



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Fondamentales et Appliquées

Par

BENLECHHEB IMANE

Sujet

Sur Une Classe De Problème Semi Linéaire

Dirigé par :

Dr. Memou Ameur

Promotion: 2011/2012

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu pour compléter cette mémoire

Je tiens dans un premier temps à remercier Docteur

Memou Ameer de l'université de M'sila, pour m'avoir

confié ce travail de recherches

Je remercier tous les enseignants du département de

mathématique, en particulier Pr M Nadir, Pr M

Moussai, Mr B Lakhali et Mr B Gagui, Dr K Saadi

Mes dernières pensées iront vers ma famille, et surtout

mes parents, qui m'auront

Permis de pour suivre mes études jusqu'à aujourd'hui.

Table des matières

1	Rappelle sur l'analyse fonctionnelle	3
1.1	Opérateurs fermés	4
1.2	Semi-groupes des opérateurs linéaires bornés	5
1.2.1	Semi-groupes analytiques	5
1.2.2	la résolvante d'un semi groupe	5
1.2.3	Théorème de convergence dominée	7
2	la théorie des semi-groupes analytiques	9
2.1	Théorème de générateur d'un semigroupes analytiques	10
2.2	Puissances fractionnaires	21
3	Le problème de Cauchy linéaire et semi-linéaire	35
3.1	Le problème de Cauchy linéaire	36
3.2	Le problème de Cauchy semi-linéaire	44

Introduction

Le travail accompli dans cette mémoire a pour objectif d'étudier les problèmes semi linéaires en utilisant la théorie des semi-groupes analytique et les puissances fractionnaires d'un semi-groupe.

Dans le premier chapitre est consacré à un rappel d'analyse fonctionnelle en particulier les espaces de Banach et leurs propriétés fondamentales , on donne quelques notions de semi groupe et semi groupe analytique .

Dans le deuxième chapitre nous présentons quelques propriétés bien connues des semi-groupes analytiques et les puissances fractionnaires d'un semi-groupes sur un espace de Banach, d'une manière qui permet une bonne liaison avec les problèmes semi linéaires dans le troisième chapitre, on commence à la théorie de générateur d'un semi-groupes analytiques .

Dans le dernière chapitre, nous considérons le problème de Cauchy linéaire et semi-linéaire, et on donne une démonstration complète du théorème de l'existence locale et l'unicité de la solution (théorèmes 17 et 19). En utilisant les semigroupes analytiques

Chapitre 1

Rappelle sur l'analyse fonctionnelle

1.1 Opérateurs fermés

Définition 1 : *(Opérateurs bornés)* Un opérateur linéaire U défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|U(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E.$$

Définition 2 Un opérateur linéaire U d'un sous-espace $D(U)$ d'un espace de Banach E dans lui-même est appelé opérateur non-borné, de domaine $D(U)$.

Définition 3 *(Opérateurs fermés)* On dit que l'opérateur U est fermé, si pour toute suite x_n de $D(U)$, converge vers x et la suite $U(x_n)$ converge vers y , alors

$$x \in D(U) \quad \text{et} \quad y = U(x)$$

ou encore : On dit que l'opérateur U est fermé, si pour toute suite $(x_n, U(x_n))$ d'éléments de $G(U)$ converge vers (x, y) on a

$$(x, y) \in G(U).$$

où

$$G(U) = \{(x, Ux), x \in D(U)\}.$$

est appelé graphe de l'opérateur U .

Théorème 1 *(Théorème de graphe fermé)* Soit U un opérateur linéaire, défini sur un espace de Banach E à valeurs dans un espace de Banach F , si le graphe $G(U)$ est fermé dans $E \times F$, alors U est continu.

1.2 Semi-groupes des opérateurs linéaires bornés

Définition 4 Soit E un espace de Banach. Une famille $U(t)$ pour $0 \leq t < \infty$, des opérateurs linéaires bornés de E dans E est un semi-groupe d'opérateur linéaire borné sur E si :

1. $U(0) = I$, (I est l'opérateur identité sur E).
2. $U(t + s) = U(t)U(s)$ pour tous $t, s \geq 0$, (une propriété de semi-groupe).

Définition 5 On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(U(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur A défini dont le domaine est

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{U(t)x - x}{t} \right) \text{ existe} \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)x - x}{t} \quad \text{pour } x \in D(A).$$

1.2.1 Semi-groupes analytiques

Définition 6 Soit le secteur $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2 \text{ et } \theta_1 < 0 < \theta_2\}$ et pour $z \in \Sigma$, soit $U(z)$ un opérateur linéaire borné. La famille $(U(z))_{z \in \Sigma}$ est dite semi-groupe analytique, si

1. $U(0) = I$.
2. $U(z_1 + z_2) = U(z_1)U(z_2)$.
3. $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Sigma} U(z)x = x$, Pour tout $x \in E$.
4. $z \rightarrow U(z)$ est analytique sur Σ .

1.2.2 la résolvante d'un semi groupe

Définition 7 (la résolvante) : Si A est un opérateur linéaire n'est pas nécessairement borné dans E , l'ensemble résolvant $\rho(\lambda)$ de A est l'ensemble de tout les nombres complexe

λ tel que $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné dans E . On le note par

$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ et est appelé la résolvante de A .

Théorème 2 Soit A un opérateur linéaire fermé dans l'espace de Banach E , l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un domaine (ensemble ouvert) de \mathbb{C} et $R(\lambda)$ est holomorphe pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

Théorème 3 Soit A un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach E . $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$ on a $R(\lambda)$ vérifie l'identité de Hilbert

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

Définition 8 (Les fonctions holomorphes) Soit Ω un domaine non vide du plan complexe \mathbb{C} . Soit f une fonction à valeur complexe définie sur Ω . Soit $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$, on dit que f est dérivable en z_0 , s'il existe un nombre complexe, noté $f'(z_0)$ tel que :

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Définition 9 Si f est dérivable en tout point $z \in \Omega$ et sa dérivée est continue, on dit que f est holomorphe (analytique) sur Ω .

Théorème 4 Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D , l'intégrale de $f(z)$ sur une courbe fermée contenue dans D est nulle.

Corrolaire.

Corollaire 1 Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe dans un domaine D , l'intégrale de $f(z)$ sur la frontière de D est nulle.

Théorème 5 Soit f une fonction holomorphe dans Ω sauf en un nombre fini de points isolés $\{z_1, \dots, z_m\}$, alors

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 2i\pi \sum_i \text{Res}(f, z_i).$$

Théorème 6 Soit f une fonction mesurable dans le domaine $\Omega_x \times \Omega_y$. Si $0 \leq f < +\infty$, et si est intégrable

$$\varphi(x) = \int_{\Omega_y} f(x, y)dy, \quad \psi(y) = \int_{\Omega_x} f(x, y)dx$$

alors φ et ψ sont intégrables et

$$\int_{\Omega_x} \varphi(x)dx = \int_{\Omega_y} \psi(y)dy = \int \int_{\Omega_x \times \Omega_y} f(x, y)dx dy$$

1.2.3 Théorème de convergence dominée

Théorème 7 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré (E, A, u) , à valeurs réelles ou complexes, telle que :

1—la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur E vers une fonction f ;

2—il existe une fonction intégrable g telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, |f_n(x)| \leq g(x)$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| du = 0$$

ce qui entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n du = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n du = \int_E f du$$

Définition 10 (Fonction de Hölder) Une application Hölderienne entre deux espace de

Banach E et F , s'il existe une constante $k > 0$ et un exposant $0 < \alpha < 1$ tels que pour tous x et y dans E :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|^\alpha.$$

Définition 11 (Fonction de Lipschitz) Une application Lipschitzienne entre deux espaces de Banach E et F , s'il existe une constante k tels que :

$$\forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Théorème 8 Soient (E, d) un espace métrique complet et si $\varphi : E \rightarrow E$ est une application contractante, alors φ admet un point fixe unique $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite récurrente $x_{p+1} := \varphi(x_p)$ converge vers a .

Chapitre 2

la théorie des semi-groupes analytiques

2.1 Théorème de générateur d'un semigroupes analytiques

Définition 12 Soit E un espace de Banach sur le corps de nombre réel \mathbb{R} ou le corps des complexe \mathbb{C} . Soit $A : E \rightarrow E$ un opérateur linéaire fermé à domaine dense. Supposons que l'opérateur A satisfait aux deux conditions suivantes :

(1) L'ensemble resolvant de A contient la région (voir figure 2.1)

$$\Sigma_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, |\arg \lambda| < \pi/2 + \omega\}, 0 < \omega < \pi/2.$$

(2) Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_\varepsilon > 0$ tel que la résolvante $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ satisfait l'estimation

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}, \lambda \in \Sigma_\omega^\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, |\arg \lambda| \leq \pi/2 + \omega - \varepsilon\}. \quad (2.1)$$

On pose

$$U(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda) d\lambda, t > 0, \quad (2.2)$$

où Γ est un chemin dans l'ensemble $\Sigma_\omega^\varepsilon$ constitué par les trois courbes suivantes (voir figure 2.2):

$$\Gamma^{(1)} = \{r e^{-i(\pi/2 + \omega - \varepsilon)} : 1 \leq r < \infty\}$$

$$\Gamma^{(2)} = \{e^{i\theta} : -(\pi/2 + \omega - \varepsilon) \leq \theta \leq \pi/2 + \omega - \varepsilon\}$$

$$\Gamma^{(3)} = \{r e^{i(\pi/2 + \omega - \varepsilon)} : 1 \leq r < \infty\}.$$

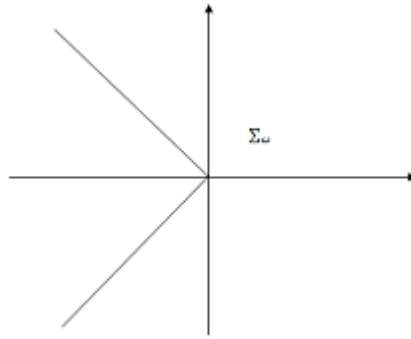


Figure 2.1



Figure 2.2

Alors, par l'estimation (2.1), on déduit que l'intégrale

$$U(t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma^{(k)}} e^{\lambda t} R(\lambda) d\lambda$$

converge dans l'espace de Banach $L(E, E)$ pour tout $t > 0$, et donc il définit un opérateur linéaire borné sur E . De plus, l'opérateurs $U(t)$ est un semi-groupe sur E , plus précisément, on a

Proposition 1 L'opérateurs $U(t)$, définie par la formule (2.2), satisfait à la propriété de semi-groupe, qui est,

$$U(t + s) = U(t).U(s), t, s > 0.$$

Démonstration. D'après le théorème de Cauchy, l'opérateur U peut s'écrire sous la forme

$$U(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\mu s} R(\mu) d\mu, s > 0.$$

où Γ' est un chemin obtenu à partir du chemin Γ par une translation de vecteur constant vers la droite (voir figure 2.3). Alors on utilisant le théorème de Fubini, on aura

$$\begin{aligned}
U(t).U(s) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} e^{\mu s} R(\lambda) R(\mu) d\lambda d\mu \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} e^{\mu s} \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s}}{\lambda - \mu} d\mu \right] d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\mu s} R(\mu) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} d\lambda \right] d\mu.
\end{aligned}$$

On calcule les deux termes dans la dernière partie

a) On pose

$$f(\mu) = \frac{e^{\mu s}}{\lambda - \mu}.$$

Alors, en appliquant le théorème des résidus, on obtient que (voir figure 2.4)

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma'(1) \cap \{|\mu| \leq r\}} f(\mu) d\mu + \int_{\Gamma'(2)} f(\mu) d\mu + \int_{\Gamma'(3) \cap \{|\mu| \leq r\}} f(\mu) d\mu + \int_{-(\pi/2+\omega-\varepsilon)}^{\pi/2+\omega-\varepsilon} f(re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta \\
&= 2\pi i \operatorname{Res}[f(\mu)]_{\mu=\lambda} = -2\pi i e^{\lambda s}.
\end{aligned}$$

Mais on a, l'orsque $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma'(1) \cap \{|\mu| \leq r\}} f(\mu) d\mu &\rightarrow \int_{\Gamma'(1)} f(\mu) d\mu \\
\int_{\Gamma'(3) \cap \{|\mu| \leq r\}} f(\mu) d\mu &\rightarrow \int_{\Gamma'(3)} f(\mu) d\mu,
\end{aligned}$$

et

$$\left| \int_{-(\pi/2+\omega-\varepsilon)}^{\pi/2+\omega-\varepsilon} f(re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta \right| \leq e^{-rs \sin(\omega-\varepsilon)} \int_{-(\pi/2+\omega-\varepsilon)}^{\pi/2+\omega-\varepsilon} \frac{d\theta}{\left| \frac{\lambda}{r} - e^{i\theta} \right|} \rightarrow 0.$$

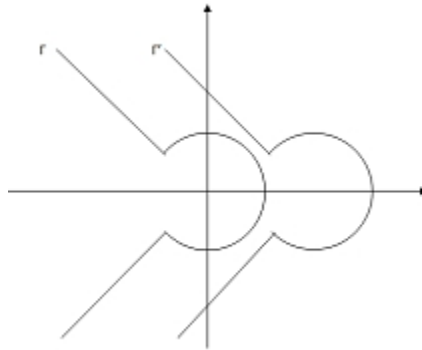


Figure 2.3

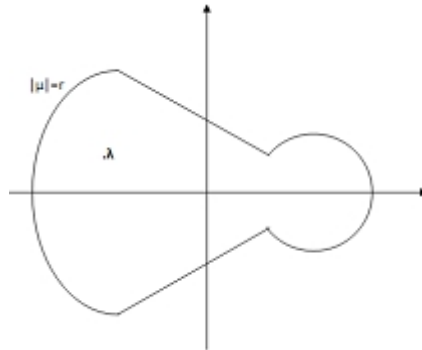


Figure 2.4

Par conséquent

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s}}{\lambda - \mu} d\mu = -e^{\lambda s}.$$

b) De même, puisque le chemin Γ se trouve à gauche du chemin Γ' , on trouve que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} d\lambda = 0.$$

de (a) et (b), on déduit que

$$U(t).U(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda(t+s)} R(\lambda) d\lambda = U(t+s).$$

Le théorème ci dessous indique que le semigroupe $U(t)$ peut être étendu à un semigroupe analytique dans un secteur contient l'axe des réel positif.

■

Théorème 9 *Le semigroupe $U(t)$ peut être étendu à un semigroupe $U(z)$ analytique dans*

le secteur $\Delta_\omega = \{z = t + is : z \neq 0, |\arg z| < \omega\}, 0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ et satisfait aux propriétés suivantes :

a) Les opérateurs $AU(z)$ et $\frac{dU}{dz}(z)$ sont des opérateurs bornés sur E , est satisfont aux relations

$$\frac{dU}{dz}(z) = AU(z), \quad z \in \Delta_\omega. \quad (2.3)$$

b) Pour chaque $0 < \varepsilon < \omega/2$ il existe des constantes $\widetilde{M}_0(\varepsilon) > 0$ et $\widetilde{M}_1(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|U(z)\| \leq \widetilde{M}_0(\varepsilon), \quad z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}, \quad (2.4)$$

$$\|AU(z)\| \leq \frac{\widetilde{M}_1(\varepsilon)}{|z|}, \quad z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}, \quad (2.5)$$

où

$$\Delta_\omega^{2\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\arg z| \leq \omega - 2\varepsilon\}.$$

c) Pour chaque $x \in E$, on a que $z \rightarrow 0, z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}$,

$$U(z)x \rightarrow x \quad \text{dans } E.$$

Démonstration.

i) L'analyticité de $U(z)$: si $\lambda \in \Gamma^{(3)}$ et $z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}$, c'est à dire, si

$$\lambda = |\lambda| e^{i\theta}, \quad \theta = \pi/2 + \omega - \varepsilon,$$

$$z = |z| e^{i\varphi}, \quad |\varphi| \leq \omega - 2\varepsilon,$$

alors on a

$$\lambda z = |\lambda| |z| e^{i(\theta+\varphi)}.$$

avec

$$\begin{aligned} \pi/2 + \varepsilon &\leq \theta + \varphi \leq \pi/2 + 2\omega - 3\varepsilon < 3\pi/2 - 3\varepsilon. \\ \cos(\theta + \varphi) &\leq \cos(\pi/2 + \varepsilon) = -\sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc il résulte que

$$|e^{\lambda z}| \leq e^{-|\lambda||z|\sin \varepsilon}, \quad \lambda \in \Gamma^{(3)}, z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}. \quad (2.6)$$

De même, on a

$$|e^{\lambda z}| \leq e^{-|\lambda||z|\sin \varepsilon}, \quad \lambda \in \Gamma^{(1)}, z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}. \quad (2.7)$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on pose

$$K_\omega^\varepsilon = \Delta_\omega^{2\varepsilon} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \varepsilon\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \varepsilon, |\arg z| \leq \omega - 2\varepsilon\}.$$

Alors, par les estimations (2.1), (2.6) et (2.7), on obtient

$$\|e^{\lambda z} R(\lambda)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} e^{-\varepsilon \sin \varepsilon \cdot |\lambda|}, \quad \lambda \in \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(3)}, z \in K_\omega^\varepsilon. \quad (2.8)$$

D'autre terme, on a

$$\|e^{\lambda z} R(\lambda)\| \leq M_\varepsilon e^{|\lambda z|}, \quad \lambda \in \Gamma^{(2)}, z \in K_\omega^\varepsilon. \quad (2.9)$$

Par conséquent, on trouve que l'intégrale

$$U(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda z} R(\lambda) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma^{(k)}} e^{\lambda z} R(\lambda) d\lambda \quad (2.10)$$

converge uniformément dans l'espace de Banach $L(E, E)$, pour tout $z \in K_\omega^\varepsilon$ et pour

tout $\varepsilon > 0$. Ce qui prouve que l'opérateur $U(z)$ est analytique dans le domaine $\Delta_\omega = \bigcup_{\varepsilon>0} K_\omega^\varepsilon$. Par l'analyticité de $U(z)$, il résulte que l'opérateur $U(z)$ est aussi satisfait aux propriétés des semi groupe

$$U(z + \omega) = U(z).U(\omega), z, \omega \in \Delta_\omega.$$

On démontre que l'opérateur $U(z)$ satisfait les propriétés (a), (b) et (c).

b) Au début, en utilisant le théorème de Cauchy, on obtient que

$$U(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{|z|}} e^{\lambda z} R(\lambda) d\lambda,$$

où $\Gamma_{|z|}$ est un chemin constitué des trois courbes suivantes (voir Figure 2.6)

$$\begin{aligned} \Gamma_{|z|}^{(1)} &= \{r e^{-i(\pi/2 + \omega - \varepsilon)} : \frac{1}{|z|} \leq r < \infty\}, \\ \Gamma_{|z|}^{(2)} &= \{\frac{1}{|z|} e^{i\theta} : -(\pi/2 + \omega - \varepsilon) \leq \theta \leq \pi/2 + \omega - \varepsilon\}, \\ \Gamma_{|z|}^{(3)} &= \{r e^{i(\pi/2 + \omega - \varepsilon)} : \frac{1}{|z|} \leq r < \infty\}. \end{aligned}$$

Mais, par les estimations (2.1), (2.6) et (2.7), il résulte que

$$\|e^{\lambda z} R(\lambda)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} e^{-|\lambda||z|\sin\varepsilon}, \quad \lambda \in \Gamma_{|z|}^{(1)} \cup \Gamma_{|z|}^{(3)}, z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}.$$

Alors pour $k = 1, 3$

$$\int_{\Gamma_{|z|}^{(k)}} \|e^{\lambda z} R(\lambda)\| |d\lambda| \leq M_\varepsilon \int_{\frac{1}{|z|}}^{\infty} e^{-\rho|z|\sin\varepsilon} \rho^{-1} d\rho = M_\varepsilon \int_1^{\infty} e^{-\sin\varepsilon \cdot s} s^{-1} ds,$$

et pour $k = 2$

$$\int_{\Gamma_{|z|}^{(2)}} \|e^{\lambda z} R(\lambda)\| |d\lambda| \leq M_\varepsilon \int_{-(\pi/2+\omega-\varepsilon)}^{\pi/2+\omega-\varepsilon} e d\theta = 2eM_\varepsilon(\pi/2 + \omega - \varepsilon) \leq 2\pi eM_\varepsilon.$$

Combinant les inégalités précédentes, on aura :

$$\begin{aligned} \|U(z)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_{|z|}^{(k)}} \|e^{\lambda z} R(\lambda)\| |d\lambda| \leq \frac{1}{2\pi} (2 M_\varepsilon \int_1^\infty e^{-\sin \varepsilon \cdot s} s^{-1} ds + 2\pi e M_\varepsilon) \\ &\leq \frac{M_\varepsilon}{\pi} \left(\int_1^\infty e^{-\sin \varepsilon \cdot s} s^{-1} ds + \pi e \right). \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'estimation (2.4), avec

$$\widetilde{M}_0(\varepsilon) = \frac{M_\varepsilon}{\pi} \left(\int_1^\infty e^{-\sin \varepsilon \cdot s} s^{-1} ds + \pi e \right).$$

Pour prouver l'estimation de (2.5), en utilisant

$$AR(\lambda) = (A - \lambda I + \lambda I)R(\lambda) = I + \lambda R(\lambda),$$

on obtient

$$\|AR(\lambda)\| \leq 1 + M_\varepsilon, \lambda \in \Sigma_\omega^\varepsilon.$$

Donc, en raisonnant comme dans la preuve de l'estimation (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \int_\Gamma e^{\lambda z} AR(\lambda) d\lambda \right\| &\leq 2 \int_{\frac{1}{|z|}}^\infty e^{-\rho|z|\sin \varepsilon} (1 + M_\varepsilon) d\rho + \int_{-(\pi/2+\omega-\varepsilon)}^{\pi/2+\omega-\varepsilon} (1 + M_\varepsilon) e \frac{1}{|z|} d\theta \\ &\leq 2(1 + M_\varepsilon) \left(\int_1^\infty e^{-\sin \varepsilon \cdot s} ds + \pi e \right) \frac{1}{|z|}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ce qui prouve que l'intégrale $\int_\Gamma e^{\lambda z} AR(\lambda) d\lambda$ converge pour chaque $z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}$, en

utilisant la fermeture de l'opérateur A , on déduit que pour tout $z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}$

$$U(z) \in D(A),$$

et

$$AU(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} AR(\lambda) d\lambda. \quad (2.12)$$

Par conséquent, l'estimation (2.5) résulte de l'estimation (2.11), avec

$$\widetilde{M}_1(\varepsilon) = \frac{1 + M_\varepsilon}{\pi} \left(\int_1^\infty e^{-\sin \varepsilon \cdot s} ds + \pi e \right).$$

On remarque que la formule (2.12) est valable pour tous $z \in \Delta_\omega$, car $\Delta_\omega = \bigcup_{\varepsilon > 0} \Delta_\omega^{2\varepsilon}$.

a) De l'estimations (2.8) et (2.9), on dérive dans la formule (2.10) sous le signe integrale on obtient

$$\frac{dU}{dz}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} \lambda R(\lambda) d\lambda, \quad z \in \Delta_\omega. \quad (2.13)$$

D'autre part, il résulte de la formule (2.12) que

$$\begin{aligned} AU(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} AR(\lambda) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} (I + \lambda R(\lambda)) d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} \lambda R(\lambda) d\lambda, \quad z \in \Delta_\omega, \end{aligned} \quad (2.14)$$

d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda z} d\lambda = 0.$$

Par conséquent, la formule (2.3) est une conséquence des formules (2.13) et (2.14).

c) Maintenant soit x_0 un élément quelconque de $D(A)$. Par le théorème des résidus,

on aura

$$x_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} x_0 d\lambda.$$

Donc

$$U(z)x_0 - x_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} \left(R(\lambda) + \frac{1}{\lambda} \right) x_0 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} R(\lambda) A x_0 d\lambda.$$

Comme

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\lambda} R(\lambda) \right\| &\leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|^2}, \lambda \in \Gamma \\ |e^{\lambda z}| &\leq 2e^{-|\lambda||z|\sin\varepsilon} + e^{|z|}, z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}, \lambda \in \Gamma, \end{aligned}$$

et en utilisant le théorème de convergence dominée, il résulte

$$\lim_{z \rightarrow 0} U(z)x_0 - x_0 \rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} R(\lambda) A x_0 d\lambda,$$

et par le théorème de Cauchy, on a

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} R(\lambda) A x_0 d\lambda = 0.$$

Ce qui donne

$$\lim_{z \rightarrow 0} U(z)x_0 = x_0, \quad z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon},$$

pour chaque $x_0 \in D(A)$, comme le domaine de A est dense dans E et $\|U(z)\| \leq \widetilde{M}_0(\varepsilon)$ pour tout $z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}$, il résulte que, pour chaque $x \in E$,

$$U(z)x \rightarrow x \quad \text{que } z \rightarrow 0, z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}.$$

■

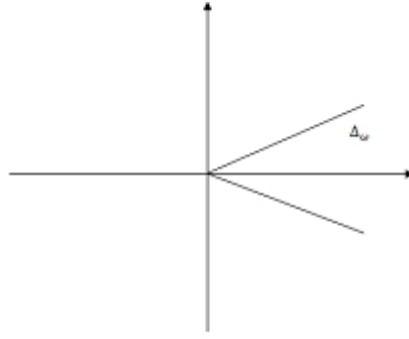


Figure 2.5

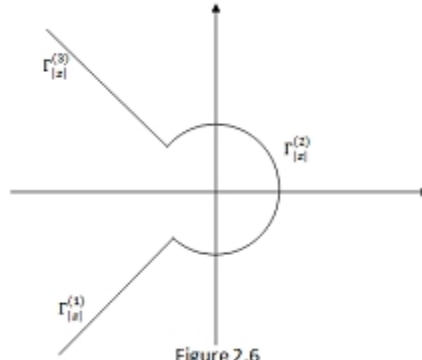


Figure 2.6

Remarque 1 On suppose que l'opérateur A satisfait la condition

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda| + 1}, \lambda \in \Sigma_\omega^\varepsilon. \quad (2.15)$$

Alors, on a les estimations

$$\|U(z)\| \leq \widetilde{M}_0(\varepsilon) e^{-\delta \operatorname{Re} z}, \quad z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}, \quad (2.16)$$

$$\|AU(z)\| \leq \frac{\widetilde{M}_1(\varepsilon)}{|z|} e^{-\delta \operatorname{Re} z}, \quad z \in \Delta_\omega^{2\varepsilon}, \quad (2.17)$$

avec $\delta > 0$.

2.2 Puissances fractionnaires

Supposons que l'opérateur A satisfait aux.

- (1) L'ensemble résolvant de A contient la région de la figure 2.7.
- (2) Il existe une constante $M > 0$ tels que la résolvante $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ satisfait l'estimation

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \lambda \in \Sigma. \quad (2.18)$$

Si $\alpha > 0$, on peut définir la puissance fractionnaire $(-A)^{-\alpha}$ de $-A$ par la formule suivante :

$$(-A)^{-\alpha} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^{-\alpha} R(\lambda) d\lambda. \quad (2.19)$$

Où le chemin Γ s'exécute dans l'ensemble Σ de $\infty e^{-i\omega}$ à $\infty e^{i\omega}$, en évitant l'axe des réels positif et l'origine (voir la figure 2.8). Pour la fonction $(-\lambda)^{-\alpha} = e^{-\alpha \log(-\lambda)}$, on choisit la branche dont l'argument se trouve entre $-\alpha\pi$ et $\alpha\pi$; elle est analytique dans la région obtenu en éliminant l'axe des réels positif.

L'intégrale (2.19) converge pour la topologie de la convergence uniforme pour $\alpha > 0$, et définit un opérateur linéaire borné sur E . En effet, il suffit de remarquer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} |(-\lambda)^{-\alpha}| = |e^{-\alpha \log(-\lambda)}| = e^{-\alpha \log|\lambda|} = |\lambda|^{-\alpha}, \\ \|R(\lambda)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}. \end{array} \right.$$

Certaines propriétés de base de la puissance fractionnaire $(-A)^{-\alpha}$ sont résumées dans la :

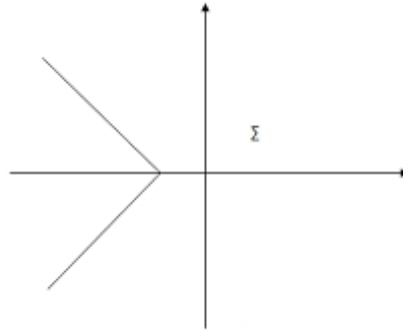


Figure 2.7

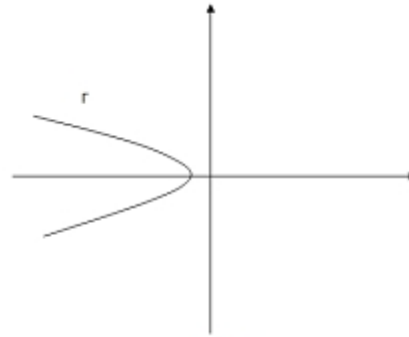


Figure 2.8

Proposition 2 (i) Pour tout $\alpha, \beta > 0$

$$(-A)^{-\alpha}(-A)^{-\beta} = (-A)^{-(\alpha+\beta)}.$$

(ii) Si α est un nombre entier positif, alors on a

$$(-A)^{-\alpha} = ((-A)^{-1})^{\alpha}.$$

(iii) La puissance fractionnaire $(-A)^{-\alpha}$ est inversible pour tout $\alpha > 0$

Démonstration. (i) La preuve de la partie (i) est semblable à celle de la Proposition

1. D'après le théorème de Cauchy, on pose que

$$(-A)^{-\beta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-\mu)^{-\beta} R(\mu) d\mu,$$

où Γ' est un chemin obtenu par une translation à partir de chemin Γ vers la droite (voir figure 2.9). En utilisant le théorème de Fubini, on aura

$$\begin{aligned} (-A)^{-\alpha}(-A)^{-\beta} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} (-\lambda)^{-\alpha} (-\mu)^{-\beta} R(\lambda) R(\mu) d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} (-\lambda)^{-\alpha} (-\mu)^{-\beta} \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^{-\alpha} R(\lambda) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{(-\mu)^{-\beta}}{\lambda - \mu} d\mu \right] d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-\mu)^{-\beta} R(\mu) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(-\lambda)^{-\alpha}}{\lambda - \mu} d\lambda \right] d\mu. \end{aligned}$$

De même que dans la preuve de la Proposition 1, on peut calculer chaque terme dans la dernière partie comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{(-\mu)^{-\beta}}{\lambda - \mu} d\mu &= -(-\lambda)^{-\beta}; \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(-\lambda)^{-\alpha}}{\lambda - \mu} d\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$(-A)^{-\alpha}(-A)^{-\beta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^{-(\alpha+\beta)} R(\lambda) d\lambda = (-A)^{-(\alpha+\beta)}.$$

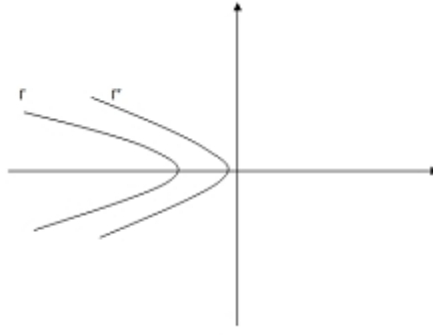


Figure 2.9

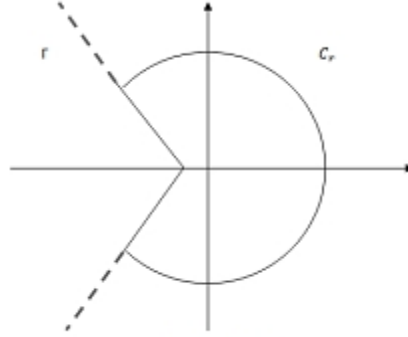


Figure 2.10

(ii) De l'estimation (2.18), on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} (-re^{i\theta})^{-n} R(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta = 0 \quad \text{pour tout entier } n \geq 1$$

alors, on déduit

$$(-A)^{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^{-n} R(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} (-\lambda)^{-n} R(\lambda) d\lambda,$$

où C_r est un chemin fermé de la figure 2.10, Ainsi, par le théorème des résidus, on obtient

$$\begin{aligned} (-A)^{-n} &= \text{Res} [(-\lambda)^{-n} R(\lambda)]_{\lambda=0} \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} ((A - \lambda I)^{-1}) \Big|_{\lambda=0} \\ &= (-1)^n (A^{-1})^n = ((-A)^{-1})^n. \end{aligned}$$

(iii) Comme l'opérateur $(-A)^{-1}$ est injective, il résulte que $(-A)^{-n} = ((-A)^{-1})^n$ est injectif pour tout entier $n \geq 1$, alors $(-A)^{-\alpha}$ est injectif, $\alpha > 0$. ■

Théorème 10 *Pour $0 < \alpha < 1$, on a*

$$(-A)^{-\alpha} = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha} R(s) ds. \quad (2.20)$$

Démonstration. D'après le théorème de Cauchy, on peut déformer le chemin Γ dans la formule (2.19) dans les deux demi plans $\text{Im } \lambda > 0$, et $\text{Im } \lambda < 0$, et utilisant le fait que

$$(-\lambda)^{-\alpha} = e^{-\alpha \log(-\lambda)} = \begin{cases} |\lambda|^{-\alpha} e^{\alpha \pi i} & \text{si } \text{Im } \lambda > 0, \\ |\lambda|^{-\alpha} e^{-\alpha \pi i} & \text{si } \text{Im } \lambda < 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} (-A)^{-\alpha} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{\alpha \pi i} R(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_\infty^0 s^{-\alpha} e^{-\alpha \pi i} R(s) ds \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{e^{\alpha \pi i} - e^{-\alpha \pi i}}{2i} \int_0^\infty s^{-\alpha} R(s) ds = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha} R(s) ds. \end{aligned}$$

■

Corollaire 2 *Pour $0 < \alpha < 1$, on a*

$$\|(-A)^{-\alpha}\| \leq M. \quad (2.21)$$

Démonstration. De la formule (2.20), il résulte que

$$\|(-A)^{-\alpha}\| \leq \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha} \|R(s)\| ds \leq M \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha} (1+s)^{-1} ds,$$

et comme

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty s^{-\alpha} (1+s)^{-1} ds = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}.$$

Alors

$$\|(-A)^{-\alpha}\| \leq M.$$

De la remarque 1, on peut supposer qu'il existe des constantes positives M_0 , M_1 et α telle que

$$\|U(t)\| \leq M_0 e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (2.22)$$

$$\|AU(t)\| \leq M_1 \frac{e^{-\alpha t}}{t}, \quad t > 0. \quad (2.23)$$

■

Lemme 1 Pour tout $s \geq 0$, on a

$$R(s) = - \int_0^\infty e^{-st} U(t) dt, \quad (2.24)$$

où $R(s) = (A - sI)^{-1}$, $s \geq 0$.

Démonstration. Soit $s > 0$. Pour tout $T > 0$, on a par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} U(t) dt &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^T e^{-st} \left(\int_\Gamma e^{\mu t} R(\mu) d\mu \right) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\int_0^T e^{\mu t - st} dt \right) R(\mu) d\mu \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\mu - s} (e^{(\mu-s)T} - 1) R(\mu) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\mu - s} R(\mu) d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(\mu-s)T} \frac{R(\mu)}{\mu - s} d\mu \\ &= -R(s) - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(\mu-s)T} \frac{R(\mu)}{\mu - s} d\mu. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le deuxième terme de la dernière ligne tend vers zéro que $T \rightarrow \infty$ car :

$$\left\| \int_\Gamma e^{(\mu-s)T} \frac{R(\mu)}{\mu - s} d\mu \right\| \leq e^{-sT} \int_\Gamma \frac{M}{1 + |\mu|} \frac{|d\mu|}{|\mu - s|} \rightarrow 0.$$

Ainsi la formule (2.24) pour $s > 0$ résulte l'orsque $T \rightarrow \infty$ dans la formule (2.25). De l'estimation (2.22) résulte que l'intégrales $\int_0^\infty e^{-st}U(t)dt$ converge uniformément dans l'espace $L(E, E)$ pour $s \in [0, \infty)$, Donc, en utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient la formule (2.24) pour $s = 0$. ■

Théorème 11 *Pour $0 < \alpha < 1$, on a*

$$(-A)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1}U(t)dt. \quad (2.26)$$

En vue de la partie(iii) de la Proposition 2, on peut définir la puissance fractionnaire $(-A)^\alpha$ pour $\alpha > 0$ comme suit :

$$(-A)^\alpha = \text{l'inverse de } (-A)^{-\alpha}, \alpha > 0.$$

Théorème 12 *Pour $0 < \alpha < 1$, On a*

$$D(A) \subset D((-A)^\alpha).$$

Démonstration. Soit x un élément quelconque de $D(A)$. Alors il existe un élément unique $y \in E$ telle que

$$x = (-A)^{-1}y.$$

Si $0 < \alpha < 1$, alors

$$(-A)^{-1} = (-A)^{-\alpha}(-A)^{-(1-\alpha)}.$$

Donc

$$x = (-A)^{-1}y = (-A)^{-\alpha}((-A)^{-(1-\alpha)}y).$$

Ce qui prouve que

$$x \in D((-A)^\alpha).$$

Nous pouvons donner une formule explicite pour la puissance fractionnaire $(-A)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ sur le domaine $D(A)$. ■

Théorème 13 *Soit $0 < \alpha < 1$, alors*

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1} R(s) A x ds, \text{ pour tout } x \in D(A) \quad (2.27)$$

Démonstration. Comme

$$(-A)^\alpha = (-A)(-A)^{-(1-\alpha)}.$$

Alors de (2.20), il résulte que

$$(-A)^{-(1-\alpha)} = -\frac{\sin(1-\alpha)\pi}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1} R(s) ds = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1} R(s) ds.$$

Comme $R(s)A = I + sR(s)$ et $|R(s)| \leq M/s$, $s > 0$, alors pour $x \in D(A)$ on a

$$|s^{\alpha-1} R(s) A x| \leq \begin{cases} s^{\alpha-1} (1+M) \|x\| & \text{presque } s \rightarrow 0, \\ s^{\alpha-2} M \|A x\| & \text{presque } s \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.28)$$

donc

$$\int_0^\infty s^{\alpha-1} \|R(s) A x\| ds < \infty.$$

En utilisant la fermeture de A , on aura

$$(-A)^{-(1-\alpha)} x \in D(A),$$

et

$$(-A)^\alpha x = (-A)(-A)^{-(1-\alpha)} x = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1} R(s) A x ds.$$

■

Corollaire 3 Pour $0 < \alpha < 1$, alors

$$\|(-A)^\alpha x\| \leq 2M(1+M) \|x\|^{1-\alpha} \|Ax\|^\alpha, x \in D(A). \quad (2.29)$$

Théorème 14 Soit $0 < \alpha \leq 1$. Pour tout $t > 0$, on a

(a) $U(t) : E \rightarrow D((-A)^\alpha)$.

(b) $U(t)(-A)^\alpha x = (-A)^\alpha U(t)x$, pour $x \in D((-A)^\alpha)$.

(c) $\|(-A)^\alpha U(t)\| \leq 2M(1+M)M_0^{1-\alpha}M_1^\alpha t^{-\alpha} e^{-at}$.

(d) $\|U(t)x - x\| \leq \frac{2M(1+M)}{\alpha} M_0^\alpha M_1^{1-\alpha} t^\alpha \|(-A)^\alpha x\|$, $x \in D((-A)^\alpha)$.

Démonstration.

(a) Comme $U(t) : E \rightarrow D(A)$ pour chaque $t > 0$ et $D(A) \subset D((-A)^\alpha)$.

(b) Si $x \in D((-A)^\alpha)$, alors de la formule (2.26), on a

$$\begin{aligned} U(t)x &= U(t)((-A)^{-\alpha})(-A)^\alpha x \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} U(t)(U(s)(-A)^\alpha x) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} U(s)(U(t)(-A)^\alpha x) ds \\ &= (-A)^{-\alpha} U(t)(-A)^\alpha x. \end{aligned}$$

(c) Comme $(-A)^\alpha = ((-A)^{-\alpha})^{-1}$ est fermé et $U(t)$ est bornée, il résulte que l'opérateur $(-A)^\alpha U(t)$ est fermé. Mais de (a) on déduit qu'il est définie sur E . Donc, par le théorème du graphe fermé, il résulte que $(-A)^\alpha U(t)$ est un opérateur borné sur E . Plus précisément, l'application de l'inégalité moment (2.29) à $U(t)x$, on obtient

des estimations (2.22) et (2.23)

$$\begin{aligned}
\|(-A)^\alpha U(t)x\| &\leq 2M(1+M) \|U(t)x\|^{1-\alpha} \|AU(t)x\|^\alpha \\
&\leq 2M(1+M)(M_0 e^{-at} \|x\|)^{1-\alpha} (M_1 t^{-1} e^{-at} \|x\|)^\alpha \\
&\leq 2M(1+M) M_0^{1-\alpha} M_1^\alpha t^{-\alpha} e^{-at} \|x\|.
\end{aligned}$$

(d) Par une partie (b), pour tous $x \in D((-A)^\alpha)$ on a

$$U(t)x - x = \int_0^t U'(s)x ds = \int_0^t AU(s)x ds = \int_0^t (-A)^{1-\alpha} U(s) (-A)^\alpha x ds.$$

Donc il suit de la partie (c) avec $1 - \alpha$ pour α que

$$\begin{aligned}
\|U(t)x - x\| &\leq \int_0^t \|(-A)^{1-\alpha} U(s)\| \cdot \|(-A)^\alpha x\| ds \\
&\leq 2M(1+M) M_0^\alpha M_1^{1-\alpha} \int_0^t s^{\alpha-1} ds \cdot \|(-A)^\alpha x\|. \\
&\leq \frac{2M(1+M)}{\alpha} M_0^\alpha M_1^{1-\alpha} t^\alpha \|(-A)^\alpha x\|.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2 Soit $A : E \rightarrow E$ un opérateur linéaire fermé à domaine dense et satisfait à la condition (2.18) et soit B un opérateur linéaire fermé de $D(B) \subset E$ dans un espace de Banach F . Supposons que $D(A) \subset D(B)$, et qu'il existe des constantes $0 < \gamma < 1$ et $\delta_0 > 0$ telle que, pour tout $0 < \delta \leq \delta_0$,

$$\|Bx\|_F \leq C(\delta^{-\gamma} \|x\| + \delta^{1-\gamma} \|Ax\|), \quad x \in D(A). \quad (2.30)$$

Alors pour tout $\gamma < \alpha < 1$ on a

$$D((-A)^\alpha) \subset D(B),$$

et

$$\|Bz\|_F \leq K_\alpha \|(-A)^\alpha z\|, \quad z \in D((-A)^\alpha),$$

avec une constante $K_\alpha > 0$.

Démonstration.

(1) On montre que : si $(-A)^{-\alpha}x \in D(B)$, alors on a

$$B((-A)^{-\alpha}x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} BU(s)x ds. \quad (2.31)$$

On utilise la formule de représentation (2.26) pour la puissance fractionnaire $(-A)^{-\alpha}$

$$(-A)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} U(s) ds.$$

Comme B est fermé, il suffit de montrer que l'intégrale $\int_0^\infty s^{\alpha-1} BU(s)x ds$ est convergent dans F . On a

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty s^{\alpha-1} BU(s)x ds \right\|_F &\leq \int_0^\infty s^{\alpha-1} \|BU(s)x\|_F ds \\ &\leq \int_0^{\delta_0} s^{\alpha-1} \|BU(s)x\|_F ds + \int_{\delta_0}^\infty s^{\alpha-1} \|BU(s)x\|_F ds. \end{aligned}$$

Nous estimons chaque terme dans la dernière ligne.

(a) En appliquant l'inégalité (2.30) avec $U(s)x$ pour x et s pour δ , on obtient des estimations (2.22) et (2.23)

$$\begin{aligned} \|BU(s)x\|_F &\leq C(s^{-\gamma} \|U(s)x\| + s^{1-\gamma} \|AU(s)x\|) \\ &\leq C(M_0 s^{-\gamma} + s^{1-\gamma} M_1 s^{-1}) \|x\| = C(M_0 + M_1) s^{-\gamma} \|x\|. \end{aligned}$$

Donc pour $\gamma < \alpha < 1$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta_0} s^{\alpha-1} \|BU(s)x\|_F ds &\leq C(M_0 + M_1) \left(\int_0^{\delta_0} s^{\alpha-\gamma-1} ds \right) \|x\| \\ &= \frac{C(M_0 + M_1)}{\alpha - \gamma} \delta_0^{\alpha-\gamma} \|x\|. \end{aligned} \quad (2.32)$$

(b) De même, l'application de l'inégalité (2.30) avec $x = U(s)x$ et $\delta = \delta_0$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\delta_0}^{\infty} s^{\alpha-1} \|BU(s)x\|_F ds &\leq C \int_{\delta_0}^{\infty} s^{\alpha-1} (\delta_0^{-\gamma} \|U(s)x\| + \delta_0^{1-\gamma} \|AU(s)x\|) ds \\ &\leq C \int_{\delta_0}^{\infty} s^{\alpha-1} (M_0 \delta_0^{-\gamma} + \delta_0^{1-\gamma} M_1 s^{-1}) e^{-as} ds \cdot \|x\| \\ &\leq C \left(M_0 \delta_0^{\alpha-\gamma-1} \int_0^{\infty} e^{-as} ds + \delta_0^{1-\gamma} M_1 \int_{\delta_0}^{\infty} s^{\alpha-2} e^{-as} ds \right) \|x\| \\ &\leq C \left(M_0 \delta_0^{\alpha-\gamma-1} \frac{1}{a} + \delta_0^{1-\gamma} M_1 \left(\left[-\frac{1}{a} s^{\alpha-2} e^{-as} \right]_{\delta_0}^{\infty} + \frac{1}{a} (2-\alpha) \int_{\delta_0}^{\infty} s^{\alpha-3} ds \right) \right) \|x\| \\ &\leq \frac{C}{a} (M_0 + 2M_1) \delta_0^{\alpha-\gamma-1} \|x\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, inégalités combinant (2.32) et (2.33), on aura

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} s^{\alpha-1} \|BU(s)x\|_F ds \leq K_\alpha \|x\|,$$

avec

$$K_\alpha = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha - \gamma} (M_0 + M_1) \delta_0^{\alpha-\gamma} + \frac{1}{a} (M_0 + 2M_1) \delta_0^{\alpha-\gamma-1} \right).$$

Ce qui prouve la formule (2.31) et de plus, on a

$$\|B((-A)^\alpha)x\|_F \leq K_\alpha \|x\|, x \in D(B(-A)^{-\alpha}). \quad (2.34)$$

(2) Comme $(-A)^{1-\alpha}$ peut s'écrire

$$(-A)^{1-\alpha} = (-A)(-A)^{-\alpha}.$$

alors pour tout $x \in D((-A)^{1-\alpha})$, on a

$$(-A)^{-\alpha}x \in D(A) \subset D(B),$$

de l'inégalité (2.34), on obtient

$$\|B((-A)^{-\alpha}x)\|_F \leq K_\alpha \|x\|, x \in D((-A)^{1-\alpha}). \quad (2.35)$$

Maintenant, soit x un élément quelconque de E . Puisque le domaine $D(A)$ est dense dans E et puisque $D(A) \subset D((-A)^{1-\alpha})$, on peut choisir une suite $\{x_j\}$ en $D((-A)^{1-\alpha})$ telle que

$$x_j \rightarrow x \text{ de } E. \quad (2.36)$$

Alors, par l'inégalité (2.35), il résulte que $\{B((-A)^{-\alpha}x_j)\}$ est une suite de Cauchy dans F , donc il existe un élément y de F tel que

$$B((-A)^{-\alpha}x_j \rightarrow y \text{ de } F, \quad (2.37)$$

comme B est fermé et $(-A)^{-\alpha}$ est borné, il résulte que $B((-A)^{-\alpha})$ est un opérateur fermé. Donc de (2.36) et (2.37), on a

$$\begin{cases} x \in D(B((-A)^{-\alpha})), \\ B((-A)^{-\alpha}x) = y. \end{cases}$$

Ce qui prouve que

$$D(B((-A)^{-\alpha})) = E,$$

de sorte que

$$D((-A)^\alpha) \subset D(B).$$

Finalemment, on peut passer à la limite dans l'inégalité

$$\|B((-A)^{-\alpha})x_j\|_F \leq K_\alpha \|x_j\|.$$

Pour obtenir

$$\|B((-A)^{-\alpha})x\|_F \leq K_\alpha \|x\|, x \in E,$$

ou de manière équivalente (on prend $z = (-A)^{-\alpha}x$)

$$\|Bz\|_F \leq K_\alpha \|(-A)^\alpha z\|, \quad z \in D((-A)^\alpha).$$

■

Chapitre 3

Le problème de Cauchy linéaire et semi-linéaire

3.1 Le problème de Cauchy linéaire

Définition 13 Dans cette section, nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t), & 0 < t < T, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (P)$$

La fonction $x(t) : [0, T) \rightarrow E$ est une solution de problème (P) si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

(1) $x(t) \in C([0, T); E) \cap C^1((0, T); E)$ et $x(0) = x_0$.

(2) $x(t) \in D(A)$ pour tout $0 < t < T$.

(3) $\frac{dx}{dt} = Ax(t)$ pour tout $0 < t < T$.

Où $C([0, T); E)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $[0, T)$ à valeurs dans E , et $C^1((0, T); E)$ désigne l'espace des fonctions continûment différentiables sur $(0, T)$ à valeurs dans E .

Supposons que l'opérateur A vérifie la condition :

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \lambda \in \Sigma.$$

Le théorème suivant affirme que le problème (P) admet une solution unique $x(t)$ pour tout condition initiale $x_0 \in E$.

Théorème 15 On suppose que l'opérateur A vérifie la condition (2.18), alors, pour tout $x_0 \in E$, la fonction

$$x(t) = U(t)x_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda) x_0 d\lambda, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

appartient à l'espace $C([0, \infty); E) \cap C^\infty((0, \infty); E)$, est une solution unique du problème (P).

Démonstration. D'après le théorème 9, il suffit de prouver que la fonction $U(t)x_0$ est la seule solution du problème (P), pour chaque $T > 0$.

Soit $y(t)$ une solution quelconque du problème (P), et soit

$$z(t, s) = U(t - s)y(s), \quad 0 \leq s \leq t < T.$$

Alors on obtient que la fonction

$$s \mapsto z(t, s)$$

appartient à l'espace $C([0, t]; E) \cap C^1((0, t); E)$, et satisfait

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(z(t, s)) &= U(t - s)y'(s) - AU(t - s)y(s) \\ &= U(t - s)(y'(s) - Ay(s)) = 0, 0 < s < t. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$z(t, 0) = z(t, t),$$

de sorte que

$$y(t) = U(t)x_0, \quad 0 \leq t < T.$$

Soit $f : [0, T) \rightarrow E$ est une fonction continue . Nous considérons le problème de Cauchy non-homogène :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(t), 0 < t < T, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{NH})$$

Le théorème suivant donne une formule explicite pour les solutions du (NH). ■

Théorème 16 *Supposons que l'opérateur A vérifie la condition (2.18) alors $x(t)$ est une solution du problème (NH), si elle existe est donnée par la formule suivante. :*

$$x(t) = U(t)x_0 + \int_0^t U(t - s)f(s)ds, \quad 0 < t < T. \quad (3.2)$$

Démonstration. Appliquant l'opérateurs $U(t-s)$, $0 < s < t$ à l'équation

$$x'(s) = Ax(s) + f(s), \quad 0 < s < T,$$

on obtient

$$U(t-s)x'(s) = U(t-s)Ax(s) + U(t-s)f(s), \quad 0 < s < t. \quad (3.3)$$

D'autre part, il résulte que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(U(t-s)x(s)) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{U(t-s-\sigma)x(s+\sigma) - U(t-s)x(s)}{\sigma} \right) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left\{ U(t-s-\sigma) \left(\frac{x(s+\sigma) - x(s)}{\sigma} \right) - U(t-s-\sigma) \left(\frac{U(\sigma) - I}{\sigma} \right) x(s) \right\} \\ &= U(t-s)x'(s) - U(t-s)Ax(s), \quad 0 < s < t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Par conséquent, de (3.3) et (3.4) résulte que

$$\frac{d}{ds}(U(t-s)x(s)) = U(t-s)f(s), \quad 0 < s < t < T.$$

En intégrant cette équation de 0 à $t-h$, $h > 0$ par rapport à s , on obtient

$$\int_0^{t-h} U(t-s)f(s)ds = [U(t-s)x(s)]_0^{t-h} = U(h)x(t-h) - U(t)x_0.$$

en utilisant

$$\|U(h)x(t-h) - x(t)\| \leq \|U(h)\| \cdot \|x(t-h) - x(t)\| + \|((U(h)) - I)x(t)\|.$$

en passant à la limite, quand h tend vers 0, on obtient

$$\int_0^t U(t-s)f(s)ds = x(t) - U(t)x_0.$$

Le théorème suivant nous permis de conclure que la fonction $x(t)$, définie par la formule (3.2) est une solution du problème (NH). ■

Théorème 17 *Supposons que l'opérateur A vérifie la condition (2.18).*

Soit f une fonction de Hölder localement continue sur $(0, T)$, avec un exposant $0 < \gamma \leq 1$, qui satisfait à la condition

$$\int_0^T \|f(s)\| ds < \infty. \quad (3.5)$$

Alors, pour tout $x_0 \in E$, la fonction

$$x(t) = U(t)x_0 + \int_0^t U(t-s)f(s)ds$$

appartient à l'espace $C([0, T]; E) \cap C^1((0, T); E)$ est une solution unique du problème (NH).

Démonstration. De le théorème 15, la fonction $U(t)x_0$, donnée par la formule (3.1), appartient à $C([0, \infty); E) \cap C^\infty((0, \infty); E)$, est une solution (unique) du problème(P). en effet, il suffit de considéré la fonction

$$y(t) = \int_0^t U(t-s)f(s)ds, \quad 0 < t < T. \quad (3.6)$$

D'abord, de l'estimation (2.22), on a

$$\|y(t)\| \leq \int_0^t \|U(t-s)\| \cdot \|f(s)\| ds \leq M_0 \int_0^t \|f(s)\| ds,$$

de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0.$$

(a) La continuité de $y(t)$: pour chaque petit $\delta > 0$, on pose

$$y_\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \delta, \\ \int_0^{t-\delta} U(t-s)f(s)ds & \text{si } \delta < t < T. \end{cases}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \|y_\delta(t) - y(t)\| &\leq \begin{cases} \int_0^t \|U(t-s)\| \cdot \|f(s)\| ds & \text{si } 0 \leq t \leq \delta, \\ \int_{t-\delta}^t \|U(t-s)\| \cdot \|f(s)\| ds & \text{si } \delta < t < T. \end{cases} \\ &\leq \int_0^\delta \|U(t-s)\| \cdot \|f(s)\| ds + \int_{t-\delta}^t \|U(t-s)\| \cdot \|f(s)\| ds \\ &\leq M_0 \left(\int_0^\delta \|f(s)\| ds + \int_{t-\delta}^t \|f(s)\| ds \right). \end{aligned}$$

Ainsi, par la condition (3.5), il résulte que Mais pour $0 \leq t < t+h \leq T$, $(f(s) = 0, s < 0)$

$$y_\delta(t) \text{ converge uniformément vers la fonction } y(t) \text{ quand } \delta \rightarrow 0, \text{ ent } \in [0, T]. \quad (3.7)$$

Mais pour $0 \leq t < t+h \leq T$, $(f(s) = 0, s < 0)$

$$\begin{aligned} y_\delta(t+h) - y_\delta(t) &= \int_0^{t+h-\delta} U(t+h-s)f(s)ds - \int_0^{t-\delta} U(t-s)f(s)ds \\ &= \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} U(t+h-s)f(s)ds + \int_0^{t-\delta} [U(t+h-s) - U(t-s)]f(s)ds \\ &= [U(h) - I] \int_0^{t-\delta} U(t-s)f(s)ds + \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} U(t+h-s)f(s)ds, \end{aligned}$$

alors que, comme $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &\|y_\delta(t+h) - y_\delta(t)\| \\ &\leq \left\| [U(h) - I] \int_0^{t-\delta} U(t-s)f(s)ds \right\| + M_0 \int_{t-\delta}^{t-\delta+h} \|f(s)\| ds \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$y_\delta(t) \in C([0, T]; E).$$

Donc, en vue de l'assertion (3.7), il résulte que

$$y(t) \in C([0, T]; E).$$

(b) On montre que

$$\begin{cases} y(t) \in D(A), & 0 < t < T, \\ Ay(t) = \int_0^t AU(t-s)(f(s) - f(t))ds + (U(t) - I)f(t). \end{cases} \quad (3.8)$$

de l'estimation (2.23) et la condition (3.5), on a

$$\int_0^{t-\delta} \|AU(t-s)f(s)\| ds \leq M_1 \int_0^{t-\delta} \frac{1}{t-s} \|f(s)\| ds \leq \frac{M_1}{\delta} \int_0^T \|f(s)\| ds < \infty,$$

à l'aide de la fermeture de A , il résulte que

$$\begin{cases} y_\delta(t) = \int_0^{t-\delta} U(t-s)f(s) \in D(A) \text{ pour } \delta < t < T, \\ Ay_\delta(t) = \int_0^{t-\delta} AU(t-s)f(s)ds. \end{cases}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} Ay_\delta(t) &= \int_0^{t-\delta} AU(t-s)(f(s) - f(t))ds + \int_0^{t-\delta} AU(t-s)f(t)ds \\ &= \int_0^{t-\delta} AU(t-s)(f(s) - f(t))ds - \int_0^{t-\delta} \frac{d}{ds}(U(t-s)f(t))ds \\ &= \int_0^{t-\delta} AU(t-s)(f(s) - f(t))ds + (U(t) - U(\delta))f(t). \end{aligned}$$

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé quelconque de $(0, T)$, et soit L_{ab} la constante de Hölder pour la fonction f sur l'intervalle $[a/2, b]$:

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L_{ab} |t - s|^\gamma, \quad t, s \in [a/2, b].$$

Alors, par l'estimation (2.23), on a pour $0 < \delta' < \delta < a/2$

$$\left\| \int_{t-\delta}^{t-\delta'} AU(t-s)(f(s) - f(t))ds \right\| \leq M_1 L_{ab} \int_{t-\delta}^{t-\delta'} (t-s)^{\gamma-1} ds = \frac{M_1 L_{ab}}{\gamma} (\delta^\gamma - \delta'^\gamma), \quad t \in [a, b]$$

Ce qui prouve que l'intégrale impropre

$$\int_0^t AU(t-s)(f(s) - f(t))ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{t-\delta} AU(t-s)(f(s) - f(t))ds \quad (3.9)$$

existe, et la convergence est uniforme en $t \in [a, b] \subset (0, T)$, donc on a, quand $\delta \rightarrow 0$,

$$Ay_\delta(t) \rightarrow \int_0^t AU(t-s)(f(s) - f(t))ds + (U(t) - I)f(t), \quad 0 < t < T. \quad (3.10)$$

Par conséquent, l'assertion (3.8) est une conséquence des assertions (3.7) et (3.10).

(c) Finalement, on montrer que

$$\begin{cases} y(t) \in C^1((0, T); E), \\ y'(t) = Ay(t) + f(t), \quad 0 < t < T. \end{cases}$$

On remarque que la fonction $y_\delta(t)$ est continûment différentiable sur l'intervalle (δ, T) et satisfait

$$y'_\delta(t) = \int_0^{t-\delta} \frac{d}{dt}(U(t-s)f(s))ds + U(\delta)f(t-\delta) = \int_0^{t-\delta} AU(t-s)f(s)ds + U(\delta)f(t-\delta),$$

comme le semigrroupe $U(t)$ est analytique réelle pour $t > 0$. Ainsi pour $\delta < t < T$ on a

$$\begin{aligned} y'_\delta(t) &= \int_0^{t-\delta} AU(t-s)(f(s) - f(t))ds + U(\delta)f(t-\delta) + \int_0^{t-\delta} AU(t-s)f(t)ds \\ &= \int_0^{t-\delta} AU(t-s)(f(s) - f(t))ds + U(\delta)f(t-\delta) - \int_0^{t-\delta} \frac{d}{ds}(U(t-s)f(t))ds \\ &= \int_0^{t-\delta} AU(t-s)(f(s) - f(t))ds + U(\delta)(f(t-\delta) - f(t)) + U(t)f(t). \end{aligned}$$

Mais, de l'estimation (2.22), pour tout l'intervalle fermé $[a, b]$ de $(0, T)$ on a

$$\|U(\delta)(f(t-\delta) - f(t))\| \leq M_0 L_{ab} \delta^\gamma, \quad t \in [a, b], \quad (3.11)$$

où $0 < \delta < a/2$ et $L_{ab} > 0$ est une constante de Hölder pour la fonction f sur l'intervalle $[a/2, b]$.

Par conséquent, combinant les assertions (3.9) et (3.11), on trouve l'orsque $\delta \rightarrow 0$

$$y'_\delta(t) \rightarrow \int_0^{t-\delta} AU(t-s)(f(s) - f(t))ds + U(t)f(t) = Ay(t) + f(t),$$

uniformément en t sur les intervalles fermés de $(0, T)$.

Ainsi, on peut passer à la limites quand $\delta \rightarrow 0$ dans la formule

$$y_\delta(t) = \int_\varepsilon^t y'_\delta(\tau)d\tau + y_\delta(\varepsilon), \quad 0 < \delta < \varepsilon,$$

on obtient

$$y(t) = \int_\varepsilon^t (Ay(\tau) + f(\tau))d\tau + y(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leq t < T.$$

Comme ε est arbitraire, ce qui prouve que

$$y(t) \in C^1((0, T); E),$$

et aussi

$$y'(t) = Ay(t) + f(t), \quad 0 < t < T.$$

Donc la fonction $y(t)$, définie par la formule (3.6), appartient à $C([0, T]; E) \cap C^1((0, T); E)$, est une solution (unique) du problème (NH) avec $y(0) = 0$.

■

3.2 Le problème de Cauchy semi-linéaire

Supposons que l'opérateur A vérifie la condition (2.18). Alors on peut définir la puissance fractionnaire $(-A)^\alpha$ pour $0 < \alpha < 1$. $(-A)^\alpha$ est un opérateur linéaire fermé, et inversible avec le domaine $D(A) \subset D((-A)^\alpha)$.

On pose

$E_\alpha =$ l'espace $D((-A)^\alpha)$ muni de la norme des graphes $\|\cdot\|_\alpha$ de $(-A)^\alpha$,

où

$$\|x\|_\alpha = (\|x\|^2 + \|(-A)^\alpha x\|^2)^{1/2}, \quad x \in D((-A)^\alpha).$$

Proposition 3 (i) *L'espace E_α est un espace de Banach.*

(ii) *La norme des graphes $\|x\|_\alpha$ est équivalente à la norme $\|(-A)^\alpha x\|$.*

(iii) *Si $0 < \alpha < \beta < 1$, alors on a $E_\beta \subset E_\alpha$ avec injection continue.*

(i) Supposons que $\{x_j\}$ est une suite de Cauchy dans E_α , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \{x_j\} \text{ est une suite de Cauchy de } E, \\ \{(-A)^\alpha x_j\} \text{ est une suite de Cauchy de } E. \end{cases}$$

Alors il existe des éléments $x, y \in E$ tels que

$$\begin{cases} x_j \rightarrow x \text{ de } E, \\ (-A)^\alpha x_j \rightarrow y \text{ de } E. \end{cases}$$

Donc, en utilisant la fermeture de $(-A)^\alpha$, on a

$$\begin{cases} x \in D((-A)^\alpha), \\ (-A)^\alpha x = y. \end{cases}$$

Ce qui prouve que

$$\begin{cases} x \in E_\alpha, \\ x_j \rightarrow x \text{ de } E_\alpha. \end{cases}$$

(ii) Rappelle que

$$\|(-A)^{-\alpha}\| \leq M, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Donc pour tout $x \in ((-A)^\alpha)$, on a

$$\|(-A)^\alpha x\|^2 \leq \|x\|^2 + \|(-A)^\alpha x\|^2 \leq (M^2 + 1) \|(-A)^\alpha x\|^2,$$

afin que

$$\|(-A)^\alpha x\| \leq \|x\|_\alpha \leq (M^2 + 1)^{1/2} \|(-A)^\alpha x\|, \quad x \in E_\alpha. \quad (3.12)$$

On remarque que

$$(-A)^\alpha = (-A)^{-(\beta-\alpha)}(-A)^\beta.$$

Donc $D((-A)^\beta) \subset D((-A)^\alpha)$. En outre, en considération des inégalités(2.21) et(3.12), il résulte que, pour tout $x \in E_\beta = D((-A)^\beta)$

$$\|x\|_\alpha \leq (M^2 + 1)^{1/2} \|(-A)^\alpha x\| \leq M(M^2 + 1)^{1/2} \|(-A)^\beta x\| \leq M(M^2 + 1)^{1/2} \|x\|_\beta.$$

Maintenant, on considère le problème de Cauchy semilinéaire :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), & t_0 < t < t_1, \\ u(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (PSL)$$

Où f est une fonction définie sur un ouvert U de $[0, \infty) \times E_\alpha$, $0 < \alpha < 1$ à

valeurs dans E . On suppose que $f(t, x)$ est de Hölder localement continue en t et localement Lipschitzienne en x . alors, pour chaque point (t, x) de U , il existe un voisinage $V \subset U$, constantes $L = L(t, x, V) > 0$ et $0 < \gamma \leq 1$ telle que

$$\|f(s_1, y_1) - f(s_2, y_2)\| \leq L(|s_1 - s_2|^\gamma + \|y_1 - y_2\|_\alpha), (s_1, y_1), (s_2, y_2) \in V. \quad (3.13)$$

La fonction $u(t) : [t_0, t_1] \rightarrow E$ est une solution du problème(*SLP*) s'il satisfait aux trois conditions suivantes :

- (1) $u(t) \in C([t_0, t_1]; E) \cap C^1((t_0, t_1); E)$ et $u(t_0) = x_0$.
- (2) $u(t) \in D(A)$ et $(t, u(t)) \in U$ pour tout $t_0 < t < t_1$.
- (3) $\frac{du}{dt} = Au(t) + f(t, u(t))$ pour tout $t_0 < t < t_1$.

Le principal résultat est le théorème suivant de l'existence locale et l'unicité

Théorème 18 *Soit f est une fonction définie sur un ouvert U de $[0, \infty) \times E_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, à valeurs dans E . Supposons que $f(t, x)$ est de Hölder localement continue en t et localement Lipschitzienne en x . alors, pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (*P*) admet une solution unique locale $u(t)$ dans l'espace $C([t_0, t_1]; E) \cap C^1((t_0, t_1); E)$ où $t_1 = t_1(t_0, x_0) > t_0$.*

Démonstration. 1) On fixe un point (t_0, x_0) de U , et choisir les constantes $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$V = \{(t, x) \in [0, \infty) \times E_\alpha : t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon, \|(-A)^\alpha x - (-A)^\alpha x_0\| \leq \delta\} \subset U,$$

et

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq L(|t - s|^\gamma + \|(-A)^\alpha x - (-A)^\alpha y\|), (t, x), (s, y) \in V. \quad (3.14)$$

Où $L = L(t_0, x_0, V) > 0$ est une Hölder localement continue pour la fonction f . En utilisant la partie (c) du théorème 14, il résulte que, pour $M_\alpha > 0$,

$$\|(-A)^\alpha U(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha}, t > 0. \quad (3.15)$$

Maintenant, choisissons un nombre réel t_1 tel que

$$0 < t_1 - t_0 < \min \left\{ \varepsilon, \left(\frac{\delta}{2} (1 - \alpha) \frac{1}{M_\alpha (B + \delta L)} \right)^{1/(1-\alpha)} \right\}, \quad (3.16)$$

où

$$B = \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon} \|f(t, x_0)\|. \quad (3.17)$$

En outre, on peut supposer que $t_1 - t_0$ assez petit et que

$$\|U(t - t_0)(-A)^\alpha x_0 - (-A)^\alpha x_0\| < \frac{\delta}{2}, \quad t_0 \leq t < t_1. \quad (3.18)$$

2) On pose

Y = l'espace $C([t_0, t_1]; E)$ de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ à valeurs dans E , dont la norme est :

$$\|y\| = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \|y(t)\|.$$

On défini une application

$$\Phi : Y \rightarrow Y$$

comme suit :

$$\Phi(y) = U(t - t_0)(-A)^\alpha x_0 + \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t - s) f(s, (-A)^{-\alpha} y(s)) ds.$$

On vérifie que Φ bien définie .

(a) D'abord, par le théorème 17, il résulte

$$U(t - t_0)(-A)^\alpha x_0 \in C([t_0, \infty); E) \cap C^\infty((t_0, \infty); E).$$

(b) On montrer que, pour $0 < \beta < 1 - \alpha$,

$$\int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t - s)f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds \in C^\beta([t_0, t_1]; E), \quad (3.19)$$

ce qui prouve que

$$\Phi y(t) \in C([t_0, t_1]; E) \cap C^\beta((t_0, t_1]; E), \quad 0 < \beta < 1 - \alpha. \quad (3.20)$$

Pour $t_0 \leq t < t + h \leq t_1$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t+h} (-A)^\alpha U(t + h - s)f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds - \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t - s)f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds \\ &= \int_{t_0}^t (-A)^\alpha [U(t + h - s) - U(t - s)]f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds \\ &+ \int_t^{t+h} (-A)^\alpha U(t + h - s)f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds. \end{aligned}$$

estimons chaque terme du membre droite de la dernière égalité.

(b₁) Par la continuité de $y(t)$ et de l'inégalité (3.14), il résulte que $f(t, (-A)^{-\alpha}y(t))$ est continue sur $[t_0, t_1]$. Donc il existe une constante $N > 0$ telle que

$$\|f(t, (-A)^{-\alpha}y(t))\| \leq N, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (3.21)$$

En outre, en utilisant la partie (d) du théorème 14, pour $0 < \beta < 1 - \alpha$ on a

$$\|(U(h) - I)(-A)^\alpha U(t - s)\| \leq C_\beta h^\beta \|(-A)^{\alpha+\beta} U(t - s)\|, \quad h > 0, \quad (3.22)$$

avec une constante $C_\beta > 0$. Ainsi, combinant les inégalités (3.22) et (3.15), on obtient

$$\|(U(h) - I)(-A)^\alpha U(t - s)\| \leq C_\beta h^\beta M_{\alpha+\beta} (t - s)^{-\alpha-\beta}, h > 0. \quad (3.23)$$

Par conséquent, de les inégalités (3.23) et (3.21), resulte

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t (-A)^\alpha [U(t + h - s) - U(t - s)] f(s, (-A)^{-\alpha} y(s)) ds \right\| \\ & \leq C_\beta M_{\alpha+\beta} N \int_{t_0}^t (t - s)^{-\alpha-\beta} ds h^\beta \\ & \leq \left(\frac{C_\beta M_{\alpha+\beta} N}{1 - \alpha - \beta} (t_1 - t_0)^{1-\alpha-\beta} \right) h^\beta, 0 < \beta < 1 - \alpha. \end{aligned} \quad (3.24)$$

(b₂) De même, on a

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^{t+h} (-A)^\alpha U(t + h - s) f(s, (-A)^{-\alpha} y(s)) ds \right\| & \leq N \int_t^{t+h} \|(-A)^\alpha U(t + h - s)\| ds \\ & \leq N M_\alpha \int_t^{t+h} (t + h - s)^{-\alpha} ds \\ & = \left(\frac{N M_\alpha}{1 - \alpha} \right) h^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Par conséquent, l'assertion (3.19) est une conséquence des assertions (3.24) et (3.25).

3) On pose

$$S = \left\{ y \in Y : y(t_0) = (-A)^\alpha x_0, \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \|y(t) - (-A)^\alpha x_0\| \leq \delta \right\}.$$

On remarque que S est un sous-ensemble non vide fermé et borné de Y , donc est un espace métrique complet.

– Montrons que :

I. $\Phi : S \rightarrow S$.

Montrer ce, il suffit de vérifier que

$$\|\Phi y(t) - (-A)^\alpha x_0\| \leq \delta, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (3.26)$$

De (3.18), (3.15), (3.14) et (3.17), pour $t \in [t_0, t_1]$ on a

$$\begin{aligned} & \|\Phi y(t) - (-A)^\alpha x_0\| \\ = & \left\| U(t-t_0)(-A)^\alpha x_0 - (-A)^\alpha x_0 + \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t-s)f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds \right\| \\ \leq & \| U(t-t_0)(-A)^\alpha x_0 - (-A)^\alpha x_0 \| + \left\| \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t-s)[f(s, (-A)^{-\alpha}y(s)) - f(s, x_0)]ds \right\| \\ + & \left\| \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t-s)f(s, x_0)ds \right\| \\ \leq & \frac{\delta}{2} + M_\alpha L \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} \| y(s) - (-A)^\alpha x_0 \| ds + M_\alpha B \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} ds \\ \leq & \frac{\delta}{2} + M_\alpha(L\delta + B) \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} ds \leq \frac{\delta}{2} + \frac{M_\alpha(L\delta + B)}{1-\alpha} (t_1 - t_0)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

En vue de la condition (3.16), ce qui prouve l'inégalité (3.26).

II. $\|\Phi y_1 - \Phi y_2\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|, y_1, y_2 \in S.$

Par (3.15),(3.14)et (3.16), on a pour tout $t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} & | \Phi y_1(t) - \Phi y_2(t) | \\ = & \left\| \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t-s)[f(s, (-A)^{-\alpha}y_1(s)) - f(s, (-A)^{-\alpha}y_2(s))]ds \right\| \\ \leq & \int_{t_0}^t \|(-A)^\alpha U(t-s)\| \cdot \|f(s, (-A)^{-\alpha}y_1(s)) - f(s, (-A)^{-\alpha}y_2(s))\| ds \\ \leq & M_\alpha L \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} \|y_1(s) - y_2(s)\| ds \leq M_\alpha L \frac{(t_1 - t_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|y_1 - y_2\| \\ \leq & \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, de I et II, et le théorème du point fixe, on conclut qu'il existe un

point fixe unique $y \in S$ c-à-d, $\Phi y = y$ alors

$$y(t) = U(t - t_0)(-A)^\alpha x_0 + \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t - s)f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds. \quad (3.27)$$

Comme $y = \Phi y$, il résulte de l'assertion (3.20)

Pour $t'_0 > t_0$, il existe une constante $L_{t'_0} > 0$ telle que

$$\|y(t) - y(s)\| \leq L_{t'_0} |t - s|^\beta, \quad t, s \in [t'_0, t_1].$$

De l'inégalité (3.14), ce qui implique la continuité de Hölder locale de la fonction $f(t, (-A)^{-\alpha}y(t))$. En effet, pour tout $t, s \in [t'_0, t_1]$, $t_0 < t'_0 < t_1$, on a

$$\begin{aligned} \|f(t, (-A)^{-\alpha}y(t)) - f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))\| &\leq L(|t - s|^\gamma + \|y(t) - y(s)\|) \\ &\leq L|t - s|^\gamma + LL_{t'_0} |t - s|^\beta, \quad 0 < \gamma \leq 1, 0 < \beta < 1 - \alpha. \end{aligned}$$

4) Maintenant on considère le problème de Cauchy non-homogène :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(t, (-A)^{-\alpha}y(t)), & 0 < t < T, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (NH)$$

Mais on sait que $f(t, (-A)^{-\alpha}y(t))$ appartient à $C([t_0, t_1]; E) \cap C^{\beta'}((t_0, t_1]; E)$, où $0 < \beta' < \min(\gamma, 1 - \alpha)$. Donc l'application du théorème 17, on obtient que la fonction

$$u(t) = U(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t - s)f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds$$

appartient à $C([t_0, t_1]; E) \cap C^1((t_0, t_1); E)$ est une solution unique du problème (NH).

Il reste à montrer que

$$u(t) = (-A)^{-\alpha}y(t), \quad t_0 < t \leq t_1, \quad (3.28)$$

ce qui prouve que la fonction u est une solution du problème (PSL).

Comme pour $t_0 < t \leq t_1$ on a

$$\begin{cases} U(t-t_0)x_0 \in D(A) \subset D((-A)^\alpha), \\ \int_{t_0}^t U(t-s)f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds \in D(A) \subset D((-A)^\alpha), \end{cases}$$

en vue de la partie (b) du théorème 14 et la formule (3.27) il résulte

$$\begin{aligned} (-A)^\alpha u(t) &= (-A)^\alpha U(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t-s)f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds \\ &= (-A)^\alpha U(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t-s)f(s, (-A)^{-\alpha}y(s))ds = y(t). \end{aligned}$$

Ce qui prouve la formule (3.28).

5) Finalement, on montre l'unicité des solutions du problème (PSL). supposons que u, v sont deux solutions du problème (PSL) :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), & t_0 < t < t_1, \\ u(t_0) = x_0; \\ \frac{dv}{dt} = Av(t) + f(t, v(t)), & t_0 < t < t_1, \\ v(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Alors par le théorème 16, on a

$$\begin{aligned} u(t) &= U(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t-s)f(s, u(s))ds, \\ v(t) &= U(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t-s)f(s, v(s))ds, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}(-A)^\alpha u(t) &= U(t-t_0)(-A)^\alpha x_0 + \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t-s)f(s, u(s))ds, \\(-A)^\alpha v(t) &= U(t-t_0)(-A)^\alpha x_0 + \int_{t_0}^t (-A)^\alpha U(t-s)f(s, v(s))ds.\end{aligned}$$

Ceci implique que les fonctions $(-A)^\alpha u(t)$ et $(-A)^\alpha v(t)$ sont deux points fixes de la application Φ . (Ici on remarque que l'intervalle $[t_0, t_1]$ doit être remplacé par un petit intervalle $[t_0, t_1 - h]$, $h > 0$.) Donc, par l'unicité des points fixes de Φ , il résulte

$$(-A)^\alpha u(t) = (-A)^\alpha v(t), \quad t_0 \leq t < t_1,$$

alors

$$u(t) = v(t), \quad t_0 \leq t < t_1.$$

d'où le théorème.

■

Bibliographie

- [1] Adams, R.A., Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Agmon, S., Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1965.
- [3] Agmon, S., A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727.
- [4] Bergh, J. and J. Lofstrom, Interpolation spaces, an introduction, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [5] Bourdaud, G., LP-estimates for certain non-regular pseudo- differential operators, Comm. Part. Diff. Eq. 7 (1982), 1023-1033.
- [6] , J. et A. Piriou, Introduction a la theorie des equations aux derivees partielles lineaires, Gauthier-Villars, Paris, 1981.
- [7] Friedman, A., Partial differential equations, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [8] Fujita, H. and T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rat. Mech. and Anal. 16 (1964), 269-315.
- [9] Gagliardo, E., Propriety di alcune classi di funzioni in pill variabili, Ric. di Mat. 7 (1958), 102-137.

- [10] Henry, D., Geometric theory of semilinear parabolic equations, Lecture Notes in Math. No. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [11] Hormander, L., The analysis of linear partial differential operators III, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.
- [12] Kumano-go, H., Pseudodifferential operators, MIT Press, Cambridge, Mass., 1981.
- [13] Lions, J.-L. et E. Magenes, Pro blames aux limites non-homogenes et applications, Vol. 1, 2, Dunod, Paris, 1968 ;
- [14] Mizohata, S., The theory of partial differential equations, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1973.
- [15] Pazy, A., Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [16] Rempel, S. and B.-W. Schulze, Index theory of elliptic boundary problems, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
- [17] Taira, K., Diffusion processes and partial differential equations, Academic Press, San Diego, New York, London, Tokyo, 1988.
- [18] Taylor, M., Pseudodifferential operators, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.
- [19] Triebel, H., Interpolation theory, function spaces, differential operators, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [20] Umezū, K., LP-approach to mixed boundary value problems for second-order elliptic operators, Tokyo J. Math. 17 (1994), 101-123.
- [21] Yosida, K, Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965. ADAMS R. : [1] Sobolev spaces, Acad. Press (1975).
- [22] S. : [1], Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand (1965).

Résumé

Dans ce mémoire on résoudre un problème semi linéaire et rechercher l'existence locale et l'unicité de la solution de l'équation $x' = Ax$ dans les espaces de Banach, telle que A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense, en utilisant la théorie des semi-groupes analytiques et les puissances fractionnaires d'un semi-groupes

Mots clés

Opérateur fermé, semi-groupe analytique, puissance fractionnaire, l'ensemble résolvant

Abstract

In this memory we solve a semi-linear problem and search the local existence and uniqueness of the solution of the equation $x' = Ax$ in Banach spaces, such that A is a closed linear operator with dense domain in using the theory of analytic semi groups and fractional powers of semi groups

المخلص

في هذه المذكرة نحل مسألة شبه خطية و نقوم بالبحث لإيجاد حل وحيد للمعادلة:

$$x' = Ax \text{ في فضاء باناخ حيث :}$$

A مؤثر مغلق بإستعمال نظرية شبه زمرة تحليلية و قوى الكسور