\leq \|\sigma\|_2\|v\| + \sup_{j\in[1,m]}|v(x_j)|\sum_{j=1}^m |d_j|.\end{aligned}$$

On pose $C_3 = |\sigma\|_2 + \sum_{j=1}^m |d_j|$, alors

$$|l(v)| \leq C_3\|v\|.$$

Alors, d'après lemme 2.6 et théorème 1.12, le système (2.1) admet une solution unique u, et u minimise la fonctionnelle J. ∎

Exemple 2.1. Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = 0, \quad x \neq x_1, x \in [0,1],\\ -\Delta u'(x_1) = 1, \quad x_1 = \frac{1}{2},\\ u(0) = 0, \qquad u(1) + u'(1) = 0.\end{cases} \tag{2.7}$$

Ici $g(x) = 1, f(x,u) = 0, I_j(u) = 1, T = 1, j = 1, \alpha = 1, \beta = 1$. En appliquant le théorème 2.2, le problème (2.7) admet une solution unique. Par des calculs simples, on obtient
$u(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}(e^x - e^{-x}), x \in [0, \frac{1}{2}], u(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{-1}{2}})e^{-x}, x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

2.4 Existence d'un solution non triviale

Dans cette section, nous dérivons les conditions sous lesquelles le système (2.1) admet au moins une solution non triviale. pour cela, nous introduisons l'hypothèse suivante :
(H1) Il existe $a, b, a_j, b_j > 0, \gamma, \gamma_j \in [0,1), j = 1,2,...,m,$ tel que

$$|f(x,u)| \leq a + b|u|^\gamma, \quad |I_j(u)| \leq a_j + b_j|u|^{\gamma_j},$$

pour tout $x \in [0, T]$.

Théorème 2.3. *[21] Supposons que* **(H1)** *est satisfaite, alors le système (2.1) admet au moins une solution u, et u minimise la fonctionnelle J.*

Démonstration - D'aprés l'équation (2.2), on a

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^T F(x, u(x))dx - \sum_{j=1}^{m} \int_0^{u(x_j)} I_j(x)dx + \frac{\alpha}{2\beta}u^2(T),$$

en utilisant l'hypothèse **(H1)**, nous avons

$$\begin{aligned}
|F(t,u)| &= \int_0^u |f(x,s)|\, ds \\
&\leq \int_0^u (a + b|u|^\gamma)\ ds \\
&\leq a\int_0^u\ ds + \frac{b}{\gamma+1}|u|^{\gamma+1} \\
&\leq a|u| + \frac{b}{\gamma+1}|u|^{\gamma+1} \\
\int_0^T |F(x,u)|\, dx &\leq \int_0^T \left(a|u| + \frac{b}{\gamma+1}|u|^{\gamma+1}\right)\ dx \\
&\leq T\left(a|u| + \frac{b}{\gamma+1}|u|^{\gamma+1}\right),
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{u(x_j)} |I_j(u)|\, dx &\leq \int_0^{u(x_j)} (a_j + b_j|u|^{\gamma_j})\ dx \\
&\leq a_j\int_0^{u(x_j)}\ dx + \frac{b_j}{\gamma_j+1}|u|^{\gamma_j+1} \\
&\leq a_j|u| + \frac{b_j}{\gamma_j+1}|u|^{\gamma_j+1}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - T\left(a|u| + \frac{b}{\gamma+1}|u|^{\gamma+1}\right) - \sum_{j=1}^{m} a_j|u| + \frac{b_j}{\gamma_j+1}|u|^{\gamma_j+1} \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - T\left(a\|u\|_\infty + \frac{b}{\gamma+1}\|u\|_\infty^{\gamma+1}\right) - \sum_{j=1}^{m}\left(a_j\|u\|_\infty + \frac{b_j}{\gamma_j+1}\|u\|_\infty^{\gamma+1}\right),
\end{aligned}$$

en utilisant lemme 2.3, on a

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - T\left(a_jT^{\frac{1}{2}}\|u\| + \frac{b}{\gamma+1}T\frac{\gamma+1}{2}\|u\|^{\gamma+1}\right) - \sum_{j=1}^{m}\left(a_jT^{\frac{1}{2}}\|u\| + \frac{b_j}{\gamma_j+1}T^{\frac{\gamma_j+1}{2}}\|u\|^{\gamma_j+1}\right),\ \ \forall u \in H.$$

Cela implique que J est coercive. Soit $\{u_n\}$ une suite converge faiblement vers u dans H, alors $\{u_n\}$ converge uniformément vers u dans $C[0,T]$.

Soit

$$\begin{aligned} J_1(u) &= -\int_0^T F(x,u(x))dx - \sum_{j=1}^{m} \int_0^{u(x_j)} I_j(x)dx + \frac{\alpha}{2\beta}u^2(T), \\ J_2(u) &= \frac{1}{2}\int_0^T \Big[u'(x))^2 + g(x)u^2(x)\Big]dx, \end{aligned}$$

alors $J(u) = J_1(u) + J_2(u)$. donc J_1 est faiblement continue séquentiellement. Clairement, J_2 est continue et convexe, ce qui implique que J_2 est faiblement semi-continue inférieurement séquentiellement. Donc, J est faiblement semi-continue inférieurement séquentiellement sur H. Alors, d'après le lemme 2.7, la fonctionnelle J a un minimum qui est un point critique de J. Ainsi, le système (2.1) admet au moins une solution. ■

Exemple 2.2. Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = 1 + u(x)^{\frac{1}{3}}, \quad x \neq x_1, x \in [0,1], \\ -\Delta u'(x_1) = 1 + u(x)^{\frac{1}{5}}, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \\ u(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Ici $g(x) = 1, f(x,u) = 1 + u(x)^{\frac{1}{3}}, I_j(u) = 1 + u(x)^{\frac{1}{5}}, T = 1, j = 1, \alpha = 1,$
$\beta = 1$. Clairement, **(H1)** est satisfait. En appliquant le théorème 2.3, donc, le problème (2.8) admet au moins une solution.

CHAPITRE 3

EXISTENCE ET MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME AUX LIMITES DE SECOND ORDRE IMPULSIF

Dans ce chapitre, nous discutons l'existence et la multiplicité des solutions pour la même équation de second ordre impulsive (2.1) qui a été publié dans l'article [21].

3.1 Introduction

Soit le problème impulsif (2.1) suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x, u(x)), \quad x \neq x_j, \ x \in [0, T], T > 0, \\ -\Delta u'(x_j) = I_j(u(x_j)), \quad j = 1, 2, ..., m, \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), g \in L^\infty[0, T], g(x) > 0, I_j \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), 0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_m < x_{m+1} = T, \alpha, \beta$ sont des constantes avec $\alpha \geq 0, \beta > 0$, et l'opérateur Δ est défini comme,

$$\Delta u'(x_j) = u'(x_j^+) - u'(x_j^-).$$

Au cours de ce chapitre, nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H1) Il existe $a, b, a_j, b_j > 0, \gamma, \gamma_j \in [0, 1), j = 1, 2, ..., m$, telle que

$$|f(x, u)| \leq a + b|u|^\gamma, \quad |I_j(u)| \leq a_j + b_j|u|^{\gamma_j},$$

pour tout $x \in [0, T]$.

(H2) $\lim\limits_{u \longrightarrow 0} \frac{f(x,u)}{u} = 0$ uniformément pour tout $x \in [0, T]$, $\lim\limits_{u \longrightarrow 0} \frac{I_j(u)}{u} = 0$.

$(H3)$ Il existe des constantes $\mu > 2$ et $r \geq 0$ tel que pour tout $x \in [0, T]$ et $u \in \mathbb{R}$ avec $|u| \geq r$,

$$0 < \mu F(t, u) \leq u f(x, u), \quad 0 < \mu \int_0^u I_j(s) ds \leq u I_j(u), \quad j = 1, 2, ..., m,$$

où $F(x, u)=\int_0^u f(x, s) ds$.

(H4) $f(x, u)$ et $I_j, j=1,2, \ldots, m$, sont impaires par rapport à u.

3.2 Quelques théorèmes et lemmes nécessaires

Théorème 3.1 (théorème de Mazur). *[9] Si (u_k) est une suite dans un espace normé X tel que $u_k \rightharpoonup u$, il existe une suite de combinaisons convexes :*

$$v_k=\sum_{j=1}^k \alpha_{k_j} u_j, \quad \sum_{j=1}^k \alpha_{k_j}=1, \quad \alpha_{k_j} \geq 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*),$$

tel que $v_k \longrightarrow u$ dans X.

Théorème 3.2. *[9] Soit $J: X \rightarrow]-\infty,+\infty]$ une fonctionnelle convexe. Alors J est $(f.s.c.i)$ si seulement si elle est $(s.c.i)$.*

Démonstration - Supposons que $u_i \rightharpoonup u$ et soit $c>\lim J(u_i)$. En allant si nécessaire à une sous-suite, nous pouvons supposer que $c>J(u_i)$ pour tout $i \in N^*$. Selon le théorème de Mazur, il existe une suite (v_k) avec

$$v_k=\sum_{j=1}^k \alpha_{k_j} u_j, \sum_{j=1}^k \alpha_{k_j}=1, \quad \alpha_{k_j} \geq 0,$$

tel que $v_k \rightarrow u$. Comme$J$ est $s.c.i$ et convexe, nous obtenons

$$J(u) \leq \underline{\lim} J(v_k) \leq \underline{\lim}\left(\sum_{j=1}^k \alpha_{k_j} J(u_j)\right) \leq\left(\sum_{j=1}^k \alpha_{k_j}\right) c=c.$$

Comme $c>\underline{\lim} J(u_i)$ est arbitraire, nous avons $J(u) \leq \underline{\lim} J(u_i)$, de sorte que J est $f.s.c.i.$ ∎

Lemme 3.1. *[22] Soit la fonctionnelle $J: M \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$ avec $M \neq \emptyset$, $\min_{u \in M} F(u)=\alpha$ a une solution lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) E est un espace de Banach réel réflexif.

(ii) M est borné et faible fermé séquentiellement.

(iii) J est faiblement semi-continue inférieurement sur M.

Définition 3.1. Soit E un espace Banach et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C. On dit que J satisfait la condition de Ambrosetti-Rabinowitz, s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $r > \varepsilon$ tel que

$$0 < \mu F_\varepsilon(x, u) \leq f_\varepsilon(x, u)u, \quad u > r, \ \forall x \in [0, T].$$

Lemme 3.2. ***(le théorème du col de la montagne)****[9].*

Soient E un espace de Banach et $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfont la condition de Palais-Smale. Supposons qu'il existe $x_0, x_1 \in E$, et un voisinage ouvert borné Ω de x_0 tel que $x_1 \notin \overline{\Omega}$ et

$$\max\{J(x_0), J(x_1)\} < \inf_{x \in \partial\Omega} J(x).$$

Alors il existe une valeur critique de J, c'est-à-dire qu'il existe $u \in E$ tel que $J'(u) = 0$ et $J(u) > \max\{J(x_0), J(x_1)\}$.

Lemme 3.3. ***(Théorème de point selle)****[9].*

Soit E un espace de Banach réel de dimension infinie. Soit $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ une fonctionnelle paire qui vérifie la condition de Palais-Smale, et $J(0) = 0$. Supposons que $E = V \oplus X$, où V est de dimension infinie, et J satisfait que

(i) Il existe $\gamma > 0$ et $\rho > 0$ tels que $J(u) \geq \gamma$ pour tout $u \in X$ avec $\|u\| = \rho$.

(ii) Pour tout sous-espace de dimension finie $W \subset E$ il y a $R = R(W)$ telle que $J(u) \leq 0$ on $W \setminus B_R(W)$.

Alors J possède une suite illimitée de valeurs critiques.

3.3 Résultats d'existence et multiplicité

3.3.1 Existence et multiplicité des solutions distinctes

Dans cette section, nous dérivons quelques conditions suffisantes sous lesquelles la fonction J admet au moins deux points critiques distincts, par conséquent, (2.1) admet au moins deux solutions distinctes.

Théorème 3.3. *[21] Supposons que* ***(H2)*** *et* ***(H3)*** *sont satisfaites. Alors le problème (2.1) admet au moins deux solutions.*

Démonstration - **Étape 1 :** La fonctionnelle J satisfait la condition (PS).

Soit $u_n \subset H$ tal que $J(u_n)$ une suite bornée et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} J'(u_n)=0$. On a

$$\begin{aligned}
J(u_n)-\frac{1}{\mu}J'(u_n)(u_n) &= \frac{1}{2}\int_0^T |u_n'|^2dx-\sum_{j=1}^m\int_0^{u(x_j)} I_j(s)ds-\int_0^T F(x,u_n(x))dx+\frac{\alpha}{2\beta}u_n^2(T)\\
&\quad -\frac{1}{\mu}\int_0^T |u_n'|^2dx+\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^m I_j(u_n(x_j))u_n(x_j)+\frac{1}{\mu}\int_0^T f(x,u_n(x))u_n(x)dx-\frac{\alpha}{\mu\beta}u_n^2(T)\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\frac{\alpha}{\beta}u_n^2(T)-\sum_{j=1}^m\int_0^{u(x_j)} I_j(s)ds+\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^m I_j(u_n(x_j))u_n(x_j)\\
&\quad -\int_0^T F(x,u_n(x))dx+\frac{1}{\mu}\int_0^T f(x,u_n(x))u_n(x)dx\\
&\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2+\sum_{j=1}^m\left(\frac{1}{\mu}I_j(u_n(x_j))u_n(x_j)-\int_0^{u(x_j)} I_j(s)ds\right)\\
&\quad +\int_0^T\left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n(x))u_n(x)-F(x,u_n(x))\right)dx.
\end{aligned}$$

En utilisant le hypothèse $H3$ on a

$$\begin{aligned}
J(u_n)-\frac{1}{\mu}J'(u_n)(u_n) &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2-\sum_{j=1}^m \max_{u_n(x)\in[-r,r]}\left|\frac{1}{\mu}I_j(u_n(x_j))u_n(x_j)-\int_0^{u(x_j)} I_j(s)ds\right|\\
&\quad -\int_0^T \max_{x\in[0,T],u_n(x)\in[-r,r]}\left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n(x))u_n(x)-F(x,u_n(x))\right|dx\\
&\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2-C,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C=\sum_{j=1}^m &\max_{u_n(x)\in[-r,r]}\left|\frac{1}{\mu}I_j(u_n(x_j))u_n(x_j)-\int_0^{u(x_j)} I_j(s)ds\right|\\
&-\int_0^T \max_{x\in[0,T],u_n(x)\in[-r,r]}\left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n(x))u_n(x)-F(x,u_n(x))\right|dx.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\{u_n\}$ est borné dans H. Puisque H est de Banach réflexif, il existe une sous suite de $\{u_n\}$ telle que $\{u_n\}$ converge faiblement vers certains u dans H. Alors la suite $\{u_n\}$ converges uniformément vers u dans $[0,T]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(J'(u_n)-J'(u))(u_n-u)&\longrightarrow 0,\\
\sum_{j=1}^m(I_j(u_n(x_j))-I_j(u(x_j)))(u_n(x_j)-u(x_j))&\longrightarrow 0,\\
\int_0^T(f(x,u_n(x))-f(x,u(x)))(u_n(x)-u(x))dx&\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

comme $n \longrightarrow \infty$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
(J'(u_n) - J'(u))(u_n - u) &= J'(u_n)(u_n - u) - J'(u)(u_n - u) \\
&= \int_0^T (u_n' - u')^2 + \frac{\alpha}{\beta}\Big(u_n(T) - u(T)\Big)^2 \\
&\quad - \sum_{j=1}^{m} \Big(I_j(u_n(x_j)) - I_j(u(x_j))\Big)\Big(u_n(x_j) - u(x_j)\Big) \\
&\quad - \int_0^T \Big(f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))\Big)\Big(u_n(x) - u(x)\Big)dx \\
&= \|u_n - u\|^2 + \frac{\alpha}{\beta}\Big(u_n(T) - u(T)\Big)^2 - \sum_{j=1}^{m} \Big(I_j(u_n(x_j)) - I_j(u(x_j))\Big)\Big(u_n(x_j) - u(x_j)\Big) \\
&\quad - \int_0^T \Big(f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))\Big)\Big(u_n(x) - u(x)\Big)dx,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\|u_n - u\| \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow \infty$. C'est à dire,$\{u_n\}$ converge fortement de u dans H. Donc la fonctionnelle J satisfait la condition (PS).

Étape 2 : On montre qu'il existe $\rho > 0$ tel que la fonctionnelle J possède un minimum local

$$u_0 \in B_\rho = \{u \in H : u < \rho\}.$$

Premièrement, nous affirmons que $\overline{B_\rho}$ est borné et faiblement fermé séquentiellement.

En fait, soit $\{un\} \subseteq \overline{B_\rho}$ et $\{un\} \rightharpoonup u$ comme $n \longrightarrow \infty$. Par théorème de Mazur[10], il existe une suite de combinaisons convexes

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n_j} u_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n_j} = 1, \quad \alpha_{n_j} \geq 0, j \in N$$

tel que $v_n \longrightarrow u$ dans H. $\{v_n\} \subset \overline{B_\rho}$ et $u \in \overline{B_\rho}$, depuis $\overline{B_\rho}$ est un ensemble convexe fermé.

Deuxièmement, nous affirmons que la fonctionnelle J est faiblement semi-continue inférieurement séquentiellement sur $\overline{B_\rho}$.

Soit

$$\begin{aligned}
J_1(u) &= -\int_0^T F(x, u(x))dx - \sum_{j=1}^{m} \int_0^{u(x_j)} I_j(x)dx + \frac{\alpha}{2\beta}u^2(T), \\
J_2(u) &= \frac{1}{2}\int_0^T \Big[u'(x))^2 + g(x)u^2(x)\Big]dx,
\end{aligned}$$

alors $J(u) = J_1(u) + J_2(u)$. Par $\{un\} \rightharpoonup u$ sur H, on voit que $\{un\}$ converge uniformément vers u dans $C[0, T]$. Donc J_1 est faiblement continue séquentiellement. Clairement, J_2 est continue et convexe, d'après théorème 3.1 ce qui implique que J_2 est faiblement semi-continue inférieurement séquentiellement. Par conséquent, J est faiblement semi-continue inférieurement séquentiellement sur $\overline{B_\rho}$.

Troisièmement, nous affirmons que J a un minimum $u_0 \in \overline{B_\rho}$.

En fait, H est un espace de Banach réflexif, $\overline{B_\rho}$ est borné et faiblement fermé séquentiellement et J est faiblement semi-continue inférieurement séquentiellement sur $\overline{B_\rho}$. Donc, d'après le lemme 2.7, il existe $u_0 \in \overline{B_\rho}$ tal que $J(u_0) = \min\{J(u) : u \in \overline{B_\rho}\}$.

Enfin, nous affirmons que $J(u_0) < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u)$.

Par **(H2)**, soit $\varepsilon = \frac{1}{3mT^2} > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|u| < \delta$ implique

$$\Big|\frac{f(x,s)}{u}\Big| \leq \varepsilon,$$

donc

$$\begin{gathered}
-\varepsilon u \leq f(x,s) \leq \varepsilon u \\
-\int_0^u \varepsilon u \, ds \leq \int_0^u f(x,s) ds \leq \int_0^u \varepsilon u \, ds \\
-\frac{\varepsilon}{2} u^2 \leq F(x,u) \leq \frac{\varepsilon}{2} u^2.
\end{gathered}$$

Alors

$$\Big|F(x,u)\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2} u^2, \ \ \forall x \in [0,T].$$

En utilisant la même démonstration, nous avons

$$\int_0^u I_j(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} |u|^2, \quad \forall \, x \in [0,T].$$

Par conséquent, d'après le lemme 2.3 , pour $\|u\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{T}}$, on a

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^T F(x,u(x)) dx - \sum_{j=1}^m \int_0^{u(x_j)} I_j(x) dx + \frac{\alpha}{2\beta} u^2(T) \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^T \frac{\varepsilon}{2} |u(x)|^2 dx - \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon}{2} \, |u(x_j)|^2 + \frac{\alpha}{2\beta} u^2(T) \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 \int_0^T dx - \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon}{2} |u(x_j)|^2 + \frac{\alpha}{2\beta} u^2(T) \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon T^2}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon m T^2}{2}\|u\|^2,
\end{aligned}$$

pour $\varepsilon = \frac{1}{3mT^2}$, on a

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{6}\|u\|^2 - \frac{1}{6}\|u\|^2 \\ &\geq \frac{1}{6}\|u\|^2. \end{aligned}$$

Choisir $C = \frac{\delta^2}{6T}, \rho = \frac{\delta}{\sqrt{T}}$, alors $J(u) \geq C > 0$ pour tout $u \in \partial B_\rho$. Outre,

$J(u_0) \leq J(0) = 0 < C \leq J(u)$ pour tout $u \in \partial B_\rho$. Donc $J(u_0) < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u)$. Ainsi, J a un minimum local $u_0 \in B_\rho = \{u \in H : \|u\| < \rho\}$.

Étape 3 : On prouve qu'il existe u_1 avec $\|u_1\| > \rho$ tel que $J(u_1) < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u)$.

La condition **(H3)** implique qu'il existe $b_1, b_2, c_j, d_j > 0, j = 1, 2, \ldots, m,$ tels que

$$F(t,u) \geq b_1|u|^\mu - b_2, \quad \int_0^u I_j(t)dt \geq c_j|u|^\mu - d_j, \tag{3.2}$$

pour tout $x \in [0,T], u \in \mathbb{R}$ (voir [18]). Ensuite, on a

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^T F(x,u(x))dx - \sum_{j=1}^m \int_0^{u(x_j)} I_j(x)dx + \frac{\alpha}{2\beta}u^2(T) \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \left(b_1 T^{\frac{\mu}{2}}\|u\|^\mu - b_2\right)T - \sum_{j=1}^m \left(c_j T^{\frac{\mu}{2}}\|T\|^\mu - d_j\right) + \frac{\alpha}{2\beta}u^2(T). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Puisque $\mu > 2$, (3.3) implique $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} J(u) = -\infty$. Par conséquent, nous pouvons choisir u_1 avec $\|u_1\| > \rho$ suffisamment grand pour que $J(u_1) < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u)$.

Soit

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{x \in [0,1]} J(h(x)),$$

où

$$\Gamma = \{h \in C([0,1], H) : h(0) = u_0, h(1) = u_1\}.$$

D'après le lemme 3.2, c est une valeur critique de J, c'est-à-dire qu'il existe un point critique u^*.

Donc, u_0, u^* sont deux points critiques de J, et ce sont des solutions de (**??**). ■

Exemple 3.1. Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \frac{1}{15}(u(t))^{\frac{8}{3}}\sin x, \quad x \neq x_j, x \in [0,1], \\ -\Delta u'(x_j) = \frac{1}{2}u^3(x_j), \quad j = 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Ici $g(x) = 1, f(x,u) = \frac{1}{15}(u(x))^{\frac{8}{3}} \sin x, I_j(u) = \frac{1}{2}u^3, T = 1, j = 1, \alpha = 1, \beta = 1$. Soit $\mu = 3, r = 1$. Clairement, **(H2)** et **(H3)** sont satisfaites. D'après le théorème 3.3, le problème (3.4) admet au moins deux solutions.

Remarque 3.1. L'étude de l'existence et de la multiplicité des solutions aux problèmes de détermination par $lemme$ est très efficace, car elle a intéressé de nombreux chercheurs dans ses applications et parmi ces chercheurs on cite, par exemples, [20], [21], [5], et [7].

3.3.2 Existence d'une infinité des solutions

Dans cette section, nous dérivons quelques conditions sous lesquelles le système (2.1) admet une infinité de solutions distinctes. pour cela, nous avons besoin de l'hypothèse **(H4)**.

Théorème 3.4. *[21] Supposons que* **(H2)**, **(H3)** *et* **(H4)** *soient satisfaites. Alors le système (2.1) admet une infinité de solutions.*

Démonstration - **Étape 1 :** La fonctionnelle J satisfait la condition (PS).

Soit $u_n \subset H$ tel que $J(u_n)$ une suite bornée et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} J'(u_n) = 0$. Alors en utilisant le hypothèse $H3$ on a

$$J(u_n) - \frac{1}{\mu}J'(u_n)(u_n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_n\|^2 - C.$$

Ainsi, $\{u_n\}$ est borné dans H. Puisque H est de Banach réflexif, il existe une sous suite de $\{u_n\}$ telle que $\{u_n\}$ converge faiblement vers certains u dans H. Alors la suite $\{u_n\}$ converges uniformément vers u dans $[0;T]$. Ainsi, on a

$$(J'(u_n) - J'(u))(u_n - u) = \|u_n - u\|^2 + \frac{\alpha}{\beta}\Big(u_n(T) - u(T)\Big)^2 - \sum_{j=1}^{m}\Big(I_j(u_n(x_j)) - I_j(u(x_j))\Big)\Big(u_n(x_j) - u(x_j)\Big)$$
$$- \int_0^T \Big(f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))\Big)\Big(u_n(x) - u(x)\Big)dx,$$

ce qui signifie que $\|u_n - u\| \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow \infty$. C'est à dire,$\{u_n\}$ converge fortement de u dans H. Donc la fonctionnelle J satisfait la condition (PS).

Étape 2 : On montre qu'il existe $\rho > 0$ tel que la fonctionnelle J possède un minimum local

$$u_0 \in B_\rho = \{u \in H : u < \rho\}.$$

Premièrement, nous affirmons que $\overline{B_\rho}$ est borné et faiblement fermé séquentiellement.

En fait, par théorème de Mazur [10], $\{v_n\} \subset \overline{B_\rho}$ et $u \in \overline{B_\rho}$, depuis $\overline{B_\rho}$ est un ensemble convexe fermé.

Deuxièmement, on a $J(u) = J_1(u) + J_2(u)$, J_1 est faiblement continue séquentiellement et J_2 est faiblement semi-continue inférieurement séquentiellement. Alors J est faiblement semi-continue inférieurement séquentiellement sur $\overline{B_\rho}$.

Troisièmement, nous affirmons que J a un minimum $u_0 \in \overline{B_\rho}$.

En fait, H est un espace de Banach réflexif, $\overline{B_\rho}$ est borné et faiblement séquentiellement clos et J est faiblement semi-continu inférieurement séquentiellement sur $\overline{B_\rho}$. Donc, d'après le lemme 2.7, il existe $u_0 \in \overline{B_\rho}$ tel que

$$J(u_0) = \min\{J(u) : u \in \overline{B_\rho}\}.$$

Enfin, nous affirmons que $J(u_0) < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u)$.

D'après l'hypothèse **(H2)** et le lemme 2.3, on a

$$J(u) \geq \frac{1}{6}\|u\|^2.$$

Alors, J a un minimum local $u_0 \in B_\rho = \{u \in H : \|u\| < \rho\}$.

Étape 3 : On prouve qu'il existe u_1 avec $\|u_1\| > \rho$ tel que $J(u_1) < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u)$.

La condition **(H3)** implique qu'il existe $b_1, b_2, c_j, d_j > 0, j = 1, 2, \ldots, m$, tel que

$$F(x,u) \geq b_1|u|^\mu - b_2, \quad \int_0^u I_j(x)dx \geq c_j|u|^\mu - d_j,$$

pour tout $x \in [0,T], u \in \mathbb{R}$ (voir [18]). Ensuite, on a

$$J(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \left(b_1 T^{\frac{\mu}{2}}\|u\|^\mu - b_2\right)T - \sum_{j=1}^{m}\left(c_j T^{\frac{\mu}{2}}\|T\|^\mu - d_j\right) + \frac{\alpha}{2\beta}u^2(T).$$

Puisque $\mu > 2$, alors $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} J(u) = -\infty$. Par conséquent, nous pouvons choisir u_1 avec $\|u_1\| > \rho$ suffisamment grand pour que $J(u_1) < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u)$.

Soit

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{x \in [0,1]} J(h(x)),$$

où

$$\Gamma = \{h \in C([0,1], H) : h(0) = u_0, h(1) = u_1\}.$$

D'après le lemme 3.2, c est une valeur critique de J, c'est-à-dire qu'il existe un point critique u^*.

Donc, u_0, u^* sont deux points critiques de J, et ce sont des solutions de (2.1).

Étape 4 : On montre que J est paire.

On a $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ est même depuis $f(x,u)$ et $I_j(u)$ sont impaires par rapport à u, et $J(0) = 0$.

Soit $x \in [0,T],\ u \in \mathbb{R}$, on pose $s = -v$, alors on a $ds = -dv$ et,

$$\begin{aligned} F(x,-u) &= \int_0^{-u} f(x,s)ds \\ &= -\int_0^{-u} f(x,-v)dv \\ &= \int_0^{u} f(x,v)dv = F(x,u), \quad \text{(car } f \text{ est impaire)}. \end{aligned}$$

Aussi, on a $L(u) = \int_0^u I_j(s)ds$, on pose $s = -v$, alors on a $ds = -dv$ et,

$$\begin{aligned} L(-u) &= \int_0^{-u} I_j(s)ds \\ &= -\int_0^{-u} I_j(-v)dv \\ &= \int_0^{u} I_j(v)dv = L(u), \quad \text{(car } I \text{ est impaire)}. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} J(-u) &= \frac{1}{2}\|-u\|^2 - \int_0^T F(x,-u(x))dx - \sum_{j=1}^{m}\int_0^{-u(x_j)} I_j(x)dx + \frac{\alpha}{2\beta}(-u)^2(T) \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^T F(x,u(x))dx - \sum_{j=1}^{m}\int_0^{u(x_j)} I_j(x)dx + \frac{\alpha}{2\beta}u^2(T) \\ &= J(u). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que J est une fonctionnelle paire. Donc, d'après le lemme 3.3 J possède une infinité de points critiques, c'est-à-dire que le système (**??**) admet une infinité de solutions. ∎

Exemple 3.2. Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = xu^3(x), \quad x \neq x_j, x \in [0,1] \\ -\Delta u'(x_j) = \frac{1}{2}u^3(x_j), \quad j = 1 \\ u(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Ici $g(x) = 1, f(x,u) = xu^3, I_j(u) = \frac{1}{2}u^3, T = 1, j = 1, \alpha = 1, \beta = 1$. Évidemment, $f(x,u), I_j(u)$ sont impairs par rapport à u. Soit $\mu = 3, r = 1$. Clairement, **(H2)** et **(H3)** sont satisfaites. En appliquant le lemme 3.3, alors le théorème 3.4 est satisfaite, et le problème (3.5) admet une infinité de solutions.

Conclusion

DAns ce travail, on a étudié quelques théories des points critiques, et on a étudié un problème aux limites de seconde ordre impulsif posés sur l'intervalle borné $[0, T]$ par des méthodes variationnelles, théorème de minimisation, lemme du Col et théorème de point selle.
Dans le premier chapitre, on a donné quelques outils de base, qui sont nécessaires pour ce travail, comme la théorie des points critiques, la différentiabilité d'un opérateur dans l'espace de Banach, et le théorème du Col (le lemme du Col), et aussi nous avons donner quelques théorèmes de minimisation. On a introduit également des conditions de compacité connues sous le nom Palais-Smale.
Dans le deuxième chapitre, on a étudié l'existence de solutions pour le problèmes aux limites de seconde ordre impulsif suivant,

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x, u(x)), \quad x \neq x_j, \ x \in [0, T], T > 0, \\ -\Delta u'(x_j) = I_j(u(x_j)), \quad j = 1, 2, ..., m, \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0, \end{cases}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), g \in L^{\infty}[0, T], g(x) > 0, I_j \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Notre approche est variationnelle, nous avons utilisé les théorèmes de minimisation. Les solutions sont obtenues comme des minimums ou des points critiques d'une certaine fonctionnelle.
Enfin, on a étudié l'existence et la multiplicité de solutions pour le problème aux limites impulsif dans deuxième chapitre.

Bibliographie

[1] B. LUCQUIN.*équations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses,**(2004)**.*

[2] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI AND D. O'REGAN. *Existence of solutions for a second order problem on the half-line via Ekeland's variational principle*, Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36 (2016)** 131-140.

[3] D. O'REGAN, B. YAN AND R. P. AGARWAL. *Nonlinear boundary value problems on semi-infinite intervals using weighted spaces : An upper and lower solution approach.* Positivity. **11 (2007)** 171-189.

[4] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI AND D. O'REGAN, *Existance of solutions for a second order problem on the half-line via Ekeland's variational principle,* Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36(2016),** 131-140.

[5] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI AND D. O'REGAN, *Multiplicity of positive solutions for second order quasilinear equation,* MATHEMATICA BOHEMICA, **(2019), 20 pp.**

[6] D. BOUAFIA AND T. MOUSSAOUI, *Existence results for a sublinear second order Dirichlet boundary value problem on the half-line*. Opuscula Math. **40, no. 5 (2020),** 537-548.

[7] D. ZHANG, *multiple solutions of nonlinear impulsive differential equations with Dirichlet boundary conditions via variational method*, Results in Mathematics, **63 (2013)**, 611-628.

[8] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris **(1983).**

[9] J. MAWHIN, M. WILLEM, *critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin, **(1989)**.

[10] KAUS, *Nonlinear Functional Analysis. Dover Publications, Dover,* **(2009)**.

[11] M. Willem. *Minimax Theorems*. Birkhauser, **(1986)**.

[12] M. Badiale, E. Serra. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approach*. Springer-Verlag London Limited **(2011)**.

[13] Mawhin, J, Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Springer, Berlin,* **(1989)**.

[14] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.* World Scientific. **2006**.

[15] P. H. Rabinowitz. *Minimax methods in critical point theory with applications to differntial equations*. CBMS regional conferece series in mathematics, vol. 65, American mathematical society, providence, RI **(1986).**

[16] Pierre Le Barbenchon.*Introduction aux équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*.

[17] S. Formine et A. Kolmogorov. *Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Traduction français, Edition Mir. Moscou **(1977).**

[18] Tian, Y, Wang, J, Ge, WG, *Variational methods to mixed boundary value problem for impulsive differential equations. Taiwan. J. Math.* **13 (2009)**, 1353-1370.

[19] V. Trenoguine. *Analyse fonctionnelle*. Traduction française, Edition, Mir. Moscou **(1985).**

[20] Y. Jabri. *The Mountan Pass Theorem Variants, Generalizations and Some Applications.* Cambridge University Press, New York. **(2003).**

[21] Zhiguo Luo Jingli Xie and Guoping Chen. *Existence of solutions of a second-order impulsive differential equation* **(2014).**

[22] Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Vol III, Springer-Verlag, Berlin,**(1985).**

[23] Z. Zhang, R. Yuan, *an application of variational methods to Dirichlet boundary value problem with impulses*. Nonlinear Analysis, Real World Application, **11 (2010)**, 155-162.

[24] ZUO, WJ, JIANG, DQ, REGAN, DO, AGARWAL, RP, *Optimal existence conditions for the periodic delay Φ-Laplace equation with upper and lower solutions in the reverse order. Results Math.* **44 (2003)**, 375-385.

[25] TIAN, Y, GE, WG Applications of variational methods to boundary-value problem for impulsive differential equations. Proc. Edinb. Math. Soc. 51, 509-527 (2008)

[26] XIE, JL, LUO, ZG Solutions to a boundary value problem of a fourth-order impulsive differential equation. Bound. Value Probl. 2013, 154 (2013)

[27] ZHANG, H, LI, ZX, *Variational approach to impulsive differential equations with periodic boundary conditions. Nonlinear Anal, Real World Appl.* **11 (2010)**, 67-78.

[28] ZHANG, ZH, YUAN, R, *An application of variational methods to Dirichlet boundary value problem with impulses. Nonlinear Anal, Real World Appl.* **11 (2010)**, 155-162. =

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème aux limites de seconde ordre impulsif sur le domaine borné $[0, T]$, ainsi que la théorie des points critiques, lemme du col de la montagne et théorème de points selle. Notre objectif dans cette étude était d'appliquer la théorie des points critiques, lemme du col et théorème du points selle pour vérifier l'existence et la multiplicité des solutions au problème aux limites du second ordre impulsif suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x, u(x)), \quad x \neq x_j,\ x \in [0, T], T > 0, \\ -\Delta u'(x_j) = I_j(u(x_j)), \quad j = 1, 2, ..., m, \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0. \end{cases}$$

Mots clés : Point critique. Méthode variationnelle. Existence de solution. Seconde ordre. Impulsif. Lemme de Col. Théorème de point selle. Condition de Palais-Smale. Dépendance de dérivée. Fonctionnelle d'énergie.

Abstract

In this memoiry, we have studied an impulsive second-order boundary value problem on the bounded domain $[0, T]$, as well as the theory of critical points, the mountain pass lemma and the saddle point theorem. Our goal in this study was to apply the critical point theory, neck lemma and saddle point theorem to verify the existence and multiplicity of solutions to the following impulsive second-order boundary value problem :

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x, u(x)), \quad x \neq x_j,\ x \in [0, T], T > 0, \\ -\Delta u'(x_j) = I_j(u(x_j)), \quad j = 1, 2, ..., m, \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0. \end{cases}$$

Key words : Critical point. Variational method. Existence of solutions. Second order. Impulsive differential equation. Mountain pass lemma. Saddle point theorem. Palace-Smale Condition. Derivative dependence. Energy functional.

ملخص

في هذه الذاكرة ، درسنا مسألة قيمة حد من الدرجة الثانية اندفاعية على المجال المحدود $[0, T]$, بالإضافة إلى نظرية النقاط الحرجة، توطئة ممر الجبل، ونظرية نقطة السرج. كان هدفنا في هذه الدراسة هو تطبيق نظرية النقاط الحرجة، و توطئة ممر الجبل، وونظرية نقطة السرج للتحقق من وجود وتعدد الحلول لمسألة قيمة حدية من الدرجة الثانية اندفاعية الآتية:

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x, u(x)), \quad x \neq x_j,\ x \in [0, T], T > 0, \\ -\Delta u'(x_j) = I_j(u(x_j)), \quad j = 1, 2, ..., m, \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0. \end{cases}$$

كلمات مفتاحية: نقطة حرجة. طريقة التغاير. وجود الحلول. الدرجة الثانية. المعادلة التفاضلية المندفعة. توطئة ممر الجبل. نظرية نقطة السرج. شرط بالي-سمال. اعتماد المشتق. دالة الطاقة.