



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématiques et Numérique

Thème

Calcul numérique des équations intégrales
de première espèce

Présentée par:

HAFID Houda

Soutenu publiquement le: 10/06/2024

Devant le jury composé de:

GAGUI Bachir

NADIR Mostefa

LAKHAL Aissa

MCA

prof

MAA

Université de M'sila

Université de M'sila

Université de M'sila

Président

Encadreur

Examinateur

Année universitaire 2023/2024

Remerciements

Je remercie **ALLAH**, qui m'a donné la force, la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de professeur **NADIR Mostefa** je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant mon préparation de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements Dr. **NADIR Mohamed Nasseh** Qui m'a aidé dans ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à Messieurs les professeurs

GAGUI Bachir et **LAKHAL Aissa** qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce mémoire.

Enfin, je remercie tous mes amis de près ou de loin, et je voudrais mentionner mes collègues **Romissa, Imane, Oumelkeir** et les étudiants de ma promotion de spécialité

Analyse Mathématique et Numérique

Dédicace

Je dédie ce travail à la mémoire de mes chères grands-mères **ZOBIDA & RAHILA** sans oublier mon cher grand-père **HAFID AMARA**

Ensuite, à mes chers parents **HAEFID MEFTAHA et ANIBI MASSOUDA**, je ne saurais trop vous dire merci pour vos conseils, votre soutien et vos encouragements.

et pour vos prières qui m'ont accompagné tout le long de mes études. Ce travail est le fruit de tous vos sacrifices mieux que des mots. Il reflète tout l'amour que je ressens pour vous

A mes chers frères : **SALAH, ANTAR & KOSSAI**

A mes chères soeurs : **ZOBIDA, NOURA & LOUBNA**

A toutes mes deux familles **HAFID & ANIBI.**

&

La promotion de mathématiques 2024

A toutes les personnes que j'aime.

Table des matières

Introduction	iii
0.1 Introduction	
iii	
1 Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique	1
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	1
1.1.1 Opérateurs linéaires bornés	1
1.1.2 Opérateurs compact :	2
1.1.3 Equations aux Opérateurs compacts:	4
2 Equations intégrales et leurs classification	7
2.1 Classification des équations intégrales	7
2.1.1 Equations intégrales de Volterra	7
2.1.2 Equations intégrales de Fredholm	8
2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm	8
2.2 Equation intégral de volterra-Fredholm de première espèce	9
2.2.1 Transformation de Equation Intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce à seconde espèce	9
3 Résolution numérique des équations intégrales	12
3.1 Equations intégrales de Volterra-Fredholm	12
3.2 Méthode de quadrature	12
3.2.1 Application de la méthode des Trapèzes	12

3.2.2	Application de la méthode de Simpson	13
3.3	Exemples Numériques	15
	Conclusion	19
	Bibliographie	20

0.1 Introduction

Dans ce mémoire, nous traitons l'un des sujets les plus importants de l'analyse mathématique et numérique, qui est la solution numérique de les équations intégrales de Volterra-Fredholm.

Comme la résolution analytique de ce type des équations est souvent n'est pas évidente et sont difficile à trouver les gens sont plus intéressés par la résolution numérique.

les méthodes des résoudre numériquement des équations intégrales jouent un rôle très important des domaines scientifiques.

Notre mémoire se compose de trois chapitres:

Le Premier chapitre: est une introduction à l'analyse numérique on a utilisé les notions de base de l'analyse fonctionnelle, et la théorie des opérateurs bornés, compacts et intégraux.

Le Deuxième chapitre: est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour objectif de familiariser le lecteur de ce travail avec le concept d'équation intégrale. On trouve aussi une étude sur transformation des équations intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce à seconde espèce par la méthode de dérivation.

Le Troisième chapitre: est destiné à l'étude de la résolution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm en utilisant la méthode des trapèzes, en montrant l'efficacité de cette méthode par des exemples illustrés.

On termine notre mémoire par une conclusion générale..

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Linéarité des opérateurs

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

- *Condition additive*

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

- *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β , telles que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$.

1.1.2 Opérateurs compact :

Définition 1.1.1 Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un

ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F .

Théorème 1.1.1 (*critère de compacité*)

Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E , la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F .

Preuve. Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. ■

Théorème 1.1.2 *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Théorème 1.1.3 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. ■

Théorème 1.1.4 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A est compact.

Corollaire 1.1.1 *La boule unité $B(0, 1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

Théorème 1.1.5 *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

Théorème 1.1.6 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Noyau faiblement singulier

Définition 1.1.2 *On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que,*

$$\forall x, y \in G, x \neq y, \exists M > 0, |K(x, y)| < \frac{M}{|x - y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

Théorème 1.1.7 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

1.1.3 Equations aux Opérateurs compacts:

Equations de second espèce

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ définit l'équation de second espèce donnée par

$$\varphi - A\varphi = f ; \quad \varphi, f \in X$$

où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue

Théorème 1.1.8 *Le noyau de l'opérateur T défini par*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X ; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé et de dimension finie

Théorème 1.1.9 *La suite d'ensemble des noyaux*

$$N(T), N(T^2), \dots, N(T^n), \dots$$

est une suite croissante stationnaire. Autrement dit, elle ne contient qu'un nombre fini d'ensemble distincts, c'est à dire il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{0\} \subset N(T), N(T^2) \subset \dots \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = \dots$$

Le nombre p est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact A pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$

Théorème 1.1.10 *L'image de l'opérateur T défini par ,*

$$\text{Im } T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi; \text{ telle que } \varphi \in X\}$$

est un sous espace fermé

Le nombre de Riez p pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riez q pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$ sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

Théorème 1.1.11 *Les sous espaces $N(T^n)$ et $R(T^n)$ sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus \text{Im } T^n \equiv N(T^n) \oplus R(T^n)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz

Lemme 1.1.1 *L'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si, T^r est injectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Lemme 1.1.2 *L'opérateur $T = I - A$ est surjectif si et seulement si T^r est surjectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Théorème 1.1.12 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si il est surjectif, de plus l'opérateur admet un inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ borné*

Théorème 1.1.13 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$.

Chapitre 2

Equations intégrales et leurs classification

2.1 Classification des équations intégrales

2.1.1 Equations intégrales de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x, t) = 0$ pour $x < t$

Définition 2.1.1 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme:*

$$\int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

Définition 2.1.2 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme:*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

2.1.2 Equations intégrales de Fredholm

Définition 2.1.3 On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme:

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $f(x)$ et $k(x, t)$ sont des fonctions connues, les bornes d'intégration

sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm .

Définition 2.1.4 On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ des fonctions données, λ est un facteur inconnu.

2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjointes, apparaît dans une équation intégrale .

Définition 2.1.5 On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt, x \in [a, b] \quad (2.1.1)$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme 2:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt ds$$

où les fonctions k_1, k_2 et f est connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(t) dt - \int_0^1 t\varphi(t) dt \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \int_0^x \int_0^1 (s-t)\varphi(t) dt ds\end{aligned}$$

2.2 Equation intégral de volterra-Fredholm de première espèce

Dans cette section, on va donner quelques méthodes de résolution des équations intégrales de première espèce définie par

$$\int_a^x k_1(x, t)\varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t) dt = f(x) \quad a \leq t \leq x \leq b$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue. Cette équation généralement très difficile résoudre voir impossible numériquement. Généralement on utilise des régularisations pour obtenir une équation intégrale de seconde espèce la quelle on peut trouver une solution posés, les solutions de ces équations sont généralement instables. On doit régulariser ce type de problème $T\varphi = f$ comme par exemple la dérivation.

2.2.1 Transformation de Equation Intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce à seconde espèce

Formule de Leibniz

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy = f(x, b) \frac{db}{dx} - f(x, a) \frac{da}{dx} + \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$$

où $f(x, y)$ est une fonction continue pour $a \leq x \leq b$ et $a \leq y \leq b$.

En particulier si $a(x) = cte$ et $b(x) = x$ la formule de Leibniz s'écrit

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x, y) dy = f(x, x) + \int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$$

avec $f(x, y)$ et $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ sont continues pour tout $x \in [a, b]$

Transformation par dérivation

Soit l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de première espèce

$$\int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt = f(x), a \leq t \leq x \leq b \quad (2.2.1)$$

Supposons que $k_1(x, t), k_2(x, t), \frac{\partial k_1(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial k_2(x, t)}{\partial x}, f(x)$ et $f'(x)$ sont continues pour tout $x \in [a, b]$. Alors,

en dérivant les deux membres de l'équation (2.2.1) par rapport à la variable x , on obtient

$$k_1(x, x) \varphi(x) + \int_a^x k_1'(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2'(x, t) \varphi(t) dt = f'(x) \quad (2.2.2)$$

si $k_1(x, x) \neq 0$ pour tout $a \leq x \leq b$, alors on peut transformer l'équation (2.2.2) à l'équation

intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) + \int_a^x k_3(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_4(x, t) \varphi(t) dt = g(x) \quad (2.2.3)$$

où

$$k_3(x, t) = \frac{k_1'(x, t)}{k_1(x, x)}, k_4(x, t) = \frac{k_2'(x, t)}{k_1(x, x)}, g(x) = \frac{f'(x)}{k_1(x, x)}$$

Si le noyau $k_3(x, t), k_4(x, t)$ est carré intégrable et $g(x) \in L^2([a, b])$ l'équation (2, 2, 3) admet une solution unique $\varphi \in L^2([a, b])$

Remarque 2.2.1 Si $k_1(x, x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$ de l'équation (2.2.2) il vient

$$\int_a^x k_1'(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2'(x, t) \varphi(t) dt = f'(x) \quad (2.2.4)$$

cette équation est aussi une équation de Volterra-Fredholm de première espèce.

Si $k_1'(x, t), k_2'(x, t)$ continue pour tout $x \in [a, b]$, dérivons l'équation (2.2.4) terme à terme par rapport à x , il vient

$$k_1'(x, x) \varphi(x) + \int_a^x k_1''(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2''(x, t) \varphi(t) dt = f''(x) \quad (2.2.5)$$

Si $k_1'(x, x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, on peut transformer l'équation (2.2.4) à une équation de Volterra-Fredholm de deuxième espèce, et ainsi de suite.

Remarque 2.2.2 *La condition $k_1(x, x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, n'est pas nécessairement*

pour que l'équation (2.2.1) admette une solution unique.

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales

3.1 Equations intégrales de Volterra-Fredholm

Les équation intégrales ont admis un intérêt considérable dans les littératures mathématiques en raison de leurs nombreux domaines d'application dans différents domaines des sciences . De nombreux auteurs donnent des solutions numériques pour différents types d'équations intégrales de Fredholm et d'équations intégrales pour différents types d'équations intégrales de Volterra .

3.2 Méthode de quadrature

3.2.1 Application de la méthode des Trapèzes

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm du second type donnée par

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt + \int_a^b L(x,t) \varphi(t) dt \quad (3.2.1)$$

pour résoudre cette équation sur l'intervalle fini $[a, b]$,nous le divisons en n intervalles plus petits de largeur h où $h = \frac{(b-a)}{n}$.

le première point de subdivision est noté x_i , tel que $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$.

la solution approximative sera définie au point x_i est désigné par $\varphi(x_i)$ donné par

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \int_a^{x_i} k(x_i, t) \varphi(t) dt + \int_a^b L(x_i, t) \varphi(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.2)$$

Notons

$$k_{i,j} = k(x_i, x_j), \quad L_{i,j} = L(x_i, x_j), \quad f_i = f(x_i), \quad \varphi_i = \varphi(x_i), \quad i, j = 0, \dots, n$$

Si nous approximons les intégrales apparaissant dans l'équation (3.2.2) par la formule des trapèzes qui donnera le système d'équations suivant:

$$\varphi_0 = f_0 + \frac{h}{2} \left(L_{0,0} \varphi_0 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} L_{0,j} \varphi_j + L_{0,n} \varphi_n \right) \quad (3.2.3)$$

$$\varphi_i = f_i + \frac{h}{2} \left[(L_{i,0} + k_{i,0}) \varphi_0 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (L_{i,j} + k_{i,j}) \varphi_j + (2L_{i,j} + k_{i,j}) \varphi_j + 2 \sum_{j=i+1}^{n-1} L_{i,j} \varphi_j + L_{i,n} \varphi_n \right] \quad (3.2.4)$$

$$i = 1, \dots, n - 1$$

$$\varphi_n = f_n + \frac{h}{2} \left[(L_{n,0} + k_{n,0}) \varphi_0 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (L_{n,j} + k_{n,j}) \varphi_j + (L_{n,n} + k_{n,n}) \varphi_n \right]$$

et φ_i est la valeur approximative de la fonction inconnue φ au noeud $x_i, i = 0, 1, \dots, n$.

La solution approximative de l'équation(3.2.1) est obtenue en résolvant le système donné par l'équation (3.2.3)

3.2.2 Application de la méthode de Simpson

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm du second type donnée par l'équation (3.2.1).

Ici, nous utilisons la méthode Simpson pour trouver la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Pour ce faire, on divise l'intervalle $[a, b]$ en $2n$ intervalles de largeur h , où $h = \frac{(b-a)}{n}$.

La solution approximative de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm dans les noeuds pairs (x_{2i}) est donnée par:

$$\varphi(x_{2i}) = f(x_{2i}) + \int_a^{x_{2i}} k(x_{2i}, t) \varphi(t) dt + \int_a^b L(x_{2i}, t) \varphi(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.5)$$

et dans les noeuds impairs (x_{2i+1}) donnée par :

$$\varphi(x_{2i+1}) = f(x_{2i+1}) + \int_a^{x_{2i+1}} k(x_{2i+1}, t) \varphi(t) dt + \int_a^b L(x_{2i+1}, t) \varphi(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.6)$$

En utilisant la formule de Simpson pour approximer les intégrales apparaissant dans les équations (3.2.5), (3.2.6) on obtient le système d'équations suivant :

$$\varphi_0 = f_0 + \frac{h}{3} \left(L_{0,0} \varphi_0 + 4 \sum_{j=1}^n L_{0,2j-1} \varphi_{2j-1} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} L_{0,2j} \varphi_{2j} + L_{0,2n} \varphi_{2n} \right) \quad (3.2.7)$$

$$\varphi_{2i} = f_{2i} + \frac{h}{3} [(L_{2i,0} + k_{2i,0}) \varphi_0 + 4 \sum_{j=1}^i (L_{2i,2j-1} + k_{2i,2j-1}) \varphi_{2j-1} +$$

$$2 \sum_{j=1}^{i-1} (L_{2i,2j} + k_{2i,2j}) \varphi_{2j} + (2L_{2i,2i} + k_{2i,2i}) \varphi_{2i} +$$

$$4 \sum_{j=i+1}^n L_{2i,2j-1} \varphi_{2j-1} + 2 \sum_{j=i+1}^{n-1} L_{2i,2j} \varphi_{2j} + L_{2i,2n} \varphi_{2n}], \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\varphi_{2i+1} = f_{2i+1} + \frac{h}{3} [(L_{2i+1,0} + k_{2i+1,0}) \varphi_0 + 4 \sum_{j=1}^i (L_{2i+1,2j-1} + k_{2i+1,2j-1}) \varphi_{2j-1} + \quad (3.2.8)$$

$$2 \sum_{j=1}^{i-1} (L_{2i+1,2j} + k_{2i+1,2j}) \varphi_{2j} + \left(2L_{2i+1,2i} + \frac{5}{2} k_{2i+1,2i} \right) \varphi_{2i} + \left(4L_{2i+1,2i+1} + \frac{3}{2} L_{2i+1,2i+1} \right) \varphi_{2i+1} +$$

$$4 \sum_{j=i+2}^n L_{2i+1,2j-1} \varphi_{2j-1} + 2 \sum_{j=i+1}^{n-1} L_{2i+1,2j} \varphi_{2j} + L_{2i+1,2n} \varphi_{2n}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\varphi_{2n} = f_{2n} + \frac{h}{3} [(k_{2n,0} + L_{2n,0}) \varphi_0 + 4 \sum_{j=1}^n (k_{2n,2j-1} + L_{2n,2j-1}) \varphi_{2j-1} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (k_{2n,2j} + L_{2n,2j}) \varphi_{2j} +$$

(3.2.9)

$$(k_{2n,2n} + L_{2n,2n}) \varphi_{2n}]$$

et φ_i est la valeur approximative de la fonction inconnue φ au noeud $x_i, i = 0, 1, \dots, n$.

La solution approximative de l'équation (3.2.1) est obtenue en résolvant le système donné par les équations (3.2.7),(3.2.8),(3.2.9).

3.3 Exemples Numériques

Dans cette section on va traiter quelques exemples pour résoudre les équations intégrales linéaire de Volterra- Fredholm de de second espèce par la méthode des Trapèzes

Exemple 1. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de première espèce.

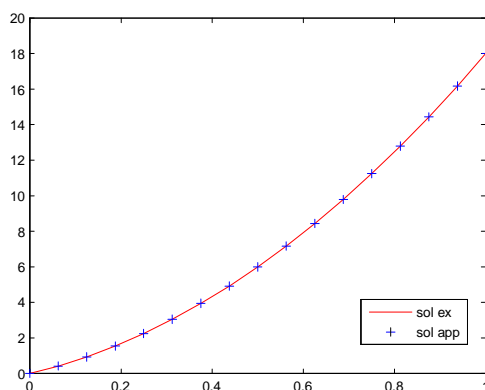
$$\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 (x+t)\varphi(t)dt = 5 + 7x + x^3 + x^4,$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = 6x + 12x^2 \tag{3.3.1}$$

Table 1. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode des Trapèzes, l'erreur est calculée pour $N = 9$.

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
0.000000e+000	0.000000e+000	1.060420e-007	1.060420e-007
1.250000e-001	9.375000e-001	9.375000e-001	3.075424e-008
2.500000e-001	2.250000e+000	2.250000e+000	1.755272e-008
3.750000e-001	3.937500e+000	3.937500e+000	5.999544e-009
5.000000e-001	6.000000e+000	6.000000e+000	1.629944e-008
6.250000e-001	8.437500e+000	8.437500e+000	2.830056e-009
7.500000e-001	1.125000e+001	1.125000e+001	1.776669e-008
8.750000e-001	1.443750e+001	1.443750e+001	2.559982e-008
1.000000e+000	1.800000e+001	1.800000e+001	8.960006e-008



Exemple 2. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de première espèce.

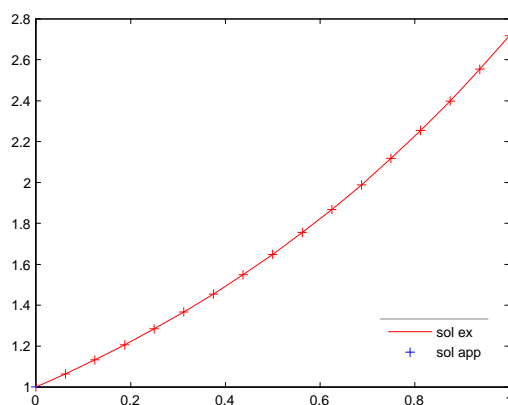
$$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 \sin(x-t)\varphi(t)dt = \frac{1}{2}e^x - \cos x + \frac{1}{2}e(\cos(x-1) + \sin(x-1)),$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = e^x$$

Table 2. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode des Trapèzes, l'erreur est calculée pour $n = 9$

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
0.000000e+000	1.000000e+000	1.000001e+000	5.399303e-007
1.250000e-001	1.133148e+000	1.133149e+000	3.466235e-007
2.500000e-001	1.284025e+000	1.284026e+000	4.515238e-007
3.750000e-001	1.454991e+000	1.454992e+000	4.856726e-007
5.000000e-001	1.648721e+000	1.648722e+000	5.590612e-007
6.250000e-001	1.868246e+000	1.868247e+000	6.415925e-007
7.500000e-001	2.117000e+000	2.117001e+000	7.008043e-007
8.750000e-001	2.398875e+000	2.398876e+000	8.544415e-007
1.000000e+000	2.718282e+000	2.718283e+000	6.971806e-007



Exemple3. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de première espèce.

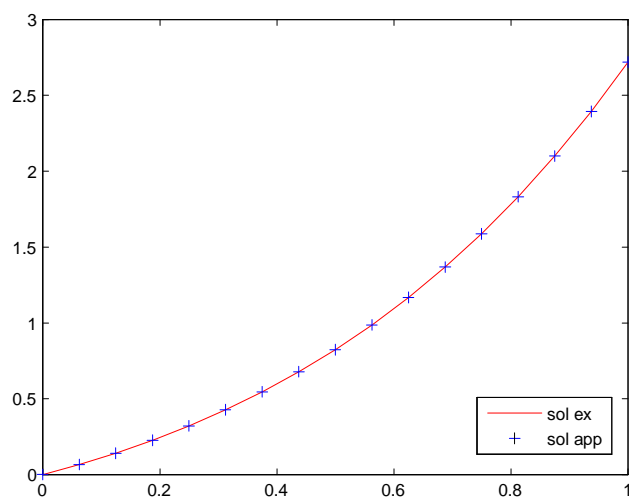
$$\int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^1 x\varphi(t)dt = xe^x - e^x + x + 1,$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = xe^x.$$

Table 3. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode des Trapèzes l'erreur est calculée pour $n = 9$.

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
0.000000e+000	0.000000e+000	1.168479e-006	1.168479e-006
1.250000e-001	1.416436e-001	1.416429e-001	6.807284e-007
2.500000e-001	3.210064e-001	3.210060e-001	3.421449e-007
3.750000e-001	5.456218e-001	5.456212e-001	5.972794e-007
5.000000e-001	8.243606e-001	8.243600e-001	6.297869e-007
6.250000e-001	1.167654e+000	1.167653e+000	6.706238e-007
7.500000e-001	1.587750e+000	1.587749e+000	9.786947e-007
8.750000e-001	2.099016e+000	2.099015e+000	6.817263e-007
1.000000e+000	2.718282e+000	2.718279e+000	2.842804e-006



Conclusion

Dans cette mémoire nous avons présenté une méthode analytique pour transformation des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm de première espèce à second espèce.

Numériquement nous avons appliqué la méthode des trapèzes pour résoudre des équations intégrales de Volterra-Fredholm de second type. Le but de ce travail est de voir la performance de cette méthode. D'après les résultats numériques obtenus à partir des exemples illustratifs, nous concluons l'efficacité et la bonne précision de cette méthode .

Bibliographie

- [1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [2] M.N.NADIR.Sur la solution numérique des equations intégrales de Volterra-Fredholm en utilisant les polynômes de Chebyshev,Mémoire de master 2022.
- [3] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA
- [4] NOUI DJAIDJA,Etude des équations intégrales de Volterra de première espèce en utilisant les techniques des splines ,Thèse de doctorat,Université de M'sila.
- [5] A.HAIMED.On the Numerical Solution of Mixed Volterra-Fredholm Intégral Equations,Mémoire de master 2021

الملخص :

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتيرا – فريدولم التكاملية من النوع الأول بعد التسوية وذلك باستخدام ترايز على ذلك تم تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة

الكلمات المفتاحية :

طريقة الشبه المنحرف- المعادلات التكاملية لفولتيرا- المعادلات التكاملية لفرد هولم -الطرق التربيعية-تسويات

Résumé :

Le but de ce mémoire est la résolution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm du première espèce, après la régularisation de cette équation, on utilise la méthode de trapèze de nombreux exemples sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la méthode proposée

Mots clés :

Méthode de trapèze, Equation intégrale de Volterra-Fredholm, régularisation des équations intégrales, Méthodes de quadratures

Abstract :

The goal of this memory is to solve numerically the integral equation of Volterra-Fredholm type of the first kind t, after regularization we use the trapezoidal method for this approximation. Moreover, many examples are presented to illustrate the accuracy and efficiency of this method

Keywords:

Trapezoidal method, Integral equation of Volterra-Fredholm of the first kind, Regularization of the integral equation, Quadrature methods.