



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** EDP et applications

## Thème

---

*Comparaison entre quelques Schémas d'éléments Finis appliqué à la résolution des équations de Saint-Venant*

---

**Présenté par :**

*M<sup>r</sup> GHARBI IMAD EDDINE*

**Soutenu publiquement le :** 01/07/2019.

**Devant le jury composé de :**

**Président :** *M<sup>r</sup> Benhamidouche Nour eddine*

**Encadreur :** *M<sup>d</sup> Bounab Noura*

**Examineur :** *M<sup>d</sup> Delloum Wahiba*

*Pr, Université de M'sila*

*M.C.A, Université de M'sila*

*M.A.A, Université de M'sila*

Année universitaire 2018/2019

---

# Remerciements

---

Avant tout je remercie ALLAH le tout puissant qui me donne la patience et la santé durant toutes mes études et surtout en accomplissant ce modeste travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier Madame BOUMAB Noura pour m'avoir donné la chance de travailler sous sa direct, pour sa confiance en moi et ses encouragements.

Mes chaleureux remerciements sont adressés aux membres du jury qui ont pris sur leur temps et ont bien voulu de juger ce modeste travail .

Mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidé, conseillé et encouragé tout au long de l'agenèse de ce mémoire.

---

# Dédicaces

---

Je dédie ce mémoire à Mes chers parents, que nulle dédicace ne puisse exprimer mes sincères sentiments pour leur patience illimitée, leur encouragement continu, leur aide, en témoignage de mon profond amour et respect pour leurs grands sacrifices

À mes chères sœurs : Asma, Riima, Manel et mon cher frère Saddam

À mes chers potes : Abd elbagi, Abu baker et Islam En témoignage de l'amitié sincère qui nous a liés et des bons moments passés ensemble

Sans oublier mes proches amies Hafidha et Nadjat, aucun mot ne pourra décrire vos encouragements et vos dévouements.

Je vous dédie ce travail en vous souhaitant un avenir radieux et plein de succès..

---

# Table des matières

---

|          |                                                                                                      |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction sur la mécanique des fluides</b>                                                     | <b>8</b>  |
| 1.1      | Définition d'un fluide . . . . .                                                                     | 8         |
| 1.2      | Propriétés des fluides . . . . .                                                                     | 9         |
| 1.2.1    | Compressibilité . . . . .                                                                            | 9         |
| 1.2.2    | Masse volumique et densité . . . . .                                                                 | 9         |
| 1.2.3    | Poids volumique . . . . .                                                                            | 9         |
| 1.2.4    | Volume massique . . . . .                                                                            | 9         |
| 1.2.5    | Viscosité . . . . .                                                                                  | 10        |
| 1.3      | descriptio d'un fluide en mouvement . . . . .                                                        | 10        |
| 1.3.1    | Description de Lagrange . . . . .                                                                    | 10        |
| 1.3.2    | Description d'Euler . . . . .                                                                        | 11        |
| 1.4      | Dynamique des fluides . . . . .                                                                      | 11        |
| 1.4.1    | le débit . . . . .                                                                                   | 11        |
| 1.4.2    | Ecoulements permanents ou stationnaires . . . . .                                                    | 12        |
| 1.4.3    | Ecoulement irrotationnel-potentiel de vitesse . . . . .                                              | 12        |
| 1.4.4    | Ecoulement incompressible . . . . .                                                                  | 12        |
| 1.4.5    | Notion de ligne de courant . . . . .                                                                 | 12        |
| 1.4.6    | Equation différentielle des fonctions $\phi$ et $\psi$ . . . . .                                     | 13        |
| 1.4.7    | Equation de continuité . . . . .                                                                     | 14        |
| 1.4.8    | Le principe de conservation de la quantité de mouvement . . . . .                                    | 15        |
| 1.4.9    | L'equation d'Euler . . . . .                                                                         | 16        |
| 1.4.10   | Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide par-<br>fait incompressible . . . . . | 16        |
| 1.4.11   | Utilisation de la théorie de la variable complexe . . . . .                                          | 17        |
| <b>2</b> | <b>Etude de Modele Mathématique de Saint Venant</b>                                                  | <b>19</b> |
| 2.1      | Problème variationnel . . . . .                                                                      | 19        |
| 2.2      | Méthode de Galerkin . . . . .                                                                        | 20        |
| 2.3      | Méthode des éléments finis . . . . .                                                                 | 21        |
| 2.4      | Position du Problème . . . . .                                                                       | 22        |
| 2.5      | DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS . . . . .                                                          | 23        |
| 2.5.1    | Méthode de Bubnov-Galerkin . . . . .                                                                 | 24        |
| 2.5.2    | Méthode de Petrov-Galerkin . . . . .                                                                 | 27        |
| 2.6      | APPLICATION NUMERIQUES . . . . .                                                                     | 30        |
| 2.7      | Méthode de Galerkin . . . . .                                                                        | 40        |
| 2.8      | Méthode des éléments finis . . . . .                                                                 | 41        |

---

# Table des figures

---

|      |                                                                                |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | A . . . . .                                                                    | 18 |
| 1.2  | B . . . . .                                                                    | 18 |
| 2.1  | maillage . . . . .                                                             | 21 |
| 2.2  | Schéma représentatif de Rupture de Barrage . . . . .                           | 31 |
| 2.3  | solution initiale(état initiale) . . . . .                                     | 33 |
| 2.4  | Solution de Bubnov-Galerkin . . . . .                                          | 33 |
| 2.5  | Solution de Petrov-Galerkin . . . . .                                          | 34 |
| 2.6  | Comparaison des solution : Initiale-Exacte-Bubnov-Galerkin-Petrov-Galerkin . . | 35 |
| 2.7  | Solution de Bubnov-Galerkin . . . . .                                          | 36 |
| 2.8  | Solution de Petrov-Galerkin . . . . .                                          | 36 |
| 2.9  | Comparaison des solutions : Exacte-Bubnov-Galerkin-Petrov-Galerkin . . . . .   | 37 |
| 2.10 | Solutions obtenue en la présence de la gravité . . . . .                       | 38 |

---

# Notation

---

|          |                                                     |
|----------|-----------------------------------------------------|
| $\beta$  | compressibilité                                     |
| $\rho$   | Masse volumique                                     |
| $d$      | Densité                                             |
| $\varpi$ | Poids volumique                                     |
| $v$      | volume massique                                     |
| $r$      | le vecteur position                                 |
| $V$      | vitesse de la particule                             |
| $\gamma$ | l'accélération                                      |
| $qm$     | Débit masse                                         |
| $qv$     | Débit volume                                        |
| $\phi$   | vitesse potentiel                                   |
| $A$      | Matrice de convection                               |
| $B$      | Matrice des fonctions d'interpolation               |
| $C$      | Nombre de Courant                                   |
| $c$      | Célérité                                            |
| $F$      | Vecteur des termes de flux à travers les frontières |
| $g$      | Accélération gravitationnelle                       |
| $H$      | Profondeur d'eau                                    |
| $i, j$   | Indices entiers                                     |
| $J_e$    | Pente énergétique                                   |
| $J_f$    | Pente de fond du canal                              |
| $K$      | Matrice de rigidité                                 |
| $L$      | Longueur du domaine                                 |
| $M$      | Matrice masse                                       |
| $n$      | Nombre de noeuds d'interpolation                    |
| $Q$      | Débit d'écoulement                                  |
| $R$      | Vecteur des termes de flux                          |
| $S$      | Vecteur des termes sources                          |
| $t$      | Temps                                               |
| $U$      | Vitesse moyenne dans une section                    |
| $x$      | Coordonnée longitudinale                            |
| $W$      | Matrice de décentrage                               |
| $\theta$ | Coefficient de pondération                          |
| $\Phi$   | Vecteur des variables nodales                       |
| $\omega$ | Coefficient de décentrage                           |
| $BG$     | bubnov-Galerkin                                     |
| $DG$     | Dissipative-Galerkin                                |

---

# Introduction générale

---

La mécanique des fluides est un domaine de la physique consacré à l'étude du comportement des fluides (liquides, gaz et plasmas) et des forces internes associées. C'est une branche de la mécanique des milieux continus qui modélise la matière à l'aide de particules assez petites pour relever de l'analyse mathématique mais assez grandes par rapport aux molécules pour être décrites par des fonctions continues

L'étude mathématique des écoulements à surface libre en régime transitoire n'est pas une discipline scientifique récente. Elle a débuté il y a déjà plus de 200 ans lors de l'essor de l'ensemble des théories mécaniques, avec les travaux de Laplace en 1776 et de Lagrange vers 1781 sur la propagation des ondes à la surface des canaux. Dès 1871, Barré de Saint-Venant a formulé mathématiquement, par un système d'équations différentielles, le mouvement des eaux à surface libre pouvant faire l'objet d'une description filaire. Depuis lors, ces équations servent de base aux modèles mathématiques d'écoulement à surface libre en rivière, en canaux,...etc.

La simulation des écoulements à surface libre par le modèle de Saint-Venant a plusieurs applications. On peut citer par exemple :La prévision des risques d'inondation (annonce des crues, aide à l'élaboration des plans de secours et d'aménagement),La détermination de zones submersibles et celles qui subissent un couvremnt-découvremnt au cours du temps,La simulation de la propagation des crues (e.g. onde de rupture du barrage),L'étude d'impact d'ouvrages hydrauliques sur le milieu et La simulation des écoulements dans les canaux découverts, les ports, les lacs et les estuaires.[1]

Les équations de Saint-Venant s'apparaissent très importante car elles constituent un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type hyperbolique.[1]

Notre travail est composé de deux parties

Le partie 1 englobe les notions préliminaires et les définitions générales de la mécanique des fluides

dans le deuxième partie on cité quelques définition préliminaire concernant les équations Saint-Venant,et représente les principes de la méthode de Galerkin et celles des éléments finis,de puis on a appliqué deux schémas de la méthode éléments finis qui sont le schémas de bubnov-Galerkin,et le schémas de petrov-Galerkin,en fin Nous terminons notre travail par un exemple numérique : rupture de barrage en appliquant les deux schémas précédents dans le but de comparer entre eux .

# INTRODUCTION SUR LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

---

## 1.1 Définition d'un fluide

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gazeux et l'état liquide.

### Fluides parfaits

Un fluide parfait, dont l'écoulement se fait "sans frottements internes", est un fluide considéré comme non visqueux. Le modèle du fluide parfait permet de rendre compte assez convenablement de la structure de certaines régions d'écoulements réels ou de la modéliser, mais jamais de la structure complète de ceux-ci. Une des caractéristiques principales de la mécanique des fluides apparaît ici : pour représenter des faits ou des observations, elle fait appel à des modèles, dont le degré de raffinement est variable. En raison de l'extrême complexité des phénomènes qu'elle tente de décrire, elle ne peut se passer de tests expérimentaux (réalisation de maquettes, testées dans un bassin, qui serviront à la conception des navires ; essais en soufflerie pour la construction aéronautique, etc.).

### Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

### Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

## 1.2 Propriétés des fluides

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides[7]

### 1.2.1 Compressibilité

La compressibilité est le caractère de variation de volume de fluide avec une variation de pression ( $dp$ ), le volume de fluide subit une diminution de volume ( $dV$ ). L'augmentation de pression entraîne une diminution de volume.

Le coefficient de compressibilité est :

$$\beta = -\frac{dV/V}{dp} = -\frac{dV}{dpV} \quad (1.1)$$

### 1.2.2 Masse volumique et densité

Masse volumique : La masse volumique  $\rho$  d'un fluide est la masse de l'unité de volume de ce fluide. Elle s'exprime en  $kg/m^3$

Les fluides sont caractérisés par leur masse volumique

$$\rho = \frac{m}{v} \quad (1.2)$$

b) Densité

La densité : elle mesure le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à un corps de référence. C'est une grandeur sans unité définie par

$$d = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (1.3)$$

### 1.2.3 Poids volumique

Il représente la force d'attraction exercée par la terre sur l'unité de volume, c'est-à-dire le poids de l'unité de volume.

$$\varpi = \frac{G}{V} = \frac{Mg}{V} = \frac{\rho Vg}{V} \quad \varpi = \rho g \quad (1.4)$$

### 1.2.4 Volume massique

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance, c'est l'inverse de la masse volumique

$$v = \frac{V}{M} = \frac{V}{\rho V} = \frac{1}{\rho} \quad (1.5)$$

### 1.2.5 Viscosité

La viscosité d'un fluide est la propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches de fluide les unes par rapport aux autres. Lorsque le fluide se déplace en couches parallèles ; le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique,  $(\mu)$  et on écrit alors :

$$\tau = \mu \frac{d\mu}{dy} \quad (1.6)$$

La viscosité cinématique,  $\nu$ , est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.7)$$

## 1.3 descriptio d'un fluide en mouvement

### 1.3.1 Description de Lagrange

Dans la description de lagrange on s'intéresse à l'histoire de chaque particule de fluide. Considérons une particule de fluide  $P$ , placé en  $M_0(x = 0; y_0; z_0)$  à l'instant  $t_0$  et suivons la (approche mécanistique) au cours de son mouvement qui est décrit par les trajectoires des particules d'identités déterminées. L'identité d'une particule est caractérisée par sa position initiale  $M_0(x = 0; y_0; z_0)$  à l'instant  $t_0$ . La description du mouvement est par conséquent donnée par l'équation de position de la particule :

$$x = x(x_0; y_0; z_0, t)$$

$$y = y(x_0; y_0; z_0, t)$$

$$z = z(x_0; y_0; z_0, t)$$

c'est à dire :

$$r = r(t, M_0) \quad x_i = x_i(x_0; y_0; z_0)$$

où  $r$  est le vecteur position de coordonnées  $x_i$ , alors la vitesse de la particule et l'accélération à un instant  $t$  quelconque s'écrivent :

$$V(P) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)_r = V(t, M_0)$$

$$\gamma = \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_r = \gamma(t, M_0)$$

La description Lagrangienne est énormément utilisée dans la mécanique des particules solides et l'élasticité, mais malheureusement les particules ne conservent pas leurs identités pour un longtemps en raison de la diffusion. Pour cela la description Eulerienne est demandée.[9]

### 1.3.2 Description d'Euler

La description d'Euler consiste à se fixer en un point de l'espace et observer les variations des caractéristiques des particules du fluide passant par ce point. A l'instant  $t$ , il y a au point  $M(x; y; z)$  une particule  $P$  de vitesse  $V$  et d'autres caractéristiques  $S$  (densité  $\rho$ , viscosité  $\mu$ , température  $T$ , etc...), à l'instant  $t + dt$  une autre particule existe avec une vitesse et caractéristiques physiques différentes, alors  $M$  à l'instant  $t$

$$V = V(M; t) = V(x; y; z; t) \quad \text{ou } x_i = x_i(t; x_0; y_0; z_0) \text{ et}$$

$$S = S(M; t) = S(x; y; z; t)$$

Donc la description cinématique du mouvement consiste à donner les champs vectoriels et scalaires décrivant l'écoulement en  $(x; y; z; t)$  :

Dans cette description  $\frac{\partial}{\partial t}$  désigne la dérivée partielle et  $\frac{D}{Dt}$  désigne la dérivée matricielle qui sont liées par la relation

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (V \cdot \text{grad.})$$

[9]

## 1.4 Dynamique des fluides

### 1.4.1 le débit

C'est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement

**Débit masse** : Si  $\Delta m$  est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps  $\Delta t$ , par définition le débit-masse est :

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

unité :  $\text{Kg.s}^{-1}$

**Débit volume** : Si  $\Delta v$  est la volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps  $\Delta t$ , par définition le débit-volume est :

$$q_v = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

unité :  $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$

**Relation entre  $q_m$  et  $q_v$**  : La masse volumique  $\rho$  est donnée par la relation :

$$\frac{\Delta m}{\Delta v} \text{ ou } q_m = \rho q_v$$

**Remarque 1** Les liquides sont incompressibles et peu dilatables (masse volumique constante), on parle alors d'écoulements isovolumes.[9]

### 1.4.2 Ecoulements permanents ou stationnaires

Un régime d'écoulement est dit permanent ou stationnaire si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique,...) ont une valeur constante au cours du temps.[9]

### 1.4.3 Ecoulement irrotationnel-potentiel de vitesse

Un écoulement est dit irrotationnel (ou potentiel) si le pseudo-vecteur tourbillon est nul en tout point de l'écoulement. Le rotationnel de la vitesse étant nul en tout point d'un écoulement irrotationnel

$$\vec{Rot} \vec{v} = 0$$

Il existe alors une fonction  $\phi$  telle que :

$$\vec{v} = \vec{grad} \phi$$

La fonction  $\phi$  est appelée potentiel des vitesses.[9]

### 1.4.4 Ecoulement incompressible

Un fluide est dit en écoulement incompressible si sa masse volumique est constante au cours du mouvement, ce qui se traduit par une dérivée particulaire du champ scalaire de masse volumique nul.[9]

### 1.4.5 Notion de ligne de courant

Une ligne de courant ou ligne d'écoulement, est une ligne de champ du vecteur vitesse c'est-à-dire une courbe tangente en tout point  $M(x; y; z)$  à  $\vec{v}(x; y; z; t)$  à l'instant  $t$  :

L'ensemble des lignes de courant peut évoluer au cours du temps. L'équation de la ligne de courant s'obtient en résolvant les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

où  $v_x, v_y$  et  $v_z$  sont les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}$ . Toute les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe  $C$  fermée constituent un tube de courant.

**Traduction mathématique :** Si l'on note  $\rho = \rho(M; t)$  la masse volumique en un point  $M$  à instant  $t$  et si l'on considère l'écoulement incompressible alors :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

ou  $\frac{D\rho}{Dt}$  est la dérivée particulière de la masse volumique. On peut caractériser un tel écoulement par la relation suivante

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

où  $\vec{v} = v(M; t)$  est la vitesse d'une particule de fluide en un point  $M$  à un instant  $t$ ; ou encore :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

On introduit une nouvelle fonction  $\psi$  de  $x$  et  $y$  que l'on appelle fonction de courant, vérifiant :

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.8)$$

Les surfaces définies par ( $\psi = cte$ ) sont des lignes de courant, en effet la différentielle exacte de  $\psi$  est donnée par :

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \\ &= v_y dx - v_x dy \end{aligned} \quad (1.9)$$

puisque  $\psi = cte$ ; alors  $d\psi = 0$ ; on trouve l'équation de la ligne de courant d'après (1.8). Soient  $C$  une courbe fine qui part d'une ligne de courant vers autre caractérisée par  $\psi = \psi_1$  et  $\psi = \psi_2$  respectivement.

Soient  $\vec{u}_N$  un vecteur unitaire normale à  $C$  et orienté dans le sens de l'écoulement, le flux à travers  $C$  donné par :

$$Q = \int_c \vec{v} \cdot \vec{u}_N = \int_c \left( -v_x \frac{dy}{dt} + v_y \frac{dx}{dt} \right) = \int_c (v_y dx - v_x dy) dt$$

d'où

$$Q = \int_c \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \int_c d\psi$$

par conséquent

$$Q = \psi_1 - \psi_2 \quad (1.10)$$

[9]

#### 1.4.6 Equation différentielle des fonctions $\phi$ et $\psi$

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide parfait et incompressible.

Soit :

$$\vec{v} = -\vec{\text{grad}} \phi \text{ et } \text{div } \vec{v} = 0$$

il vient

$$\operatorname{div}(-\vec{\operatorname{grad}} \phi) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

Alors

$$\Delta \phi = 0 \quad (1.11)$$

De même, d'après

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \text{ et } \vec{\operatorname{rot}} \vec{v} = 0$$

on trouve

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

C'est-à-dire

D'où la fonction potentielle  $\phi$  et la fonction ligne de courant  $\psi$  vérifient l'équation de Laplace.[9]

### 1.4.7 Equation de continuité

Soit une partie d'un fluide de masse volumique  $\rho$  délimitée par une surface fermée  $S_f$  (de volume  $v$ ) soit  $ds$  un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée (1.1). La partie de fluide a une masse

$$m = \int \int \int \rho dv$$

Le débit massique sortant de la surface  $S_f$  est égale à

$$\int \int_{S_f} \rho \vec{v} \cdot \vec{ds}$$

La conservation de la masse s'écrit

$$\frac{dm_s}{dt} - \int \int_{S_f} \rho \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \text{ ou } \frac{dm_s}{dt}$$

représente le débit massique de fluide interne au volume considéré compté positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puit. Compte tenu du théorème d'Ostrogradsky

$$\int \int_{s_f} \rho \vec{v} ds = \int \int \int (div(\rho \vec{v})) dv$$

L'équation de conservation de la masse peut être écrite

$$\frac{dm_s}{dt} = \int \int \int [div(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}] dv$$

**Remarque 2** Sauf précision contraire, nous appliquerons l'équation de conservation de masse en absence de source ou de puits, soit

$$div(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Deux cas particuliers sont alors à considérer.

**Cas1** : le fluide est incompressible

$$(\rho = cte) \Rightarrow div \vec{v} = 0$$

pour un écoulement stationnaire ou instationnaire, cet écoulement est dit iso-volume.

**Cas2** : l'écoulement est stationnaire

$$(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0) \Rightarrow div \rho \vec{v} = 0 = \rho div \vec{v} + \vec{v} grad \rho$$

**En dehors du cas 1**, il existe la possibilité d'un écoulement isovolume tels que :

$$\vec{v} grad \rho = 0$$

où les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point au vecteur vitesse.[9]

### 1.4.8 Le principe de conservation de la quantité de mouvement

Si la force externe agissant sur un objet, ou sur un système d'objets (un système isolé) est nulle, alors la quantité de mouvement total de l'objet ou du système d'objet est de mesure constante.[9]

### 1.4.9 L'équation d'Euler

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à une particule nous donne : "la variation de la quantité de mouvement = la résultante des forces extérieures", c'est à dire

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot (\nabla \nabla \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P + \vec{F}_{\text{champ}}$$

[9]

### 1.4.10 Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible

Un fluide parfait est un fluide dont l'écoulement se fait sans frottement. On considère un écoulement permanent isovolume d'un fluide parfait entre les sections  $s_1$  et  $s_2$ , entre lesquelles il n'y a aucune machine hydraulique, (pas de pompe, ni de turbine) (1.2). Soit  $m$  la masse et  $v$  le volume du fluide qui passe à travers la section  $s_1$  entre les instants  $t$  et  $t+$ . Pendant ce temps la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section  $s_2$  : Tout se passe comme si ce fluide était passé de la position (1) à la position (2). En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants  $t$  et  $t+$  (la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), on obtient :

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + P = \text{cte}$$

$P$  est la pression statique,  $\rho g z$  est la pression du pesanteur,  $\rho \frac{v^2}{2}$  est la pression cinétique.

Tout les termes s'expriment en pascal.

En divisant tous les termes de la relation précédente sur  $\rho g$ , et écrivant tous les termes dans la dimension d'une hauteur (pression exprimées en mètres de colonne de fluide).

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g} = H = \text{cte}$$

$H$  : La hauteur totale.

$\frac{P}{\rho g}$  La hauteur de pression

$\frac{v^2}{2g}$  : La hauteur cinétique.

$z + \frac{P}{\rho g}$  : La hauteur piezométrique.

Cas d'un écoulement (1) à (2) sans échange de travail :

Dans un écoulement d'un fluide parfait, il n'y a aucune machine (ni pompe, ni turbine) entre les points (1) et (2) d'une même ligne de courant, la relation de Bernoulli peut s'écrire sous une des deux formes suivantes :

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho(z_2 - z_1) + (P_2 - P_1) = 0$$

$$\frac{1}{2g}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho(z_2 - z_1) + (P_2 - P_1)\rho g = 0$$

.[9]

### 1.4.11 Utilisation de la théorie de la variable complexe

Soient  $\phi$  la fonction potentielle et  $\psi$  la fonction de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. On rapport le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant  $z = x + iy$ , puis on définit la fonction complexe  $f(z)$  par

$$f(z) = \phi + i\psi \quad (1.12)$$

$i$  est le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ ,  $f(z)$  : est appelé le potentiel complexe de l'écoulement . Car la partie réel et la partie imaginaire de  $f(z)$  vérifient l'équation de Laplace, de plus on a :

$$v_x = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}; v_y = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

Alors les relations de Cauchy-Rieman

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}; \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (1.13)$$

La théorie des variables complexes offre une méthode très puissante pour obtenir des solutions de quelques écoulements. Si le plan  $(x; y)$  est considéré comme plan de la variable complexe  $z = x + iy$ , la fonction  $f(z)$  sera analytique dans le domaine de l'écoulement.

De plus

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ &= v_x - iv_y \end{aligned} \quad (1.14)$$

sera aussi analytique dans le plan d'écoulement. Cette très importante propriété va nous permettre d'utiliser, par la suite la théorie des fonctions analytiques complexes pour résoudre notre problème considéré.[9]

$$\frac{D.}{Dt} = \frac{d.}{dt} = \frac{\partial.}{\partial t} + (V.grad.)$$

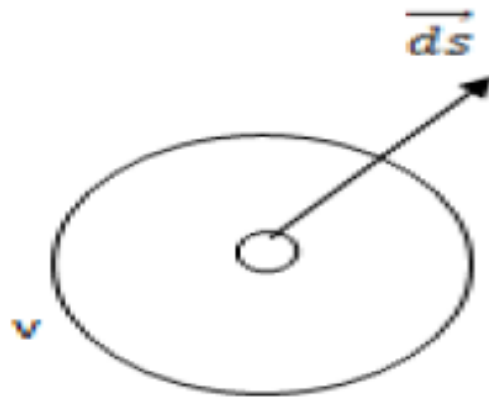


FIGURE 1.1 – A

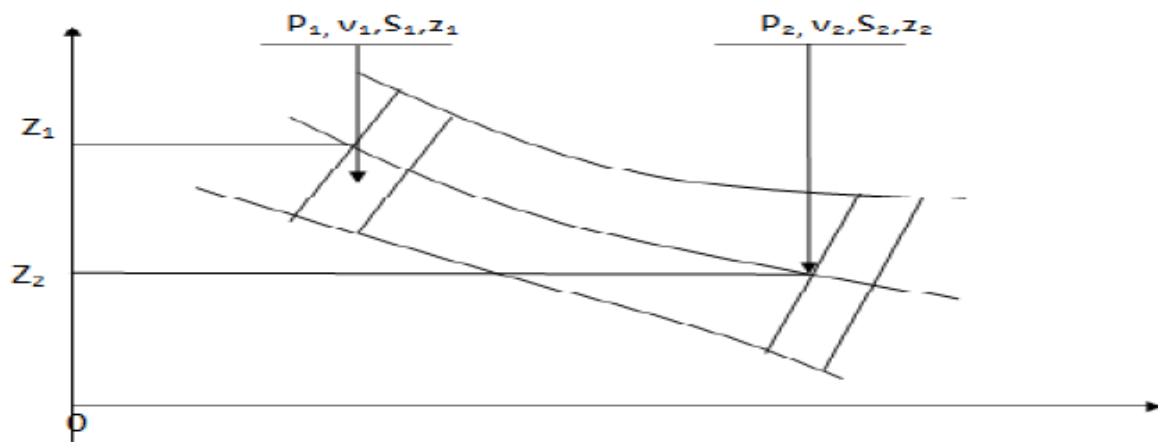


FIGURE 1.2 – B

# ETUDE DE MODELE MATHÉMATIQUE DE SAINT VENANT

C'est en 1871 que Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant, ingénieur des Ponts et Chaussées, publie une étude des équations de Navier Stokes dans un Compte Rendu de l'Académie des Sciences où apparaissent pour la première fois les équations qui porteront son nom. Depuis, ce système hyperbolique des équations de Saint-Venant permet la modélisation des écoulements de fluides à surface libre. Il est utilisé pour la simulation de nombreux phénomènes naturels dont la prédiction est aujourd'hui devenue un enjeu économique et environnemental de grande importance : étude des crues, le ruissellement, glissement de terrain, . . . Autant de problèmes dont l'approche expérimentale est difficilement envisageable et qui doivent être traités au moyen de la modélisation et en résolvant numériquement les équations de Saint Venant.

Ces équations sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes avec certaines hypothèses simplificatrices : la profondeur d'eau est très inférieure à la grandeur caractéristique horizontale du domaine d'étude, on suppose également que la pression est proche de l'équilibre hydrostatique et que les variations verticales de la vitesse sont faibles et négligeables devant les autres variables.

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, \\ \partial_t hu + \left[ \Gamma hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right] = -gh \partial_x Z - \frac{\tau}{\rho} \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $h(x; t)$  est la hauteur d'eau,  $u(x; t)$  la vitesse moyenne,  $\Gamma$  facteur de forme,  $\tau$  frottement au fond et  $Z(x; t)$  est la "topographie" ou forme du fond,  $g$  la gravité[8]

## 2.1 Problème variationnel

Les formulations variationnelles de la plupart des problèmes aux limites que l'on aura à considérer s'écrivent sous la forme générale suivante [2]

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = F(v) \forall v \in V \quad (2.2)$$

où  $V$  est un espace de Hilbert dont la norme et le produit scalaire seront notés  $\| \cdot \|_v$  et  $(\cdot, \cdot)_v$ ,

respectivement.

Les hypothèses sur  $a$  et  $F$  sont comme suit.

1.  $a : V \times V \longrightarrow R$  une forme bilinéaire.
2.  $a$  est continue, c'est à dire qu'il existe  $M > 0$  tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

3.  $a$  est coercive, c'est à dire qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$|a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_V^2$$

4.  $F$  est une forme linéaire et continue sur  $V$  (i.e.  $F$  est un élément de  $V'$ , espace dual de  $V$ ).

## 2.2 Méthode de Galerkin

Soit  $V_h$  une famille d'espaces dépendant d'un paramètre positif  $h$ , telle que

$$V_h \subset V, \quad \dim V_h = N_h < +\infty \quad \forall h > 0.$$

Le problème approché est tout simplement le pendant discret du problème (2.2). Il prend la forme

$$\text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

et est appelé problème de Galerkin.

Soit  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$  une base de  $V_h$  et considérons le développement de la solution dans cette base, i.e.

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i$$

Le vecteur  $U_h = (u_1, \dots, u_{N_h})^T$  est solution du système linéaire

$$A_h U_h = B_h$$

ou  $A_h = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq N_h}$  et  $B_h = (F(\varphi_1), \dots, F(\varphi_{N_h}))^T$ . [2]

## 2.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis pour la solution des problèmes pratique technologique à commencé par l'arrivée du calculateur numérique .Elle met en oeuvre les connaissances en mécanique des structures.(élasticité,plasticité,résistance des matériaux,etc...),l'analyse numérique (résolution des systèmes,méthodes d'approximation ,etc...) et l'informatique.[4]

### Principe général

La *M.E.F* consiste à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent.La discrétisation se fait sur deux fronts,D'une part,le domaine est basé sur la subdivision du domaine continu en sous-domaine de forme géométrique simple que l'on appellera élément fini interconnecté en des points appelés noeuds ,d'autre part,les équation aux dérivées partielle sont remplacées par des équation algébrique à l'aide de calcul variationnel ou des méthodes de minimisation de l'erreur comme les méthodes des résidus pondérés.[4]

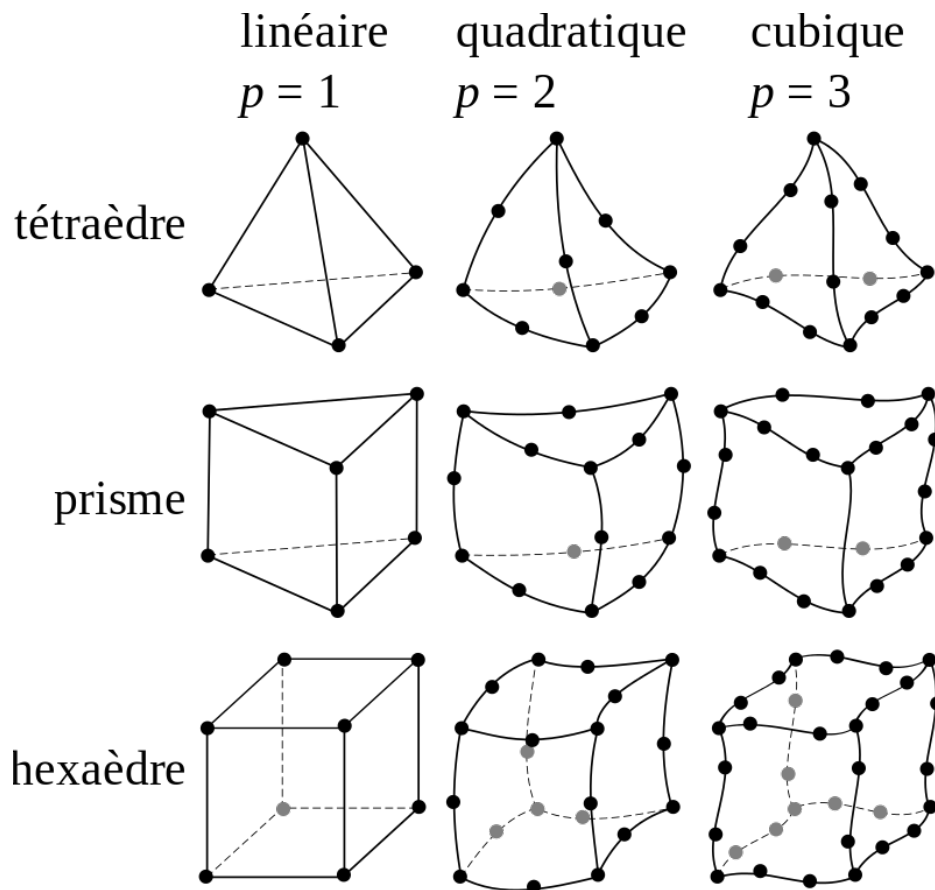


FIGURE 2.1 – maillage

## 2.4 Position du Problème

Il ya plusieurs recherches concernant ce modèle d'écoulement ,telles que la recherche de A. HAZZAB, M. ATALLA , M. HAFIANE [1] et FENEMMA [10] et HICKS [5] ou on trouve Les équations de Saint-Venant à une dimension, sous sa forme conservative et non conservative pour un canal prismatique rectangulaire,  
L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

L'équation de quantité de mouvement est donnée par :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (QU)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{gAH}{2} \right] - gA[J_f - J_e] = 0 \quad (2.4)$$

où  $A$  est la section d'écoulement,  $U$  est la vitesse moyenne sur une section transversale ( $U = Q/A$ ) ,  $H$  est la profondeur d'eau ( $H = A/B$  , où  $B$  est la largeur du canal),  $J_e$  est la pente énergétique,  $J_f$  est la pente longitudinale du fond,  $t$  est le temps,  $x$  la coordonnée longitudinale et  $g$  est l'accélération de la pesanteur  
on peut écrire les équation (2.3)et (2.4) sous forme suivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} Q \\ Qu + \frac{gAH}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -gA(J_f - J_e) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

on pose :

$$\phi = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}$$

et

$$R = \begin{pmatrix} Q \\ Qu + \frac{gAH}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{gH}{2} & u \end{pmatrix} \phi$$

et

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gA(J_f - J_e) \end{pmatrix}$$

substitution dans (2.5) on obtient la forme vectoriel suivent

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + S = 0 \quad (2.6)$$

La forme non conservative de l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2U \frac{\partial(Q)}{\partial x} + (gH - U^2) \frac{\partial A}{\partial x} - gA[J_f - J_e] = 0 \quad (2.7)$$

on peut écrire les équation (2.3) et(2.7) sous forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gH - U^2 & 2U \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -gA(J_f - J_e) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gH - U^2 & 2U \end{pmatrix}$$

substitution dans (2.8) on obtient

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} + S = 0 \quad (2.9)$$

on concernant notre fluide est parfait et  $g = 0$

## 2.5 DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

l'utilisation la méthode des éléments finis comporte deux étapes. La première concerne le choix des fonctions d'interpolation et la seconde est liée au choix des fonctions de pondération qui minimisent l'erreur entre la solution approximée et la solution exacte. Dans cette étude on va utiliser la méthode des résidus pondérés de type Galerkin. La discrétisation spatiale de ce système d'équations est effectuée à l'aide d'une interpolation linéaire pour approximer la solution sur chaque élément linéaire. Ainsi :

$$\phi \approx \phi = \sum_{j=1}^n B_j \Phi_j$$

ou  $B_j = \begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j \end{pmatrix}$

on utilise la fonction d'interpolation utilisée est donnée par :

$$\begin{aligned} b_j(x) &= 0; & x < x_{j-1} \\ b_j(x) &= \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}; & x_{j-1} < x < x_j \\ b_j &= \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}; & x_j < x < x_{j+1} \\ b_j(x) &= 0; & x > x_{j+1} \end{aligned}$$

on va utilise deux approche de Galerkin,la premier de BG et la deuxieme DG.

### 2.5.1 Méthode de Bubnov-Galerkin

[1] cette méthode consiste à utiliser les fonctions pondération comme des fonctions d'interpolation.

la forme intégrale (2.6) est :

$$\int_0^L B_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (2.10)$$

où  $L$  est la longueur du domaine. L'intégration par partie du terme  $B_i \frac{\partial R}{\partial x}$  donne

$$\int_0^L B_i \frac{\partial R}{\partial x} = (B_i R) \Big|_0^L - \int_0^L R \frac{\partial B_i}{\partial x}$$

substitution dans (2.10)

$$\int_0^L \left( B_i \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial B_i}{\partial x} R \right) dx + (B_i R) \Big|_0^L = 0$$

La substitution des fonctions d'interpolation donne :

$$\int_0^L \left[ B_i B_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} - \frac{B_i}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & U \end{pmatrix} B_j \Phi_j \right] dx + \left[ B_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & U \end{pmatrix} B_j \Phi_j \right] \Big|_0^L = 0 \quad (2.11)$$

on pose

$$M_{ij} = \int_0^L B_i B_j$$

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{B_i}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & U \end{pmatrix} B_j$$

$$F_{ij} = (B_i R) \Big|_0^L = \begin{pmatrix} Q \\ Qu \end{pmatrix} B_i \Big|_0^L = \begin{pmatrix} QB_i \Big|_0^L \\ (Qu) B_i \Big|_0^L \end{pmatrix}$$

substitution dans (2.11) on obtient

$$M_{ij} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right) + K_{ij} \Phi_j + F_{ij} = 0 \quad (2.12)$$

l'équation (2.12) discrétisée par rapport au temps, on avec une approximation implicite suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\theta(\Phi^{n+1} - \Phi^n) + (1 - \theta)(\Phi^{n+1} - \Phi^n)}{\Delta t}$$

on remplaçant dans (2.12)

$$[(2\theta + 1)M](\Phi^{n+1}) = [M(2\theta - 1) - \Delta k]\Phi^n + F^n$$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_0^L B_i B_j \\ &= \int_0^L \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & b_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j \end{pmatrix} dx \\ &= \int_0^L \begin{pmatrix} b_j b_i & 0 \\ 0 & b_j b_i \end{pmatrix} dx \end{aligned}$$

les intégrales élémentaire :

$$M_e = \begin{pmatrix} m_{aa} & m_{aq} \\ m_{qa} & m_{qq} \end{pmatrix}$$

$$m_{aa} = m_{qq} = \int_0^L b_i b_j$$

$$m_{aq} = m_{qa} = 0$$

et on a

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{\partial B_i}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & U \end{pmatrix} B_j$$

,

$$= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & b_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j \end{pmatrix}$$

,

$$= \int_0^L \begin{pmatrix} 0 & -\frac{db_i}{dx} b_j dx \\ 0 & \left( -U \frac{db_i}{dx} b_j \right) dx \end{pmatrix}$$

.

les intégrales élémentaire nous donne

$$K = \begin{pmatrix} K_{aa} & K_{aq} \\ K_{qa} & K_{qq} \end{pmatrix}$$

.

$$K_{aa} = 0$$

$$K_{aq} = \int -\frac{db_i}{dx} b_j dx$$

$$K_{qa} = 0$$

$$K_{qq} = \int \left( -U \frac{db_i}{dx} b_j \right) dx$$

### 2.5.2 Méthode de Petrov-Galerkin

[1] Plusieurs recherches ont été faites pour éliminer ou diminuer les oscillations associées à la méthode de Bubnov-Galerkin. Une alternative consiste à utiliser la méthode de Petrov-Galerkin dans laquelle des fonctions de pondération décentrées sont utilisées pour introduire une diffusion numérique qui assure l'atténuation des oscillations. Pour un écoulement unidimensionnel non permanent à surface libre, la formulation équivalente du type du Bubnov-Galerkin peut être représentée sous la forme

$$: \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & b_i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ M \end{Bmatrix} + \omega \frac{\Delta x}{2} W \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & b_i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ M \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

où  $C$  est l'équation de continuité

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

et  $M$  est l'équation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2U \frac{\partial(Q)}{\partial x} + (gH - U^2) \frac{\partial A}{\partial x} - gA[J_f - J_e] = 0$$

$\omega$  représente un paramètre de diffusion (ou un coefficient de décentrage) qui dépend de la situation d'écoulement,  $W$  est la matrice de décentrage qui contrôle à la fois la quantité et la direction de la diffusion numérique. Les composantes de cette matrice seront notées comme suit :

$$W = \begin{bmatrix} w_{aa} & w_{aq} \\ w_{qa} & w_{qq} \end{bmatrix}$$

La première lettre des indices des composantes dénote l'équation dans laquelle la contribution de décentrage s'applique ( $a$  pour l'équation de continuité et  $q$  pour l'équation de quantité de mouvement). Tandis que la seconde décrit l'équation sur laquelle elle s'opère (e.g.  $w_{aq}$  représente le coefficient appliqué à l'équation de quantité de mouvement pour contribuer au décentrage de l'équation de continuité).

on peut écrire la formule (2.13) comme suivent :

$$B_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{dB_i}{dx} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0$$

maintenant on l'intégrale de cette formule pour trouver la matrice de rigidité et de masse

$$\int (B_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)) dx + \int \left( \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{dB_i}{dx} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx = 0$$

on à

$$\int B_i A \frac{\partial \phi}{\partial x} = \int_0^L B_i \frac{\partial R}{\partial x} = (B_i R) \Big|_0^L - \int_0^L R \frac{\partial B_i}{\partial x}$$

Alors la matrice de masse devient

$$M_{ij} = \left( \int B_i B_j + \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{dB_i}{dx} B_j \right) dx$$

,

$$\Rightarrow \int \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & b_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j \end{pmatrix} + \omega \frac{\Delta x}{2} \begin{pmatrix} w_{aa} & w_{aq} \\ w_{qa} & w_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{db_i}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{db_i}{dt} \end{pmatrix} dx$$

.

$$M_{ij} = \int \begin{pmatrix} b_i b_j + w_{aa} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j & w_{aq} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j \\ w_{qa} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j & b_i b_j + w_{qq} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j \end{pmatrix}$$

$$M_e = \begin{pmatrix} m_{aa} & m_{aq} \\ m_{qa} & m_{qq} \end{pmatrix}$$

$$m_{aa} = \int \left\{ b_i b_j + \left[ w_{aa} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j \right] \right\} dx$$

$$m_{aq} = \int \left[ w_{aq} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j \right] dx$$

$$m_{qa} = \int \left[ w_{qa} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j \right] dx$$

$$m_{qq} = \int \left\{ b_i b_j + \left[ w_{qq} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j \right] \right\} dx$$

les matrice de rigidité devinent :

$$K_{ij} = \int \left( \frac{\partial B_i}{\partial x} B_j + \omega \frac{\Delta x}{2} W \frac{\partial B_i}{\partial x} \frac{\partial B_j}{\partial x} \right) dx$$

$$= \int \begin{pmatrix} \frac{db_i}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{db_i}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j \end{pmatrix} + \omega \frac{\Delta x}{2} \begin{pmatrix} w_{aa} & w_{aq} \\ w_{qa} & w_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{db_i}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{db_i}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{db_j}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{db_j}{dx} \end{pmatrix}$$

$$k_{aa} = \int \omega \frac{\Delta x}{2} w_{aq} \left( U^2 \frac{db_i}{dx} \frac{db_j}{dx} \right) dx$$

$$k_{aq} = \int \left( \frac{db_i}{dx} b_j + \omega \frac{\Delta x}{2} \left( w_{aa} \frac{db_i}{dx} \frac{db_j}{dx} + 2U w_{aq} \frac{db_i}{dx} \frac{db_j}{dx} \right) \right) dx$$

$$k_{qa} = \int \omega \frac{\Delta x}{2} w_{qq} (-U^2) \frac{db_i}{dx} \frac{db_j}{dx} dx$$

$$k_{qq} = \int -U \frac{db_i}{dx} + \omega \frac{\Delta x}{2} \left( w_{qq} f \frac{db_i}{dx} b_j + (w_{qa} + 2U w_{qq}) \frac{db_i}{dx} \frac{db_j}{dx} \right) dx$$

$$F_{ij} = (B_i R) \big|_0^L = \begin{pmatrix} Q \\ Qu \end{pmatrix} B_i \big|_0^L = \begin{pmatrix} Q B_i \big|_0^L \\ (Qu) B_i \big|_0^L \end{pmatrix}$$

### Spécification de la matrice $W$

ans la méthode dissipative de Galerkin ( $DG$ ), la matrice de décentrage  $W$ , pour  $U > 0$ , est donnée comme suit :

$$W = \frac{A}{|U|} = \begin{bmatrix} 0 & 1/|U| \\ (-U^2)/|U| & 2U/|U| \end{bmatrix}$$

### Spécification du terme $\omega$ de dissipation

L'évaluation de la valeur du paramètre de décentrage  $\omega$ , pour les schémas de Petrov-Galerkin, à fait l'objet de plusieurs expériences numériques. Brooks et Hughes (1982) montrent que, pour un problème transitoire, la détermination d'une valeur optimale de  $\omega$  est basée sur la précision de la solution et la minimisation de l'erreur de phase.

Katopodes (1984) a examiné plusieurs valeurs de  $\omega$  pour le schéma  $DG$  appliqué aux équations de SAINT-VENANT incluant  $\omega = 2\sqrt{15}$  ( $\omega \approx 0,5$ ) et  $\omega = \Delta t |U| / \Delta x$ . Dans les problèmes où une discontinuité (e.g. ressaut hydraulique) se présente, de grandes valeurs de  $\omega$  sont nécessaires pour atténuer suffisamment les ondes régressives. Il a conclu que la quantification d'une valeur optimale de  $\omega$  nécessite la réalisation des expériences numériques. Pour le cas des équations linéaires et en considérant le schéma  $DG$ , Froehlich (1988) a examiné l'effet de la variation du coefficient de décentrage sur la phase et la précision de la solution. Il a observé une grande sensibilité au nombre de Courant à des courtes longueurs d'onde. Le nombre de Courant étant défini comme suit :

$$C = \frac{(U)\Delta t}{\Delta x}$$

## 2.6 APPLICATION NUMERIQUES

Le but de cet exemple est de faire une comparaison entre les deux méthodes ( $BG$ ,  $DG$ ). Cette comparaison permet de déterminer la méthode la plus fiable en matière de précision et de stabilité de la solution. L'étude comparative comporte l'examen des écoulements non permanents (rupture de barrage). L'exemple sont réalisés en utilisant la forme conservative des équations de SAINT-VENANT. Cependant la forme non conservative des équations est utilisée dans la détermination de la matrice de décentrage. Les valeurs de  $\omega$ , sont celles obtenues par Hicks et Steffler (1990).

## Rupture de Barrage

Ce test est reproduit à partir des travaux de Fennema et al. (1987). Dans ces derniers, une simulation de la rupture instantanée d'un barrage dans un canal horizontal et sans frottement est étudiée. Le maillage est formé par 81 éléments sur une longueur totale de  $2\text{ km}$ . Chaque maille a  $25\text{m}$  de longueur et le nombre total des noeuds est de 81. Le barrage lui-même est positionné sur un seul élément. Le débit est considéré initialement comme étant nul pour l'ensemble des noeuds. La profondeur initiale dans la moitié amont du domaine est  $H = 10\text{m}$  et à la moitié aval est de  $H = 5\text{m}$ . Les deux schémas  $BG$  et  $DG$  sont exécutés à des pas de temps  $\Delta t = 1,25\text{s}$ .  $C = 0,47$  est déterminée en se basant sur la vitesse de l'onde progressive (la valeur de cette vitesse calculée analytiquement est égale à  $9,35\text{m/s}$ ).

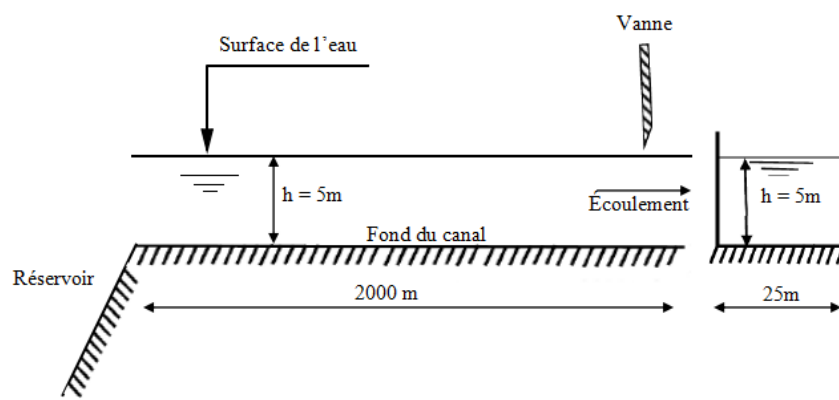


FIGURE 2.2 – Schéma représentatif de Rupture de Barrage

## Discussions des resultats

dans la figure 2.6 pour le schémas de  $BG$  on observe qu'il ya des grands oscillations tout au long de distance dont l'amplitude prend  $8m$  juste au point aval de l'écoulement si  $\theta = 0.5$  mais d'après la figure 2.9 ces oscillations s'apparaissent plus petites (conformes) si le coefficient de pondération  $\theta = 1$  (le graphe est lisse).

et pour le schémas de  $DG$

dans le cas  $\theta = 0.5$

on remarque que n'existe pas beaucoup d'augmentation des oscillations le longe de la distance

on peut même dire qu'il coincide avec solution exact

dans le cas  $\theta = 1$

on observe que le schéma de  $DG$  coincide presque en tout point avec la solution exacte c'est-à-dire les oscillations plus petite (la tendance est plus lisse).

pour  $\theta = 0.5$

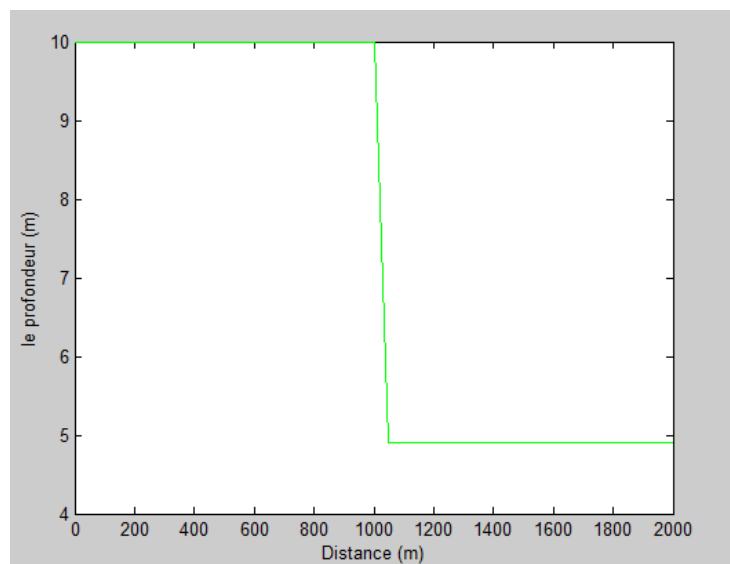


FIGURE 2.3 – solution initiale(état initiale)

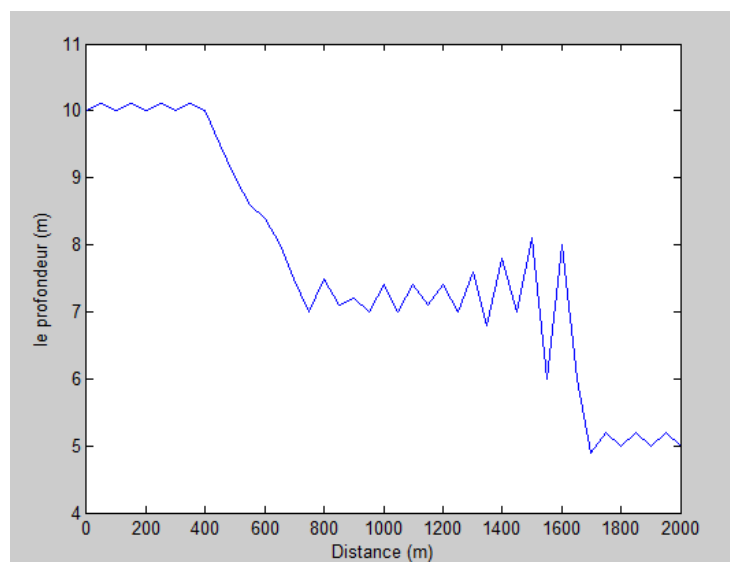


FIGURE 2.4 – Solution de Bubnov-Galerkin

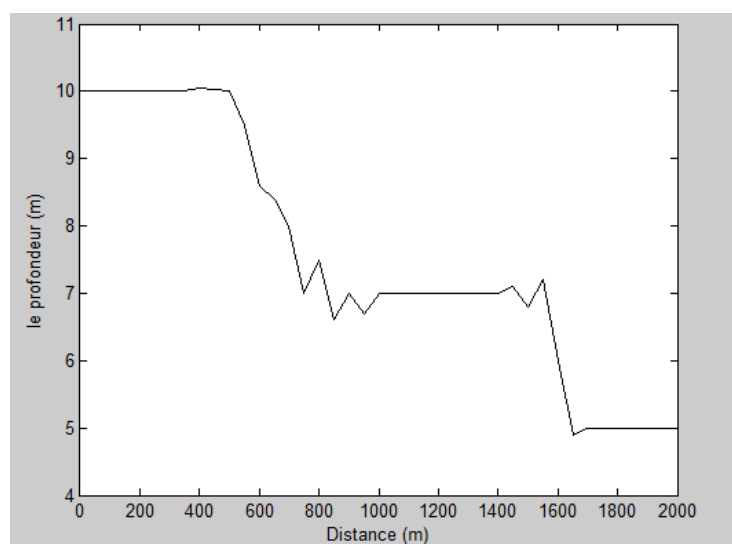


FIGURE 2.5 – Solution de Petrov-Galerkin

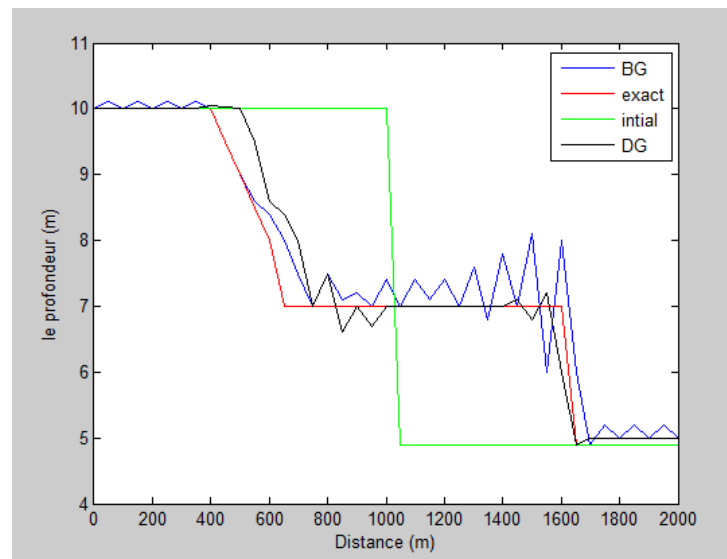


FIGURE 2.6 – Comparaison des solution : Initiale-Exacte-Bubnov-Galerkin-Petrov-Galerkin

maintenant pour  $\theta = 1$

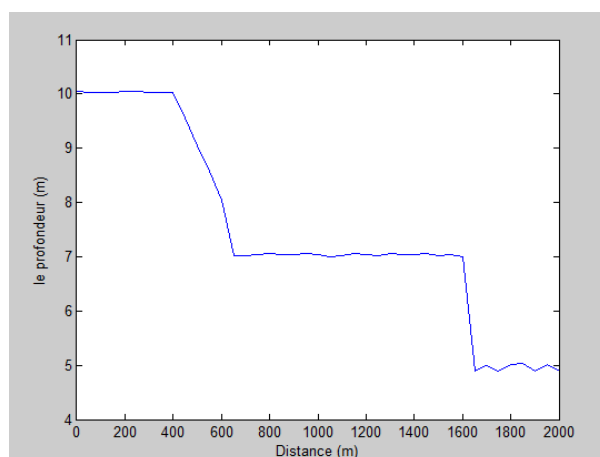


FIGURE 2.7 – Solution de Bubnov-Galerkin

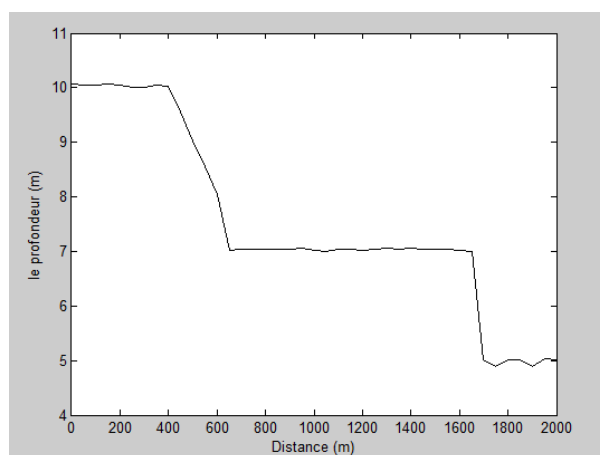


FIGURE 2.8 – Solution de Petrov-Galerkin

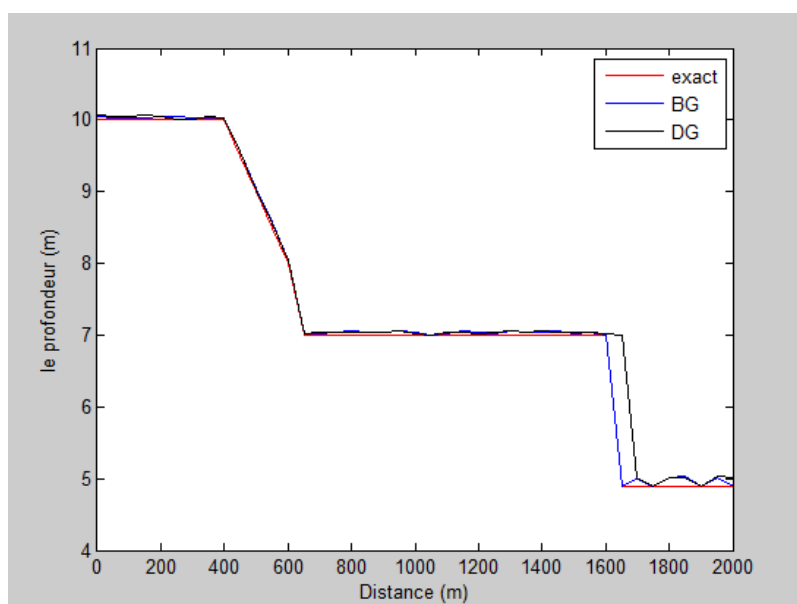


FIGURE 2.9 – Comparaison des solutions : Exacte-Bubnov-Galerkin-Petrov-Galerkin

le résultat suivant est obtenue par M.Hazzab [1] en la présence de la gravité

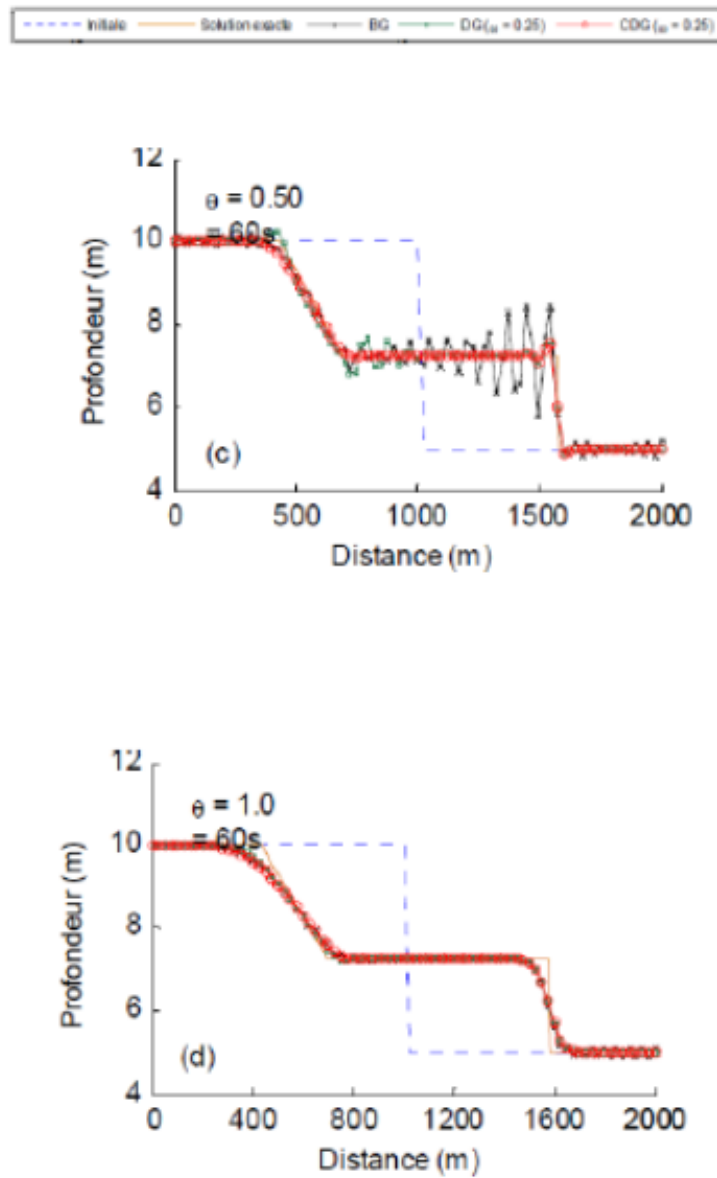


FIGURE 2.10 – Solutions obtenue en la présence de la gravité

---

## Conclusion générale

---

Nous avons présenté dans ce travail des résultats de simulations d'un modèle bâti sur le schéma des éléments finis, où nous avons utilisé des approximations numériques basées sur une procédure de calcul récurrente dans le temps.

l'exemple traitées concernent le cas de canaux prismatiques à section transversale rectangulaire et trapézoïdal. Les analyses effectuées prouvent la fiabilité du modèle proposé dans cette étude. Après validation, une analyse de l'impact de la variation des différents paramètres sur la forme de la surface a été effectuée.

nous avons appliqué deux schémas d'éléments finis : le schéma de Bubnov-Galerkin ( $BG$ ) et le schéma dissipative de Galerkin ( $DG$ ). L'introduction d'un paramètre de diffusion numérique dans le dernier schéma  $DG$ , qui sont de type Petrov-Galerkin, a permis de diminuer les oscillations numériques associées au schéma  $BG$ . À partir des tests élaborés (rupture de barrage), nous avons constaté que la méthode  $DG$  est plus fiable que celle de  $BG$  et que existe un grand rôle de la gravité dans cette étude.

---

# Annexe

---

## 2.7 Méthode de Galerkin

L'idée de base de cette méthode est d'approcher les éléments de l'espace  $V$  par ceux d'un espace  $V_h$  de dimension finie, où  $h$  est un paramètre réel positif caractérisant la discrétisation et destiné à tendre vers 0. La méthode des éléments finis, que l'on va considérer dans le chapitre suivant, est une méthode de Galerkin particulière possédant des propriétés qui la rendent spécialement intéressante pour la résolution des problèmes aux limites.

Soit  $V_h$  une famille d'espaces dépendant d'un paramètre positif  $h$ , telle que

Soit  $V_h$  une famille d'espaces dépendant d'un paramètre positif  $h$ , telle que

$$V_h \subset V, \quad \dim V_h = N_h < +\infty \quad \forall h > 0.$$

Le problème approché est tout simplement le problème discret du problème (2.2). Il prend la forme

$$\text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.14)$$

et est appelé problème de Galerkin.

Le problème de Galerkin (2.14) admet une solution unique

$$u_h \in V_h$$

. Cette solution satisfait l'estimation a priori suivante

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$$

où  $\alpha$  est la constante de coercivité.

Soit  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$  une base de  $V_h$  et considérons le développement de la solution de (1.3) dans cette base, i.e.

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i$$

Le vecteur  $U_h = (u_1, \dots, u_{N_h})^T$  est solution du système linéaire

$$A_h U_h = B_h$$

ou  $A_h = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq N_h}$  et  $B_h = (F(\varphi_1), \dots, F(\varphi_{N_h}))^T$ .

La matrice  $A_h$  est définie positive. Elle est symétrique si  $a$  est symétrique.

## 2.8 Méthode des éléments finis

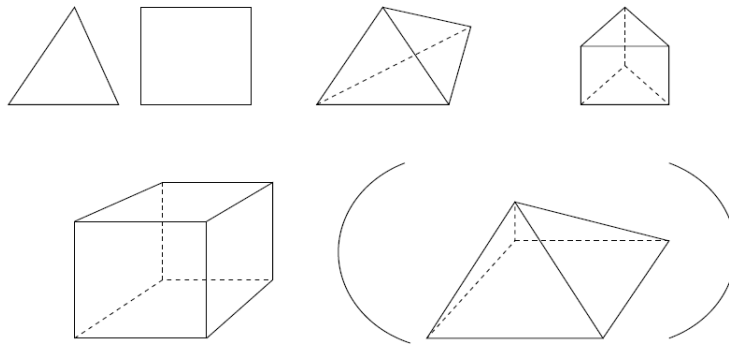
### Introduction

On appelle élément fini l'association :

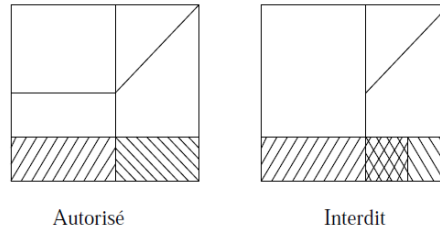
- . d'un élément géométrique ;
- . de fonctions d'interpolation ;
- . de points (ou noeuds) support géométriques des inconnues. Ce triplet n'est pas le résultat du hasard mais de contraintes liées aux propriétés mathématiques vérifiées par la solution cherchée et d'une démarche visant à optimiser le nombre de terme nul de la matrice du système final.

### Éléments géométriques

L'ensemble des éléments | ou maillage | doit constituer un recouvrement du domaine de calcul. En  $2D$ , les éléments utilisés sont des triangles et des quadrangles. En  $3D$ , des tétraédres, des prismes, des cubes et parfois des pyramides. Si d'autres polygones sont possibles leurs utilisations restent confidentielles.



Les différents éléments du maillage sont soumis à quelques contraintes puisqu'ils doivent constituer un recouvrement du domaine. Ainsi, deux éléments adjacents du maillage ont en commun un sommet ou une face.



### Fonctions d'interpolation

Sur chaque élément du maillage, l'inconnue du problème continu, notée  $c$  par la suite, est approchée par une fonction simple, notée  $c_h$ . Si on suppose la fonction approchée connue en un certain nombre de points de l'élément, elle est évaluée en n'importe quel point de l'élément par interpolation. Les fonctions d'interpolation choisies sont en général des polynômes. Les éléments finis sont alors dits de Lagrange. D'autres choix sont possibles mais ne seront pas évoqués ici.

La restriction de la fonction approchée à un élément  $K$  du maillage, notée  $c_h^K$

$$c_h^K(x, y) = \sum_{i=1}^{N_K} c_i N_i(x, y)$$

où  $c_i$  désigne la valeur de la fonction approchée  $c_h$  au point  $x_i$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$ ;  $N_i$  la fonction d'interpolation associée à  $x_i$ ;  $N_K$  le nombre de fonctions utilisées pour l'élément  $K$ . Les coefficients  $c_i$  de cette combinaison linéaire sont les inconnues | ou degré de liberté | du problème discret. Les fonctions d'interpolation sont les fonctions de base d'un espace vectoriel de dimension finie  $N_h$  dans lequel on cherche a priori la solution discrète  $c_h$ .

### Principe de la méthode des éléments finis

Afin de déterminer les inconnues du problème discret, on va utiliser une méthode de résidus pondérés : on minimise l'erreur commise en remplaçant dans les équations aux dérivées partielles la fonction exacte par la fonction approchée. Pour cela, on projette l'erreur sur un espace de fonctions  $\Phi_h$  à préciser. On appelle fonctions de pondération, que l'on note  $\phi_h$ , les fonctions de base de cet espace. Les différentes étapes sous forme mathématique s'écrivent donc

1.  $E(c) = 0$
2.  $E(ch) = \epsilon_h$
3.  $\forall \phi_h \in \Phi_h, \langle \epsilon_h, \phi_h \rangle = 0$

La méthode de Galerkin est un cas particulier de la méthode des résidus pondérés : l'espace de projection est le même que l'espace d'approximation de la solution du problème ; autrement dit  $\Phi_h = N_h$ . Lorsque l'espace de projection et l'espace d'interpolation sont différents, la méthode est dite de Petrov-Galerkin. Nous verrons que le décentrement des termes convectifs en éléments finis conduit à des schémas numériques appartenant à cette dernière famille.

---

# Bibliographie

---

- [1] M. Hafiane A. Hazzab, M. Atalla. *Étude comparative des schémas d'éléments finis appliqués aux écoulements unidimensionnels à surface libre*. Larhyss Journal, ISSN 1112-3680,, 2005.
- [2] A.Nadir. *Méthode des Éléments Finis*. Université de Jijel, 2010.
- [3] B.Gabutti. *On Two Upwind Finite-Difference Schemes for Hyperbolic Equations in Non-Conservative Form, Computer and Fluids*,. 1983.
- [4] D.Ouinas. *Application de la méthode des éléments finis*. Office des publications universitaires :1-2012,Dépôt légal :2654/2011, 2011.
- [5] P.Steffler F.Hicks. *Finite element modeling of open channel flow*,. Univ. of Alberta, Alberta, Canada., 1990.
- [6] . Stoker J. J. *Water Waves*,. Wiley and Sons, New York,, 1957.
- [7] K.Samir. *Cours Mécanique des fluides*. Université Kasdi Merbah-Ouargla, 2014/2015.
- [8] P.-Y. Lagrée. *Résolution numérique des équations de Saint-Venant, mise en œuvre en volumes finis par un solveur de Riemann bien balancé*. CNRS UPMC Univ Paris 06, UMR 7190,, 2019.
- [9] N.Bounab. *Simulation numérique de quelques écoulements potentiels en 2D courbés*. Université de M'sila, 2015.
- [10] M.H.Chaudhary R.J.Fennema. *Simulation of one-dimensional dam-break flows*. International of Hydraulic Research, 1987.

---

## Résumé

---

الهدف من هذا العمل هو دراسة مخططين أو ثلاثة للعناصر المنتهية التي نستطيع تطبيقها لحل المعادلات من نوع سان فونو. متبوعا بدراسة المقارنة بين هذه المخططات المحققة مع مثال تطبيقي (انكسار السد) الكلمات المفتاحية: معادلات سان فونو، العناصر المنتهية، طريقة جالاركين، التدفقات

---

Le but de ce travail étudier deux ou trois schémas d'élément finis qu'on peut les appliqués a la résolution de equations de type Saint-venant ensuite une étude comparative entre ces schémas va etre réaliser un exemple numérique c'est le ruptur de barrage.

**Mots-Clés :** Équation de Saint-venant, Élément finis, méthode de Galerkin, écoulement

---

The purpose of this work is to study two or three completed elemental schemes that can be applied to the solving of Saint-Venant type equations come then a comparative study between these schemes will be realized with exemple

**Keywords :** Saint-Venant equations, Finit element, Galerkin methode.