REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filiére : Mathématiques
Option : EDPs et applications

Théme

Etude d'un probléme elliptique dégénéré avec conditions de Neummann

---

Présentée par :
Bouadjila yousra

Devant le jury composé de :

M^r MOKHTARI Abdelhak	MCA,	Université de M'sila	**Président**.
M^r YAHIAOUI Mohamed Eladel	MAA,	Université de blida 1	**Encadreur**.
M^r SAADI Abderrachid	MCA,	Université de de M'sila	**Co-Encadreur**.
M^r KHADRAOUI Abdelmalek	MAA,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Je ne remercierai jamais assez Dieu,Le Tout puissante de m'avoir donné le courage délaboer ce mémoire.

Je tiens particulièrment à remercier M.saadi Abdrachid et mon encadreur ,et M.yahiaoui Adel pour la motivation et les encouragements qu'elle m'a promulgués sans elle ce modeste travail n'aurait pu être réalisé.

Je remercie les members du Jury de ma soutenance .

Sans oublier tous mes camarades de l'université de M'sila pour terminer ,je tiens à remercier infiniment M.Brahim.Bougherara.

Dédicaces

je dédie ce travail
Aux syboles de la tendrese et de l'amour,ma mère qui ma donné tout le courage et soutien pour continuer .

A mon cher père qui ne cesse de m'orienter et me donner l'espoir et la volonté de faire le maximum pour réussir et qui a toujour été mon modéle idéal.

Et sortout mes chére fréres : salah ,Rabah.

Et mes chéres soeurs : malak et ma soeur,Samiha, son mari Hamza et ses enfants,Younes et Anas .
Et mon fiancé Okba Djafer et sa mère

A toutes mes chéres amies : soumai ,soltana ,waffa ,abir ,saadia, marwa.

A tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Notations

Ω	:	*Un ouvert de* $\mathbb{R}$
$\overline{\Omega}$	:	*l'adhérence de* Ω
$\partial\Omega$	:	*Frontière de* Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	:	*L'espace des fonctions de classe*C^∞*à support compact*
$C(\overline{\Omega})$	:	*Fonction continues sur*$\overline{\Omega}$
$C^{1,0}(\Omega)$	:	*L'ensemble des fonction Lipschitziennes*
$D^\alpha u(x)$	:	*les drivées au sens de distributions*
w	:	*un poids*
$(.,.)$	:	*produit scalaire*
$\langle .,. \rangle$	:	*crochet de dualité*
$p.p$	:	*presque partout*
(Ω, B, X)	:	*l'espace mesuré*
∇u	:	*cradient de u*, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$
Δ_p	:	*p-Laplacien*

Introduction

Nous considérons un opérateur elliptique dégénére linéair L, sous la form

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{i,j}D_iu(x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_iu(x) + g(x)u(x) + \theta u(x)v(x)$$

pour $x \in \Omega$,où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de fontière $\partial\Omega$, les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$de cet opérateur linénaire sont des fonctions définies presque prtout sur Ω.

Dans la théorie des problémes aux limites du type

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x) & dans \quad \Omega, \\ \left\langle A(x)\nabla u(x), \vec{\eta}\ (x) \right\rangle = 0 & sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

la solutions de problémes (1) est recherchée dans l'espace $H(\Omega)$. En général, les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ sans poids(classique) apparaissent comme des espaces de solution pour les équation aux dérivé partielles de type elliptiques ou paraboliques dégénérées c'est -à-dire les équations avec divers types de singularités dans les cofficients ,il est naturel de chercher des solutions dans les espaces de Sobolev avec poids

Une classe de poids particuliérement bien comprise est la classe des poids A_p (ou classe Muckenhoupt)[10] qui a été introduite par B. Muckenhoupt . Ces les poids ont trouvé de nombreuses applications utiles dans l'analyse harmonique . Une autre raison d'étudier les poids A_p est le fait que les puissances de distance aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ appartiennent souvent à A_p. Il existe en effet de nombreux exemples intéressants de poids. Dans ce mémoire , nous ne considérerons que A_p poids.

Le mémoire est composeé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre :Nous allons rappeler les principaux énoncés de base de Lebesgue et de Sobelev.

Dans deuxième chapitre : nous présentons la définition d'un espace de Sobolav avec poids et d'un espace de Lebesgue avec poids et quelques propriétés.
Dans le dernier chapitre :Nous montrons comment le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev à poids permet de résoudre le probleme d'existence et d'unicité pour certains problèmes elliptiques dégénérés.
Finalement : on donne quelques références liées à notre travail.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

On présente dans ce chapitre , quelques généralités sur les espaces fonctionnels, principalement espaces de Lebsegue , espaces de Sobolev , et Mesure de Lebesgue et quelques définitions et notions de base dans ce travail.

1.1 Mesure de Lebesgue

Rappelons que un pavé P de $\mathbb{R}^n$ est un produit d'intervalles bornés $P = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, La mesure du pavé P est donnée par

$$n(P) = |I_1| \times |I_2| \times \ldots \times |I_m|\,.$$

avec $|I_j|$ est la longueur du segment I_j.

Définition 1.1. [1] Pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$, on définit

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} n(P_i) : A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_i, p_i \text{un pav ouvert de} \mathbb{R}^n\right\}$$

l'infimum est pris sur tous les recouvrsements dénombrables de A par des pavés ouverts.

Définition 1.2. (fonctions mesurables) [1]
Soient $(E;T)$ et $(F;T')$ deux espaces mesurables et $f : E \to F$ une application. f est dit mesurable si

$$\forall A \in T', f^{-1}(A) \in T$$

ce qui revient à dire que

$$f^{-1}(T') \subset T.$$

Définition 1.3. (fonctions intégrables) [1]

Soit (Ω, B, X) une espase mesuré, on dit qu'une application positive mesurable $f : \Omega \to [0, +\infty]$ est intégrable sur Ω par rapport à la mesure X si $\int_\Omega f dX < +\infty$.

1.2 Espace L^p

Définition 1.4. [2]

1) On désigne par $L^P(\Omega), 1 \leq p < \infty$ L'espace des fonctions mesurables

f :$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que la quantité

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p},$$

est fini .

2)Pour $p = \infty$ on désigne par $L^\infty(\Omega)$ L'espace des fonctions mesurables$f$:$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que la quantité

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{c : \|f(x)\| \leq c \quad pp \; sur \;\; \Omega\}$$

est fini.

Définition 1.5. L'espace $L^1_{loc}(\Omega)$

l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui sont localment intégrables sur Ω c'est -à-dire telles que $\int_\Omega |f(x)| \, dx < \infty$, pour f mesurable.

Inégalité de Hölder [2]

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $p \in [1, +\infty]$ et q l'exposon conjugé de p c'est -à-dire $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q \, dx\right)^{1/q}$$

alors on a :

$$\begin{cases} fg \in L^1(\Omega) \\ \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} . \end{cases}$$

Inégalité de Cauchy schwarz [2]

Pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$

$$\|fg\| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} .$$

Inégalité de Cauchy

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$$

, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.1. la quantité $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur les espaces $L^p(\Omega)$ De plus ; $\left(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p(\Omega)}\right)$sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réfléxif pour $1 < p < \infty$.

1.3 les espaces de sobolev classique

Définition 1.6. (l'espace $W^{k,p}(\Omega)$) [2]

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $1 \leq p < \infty$ et $k \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \textit{pour tout} \alpha \in \mathbb{N}^N \textit{telle que} \, |\alpha| \leq K\right\},$$

et on définit sur $W^{k,p}(\Omega)$ la norme suivante

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq K} \|D^\alpha u\|_{L^P(\Omega)} .$$

Définition 1.7. (l'espace $W_0^{k,p}(\Omega)$)

Avec les mêmes notations on définit les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$ comme l'adhérance de l'espace C_0^∞ dans $W^{k,p}(\Omega)$.

Inégalité de poincaré [2]

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ alors, avec $1 \leq p < \infty$

$$\exists C > 0, \forall u \in W_0^{1,p} \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^P(\Omega)}$$

De plus , laplication $u \to \|\nabla u\|_{L^P}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à celle induite par $W^{1,p}$.

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.8. [2] On dit qu 'une forme bilinéaire $a(u,v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est

i) **continue** :s'il existe une constante c telle que

$$|a(u,v)| \leq c\,|u|\,|v| \qquad \forall u, v \in H.$$

ii) **coercive** :s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u,u) \geq \alpha\,|v|^2 \qquad \forall v \in H.$$

Définition 1.9. (Théorème de Lax-Milgram)

Soit $a(u,v)$ une forme bilinénéaire continue et coercive

Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique telle que :

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \qquad \forall v \in H$$

De plus, si a est symétrique, alore elle est caractérisée par la propriété

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

1.5 L'espace des fonctions régulières

Définition 1.10. [2] Soit f une fonction contenu dans Ω, on dit que u est Lipschitziennes de rapport k si pour tous $x, y \in \Omega$

$$|u(x) - u(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

Définition 1.11. [9] Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}$

(i) $C^k(\Omega)$ avec $k \in \mathbb{N}$-l'ensemble de toutes fonctions définies sur Ω qui ont des dérivées contineus jusqu'à lorder k sur Ω .

(ii) $C^\infty(\Omega)$- L'ensemble de toutes les fonction définies sur Ω qui ont des dérivées d'ordre quelconque sur Ω.

(iii) $C^\infty(\overline{\Omega})$- Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $C^k(\overline{\Omega})$ l'ensemble de toutes fonctions $u \in C^k(\Omega)$ telles que $D^\alpha \in C(\overline{\Omega})$ pour toutes α multi -indice $\alpha, |\alpha| \leq k$

on note

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

(iv)$C_0^\infty(\Omega)$-est l'espace des fonctions à support compact (contenu dans Ω). On dit que c'est l'espace des fonctions-test.

Théorème 1.1. *(de densité)[2]*
L'espace des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ c'est -à-dire pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $f \in L^p(\Omega)$, il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \epsilon.$$

CHAPITRE 2

ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

Dans ce chapiter ,nous présentons la notation et les définitions de l'espace de Sobelev , lespace de lebesgue avec poids , définition de A_p poids et quelques faits et nous prouvons quelques résultats

2.1 Motivation

Soit w une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$ telle que $w(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert $1 \leq p < \infty$ et k un entier positif ,les espaces de Sobolev avec poids $W^{k,p}(\Omega, w)$ sont consititués de toutes les fonctions u de dérivées faible $D^\alpha u, |\alpha| \leq K$ satisfaisant

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega,w)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, w dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Dans le cas $w = 1$, cet espace est notée $W^{k,p}(\Omega)$. Espaces de Sobolev sans les poids se présentent comme des espaces de solutions pour les équation aux dérivées partiels elliptiques et paraboliques dans diverses applications, on peut rencontrer des problèmes aux limites pour les équations elliptiques dont l'ellipticité est "perturbée"dans sens où une certaine dégénérescence ou singularité apparait. Ce "mauvais" comportement peut $\hat{e}$tre causé par les coeffcients de opérateur différentiel correspondant. Pour les équations aux dérivées partielles dégénérées, c'est-à-dire des équations avec différents types de singularités dans les coefficients, il est naturel de chercher des solutions dans les espaces Sobolev pondérés.

Exemple 2.1. Nous considrons lopérateur diffrentiel dordre $2k$ suivant.

$$(Au)(x) = \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^k u) \tag{2.1}$$

pour $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, où les coefficients $a_\alpha = a_\alpha(x, \xi)$ sont définis sur $\Omega \times \mathbb{R}^m$, et $\nabla^j u = \{D^\gamma u : |\gamma| = j\}$ $(pour j = 0, 1 \dots, k)$ est le gradien du j-ième ordre.

Ici nous supposons que

(**i**) $a_\alpha(x,\xi)$ satisfaire les conditions Carathéodory, c'est-à-dire que $a_\alpha(.,\xi)$ est mesurable dans Ω pour tous $\xi \in \mathbb{R}^m$ et $a(x,.)$ est continu dans $\mathbb{R}^m$ pour $x \in \Omega$

(**ii**) $a_\alpha(x,\xi)$ satisfait la condition de croissance

$$|a_\alpha(x,\xi)| \leq C_\alpha \left((g_\alpha)(x) + \sum_{|\beta|\leq k} |\xi_\beta|^{p-1} \right)$$

pour $x \in \Omega$ et tous les $\xi \in \mathbb{R}^m, C_\alpha > 0$ et $g_\alpha \in L^{p'}(\Omega), (1/p + 1/p' = 1)$;

(**iii**) $a_\alpha(x,\xi)$ satisfait la condition de monotonie

$$\sum_{|\alpha|\leq k} (a_\alpha(x,\xi) - a_\alpha(x,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) > 0 \; \textit{pour tout} \xi, \eta \in \mathbb{R}^m, \xi \neq \eta;$$

(**iv**) $a_\alpha(x,\xi)$ satisfait la condition d'ellipticité

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geq C \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi_\alpha|^p$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec constante $C > 0$ indépendant de ξ. Un exempl A typique d'opérateur différentiel A satisfaisant toutes les conditions précédentes est on peut dire p -Laplacien Δ_p défini pour $p > 1$ par

$$\begin{aligned} \Delta_p u &= div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left[(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + \ldots + (\frac{\partial u}{\partial x_n})^2 \right]^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

ou sa modification, l'opérateur $\tilde{\Delta}_p$ défini par

$$\tilde{\Delta}_p u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

, ou l'opérateur un peu plus compliqué

$$Au = -\tilde{\Delta}_p u + |u|^{p-2} u.$$

changeons légèrement l'opérateur précédent en

$$(Au)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x) \left| u \right|^{p-2} u \tag{2.2}$$

avec des fonctions données(cofficients) $a_i(i = 1, \ldots, n)$ satisfaisant

$$a_i \in L^\infty(\Omega)(i = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

$$et \;\; a_i(x) \geq C_1 > 0(i = 0, 1, \ldots, n), \; pour \; x \in \Omega \tag{2.4}$$

Alors toutes les conditions (ii), (iii), (iv) restent satisfaites et on cherche une solution faible dans l'espace de Sobolev $W^{1.P}(\Omega)$. Cependant, la situation se change dramatiquement si certains des coeffcients $a_i(x)$ violer la condition (2.3). et/ou la condition (2.4). (c'est-à-dire avec des coefficients singulier($a_i(x)$ non borné et/ou dégénérés ($a_i(x)$ ne sont que des p.p positifs)). La situation peut être sauvée en utilisant l'espace de Sobolev pondéré $W^{1,p}(\Omega, w)$ à la place du espace de Sobolev classique $W^{1,p}(\Omega)$.
Un exemple typique est le dégénéré p-Laplacian $-div(a(x) \left| \nabla u \right|^{p-2} \nabla u); p \neq 2$.

Exemple 2.2. Dans le cas linéaire, on considére le second ordre, linéaire, elliptique équations avec structure de divergence

$$div(A(x)\nabla u(x)) = 0 \tag{2.5}$$

où $A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j} = 1, \ldots, n$ est une matrice symétrique avec des coefficients mesurables,défini dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$. On suppose la condition d'ellipticité suivante

$$w(x) \left| \xi \right|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \leq \left| \xi \right|^2 v(x) \tag{2.6}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et p.p $x \in \Omega$ où w et v sont des fonctions mesurables, finies positives $x \in \Omega$.

L'équation2.5. est dégénérée si w^{-1} n'est pas borné, et elle est 2.5. est singulier si v est non borné.

Définition 2.1. (fonctions poids) [8]
Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, les fonctions mesurables pp dans Ω, positive et borné sont dit que fonction poids, on noter $W(\Omega)$ l'ensemble de toutes fonction poids .

– Il y a plusieurs types de poids :poids p-dmissibles ,poids réguliers ,A_p poids. . . ,et dans ce travail ,nous ne considérenons que les poids A_p.

2.2 Fonctions poids de type A_p

Le probléme principale considéré est la détermination de toutes fonction positive localement intégrable ($w(x)$est une fonction poids) pour la quelles il existe une constante C sachez que

$$\int_j [f^*(x)]^p\, w(x)dx \leq c \int_j |f(x)|^p\, w(x)dx$$

où $1 < P < \infty$ j est un intervalle fixe est indépendant de f et f^* est s'appelle la fonction maximale de Hardy

$$f^*(x) = sup \frac{1}{y-x} \int_x^y |f(t)|\, dt \qquad y \neq x \quad et \quad , y \in j$$

.

ces fonctions poids sont appelés A_p poids.

Définition 2.2. Soit w une fonction de poids sur $\mathbb{R}^n$,on dit que w est de type A_p(ou bien w est A_p poids),s'il existe une constante $C = C_{p.w}$ telle que
a)si $1 < p < \infty$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1/(1-p)}(x)dx\right)^{p-1} \leq C. \tag{2.7}$$

b)si $p = 1$

$$\frac{1}{|B|}\int_B wdx \;\; ess \sup_{x\in B} \frac{1}{w(x)} \leq c$$

pour toutes les boules $B \subset \mathbb{R}^n$ ou $|.|$désigne la mesure de lebesgue à n dimension dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1. [6] Soit $1 < p < q < \infty$, Alors $A_p \subset A_q$ il suffit de ramarquer que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1/(1-q)}(x)dx\right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1/(1-p)}(x)dx\right)^{p-1}$$

cette inégalité découle de l'inégalité de Hölder puisque $(q-1)(p-1)^{-1} > 1$

Preuve

Soit $w \in A_p$

on montre que $w \in A_q$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1/(1-q)}(x)dx\right)^{q-1} \leq C$$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1/(1-q)}(x)dx\right)^{q-1} = \left(\frac{1}{|B|}\int_B \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{-1}{1-q}}(x)dx\right)^{q-1}$$

on pose $r = \frac{-1}{1-q}$

on a :

$$\begin{aligned} p < q \Rightarrow 1-p > 1-q \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{1-p} < \frac{1}{1-q} \\ &\Rightarrow \quad \frac{-1}{1-p} > \frac{-1}{1-q} \end{aligned}$$

d'aprés l'inégalété de Hölder ,il vient que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \left(\frac{1}{w}\right)^r (x)dx\right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{|B|}\underbrace{\left(\int_B 1^{\alpha'}(x)dx\right)^{\frac{1}{\alpha'}}}_{=C}\left(\int_B \left(\frac{1}{w}(x)\right)^{r\alpha}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{q-1}$$

on choisit α :

$$\alpha r = \frac{-1}{1-p} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{-1}{1-p}}{\frac{-1}{1-q}} = \frac{1-q}{1-p}$$

devient notre

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{\frac{1}{1-q}}(x)dx\right)^{q-1} \quad &\leq \quad C\left(\frac{1}{|B|}\left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}}(x)dx\right)^{\frac{1-p}{1-q}}\right)^{q-1} \\ &\leq \quad C\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{\frac{1}{1-p}}(x)dx\right)^{p-1} \end{aligned}$$

Donc $w \in A_q$

par conséquent $A_p \subset A_q$

Définition 2.3. [11] On dit qu'un poids w est double s'il existe une constante positive C telle que

$$w(2B) \leq Cw(B)$$

pour tout les boules $B \subset \mathbb{R}^n$ avec C indépendant de B, est appelée la constante de doublemente de w.

Si $\quad w \in A_p \Longrightarrow w$ est un poids double

Corollaire 2.1. *Soit w une fonction poids définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$,pour $w(x) = |x|^\alpha$,où $1 < p < \infty$. $w(x)$ est une fonction A_p poids si et seulement si $-3 < \alpha < 3(p-1)$*

preuve

En utilisant les coordonnées sphériques, pour : $0 < r < R$, $\theta \in [0, \pi]$ *et* $\varphi \in [0, 2\pi]$

soit $X(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, poson :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \qquad \Rightarrow |x| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{r^2} = |r| \end{cases}$$

on trouve $dx = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

et la matrice Jacobienne

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et la fonction $w(x) = |x|^\alpha$, pour $|B| = \frac{4}{3}\pi r^3$ et D'aprés la définition de A_p poids on a :

$$\frac{1}{|B^2|}\left(\int_B |x|^\alpha (x)dx\right)\left(\int_B |x|^{\alpha/(1-p)} (x)dx\right)^{p-1} \leq^? C$$

En passant en coordonnées sphériques ,on obtient

$$\begin{aligned}\int_{|B|} w(x)dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^{\alpha+2}\sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi R^3}{\alpha+3} \quad si \quad \alpha+3>0\\ \int_{|B|} w^{\frac{\alpha}{1-p}}(x)dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^{2+\frac{\alpha}{1-p}}\sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi(1-p)}{\alpha+3(1-p)}R^{\frac{\alpha+3(1-p)}{1-p}} \quad si \quad \alpha+3(1-p)>0\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B^2|}\left(\int_B |w|^{\alpha}(x)dx\right)\left(\int_B |w|^{\alpha/(1-p)}(x)dx\right)^{p-1} &= \frac{3}{4\pi R^3}\times\frac{4\pi R^{\alpha+3}}{\alpha+3}\times\frac{3^{p-1}}{(4\pi)^{p-1}R^{3(1-p)}}\\ &\times \frac{(4\pi)^{p-1}(1-p)^{p-1}}{(\alpha+3(1-p))^{p-1}}R^{-\alpha-3(1-p)}\\ &= \frac{(1-p)^{p-1}}{(\alpha+3)(\alpha+3(1-p))^{p-1}} = C(w,p)\end{aligned}$$

donc $w(x)=|x|^{\alpha}$ un A_p poids si et seulment si $-3<\alpha<3(p-1)$

2.3 Espaces de Lebesgue avec poids

Définition 2.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, p>1$ et w un poids ,on notera $L^p(\Omega,w)$ L'espace de toutes les fonctions mesurables $u=u(x), x\in\Omega$
muni de la norme

$$\|u\|^p_{p,w,\Omega} = \int_{\Omega} |u(x)|^p\, w(x)dx < \infty.$$

Remarque 2.2. .[8]

1. Pour $w(x)=1$ nous obtenons l'espace de Lebesgue classique $L^p(\Omega)$ dans ce cas écrivons $\|u\|_{p,\Omega}$ au lieu de $\|u\|_{p,w,\Omega}$.
2. L'espace de Lebesgue avec poids $L^p(\Omega,w)$ est un espace de Banach.

Inégalité de Hölder avec poids

soient $f\in L^p(\Omega,w)$ et $g\in L^q(\Omega,w)$ avec $p\in[1,+\infty]$ et q exposant conjugé de p c'est -à-dire $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ alors on a :

$$\|f.g\|_{L^1(\Omega,w)} \le \|f\|_{L^P(\Omega,w)}\|g\|_{L^q(\Omega,w)}.$$

Démonstration. Soient$f \in L^p(\Omega, w)$,$g \in L^q(\Omega, w)$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$=1

on a :

$$\begin{aligned}
\|f.g\|_{L^1(\Omega,w)} &= \int_\Omega |f(x)g(x)|\, w(x)dx \\
&= \int_\Omega |f(x)g(x)|\, w^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} dx \\
&\leq \int_\Omega \left| f(x)w^{\frac{1}{p}} \right| \left| g(x)w^{\frac{1}{q}} \right| dx \\
&\leq \left(\int_\Omega \left(\left| f(x)w^{\frac{1}{p}} \right| \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \left(\left| g(x)w^{\frac{1}{q}} \right| \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, w(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q\, w(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{L^p(\Omega,w)} \|g\|_{L^q(\Omega,w)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f.g\|_{L^1(\Omega,w)} \leq \|f\|_{L^P(\Omega,w)} \|g\|_{L^q(\Omega,w)} .$$

□

Corollaire 2.2. *Pour $p = 2$,l'espace $L^2(\Omega, w)$ est un espace de Hilbert*

muni du produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega,w)} = \int_\Omega f(x)g(x)w(x)dx \quad \forall f, g \in L^2(\Omega, w).$$

la norme correspondante sera notée

$$\|f\|_{L^2(\Omega,w)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, w(x)dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Proposition 2.1. *Soient $1 \leq p < \infty$ et w un A_p poids alors $w^{-1/(p-1)}$ est localment intégrable*

$$w \in A_p \Rightarrow w^{-1/(p-1)} \in L^1_{loc}(\Omega).$$

Remarque 2.3. [11] si $w \in A_p$,$1 \leq p < \infty$ alors puisque $w^{-1/(p-1)}$est localment intégrable quand $p > 1$ et $1/w$ est localment borné quand $p = 1$, on a $L^p(\Omega, w) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ pour chaque domaine Ω.

Théorème 2.1. *[8]*

soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,un ouvert borné,$p > 1$ $w \in A_p, \Phi$ un ensemble compact

dans $\mathbb{R}^n, \Phi \subset \Omega$ alors

$$L^p(\Omega, w) \hookrightarrow L^1(\Phi)$$

($\hookrightarrow$ l'enjection continue)

Preuve[8]

L'assertion découle immédiatement de l'inégalité de Hölder

puisque pour $u \in L^p(\Omega, w)$ on a :

$$\begin{aligned}\int_\Phi |u(x)|\,dx &= \int_\Phi |u(x)|\, w^{1/p}(x) w^{-1/p}(x)dx \\ &\leq \|u\|_{p,w,\Phi} \left(\int_\Phi w^{-1/(p-1)}(x)dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C\,\|u\|_{p,w,\Omega}\end{aligned}$$

Avec C indépendant de u

2.4 Espaces de Sobolev avec poids

Par poids, nous considérons une fonction localement intégrable w sur $\mathbb{R}^n$ telle que $w(x) > 0$ pp.. Chaque poids w donne lieu à une mesure sur les sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ par intégration. Cette mesure est aussi notée w. Ainsi $w(E) = \int_E w(x)dx$ pour les ensembles mesurables $E \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 2.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert,$1 < p < \infty$,k un entier positif et $w \in A_p$ on définit l'espace de Sobolev avec poids $W^{k,p}(\Omega, w)$comme l'ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega, w)$ à dérivées faible $D^\alpha u \in L^p(\Omega, w)$,$1 < |\alpha| \leq k$ la norme de u dans $W^{k,p}(\Omega, w)$ est défini par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega,w)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, w(x)dx + \sum_{1\leq|\alpha|\leq K} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p\, w(x)dx\right)^{1/p}.$$

Proposition 2.2. *[5] Soient $p > 1$, w un p-poids de classe A_p avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à bord de Lipschitz ,Alors $C^1(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega, w)$*

Démonstration. voir preuve dans[5]page 08 □

Définition 2.6. L'espce $W_0^{k,p}(\Omega, w)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{w_0^{k,p}}(\Omega, w) = \left(\sum_{1\leq|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p\, w(x)dx\right)^{1/p}$$

Remarque 2.4. .

a)Les espaces $W^{k,p}(\Omega, w)$ et $W_0^{k,p}$ sont des espaces de Banach.

b) pour $k = 1$ et $p = 2$ les espaces $W^{1,2}(\Omega, w)$ et $W_0^{1,2}(\Omega, w)$ des espaces de Hilbert.

c)les fonctions poids qui vérifient $0 < C_1 \leq w(x) \leq C_2$ n'apportent rien de nouveau (l'espace $w^{k;p}(\Omega, w)$ est alors identique a l'espace de Sbolev classique $W^{k,p}(\Omega)$)par conséquent ,nous nous intéresserons surtout aux fonctions poids w qui soit s'annulent quelque part dans $\overline{\Omega}$ soit croissent a l'infini (ou les deux).

CHAPITRE 3

UN PROBLÈME ELLIPTIQUE DÉGÉNÉRÉ

Dans ce chapitre ,nous présentons le problème

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x) & dans \quad \Omega \\ \left\langle A(x)\nabla u(x), \vec{\eta}\ (x) \right\rangle = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Ou L est un opérateur elliptique dégénére avec condition aux limites de Neumann dans Ω, avec Ω un ouvert borné,Nous prouvons l'éxistence et l'unicité des solutions dans l'espace $H(\Omega)$.

3.1 Position du problème

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et chaque $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ou Ω est un ensemble avec frontière lisse par morceaux (c'est -à-dire $\partial\Omega \in C^{0,1}$), w et v sont des fonctions de poids, $\vec{\eta}\ (x) = (\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x))$ vecteur normal exterieur unitaire, $\partial\Omega$ à x,$\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
et soit $A(x) = (a_{ij(x)})_{i,j=1\ldots n}$ une matrice symetrique et satisfait la conditions déllipticité dégénérée

$$|\xi|^2 w(x) \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \leq |\xi|^2 v(x) \tag{3.1}$$

Nous nous intéressons à l'éxistence et l'unicité de la solution du problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x) & dans \quad \Omega \\ \left\langle A(x)\nabla u(x), \vec{\eta}\ (x) \right\rangle = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

Ou L est un opérateur elliptique dégénéré

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{i,j}D_iu(x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_iu(x) + g(x)u(x) + \theta u(x)v(x) \tag{3.3}$$

avec$D_j = \partial/\partial x_j (j = 1, \ldots, n)$, θ une constante ,les cofficients $a_{i,j}$,b_i et g sont des fonctions mesurables à valleurs réelles

3.2 Problème variationnel

Définition 3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné et ouvert,Nous définissons l'espace $H(\Omega)$ comme la fermeture de $C^\infty(\overline{\Omega})$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{H(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, v dx + \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u \rangle \, dx \right)^{1/2}$$

Où $A = (a_{ij})$ est la matrice des coefficients de l'opérateur L défini dans (3.3),$\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$
L'espace $H(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$a(u, \varphi) = \left(\int_\Omega u\varphi v dx + \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx \right)^{1/2}$$

Proposition 3.1. *En utilisant la condition de dégénérenonce*

$$|\xi|^2 \, w(x) \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \leq |\xi|^2 \, v(x)$$

on

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, w dx \leq \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u \rangle \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, v dx.$$

par conséquent $W^{1,2}(\Omega, v) \subset H(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega, w)$
Notons aussi que puisque A *est symétrique* $|\langle Ax, y \rangle| \leq \langle Ax, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle Ay, y \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. Soit $u \in W^{1,2}(\Omega, v) \Rightarrow \int_\Omega u^2 v + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, v < +\infty$
nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 \, w &\leq \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u \rangle \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, v \\
\int_\Omega u^2 w + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, w &\leq \int_\Omega u^2 v + \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u \rangle \leq \int_\Omega u^2 v + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, v \\
\left(\int_\Omega u^2 w + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, w \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_\Omega u^2 v + \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega u^2 v + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, v \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Alors

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega,w)} \leq \|u\|_{H(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,2}(\Omega,v)}$$

si $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega,v)} < \infty$ Alors :$\|u\|_{H(\Omega)} < \infty \Rightarrow W^{1,2}(\Omega, v) \subseteq H(\Omega)$
si $\|u\|_{H(\Omega)} < \infty$ Alors :$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega,w)} < \infty \Rightarrow H(\Omega) \subseteq W^{1,2}(\Omega, w)$
Danc

$$W^{1,2}(\Omega, v) \subseteq H(\Omega) \subseteq W^{1,2}(\Omega, w).$$

□

Remarque 3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord $\partial\Omega \in C^{0,1}$ en utilisant l'intégration par parties avec $u, \varphi \in H(\Omega)$,u satisfait la condition aux limites du problème $(eqn32)$,on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi Ludx &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_i u D_j \varphi dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \varphi D_i udx + \int_\Omega gu\varphi dx \\
&+ \theta \int_\Omega u\varphi vdx + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_i \varphi \, dx}_{=0} \\
&= B(u, \varphi) + \theta \int_\Omega u\varphi vdx
\end{aligned}$$

Où

$$B(u, \varphi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_i u D_j \varphi dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \varphi D_i udx + \int_\Omega gu\varphi dx$$

.

Est une forme bilineair
nous introduisons la définition suivante des solutions pour le problème de Neumann (3.2)

Définition 3.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord $\partial\Omega \in C^{0,1}$et supposons que $f/v \in L^2(\Omega, v)$,une fonction $u \in H(\Omega)$ est solution de problème (3.2) Neumann

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} D_i u D_j \varphi dx + \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + gu \right] \varphi dx + \theta \int_\Omega u\varphi vdx = \int_\Omega f\varphi dx$$

pour tout $\varphi \in H(\Omega)$

Le lemme suivant suivant montre que les hupothè du théorème(3.1)

Lemme 3.1. *Supposons que* $w \in A_2, v \in A_2, b_i/w \in L^\infty(\Omega)$
$(i = 1, \dots n)$ *et* $g/v \in L^\infty(\Omega)$ *Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$B(u,u) + C \|u\|^2_{L^2(\Omega,w)} \geq \frac{1}{2} \|u\|^2_{H(\Omega)}$$

pour tout $u \in H(\Omega)$

Démonstration.

$$B(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} D_i u D_j u dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i u D_i u dx + \int_\Omega g u^2 dx. \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{b_i}{w} w u D_i u dx + \int_\Omega \frac{g}{v} v u^2 dx \\
&\geq \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \, dx - \left(\max_{1\leq i\leq n} \left\| \frac{b_i}{w} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u| \, |D_i u| \, w dx \\
&- \left\| \frac{g}{v} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega u^2 v dx
\end{aligned}$$

d'aprés Cauchy Swartez, on obtient

$$\begin{aligned}
&\geq \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \, dx - C_1 \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega u^2 w dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |D_i u|^2 \, w dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&- C_2 \int_\Omega u^2 v dx \\
&\geq \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle - C_1 \left(\int_\Omega u^2 v dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&- C_2 \|u\|^2_{L^2(\Omega,v)}
\end{aligned}$$

où

$$C_1 = \max_{1\leq i\leq n} \left\| \frac{b_i}{w} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad et \qquad C_2 = \left\| \frac{g}{v} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

en utilisant de l'ingalité élémentaire

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2 \quad \epsilon > 0$$

on obtient 3.4.

$$\begin{aligned} B(u,u) &\geq \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \, dx - C_1 \left(\epsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} + \frac{1}{4\epsilon} \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \, dx \right) \\ &- c_2 \|u\|_{L^2(\Omega,v)} \\ . &= \left(1 - \frac{C_1}{4\epsilon}\right) \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \, dx - (C_1\epsilon + C_2) \|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \end{aligned}$$

si $C_1 > 0$ on peut choisir $\epsilon > 0$ telle que

$$1 - \frac{C_1}{4\epsilon} = \frac{1}{2} \text{(c'est -à-dire)} \epsilon = \frac{C_1}{2}$$

Ansi , se transforme en

$$\begin{aligned} B(u,u) &\geq \frac{1}{2} \int_\Omega \langle A\nabla u.\nabla u\rangle \, dx - (\frac{C_1^2}{2} + C_2) \|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_\Omega u^2 v dx + \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \, dx \right) - (\frac{C_1^2}{2} + C_2 + \frac{1}{2}) \|u\|^2_{L^2(\Omega;v)} \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2_{H(\Omega)} - C \|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \end{aligned}$$

où $\quad C = \frac{1}{2}C_1^2 + C_2 + \frac{1}{2} > 0$ Donc

$$B(u,u) + C \|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \geq \frac{1}{2} \|u\|^2_{H(\Omega)}$$

si $\quad C_1 = 0$ (*c'est -à-dire*,$b_i(x) \equiv 0$,$i = 1, \ldots, n$) alors 3.4 réduit à

$$\begin{aligned} B(u,u) &\geq \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \, dx - C_2 \|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\int_\Omega |u|^2 v dx + \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle \, dx \right) - (C_2 + \frac{1}{2}) \|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2_{H(\Omega)} - C \|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \end{aligned}$$

Par conséquent ,nous avons également

$$B(u,u) + c \|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \geq \frac{1}{2} \|u\|^2_{H(\Omega)}$$

pour tout $u \in H(\Omega)$,où, $C = \frac{1}{2}C_1^2 + C_2 + \frac{1}{2}$

$\square$

3.3 Existence et unicité de solution

Théorème 3.1.

soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord $\partial\Omega \in C^{0,1}$ supposons que :

$(H_1) w \in A_2, v \in A_2$

$(H_2) f/v \in L^2(\Omega, v)$

$(H_3) b_i/w \in L^\infty(\Omega)(i = 1, \ldots, n)$ *et* $g/v \in L^\infty(\Omega)$

Alors il existe une canstante $C > 0$ telle que pour tout $\theta \geq C$ le problème de Neumann (3.2) admet une solution unique $u \in H(\Omega)$,De plus nous avons

$$\|u\|_{H(\Omega)} \leq 2 \left\| \frac{f}{v} \right\|_{L^2(\Omega,v)}$$

3.3.1 preuve de théorème

on définit une forme bilinéaire

$$\tilde{B} : H(\Omega) \times H(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \tilde{B}(u, \varphi) = B(u, \varphi) + \theta \int_\Omega u\varphi v dx$$

et une forme linéiaire

$$T : H(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, T(\varphi) = \int_\Omega f\varphi dx$$

Alors $u \in H(\Omega)$ est une solution de problème de Neumann (3.2)si

$$\tilde{B}(u, \varphi) = T(\varphi)$$

pour tout $\varphi \in H(\Omega)$

étape 1, si $\theta \geq C$ alors $\tilde{B}$ a est coercive,c'est -à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\tilde{B}(u,u) \geq C\|u\|^2_{H(\Omega)}$et pour tout $u \in H(\Omega)$,en fait ,d'aprés lemme 3.1,il existe une constante $C > 0$ telle que

$$B(u,u) + C\|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H(\Omega)}$$

Donc,si $\theta \geq C$,on

$$\begin{aligned}\tilde{B}(u,u) &= B(u,u) + \theta\int_\Omega u^2 v dx = B(u,u) + \theta\|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \\ &\geq B(u,u) + C\|u\|^2_{L^2(\Omega,v)} \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H(\Omega)}\end{aligned}$$

Donc ,pour $\theta \geq C$ on a que

$$\tilde{B}(u,u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H(\Omega)}. \tag{3.5}$$

pour tout $u \in H(\Omega)$

étape 2, $\tilde{B}$ est bornée ,en fait ,en utilisant le fait que la matrice des coefficients $A = (a_{ij})$ est symétrique
$(H2)$et $(H3)$,on obtient

$$\begin{aligned}\left|\tilde{B}(u,\varphi)\right| &\leq B|u,\varphi| + \theta\left|\int_\Omega u\varphi v dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |\langle A\nabla u, \nabla\varphi\rangle| dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega |b_i||\varphi||D_i u| dx \\ &+ \int_\Omega |g||\varphi||u| dx + \theta\int_\Omega |u||\varphi| v dx \\ &\leq \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle^{\frac{1}{2}} \langle A\nabla\varphi, \nabla\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{|b_i|}{w}|\varphi||D_i u| w dx \\ &+ \int_\Omega \frac{|g|}{v}|\varphi||u| v dx + \theta\int_\Omega |u||\varphi| v dx\end{aligned}$$

d'aprés Cauchy Swartez, on obtient

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \langle A\nabla \varphi, \nabla \varphi\rangle\, dx\right)^{1/2} \\
&+ \left(\max_{1\leq i\leq n} \left\|\frac{b_i}{w}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega |\varphi|^2\, w dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |D_i|\, |u|^2\, w dx\right)^{1/2} \\
&+ \left\|\frac{g}{v}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |u|^2\, v dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\varphi|^2\, v dx\right)^{1/2} \\
&+ \theta \left(\int_\Omega |u|^2\, v dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\varphi|^2\, v dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(1 + \max_{1\leq i\leq n} \left\|\frac{b_i}{w}\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\|\frac{g}{v}\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \theta\right) \|u\|_{H(\Omega)}\, \|\varphi\|_{H(\Omega)} \\
&= \tilde{C}\, \|u\|_{H(\Omega)}\, \|\varphi\|_{H(\Omega)}
\end{aligned}$$

pour Tout $u, \varphi \in H(\Omega)$

étape 3,

La forme linéiaire T est bornée(C'est -à-dire $T \in [H(\Omega)]$)en fait

$$|T(\varphi)| \leq \int_\Omega |f|\, |\varphi|\, dx = \int_\Omega \frac{|f|}{v}\, v|\varphi|\, dx$$

d'aprés Cauchy Swartez, on obtient

$$\begin{aligned}
&\leq \left[\int_\Omega \left(\frac{|f|}{v}\right) v dx\right]^{1/2} \left[\int_\Omega |\varphi|^2\, v dx\right]^{1/2} \\
&\leq \left\|\frac{f}{v}\right\|_{L^2(\Omega,v)} \|\varphi\|_{H(\Omega)}
\end{aligned}$$

pout Tout $\varphi \in H(\Omega)$

par conséquent ,la forme bilinéaire $\tilde{B}$ et la forme linéaire T satisfont les hypothése du Théorème de Lax- Milgram,Ainsi, pour tout f avec $f/v \in L^2(\Omega, v)$,il existe une unique solution $u \in H(\Omega)$ telle que

$$\tilde{B}(u, \varphi) = T(\varphi)$$

pour tout $\varphi \in H(\Omega)$,c'est -à-dire que u est une unique solution du problème de Neumann (3.2) en particulier en posant $\varphi = u$ on a

$$\tilde{B}(u,u) = \int_{\Omega} fudx$$

en utilisant la définition de $\tilde{B}$,on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{B}(u,u) &= B(u,u) + \theta \int_{\Omega} u^2 vdx = \int_{\Omega} \frac{f}{v} uvdx \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega,v)} \left\| \frac{f}{v} \right\|_{L^2(\Omega,v)} \\ &\leq \|u\|_{H(\Omega)} \left\| \frac{f}{v} \right\|_{L^2(\Omega,v)}\end{aligned}$$

en utilisant 3.5,on obtient

$$\frac{1}{2} \|u\|^2_{H(\Omega)} \leq \tilde{B}(u,u) \leq \|u\|_{H(\Omega)} \left\| \frac{f}{v} \right\|_{L^2(\Omega,v)}$$

Donc

$$\|u\|_{H(\Omega)} \leq 2 \left\| \frac{f}{v} \right\|_{L^2(\Omega,v)}$$

3.4 Étude d'un exemple

Considérons le domaine $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ et les fonctions poids

$$w(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{3}} \quad et \quad v(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et la matrice des coefficients

$$A(x,y) \begin{pmatrix} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$ et presque tout (x,y) nous avons

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} |\xi|^2 \leq \langle A(x,y)\xi, \xi \rangle \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} |\xi|^2$$

si $(x,y) \in \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ alors $\overrightarrow{\eta}\ (x,y) = (x,y)$vecteur unitaire normal extérieur à on d'aprés du théorème (3.1), le problème de Neumann

$$\begin{cases} Lu(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{8}}\cos(xy) & on\ \ \Omega \\ \left\langle A(x,y).\nabla u, \overrightarrow{\eta} \right\rangle = 0 \quad on\ \ \partial\Omega \end{cases}$$

ou

$$\begin{aligned} Lu(x,y) &= -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \\ &+ \frac{\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\cos(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}\frac{\partial u}{\partial y} \\ &+ \frac{u(x,y)\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} + \theta\frac{u(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

avec les données suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+y^2)^{-3/8}\cos(xy) \\ g(x) &= \tfrac{\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{1/3}} \\ a_{1,1} &= \tfrac{1}{(x^2+y^2)^{1/3}} \\ a_{2,2} &= \tfrac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\ b_1 &= \tfrac{\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{1/3}} \\ b_2 &= \tfrac{\cos(xy)}{(x^2+y^2)^{1/4}} \end{aligned}$$

admet une solution unique a $H(\Omega)$ si $(\theta \geq 2)$

pour montrer que le problème admet une solution unique dans $H(\Omega)$,il suffit de vérifer que touts les conditions du théorème (3.1) sont satisfaits c'est-à-dire,on vérifie les hypothèses $(H_1) - (H_3)$

(H_1) on montre que w et $v \in A_2$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-1}(x)dx\right) \leq^? C$$

on a :$|B| = 4\pi r^2$

$$\left(\frac{1}{|B|^2}\int_B (x^2+y^2)^{-1/3}dxdy\right)\left(\int_B (x^2+y^2(x))^{1/3}dxdy\right)$$

en passant en cordonnées polaires ,on obtient :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16\pi^2 r^4}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho\rho^{-2/3} d\rho d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho\rho^{2/3} d\rho d\theta\right) \\
&= \frac{4\pi^2}{16\pi^2 r^4}\left(\int_0^r \rho^{1/3} d\rho\right)\left(\int_0^r \rho^{5/3} d\rho\right) \\
&= \frac{1}{4r^4}\frac{9}{32}\left[\rho^{\frac{4}{3}}\right]_0^r \left[\rho^{\frac{8}{3}}\right]_0^r = \frac{9}{128}
\end{aligned}$$

par conséquent $w \in A_2$

pour montrer $v \in A_2$ on a : $v(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dxdy\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} dxdy\right)$$

En passant en cordonnées polaires ,on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{16\pi^2 r^4}\int_0^{2\pi}\int_0^r d\rho d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho^2 d\rho d\theta\right) &= \left(\frac{4\pi^2}{16\pi^2 r^4}\int_0^r 1 d\rho\right)\left(\int_0^r \rho^2 d\rho\right) \\
&= \frac{1}{4r^4}[\rho]_0^r \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^r \\
&= \frac{1}{12} < \infty
\end{aligned}$$

on déduit que $v \in A_2$.

(H_2) on montre que $f/v \in L^2(\Omega, v)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{f}{v}\right)^2 &= \int_\Omega \left(\cos^2 xy \left(\frac{(x^2+y^2)^{-\frac{3}{4}}}{(x^2+y^2)^{-1}}\right)\right) \\
&= \int_\Omega \underbrace{\cos^2 xy}_{\leq 1} \underbrace{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}_{\leq 1} \leq \int_\Omega 1 = |\Omega|
\end{aligned}$$

Ce qui preuve que $f/v \in L^2(\Omega, v)$

(H_3) on montre que $b_i/w \in L^\infty(\Omega)$ et $g/v \in L^\infty(\Omega)$ et il existe une canstante $C : \theta \geq C = 2$

$$B(u,u) = \int_\Omega a(x,y)\nabla u \nabla \varphi dxdy + \int_\Omega \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \int_\Omega gu\varphi dxdy = \int_\Omega w(x) I_2 \nabla u \nabla \varphi$$

soit

$$C_1 = \max\left(\left\|\frac{b_1}{w}\right\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\|\frac{b_2}{w}\right\|_{L_\infty(\Omega)}\right)$$

$$\frac{b_1}{w} = \sin xy, \quad \frac{b_2}{w} = \frac{\cos xy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} \times (x^2+y^2)^{\frac{1}{3}} = \cos(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Danc

$$\left\|\frac{b_1}{w}\right\|_{L^\infty(\Omega)} = 1, \quad \left\|\frac{b_2}{w}\right\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$$

alors

$$C_1 = \max(1,1) = 1$$

on a

$$C_2 = \left\|\frac{g}{v}\right\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\|\frac{\sin xy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} \times (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right\| = 1$$

on déduit que

$$\frac{b_i}{w} \in L^\infty(\Omega) \quad g/v \in L^\infty(\Omega)$$

où

$$C = \frac{1}{2}C_1^2 + C_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$$

Donc

$$\theta \geq C = 2$$

Conclusion 3.1. *toute les conditions du théorème(3.1) sont remplies ,alors le problème admet une solution unique* $u \in H(\Omega)$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème elliptique dégénéré, on a montré l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites avec conditions de Neummann dans un espace de Sobolev avec poids.
Les espaces de Sobolev avec poids permettent de caractériser de manière plus précise les solutions faibles des équations aux dérivées partielles, en tenant compte des variations locales et globales des fonctions dans le domaine détude. Cela facilite la modélisation mathématique et l'analyse des phénomènes complexe.

Bibliographie

[1] **A.Bouziad et J.Galbrix**Théorie de la mesure et de l'intégration. *l'université de Rouen*,1995.

[2] **H. Brezis.** Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. *Springer new york dordrecht heidelberg london*, 2010.

[3] **A.Cavalheiro**The Neumann problem for some degenerate elliptic equation (2006)Appl Math ,51,619-628.

[4] **A.Cavalheiro** Weighted Sobolev Spaces and Degenerate Elliptic Equations (2008)Bol.Soc.Paran.Mat,26 1-2,117-132.

[5] **V. Chiadò Piat, F. Serra Cassano** Relaxation of degenerate variational integrals. Non- linear Anal., Theory Methods Appl. 22 (1994), 409-424.

[6] **J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia** Weighted Norm Inequalities and Related Topics. North-Holland Mathematics Studies 116. North Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.

[7] **J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio** Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. Oxford Math. Monographs. Clarendon Press, Oxford, 1993.

[8] **A.Kufner et B.Opic** How to define reasonably weighted Sobolev spaces(1984)Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 25, No. 3, 537-554.

[9] **A. Kufner, O. John, and S. Fucik** Function Spaces *Noordhoff International Publishing, Leyden* 1977.

[10] **B. Muckenhoupt** Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Am. Math. Soc* 165 (1972), 207-226.

[11] **B. O. Turesson** Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces*Lectures Notes in Mathematics Vol* 1736. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[12] **A.Torclinsky**Real variable Methods in Harmonic Analysis
Bloomington *Department of Mathematics indiana University*
Bloomington 1986.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة الوجود والوحدانية بإستخدام الدوال الموزونة A_p للمسألة الناقصية التالية:

$$\begin{cases} Lu(x) + \ldots = f(x) : & \Omega \\ \langle a(x)\nabla u(x), \eta(x) = 0 : & \partial\Omega \end{cases}$$

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{i,j}D_i u(x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_i u(x) + g(x)u(x) + \theta u(x)v(x)$$

$D_j = \partial/\partial x_j (j = 1, \ldots, n)$, مؤثر ناقصي، $a(x) = (aij(x))$:هي مصفوفة ناقصية متناظرة مكونة من معاملات قابلة للقياس وتحقق الشرط الناقصي المنحل

$$\left|\xi^2\right| w(x) \leq a(x)\xi, \xi \leq \left|\xi^2\right| v(x)$$

أما المعاملات b_i, g, θ فهي دوال قابلة للقياس.

الكلمات المفتاحية: ناقصي، مسألة حديةلنيومان، منحل، دوال الموزونة A_p.

Résumé

Le but de ce travail est détudier l'exitence et l'unicité par des fonctions de poids A_p d'un problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} Lu(x) + \ldots = f(x) & dans \quad \Omega \\ \langle a(x)\nabla u(x), \eta(x) = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où L est un opérateur elliptique dégénéré :

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{i,j}D_i u(x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_i u(x) + g(x)u(x) + \theta u(x)v(x)$$

avec $D_j = \partial/\partial x_j (j = 1, \ldots, n), \theta$ est une constante ,les cofficients a_{ij}, b_i et g sont des fonctions réelles mesurables ,la matrice des cofficients $a(x) = (aij(x))$ est symétrique et satisfait la condition d'ellipticité dégénéré :

$$\left|\xi^2\right| w(x) \leq a(x)\xi, \xi \leq \left|\xi^2\right| v(x)$$

Mots clés : elliptique ,dégénéré,problème aux limites de Neumann,poids A_p.

Abstract

The purpose of this work is to study the exitence and uniqueness by weight functions A_p of the following elliptic problem:

$$\begin{cases} Lu(x) + \ldots = f(x) & dans \quad \Omega \\ \langle a(x)\nabla u(x), \eta(x) = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

where L is a degenerate elliptic operator:

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{i,j}D_i u(x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_i u(x) + g(x)u(x) + \theta u(x)v(x)$$

with $D_j = partial/\partial x_j (j = 1, \ldots, n), \theta$ is a constant ,the coefficients a_{ij}, b_i and g are measurable real functions ,the matrix of coefficients $a(x) = (aij(x))$ is symmetrical and satisfies the degenerate ellipticity condition:

$$\left|\xi^2\right| w(x) \leq a(x)\xi, \xi \leq \left|\xi^2\right| v(x)$$

Key words: elliptic ,degenerate,boundary value problem of Neumann,A_p-weights.