

Table des matières

Introduction	1
1 Opérateurs linéaires bornés	3
1.1 Rappels et définitions	3
1.2 Continuité des opérateurs linéaires	6
1.3 Opérateurs bornés	8
1.3.1 Espace des opérateurs bornés	9
1.3.2 Opérateur positif	10
1.3.3 Opérateurs normal	11
1.3.4 Opérateur unitaire	11
1.4 Opérateur compact	11
1.4.1 Ensembles compacts	11
1.4.2 Opérateur compact	13
1.5 Inversibilité d'un opérateur	14
1.6 Spectre d'un opérateur borné	16
1.6.1 Définitions et propriétés	16
1.6.2 Spectre d'un opérateur compact	23

2	Opérateurs non bornés	25
2.1	Définitions et Généralités	25
2.2	Opérations algébriques sur les opérateurs non bornés	27
2.3	Opérateurs fermés	28
2.3.1	Ensembles fermés	28
2.3.2	Opérateur fermés	29
2.3.3	Théorème du graphe fermé	30
2.4	Opérateurs fermables	32
2.4.1	Opérateurs adjoints	34
2.4.2	Opérateurs symétriques	35
2.4.3	Opérateurs auto-adjoints	37
3	Théorie spectrale	39
3.1	L'inverse d'un opérateur non borné	39
3.2	Elément spectral	40
3.3	Spectre essentiel et discret	44
4	Théorèmes de perturbation	48
4.1	Théorème de Kato-Rellich	50
4.2	Théorème de WEYL	51
4.3	Théorème de PERSSON	52
	conclusion	55
	Conclusion	55
	Bibliographie	56

Introduction

La plus part des types de problèmes en sciences et ingénierie surtout les problèmes physiques mathématiques prennent la forme d'équation d'opérateur

$$Tx = y.$$

On particulier $T = A - \lambda I$, telle que $A : E \longrightarrow F$ est un opérateur linéaire comme opérateur différentiels et opérateur intégral et opérateur matriciel.

Les espaces E et F sont espaces de normé (Banach)

– Dans le premier et chapitre, on donne des définitions et généralités des opérateurs bornées sur l'espace normé. Ainsi on donne quelques notions sur la théorie spectrale des opérateurs bornés.

On représente la différence entre le spectre des opérateurs bornés sur un espace de dimension finie et un autre espace de dimension infinie.

– Dans le deuxième chapitre, on donne des définitions et généralités des opérateurs non bornés sur l'espace normé .Ainsi on donne quelques notions sur l'opérateur fermé

On représente la différence entre le spectre des opérateurs bornés et

le spectre des opérateurs non bornées.

- Dans le troisième chapitre, on donne des définitions des opérateurs relativement bornés et les opérateurs relativement compacts. Ainsi on a étudié le spectre de Laplacien Δ , les théorèmes de Kato-Rellich, Weyl, Persson.

Chapitre 1

Opérateurs linéaires bornés

Dans ce chapitre, on donne des définitions et généralités des opérateurs bornés sur l'espace normé. Ainsi on donne quelques notions sur la théorie spectrale des opérateurs bornés.

- On représente la différence entre le spectre des opérateurs bornés sur un espace de dimension finie et un autre espace de dimension infinie.

1.1 Rappels et définitions

Définition 1.1.1 (*Espaces normés*)

Un espace vectoriel E sur \mathbb{k} est dit un espace vectoriel **normé** s'il est muni d'une norme, $\|\cdot\|_E : E \rightarrow \mathbb{k}$,

Vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\|f\| = 0 \iff f = 0, \forall f \in E$.
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|, \forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$.

3. $\|f + g\| \leq \|g\| + \|f\|, \forall f, g \in E.$

Définition 1.1.2 (Norme équivalentes)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} et deux normes sur E , $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. on dit qu'elles sont **équivalentes** s'il existe $C_1 > 0, C_2 > 0$ tels que :

$$C_1 \|u\|_1 < \|u\|_2 < C_2 \|u\|_1, \forall u \in E$$

Définition 1.1.3 (Suite de Cauchy)

Une suite u_n d'éléments d'un espace normé $\{E, \|\cdot\|\}$ est dit un **Suite de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0 : \|u_n - u_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.1.4 (Espace complet)

Un espace vectoriel normé $\{E, \|\cdot\|\}$ est dit **complet** si toutes sous suites de Cauchy sont convergentes dans E pour sa norme.

Lemme 1.1.1 Tout espace vectoriel normé $\{E, \|\cdot\|\}$ de dimension fini est complet

Définition 1.1.5 (Espace de Banach)

On appelle **espace de Banach** sur \mathbb{k} tout espace vectoriel normé $\{E, \|\cdot\|\}$ complet pour la métrique associée à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.1.6 (Produit scalaire)

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k} Un **Produit Scalaire** sur E :

est une fonction $\langle f, g \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{k}$ vérifie les propriétés suivantes $\forall f, g, h \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$

1. $\langle f, f \rangle \geq 0$.
2. $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
3. $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$ et $\langle f, \lambda g \rangle = \bar{\lambda} \langle f, g \rangle$
4. $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$
5. $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

Remarque 1.1.1 Le produit scalaire d'un espace euclidien nous donne une norme définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Définition 1.1.7 (Espace euclidien)

Un espace vectoriel E sur \mathbb{k} est dit un **espace euclidien** ou préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire.

Définition 1.1.8 (Espace de Hilbert)

On appelle **Espace de Hilbert** tout espace préhilbertien H complet au sens de la métrique associée à la norme induite par le produit scalaire.

Exemple 1 L'espace euclidien $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n\}$, muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \text{ est un espace de Hilbert}$$

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy Shwartz)

H un espace euclidien, on a

$$\forall f, g \in H, |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \text{ telle que } \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Démonstration. [5] ■

Définition 1.1.9 (Orthogonalité)

*On dit que deux vecteurs x et y d'un espace euclidien sont **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$ et on écrit $x \perp y$. Soit A une partie non vide d'un espace euclidien H . A^\perp l'orthogonal de A dans H est*

$$A^\perp = \{x \in H, \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \Omega\}.$$

Remarque 1.1.2 A^\perp est un sous espace fermé de H et $A^\perp = \overline{(A^\perp)}$

1.2 Continuité des opérateurs linéaires

Définition 1.2.1 (Opérateur linéaire)

Soient E et F deux espaces normés et A un opérateur défini sur E dans F et dit linéaire, s'il vérifie les conditions suivants :
pour tout x, y dans E , α et β dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

- i)** $A(x) \in F$.
- ii)** $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

Définition 1.2.2 (Opérateur continu)

Soient E et F deux espaces normés, A un opérateur linéaire défini sur un

sous-ensemble $G \subset E$ dans F est dit **continu** au point x_0 de G si pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$.

C'est à dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = A(x_0).$$

Remarque 1.2.1 L'opérateur linéaire A est dit continu sur G s'il est continu en Chaque point de l'ensemble G

Lemme 1.2.1 Soient E et F deux espace normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu sur G s'il est continu en point x_0 de G .

Démonstration. Soit x_n un suite convergent vers x , cette suite s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0) \\ &= y_n + (x - x_0)\end{aligned}$$

et la suite y_n convergent vers x_0 , et A un opérateur linéaire, alors

$$\begin{aligned}A(x_n) &= A([x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0)) \\ &= A(y_n) + A(x - x_0)\end{aligned}$$

L'opérateur A continu au point x_0 , alors

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [A([x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0))] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A(y_n) + A(x) - A(x_0) \\ &= A(x_0) + A(x) - A(x_0) \\ &= A(x)\end{aligned}$$

■

1.3 Opérateurs bornés

Définition 1.3.1 (*Opérateur borné*)

Soit A Un opérateur linéaire défini sur E dans F est dit **borné**, s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E, \quad (1)$$

Exemple 2 Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|$,
On définit T sur E par :

$$T(f) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy \text{ telle que } k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Théorème 2 Soit A un opérateur linéaire est continu si et seulement s'il est borné.

Proposition 1.3.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est continue sur E.*
2. *A est borné, c'est-à-dire, il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$*

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E .$$

1.3.1 Espace des opérateurs bornés

Proposition 1.3.2 *Le plus petit des constantes C vérifiant la relation (1) et appel la normé*

de A notée par $\|A\|$ et donnée par :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0, \|x\|_E \leq 1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|A(x)\|_F$$

Définition 1.3.2 (*opérateurs linéaires continues*)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés :

*on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des **opérateurs linéaires continues** de E dans F. on notera aussi $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$*

Proposition 1.3.3 *soient E et F deux espaces vectoriels normés :*

- i) $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.
- ii) Si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach .

Démonstration. [5] ■

Proposition 1.3.4 Soient E , F et G trois espaces vectoriels normés :

1. $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ le dual topologique de l'espace E note par $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace de Banach.
2. $\forall g \in \mathcal{L}(E, G), f \in \mathcal{L}(G, F)$ alors $f \circ g \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\|f \circ g\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}(E, G)} \|f\|_{\mathcal{L}(G, F)}.$$

1.3.2 Opérateur positif

Définition 1.3.3 (*Opérateur positif*)

Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ avec A un opérateur auto-adjoint. On dit que A est **positif** si et seulement si :

$$\langle Af, f \rangle \geq 0, \forall f \in H$$

Définition 1.3.4 (*Opérateur strictement positif*)

soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ avec A un opérateur auto-adjoint. On dit que A est **strictement positif** si et seulement si :

$$\langle Af, f \rangle > 0, \forall f \in H$$

Exemple 3 L'opérateur intégral de Fredholm défini de $L^2[a, b]$ dans $L^2[a, b]$ par :

$$\forall f \in L^2[a, b], Af(x) := \int_0^x k(x, y) f(y) dy, \forall x, y \in [0, 1]$$

où k une fonction positive telle que $k(x, y) \in C([a, b]^2)$ est un Opérateur positif, en effet

$$\begin{aligned}\langle Af, f \rangle &= \int_a^b \int_a^b k(x, y) f(y) \overline{f(x)} dy dx. \\ &= \int_a^b \int_a^b k(x, y) |f(y)|^2 dy dx \geq 0, \forall f \in L^2[a, b].\end{aligned}$$

1.3.3 Opérateurs normal

Définition 1.3.5 (*Opérateur normal*)

Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est **opérateur normal** si :

$$A^*A = AA^*.$$

1.3.4 Opérateur unitaire

Définition 1.3.6 (*Opérateur unitaire*)

Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est **opérateur unitaire** si :

$$A^*A = AA^* = I_H.$$

1.4 Opérateur compact

1.4.1 Ensembles compacts

Définition 1.4.1 (*Ensembles compacts*)

Soit G un sous-ensemble de espace normé E .est dit **compactes** si de tout

recouvrement ouvert de G on peut extraire un sous recouvrement finie

C'est à dire : $\forall H = \{u_j, j \in J ; u_j \text{ ouvert}\}$ telles que,

$$G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} u_i, \exists H_k = \{u_{j_k}, j_k = 1, 2, \dots, n\}, \text{ telles que } G \subset \bigcup_{i=1}^n u_{i_k}.$$

Définition 1.4.2 (*Ensembles séquentielle compacts*)

Un ensemble G est dit **séquentiellement compact** si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments dans G contient une sous suite $(u_{n(k)})_n$

Théorème 3 soit E un espace normé. et G un sous-ensemble de E les propriétés suivantes sont équivalentes

1. Le sous-ensemble G est séquentiellement compact.
2. Le sous-ensemble G est compact.

Définition 1.4.3 (*Ensembles relativement compacts*)

Soit G un sous-ensemble de espace normé E . est dit **relativement compact** si la fermeture \overline{G} est compact

Théorème 4 (*Arzela-ascoli*)

Une sous ensemble $G \subset C(\Omega)$ est relativement compact dans $C(\Omega)$ si et seulement si G bornée et équicontinue

1. G bornée : $\exists M > 0$ telles que

$$\|\psi\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |\psi(x)| < M, \forall \psi > 0 \in G$$

2. G équicontinue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \Omega, |x - y| < \varepsilon \Rightarrow \|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty < \delta$$

1.4.2 Opérateur compact

Définition 1.4.4 (Opérateur compact)

On dit qu'un Opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée de E , $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous suite $(Ax_{n(k)})_{k, n \in \mathbb{N}}$: converge de F .

Remarque 1.4.1 L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $\mathcal{K}(E, F)$

on notera aussi $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Proposition 1.4.1 Soient $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$

1. si A et B sont compacts, alors $T = \alpha A + \beta B$ est un opérateur compacte
2. si A ou B est compact alors $T = BA$ est compact.

Démonstration. [6] ■

Proposition 1.4.2 Si E ou F sont de dimension finie, alors $\mathcal{K}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 5 Soient E et F deux espaces de Banach et soit A_n Suite des opérateurs de $\mathcal{K}(E, F)$ convergente vers l'opérateur linéaire A de E dans F

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

Alors A est un opérateur compact.

Démonstration. [6] ■

1.5 Inversibilité d'un opérateur

Définition 1.5.1 (*Opérateur inversible*)

Soit A un opérateur de $\mathcal{L}(E)$ est dit inversible s'il admet un inverse dans $\mathcal{L}(E)$

C'est à dire : il existe $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $SA = AS = I$, S est appelée l'inverse de A et est désignée par A^{-1} , On note $GL(E)$ l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{L}(E)$ inversible.

Remarque 1.5.1 L'inverse d'un opérateur borné n'est pas toujours borné

Exemple 4 Soit $H = \ell^2$ l'espace des suites

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} : \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

L'opérateur défini par

$$T(x_1, x_2, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots \right)$$

T est borné, car

$$\|T(x_1, x_2, \dots)\| = \sqrt{\sum_{k>1} \frac{|x_k|^2}{k^2}} < C \|T(x_1, x_2, \dots)\|, C > 1$$

T est inversible, et inverse donné par

$$T^{-1}(x_1, x_2, \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, \dots)$$

T^{-1} est non borné.

Proposition 1.5.1 Si A et B inversible alors le opérateur $T = AB$ est inversible et l'on a

$$T^{-1} = S^{-1}B^{-1}$$

Définition 1.5.2 Soit A un opérateur de E dans F .

Le noyau $\ker(A)$ et l'image $\text{Im}(A)$ de A sont définis par :

$$\ker(A) = \{x \in E \mid A(x) = 0\}$$

$$\text{Im}(A) = \{y \in F \mid \exists x \in E \text{ tel le que } A(x) = y\}.$$

Théorème 6 Si E de dimension fini. Un opérateur A est inversible si et seulement si :

$$\ker(A) = \{\varphi : A\varphi = 0\} = \{0\}$$

Démonstration. Si A injectif alors

$$Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Supposons maintenant que : $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

si $Ax_1 = Ax_2$, alors $A(x_1 - x_2) = 0$ et ainsi $x_1 - x_2 = 0$.

par conséquence $x_1 = x_2$, alors A injective et E de dimension fini, alors A est inversible ■

Théorème 7 (Opérateur inversible)

Soient E et F deux espaces de Banach et soit A un opérateur bijectif de E sur F .

Alors A^{-1} est continue de F dans E .

1.6 Spectre d'un opérateur borné

1.6.1 Définitions et propriétés

Définition 1.6.1 Soit $A \in \mathcal{L}(E)$

On appelle **ensemble résolvante** de A l'ensemble

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) \text{ est inversible}\}.$$

C'est à dire

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe et continu sur } E\}$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé **valeur résolvante** de A .

1. Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la **résolvante** $R_\lambda(A)$ de A au point λ par

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

La résolvante $R_\lambda(A)$ est simplement notée R_λ .

2. Le **spectre** $\sigma(A)$ de A l'ensemble

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Un élément de $\rho(A)$ est une **valeur spectrale** de A .

Définition 1.6.2 Soit $A \in \mathcal{L}(E)$

1. L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ n'existe pas est appelé le **spectre ponctuel** de A . on note $\sigma_p(A)$.

C'est à dire

$$\sigma_p(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) \text{ n'est pas injectif} \}$$

Les éléments du spectre ponctuel sont appelés les **valeurs propre** de A .

2. L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ existe, est à domaine dense mais n'est pas à borné est appelé le **spectre continu** de A .

on le note $\sigma_c(A)$ C'est à dire

$$\sigma_c(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) \text{ injectif, et } \text{Im}(\lambda I - A) \neq \overline{\text{Im}(\lambda I - A)} = E \right\}$$

3. L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ existe, mais n'est pas à domaine dense est appelé le **spectre résiduel** de A . On le note

$\sigma_r(A)$ C'est à dire

$$\sigma_r(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) \text{ injectif, et } \overline{\text{Im}(\lambda I - A)} \neq E \right\}$$

Remarque 1.6.1 Soit $A \in \mathcal{L}(E)$

1. L'ensemble du **spectre** est aussi appelé **valeur spectrale** et est parfois noté $V_p(A)$.

2. On a toujours $V_p(A) \subset \sigma(A)$.

3. Si E est de dimension finie, $\lambda I - A$ est inversible si et seulement si $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$.

En particulier, on en déduit $\sigma_p(A) = \sigma(A)$. La situation est plus délicate en dimension infinie

Exemple 5 soit $E := C([0, 1], \mathbb{k})$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{k} muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On définit l'**opérateur de Volterra** A sur E par

$$\forall f \in E, Af(x) := \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Alors, on a $\ker(A) = \{0\}$ et $\text{Im}(A) = \{g \in C^1([0, 1], \mathbb{k}) \mid g(0) = 0\}$. En particulier, A est injectif donc $0 \notin \sigma_c(A)$ mais non surjectif donc $0 \in \sigma(A)$.

Proposition 1.6.1 On appelle **rayon spectral** d'un opérateur linéaire borné A le nombre positif $r(A)$ défini par :

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Proposition 1.6.2 Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ Si $|\lambda| > \|A\|$ alors $\lambda \in \rho(A)$.

1. $\rho(A)$ est un ouvert non vide de \mathbb{k} .
2. $\overline{\sigma_p(A)} \subset \sigma(A)$.
3. Si $|\lambda| > \|A\|$ alors $\lambda \in \rho(A)$.

Exemple 6 considérons l'équation intégrale

$$\int_0^\pi \cos(x+y) f(y) dy - \lambda f(x) = \cos(3x)$$

cette équation s'écrit sous la forme d'opérateur par $(A - \lambda)f = \cos(3x)$
où A est l'opérateur intégrale défini sur $L^2([0, \pi])$ par

$$Af(x) = \int_0^\pi \cos(x+y) f(y) dy, \forall f \in L^2([0, \pi])$$

On cherche les valeurs propres de A

On a

$$Af = \lambda f \implies \int_0^\pi \cos(x+y) f(y) dy = \lambda f(x)$$

Alors

$$\cos(x) \int_0^\pi \cos(y) f(y) dy - \sin(x) \int_0^\pi \sin(y) f(y) dy = \lambda f(x)$$

On distingue deux cas

1. Le premier cas est

$$\sin(x) \int_0^\pi \sin(y) f(y) dy = 0$$

Alors

$$\cos(x) \int_0^\pi \cos(y) f(y) dy = \lambda f(x) \implies f(x) = \cos(x)$$

Et

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^\pi \cos(y) f(y) dy \\ &= \int_0^\pi \cos^2(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2y)) dy \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$, est un valeur propre, le vecteur propre associé est la fonction

$$f_1(x) = \cos(x).$$

2. Le deuxième cas

si $\cos(x) \int_0^\pi \cos(y) f(y) dy = 0$ C'est à dire

$$-\sin(x) \int_0^\pi \sin(y) f(y) dy = \lambda f(x)$$

Par la même méthode dans le premier cas on trouve $\lambda_2 = -\frac{\pi}{2}$ est une valeur propre, le vecteur propre associé est $f_2(x) = \sin(x)$.

Proposition 1.6.3 Soit $A \in \mathcal{L}(E)$

1. $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.
2. pour $\lambda \in \rho(A)$, on a $(R_\lambda(A))^* = R_\lambda(A^*)$.
3. $\lambda \in \sigma_r(A)$ alors $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.
4. $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$.
5. $\lambda \in \sigma_c(A)$ si et seulement si $\bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*)$

Démonstration. [4] ■

Théorème 8 soit A un opérateur linéaire auto-adjoint défini dans un espace de Hilbert E .

1. Ses valeurs propres est réelles.
2. Les vecteur propre associés à des valeur propres différentes sont orthogonaux.
3. $\sigma_r(A)$ est vide.
4. $\sigma_c(A)$ est réel.

Démonstration. 1. Si λ est une valeur propre de A^* , il existe un vecteur $x \neq 0$ appartenant à E telle que $Ax = \lambda x$ et par conséquent :

$$\lambda = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|_E^2},$$

et A auto-adjoint ,

$$\begin{aligned}\langle x, Ax \rangle &= \langle Ax, x \rangle \\ &= \overline{\langle x, Ax \rangle}.\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

2. Si x_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 de A et x_2 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_2 on a :

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle &= \langle Ax_1, x_2 \rangle - \langle x_1, Ax_2 \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

si $\lambda_1 = \lambda_2$. ■

1.6.2 Spectre d'un opérateur compact

Corollaire 1.6.1 *Soit E un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = \lambda I - A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. T est injectif.
2. T est surjectif.

Théorème 9 *soit A un opérateur compact sur E , avec $\dim(E) = \infty$.*

Alors on a

1. $0 \in \sigma(A)$.
2. $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A)$
3. *soit $\sigma(A)$ est fini.*
4. *soit $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \geq 0\}$, $\lambda_n \neq 0$ et $\lambda_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.*

Démonstration. [8]

1. supposons que $0 \notin \sigma(A)$. Alors A est bijectif et $I = AA^{-1}$ est compact. Donc I est compact et $\dim(E) < \infty$
2. Soient $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$. Montrons que $\lambda \in \sigma_p(A)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $N(A - \lambda I) = \{0\}$. Alors $Im(\lambda I - A) = E$ et donc $\rho(A)$ — ce qui est absurde.

■

Proposition 1.6.4 *soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur auto-adjoint.*

On pose

$$m = \inf_{x \in E, \|x\|=1} (Ax, x) \text{ et } M = \sup_{x \in E, \|x\|=1} (Ax, x).$$

Alors $\sigma(A) \in [m, M]$, $m \in \sigma(A)$ et $M \in \sigma(A)$.

Démonstration. [3] ■

Chapitre 2

Opérateurs non bornés

2.1 Définitions et Généralités

Définition 2.1.1 (*Domaine d'un opérateur*)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur linéaire définie de sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ dans F . $D(A)$ est appelé le **domaine** de l'opérateur A et définie par :

$$D(A) =: \{x \in E \text{ telle que } Ax \in F\}.$$

Définition 2.1.2 (*Opérateur non borné*)

soient E et F deux espaces vectoriels normés. On dit qu'un opérateur linéaire A définie sur $D(A) \subset E$ dans F est un opérateur **non borné** si :

$$D(A) \neq E.$$

Exemple 7 Soit $(A, D(A))$ un opérateur définie par

$$\begin{aligned} A & : D(A) \subset C([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1]). \\ f & \longrightarrow Af = \frac{df}{dx} = f' \text{ telle que } D(A) = C^1([0, 1]), \end{aligned}$$

On considère :

$$f_n(x) = x^n \forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n(x)\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \max_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1$$

Mais

$$\max_{x \in [0, 1]} |Af_n(x)| = \max_{x \in [0, 1]} |nx^{n-1}| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

donc n'existe pas $C > 0$ telle que $\|Af_n(x)\|_\infty \leq C \|f_n(x)\|_\infty$ alors l'opérateur A n'est pas borné.

Définition 2.1.3 (Image d'un opérateur)

soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur linéaire définie de sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ dans sous-espace $R(A) \subset F$.

$R(A)$ est appelé **l'image** de l'opérateur A et définie par :

$$R(A) = \text{Im}(A) := \{y \in E \text{ tel que } y = Ax \text{ et } x \in D(A)\}.$$

Définition 2.1.4 (Noyau d'un opérateur)

soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur linéaire définie de sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ dans sous-espace $R(A) \subset F$.

$$N(A) = \ker(A) := \{x \in D(A) : Ax = 0\}.$$

Définition 2.1.5 (opérateur densément définie)

soient E un espace vectoriel normé et A un opérateur linéaire définie de sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ dans E . On dit que A est **densément définie** si son domaine est un sous ensemble dense de E ,

C'est à dire :

$$\overline{D(A)} = E.$$

2.2 Opérations algébriques sur les opérateurs non bornés

– **La somme :**

$$(A + B)_{(x)} = Ax + Bx \text{ avec } D(A + B) = D(A) \cap D(B).$$

– **La produit :**

$$(A.B)_{(x)} = A(B(x)) \text{ avec } D(A.B) = \{x \in D(B) \text{ telle que } B(x) \in D(A)\}.$$

– **Les lois usuelles d'associativité.**

$$1. (S + B) + A = S + (B + A) = R \text{ avec } D(R) = D(A) \cap D(B) \cap D(S).$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} (S.B).A = S.(B.A) = R \text{ avec :} \\ D(R) = \{x \in D(A) : A(x) = y \in D(B) : z = B(y) \in D(S)\} \end{array} \right.$$

– **Les lois de distributivité :**

$$(S + B) . A = S . A + B . A ; A . S + AB \subset A . (S + B) .$$

– **Multiplication par scalaire :** si $\alpha \neq 0$ Alors

$$D(\alpha A) = D(A) \text{ telle que } (\alpha A)(x) = \alpha (Ax) \forall x \in D(A)$$

2.3 Opérateurs fermés

2.3.1 Ensembles fermés

Définition 2.3.1 (*Ensemble ouverts*)

Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit **ouverts** si pour tout $x \in S$ il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que :

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in E : \|y - x\|_E < \varepsilon\} \subset S.$$

Définition 2.3.2 (*Ensemble fermés*)

Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit **fermé** si son complémentaire est **ouverts**

C'est à dire :

$$C_S^E := \{x \in E : x \notin S\}.$$

est **ouverts**.

Théorème 10 Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit **fermé** si et seulement si toute suite convergente $(x_n)_n$ d'éléments de S **converge**

vers élément $x \in S$.

C'est à dire :

$$(\forall (x_n)_n \in S \text{ et } x_n \longrightarrow x) \implies x \in S.$$

Définition 2.3.3 (*Sous-ensemble dense*)

Un sous-ensemble S d'un espace normé est dit dense dans E si sa fermeture est égal à E ,

C'est à dire

$$\overline{S} = E.$$

2.3.2 Opérateur fermés

Définition 2.3.4 (*Opérateur fermés*)

Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est dit **fermé** si pour toute suite $(f_n)_n$ de $D(A)$ telle que $f_n \longrightarrow f$ dans E et $Af_n \longrightarrow g$ dans F , on a alors : $f \in D(A)$ et $Af = g$.

C'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \in D(A) \\ f_n \longrightarrow f \\ Af_n \longrightarrow g \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} f \in D(A) \\ Af = g \end{array} \right. .$$

Proposition 2.3.1 Soit $(A, D(A))$ un opérateur fermé. Alors A est borné si et seulement si

$$D(A) = E.$$

Remarque 2.3.1 Si A est fermé. Alors $N(A)$ est fermé

2.3.3 Théorème du graphe fermé

Définition 2.3.5 (*Graphe d'un opérateur*)

soient E et F deux espaces vectoriels et $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur.

Le **graphe** de A est sous ensemble $G(A) \subset E \times F$ définie par :

$$G(A) = \{(f, Af) \text{ telle que } f \in D(A)\}$$

Définition 2.3.6 (*Opérateur fermés*)

On dit qu'un opérateur A est **fermé** si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$

Définition 2.3.7 (*produit scalaire du graphe*)

soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$.

Alors on définit un **produit scalaire** dans le domaine $D(A)$ par :

$$\langle f, g \rangle_A = \langle f, g \rangle_{H_1} + \langle Af, Ag \rangle_{H_2}, \forall f, g \in D(A),$$

Définition 2.3.8 (*Norme du graphe*)

soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$. Alors

on définit un **Norme** dans le domaine $D(A)$ par :

$$\|f\| = \sqrt{\|f\|_{H_1}^2 + \|Ax\|_{H_2}^2}, \forall x \in D(A),$$

est appelée la **norme du graphe** de l'opérateur A . Elle est équivalu à la norme

$$\|f\|_A = \|x\|_{H_1} + \|Ax\|_{H_2}, \forall x \in D(A)$$

dans $D(A)$

Théorème 11 (*théorème du graphe fermé*)

Si A est un opérateur linéaire d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F .

On suppose que le graphe de A , $G(A)$, est fermé dans $E \times F$. Alors

A est continue

Remarque 2.3.2 Soit E un espace de Banach muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|x\|_2 \leq C \|x\|_1, \forall x \in E.$$

Alors il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|x\|_1 \leq C \|x\|_2, \forall x \in E.$$

Démonstration. On considère sur E les deux normes

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Ax\|_F \text{ et } \|x\|_2 = \|x\|_E.$$

Comme $G(A)$ est fermé, E muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach. D'autre part

$$\|x\|_2 \leq C \|x\|_1,$$

par conséquent ces deux norme sont équivalentes : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|x\|_1 \leq C \|x\|_2, \forall x \in E.$$

Donc

$$\|Ax\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E.$$

Alors $A \in B(E, F)$ ■

2.4 Opérateurs fermables

Définition 2.4.1 (*Extension des opérateurs*)

Soient E un espace vectoriel et $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ et $B : D(B) \subset E \longrightarrow E$ deux opérateurs linéaires. Alors on dit que B est une **extension** de A si :

$$D(A) \subset D(B) \text{ et } Af = Bf \quad \forall f \in D(A).$$

Et on le note par $A \subset B$.

Exemple 8 Pour $i = 1, 2$. Soient $A_i : D(A_i) \subset L^2([0, 1]) \longrightarrow L^2([0, 1])$ les opérateurs différentiels $A_i f(x) = f'(x)$ avec leurs domaines :

$$D(A_1) = H^1([0, 1]),$$

$$D(A_2) = \{f \in H^1([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\},$$

Alors on a

$$A_2 \subset A_1$$

Proposition 2.4.1 $A \subset B$ si et seulement si $G(A) \subset G(B)$.

Définition 2.4.2 (Opérateurs fermables)

Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est dit fermable s'il admet une extension fermée.

Lemme 2.4.1 Une sous-espace G de $E \times F$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si

$$((0, y) \in G \implies y = 0).$$

Proposition 2.4.2 Soit A un opérateur fermable. Alors il existe une extension \bar{A} de A telle que $\bar{A} \subset A_1$ pour toute autre extension fermée \bar{A} . De plus, $G(\bar{A}) = \overline{G(A)}$.

Démonstration. Soit A_1 une extension fermée de A . Alors $G(A) \subset G(A_1)$ et $\overline{G(A)} \subset G(A_1)$. On conclut que ne contient pas d'éléments de la forme $[0, f]$ avec $f \neq 0$. On définit un opérateur B par

$$D(B) = \left\{ u \in H : \text{il existe } f \in H \text{ tel que } [u, f] \in \overline{G(A)} \right\}, Bu = f.$$

où f est l'unique vecteur tel que $[u, f] \in \overline{G(A)}$. Il est évident que $G(B) = \overline{G(A)}$ et $G(B) \subset G(A_1)$ pour toute extension fermée A_1 . ■

Remarque 2.4.1 On appelle \bar{A} la fermeture de A . Signalons qu'il existe des opérateurs qui ne sont pas fermables.

Exemple 9 [1] On considère $H = L^2([0,1])$ et $D([0,1]) = \mathcal{C}([0,1]) \subseteq H$. Posons $A : D(A) \longrightarrow H$ et $Ax(t) = x(0)$. A est non fermable. En effet, si

l'on considère $(x_n)_n$ une suite dans $D(A)$ définie par $x_n(t) = (1-t)^n$, on

a

$$\|x_n\| = \left(\int_0^1 (1-t)^n dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \longrightarrow 0$$

Mais $(Ax_n) = (1-t)_{t=0}^n = 1$ qui montre que A est non fermable.

2.4.1 Opérateurs adjoints

Deux opérateurs $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ sont dits adjoints si :

$$\forall x \in D(A), \forall y \in D(B), \langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle.$$

Définition 2.4.3 Soit $(A, D(A))$ un opérateur à domaine dense. On définit un sous-espace $D(A^*)$ par :

$$D(A^*) := \{\varphi \in H, \exists \eta \in H, \forall \psi \in D(A), \langle A\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle\}$$

Si la condition précédente est réalisée, on définit : $A^*\varphi = \eta$.

Exemple 10 Soient $S : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ le shift défini par $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

alors S^* est défini par

$$S^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (\alpha_2, \alpha_3, \dots).$$

Démonstration. soit $\alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ et $\beta_n = (\beta_1, \beta_2, \dots)$, dans ℓ^2 . Alors

$$\begin{aligned} \langle S^*(\alpha_n), \beta_n \rangle &= \langle \alpha_n, S(\beta_n) \rangle \\ &= \langle (\alpha_1, \alpha_2, \dots), (0, \beta_1, \beta_2, \dots) \rangle \\ &= \alpha_2 \overline{\beta_1} + \alpha_3 \overline{\beta_2} + \dots \\ &= \langle (\alpha_2, \alpha_3, \dots), (\beta_1, \beta_2, \dots) \rangle \end{aligned}$$

Ainsi S^* est bien donné par la formule annoncée. ■

Proposition 2.4.3 $(A^*, D(A^*))$ définit un opérateur adjoint de $(A, D(A))$. cet opérateur est appelé simplement adjoint de $(A, D(A))$ et noté A^* .

Si $A \subset B$, alors $B^* \subset A^*$.

Démonstration. [8] ■

Proposition 2.4.4 L'adjoint A^* d'un opérateur à domaine dense A est fermé.

En effet le graphe de A^* est fermé puisque c'est un orthogonal.

2.4.2 Opérateurs symétriques

Définition 2.4.4 (Opérateur symétrique)

Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur densément définie. On dit que A est **symétrique** si $A \subset A^*$ C'est à dire :

$$D(A) \subset D(A^*) \text{ et } Ax = A^*x, \forall x \in D(A).$$

Autrement dit,

$$\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H, \forall x, y \in D(A).$$

Proposition 2.4.5 1. Soit $A : D(A) \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint qui est une bijection sur son image dense dans H . Alors l'opérateur inverse A^{-1} est aussi auto-adjoint.

2. Soit A un opérateur symétrique tel que $D(A) = H$. Alors $A = A^*$.

3. Soit A un opérateur tel que $\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H$ pour tous $x, y \in D(A)$ et $\text{Im}(A + \lambda I) = H$ pour un réel λ . Alors le domaine de A est dense et $A = A^*$.

Démonstration.

1. voir [1].

2. On a $A \subset A^*$ et $D(A) = H$, d'où on conclut que $A^* = A$.

3. Comme $\text{Im}(A + \lambda I) = H$, on a $\ker(A + \lambda I) = \{0\}$, d'où on voit que l'opérateur $A + \lambda I$ est inversible. Son inverse est un opérateur symétrique défini partout, donc il est auto-adjoint. La relation

$$D(A)^\perp = (\text{Im}(A + \lambda I)^{-1})^\perp = \ker(\text{Im}(A + \lambda I)^{-1}) = \{0\}$$

implique $D(A)$ est dense dans H . D'après le point (1), l'opérateur $A + \lambda I$ est aussi auto-adjoint, ce que donne l'auto-adjonction de A .

■

2.4.3 Opérateurs auto-adjoints

Définition 2.4.5 (Opérateur auto-adjoint)

On dit qu'un opérateur A à domaine dense est **auto-adjoint** si $A = A^*$.

C'est à dire :

$$D(A) = D(A^*) \text{ et } Ax = A^*x, \forall x \in D(A).$$

Exemple 11 soit D l'opérateur différentiel défini de $C_0(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$

par :

$$\begin{aligned} Df(x) &= \iota \frac{df(x)}{dx} = \iota f'(x) \\ C_0(\mathbb{R}) &= \left\{ f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \right\} \end{aligned}$$

Alors l'opérateur D est opérateur auto-adjoint .

Proposition 2.4.6 soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Alors

1. Un opérateur symétrique A est toujours fermable puisque $D(A) \subset D(A^*)$ est dense
2. Si A est un opérateur symétrique alors A^* et A^{**} sont deux extensions fermés de A avec

$$A \subset A^{**} \subset A^*$$

3. A est un opérateur symétrique fermé alors

$$A = A^{**} \subset A^*$$

4. Si A est un opérateur auto-adjoint alors

$$A = A^{**} = A^*$$

Démonstration. [1] ■

Proposition 2.4.7 *Soit A symétrique fermé. A est auto-adjoint si et seulement si A^* est symétrique*

Chapitre 3

Théorie spectrale

3.1 L'inverse d'un opérateur non borné

Définition 3.1.1 (*Inverse d'un opérateur non borné*)

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur linéaire bijectif. On définit l'opérateur A^{-1} de H_2 dans H_1 telle que :

$$AA^{-1}f = f, \forall f \in H_2 \text{ et } A^{-1}Ag = g, \forall g \in D(A)$$

L'opérateur A^{-1} est dit *l'inverse* de A .

Proposition 3.1.1 Soient E et F deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire et fermé

Alors l'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé.

Démonstration. Soient E et F deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire et fermé.

On a $G(A) = p(G(A))$ où $P : E \times F \longrightarrow F \times E$ est l'homéomorphisme
 $(x, y) \longrightarrow (y, x)$

Alors $G(A^{-1})$ est fermé, donc A^{-1} est un opérateur fermé ■

3.2 Elément spectral

Définition 3.2.1 Soient E un espace de Banach $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$
 un opérateur non borné,

1. On appelle **ensemble résolvante** de A l'ensemble

$$\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A) \text{ est bijectif sur } D(A) \text{ et } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \}.$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé **valeur résolvante** de A .

2. Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la **résolvante** $R_\lambda(A)$ de A au point λ par

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

La résolvante $R_\lambda(A)$ est simplement notée R_λ .

3. Le **spectre** $\sigma(A)$ de A l'ensemble

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

$$\sigma(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A) \text{ n'est pas bijectif sur } D(A) \text{ ou } (\lambda I - A)^{-1} \notin \mathcal{L}(E) \}.$$

Un élément de $\sigma(A)$ est une **valeur spectrale** de A

Définition 3.2.2 (Elément spectrale) Soient E un espace de Banach
 $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur non borné,

1. L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ n'existe pas est appelé le **spectre ponctuel** de A . on note $\sigma_p(A)$.

C'est à dire :

$$\begin{aligned}\sigma_p(A) &:= \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) \text{ n'est pas injectif sur } D(A) \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - A) \neq \{0\} \}\end{aligned}$$

Les éléments du **spectre ponctuel** sont appelés les **valeurs propre** de A .

2. L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ existe, est à domaine dense mais n'est pas à borné est appelé le **spectre continu** de A . on le note $\sigma_c(A)$

C'est-à-dire :

$$\sigma_c(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A) \text{ injectif sur } D(A), \operatorname{Im}(\lambda I - A) \neq \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - A)} = E \right\}$$

3. L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ existe, mais n'est pas à domaine dense est appelé le **spectre résiduel** de A . on le note $\sigma_r(A)$ C'est à dire

$$\sigma_r(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A) \text{ injectif sur } D(A), \text{ et } \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - A)} \neq E \right\}.$$

Exemple 12 soit $D_1 f = f'(x)$ un opérateur différentiel défini dans $C([0, 1])$ sur $C([0, 1])$ avec son domaine :

$$D(D_1) = C([0, 1]),$$

Soit $\lambda \in \sigma_p(D_1)$ si $\exists \varphi \neq 0$ tel que

$$D_1 \varphi = \lambda \varphi$$

En effet

$$\begin{aligned} D_1 \varphi &= \lambda \varphi \\ \dot{\varphi} &= \lambda \varphi, \end{aligned}$$

donc $\varphi(t) = C_{est} \exp(\lambda t)$,

On remarque que

$$\lambda C_{est} (\exp(\lambda t) + \exp(\lambda t)) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Alors

1. Le **spectre ponctuel** de D_1 est

$$\sigma_p(D_1) = \mathbb{C}$$

2. Le **spectre** de D_1 est

$$\sigma(D_1) = \mathbb{C}$$

En effet comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_p(D_1) \subseteq \sigma(D_1) \subseteq \mathbb{C} \\ \sigma(D_1) \subseteq \mathbb{C} \end{array} \right. \implies \sigma(D_1) = \mathbb{C}.$$

3. L'ensemble **résolvante** de D_1 .

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(D_1) := \mathbb{C} \setminus \sigma(D_1) \\ \sigma(D_1) = \mathbb{C} \end{array} \right. \implies \rho(D_1) = \emptyset$$

4. Le spectre résiduel et spectre continu de D_1

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(D_1) = \sigma_p(D_1) \cup \sigma_r(D_1) \cup \sigma_c(D_1) \\ \sigma_p(D_1) = \mathbb{C} \\ \sigma_p(D_1) \cap \sigma_r(D_1) = \emptyset \text{ et } \sigma_p(D_1) \cap \sigma_c(D_1) = \emptyset \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \sigma_c(D_1) = \emptyset \\ \sigma_r(D_1) = \emptyset \end{array} \right.$$

Lemme 3.2.1 *Le spectre d'un opérateur fermé est une partie fermée de \mathbb{C} .*

Démonstration. Vérifions simplement que l'ensemble résolvant d'un opérateur fermé A est

Ouvert. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\lambda - A = (\lambda_0 - A)(I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0)).$$

Si $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)\|^{-1}$, alors $I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0)$ est inversible d'inverse donné par $\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m (\lambda - \lambda_0)^m R(\lambda_0)^m$, et donc $\lambda - A$ l'est aussi :

$$R(\lambda) = (I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))^{-1} R(\lambda_0)$$

Mais contrairement à ce que l'on sait pour les opérateurs continus, le spectre d'un opérateur fermé peut être vide, ou non-borné, voire égal à \mathbb{C} tout entier. On obtient des contre-exemples en considérant par exemple l'opérateur différentiel le plus simple, $A = \partial_x$, vu comme un opérateur non-borné sur $L^2([a, b])$ avec $-\infty < a < b < +\infty$. Si l'on prend comme domaine $D(A) = H^1([a, b])$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $(\lambda - A)\varphi = f$ n'a certainement pas une solution unique puisque toutes les fonctions $t \mapsto C \exp(\lambda t)$ sont des éléments de $D(A)$ solutions de $(\lambda - A)\varphi = 0$. Dans ce cas $\sigma(A) = \mathbb{C}$. Si l'on restreint le domaine à $D(A) := \{\varphi \in H^1([a, b]) ; \varphi(a) = 0\}$ alors $\sigma(A)$ est vide, car quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $f \in L^2([a, b])$, il existe un unique $\varphi \in D(A)$ tel que $(\lambda - A)\varphi = f$: la formule de Duhamel donne en effet

$$\varphi(t) = - \int_a^t \exp \lambda (t - a) f(s) ds.$$

Le spectre se décompose en plusieurs sous-ensembles, selon la (ou les) raison(s) empêchant $(\lambda - A)$ d'être une bijection de $D(A)$ sur E . Un premier sous-ensemble est celui des valeurs propres. ■

3.3 Spectre essentiel et discret

Définition 3.3.1 (*opérateur de Fredholm*)

Un opérateur non-borné A dans un espace de Banach E est dit de **Fredholm** si

1. Son noyau est de dimension finie,

2. Son image est fermé et de Co dimension finie dans E .

L'indice de A est définie par

$$\text{ind}A := \dim \text{Ker}A - \text{con dim Im}A$$

Soit A un opérateur de Fredholm, fermé et à domaine dense dans un espace de Hilbert H . Alors son adjoint A^* est aussi un opérateur de Fredholm, on a

$$H = \text{Ker}A \oplus \text{Im}A^* = \text{Ker}A^* \oplus \text{Im}A,$$

et

$$\text{ind}A = -\text{ind}A^*,$$

Exemple 13 $T = (I - A)$ Où $A \in \mathcal{K}(E)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Proposition 3.3.1 De plus, A est bijectif si et seulement si A^* est bijectif.

Démonstration. [10] ■

Théorème 12 (Alternative de Fredholm).- Soit $A \in \mathcal{K}(E)$. Alors

1. $N(I - A)$ est de dimension finie,
2. $R(I - A)$ est fermé, et plus précisément

$$R(I - A) = N(I - A^*)^\perp$$

3. $N(I - A) = \{0\} \iff R(I - A) = E$.
4. $\dim R(I - A) = \dim N(I - A^*)$.

Démonstration. [3] ■

Définition 3.3.2 (*Spectre essentiel*)

Le *spectre essentiel* d'un opérateur linéaire fermé est l'ensemble définie par :

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda - A) \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice } 0\}$$

Définition 3.3.3 (*Spectre discret*)

On appelle *spectre discret* l'ensemble des valeurs isolées et de multiplicité finie.

Théorème 13 Si A est un opérateur linéaire fermé et à domaine dense dans E , alors pour tout $K \in \mathcal{K}(E)$,

$$\sigma_{ess}(A + k) = \sigma_{ess}(A).$$

De plus, on a

$$\sigma_{ess}(A) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(x)} \sigma(A + k).$$

Démonstration. [9] ■

Cas d'un opérateur auto-adjoint

Proposition 3.3.2 Soit A auto-adjoint. Alors :

Le spectre de A est réel, et on a la majoration

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\text{Im}(\lambda)}; \text{Im}(\lambda) \neq 0$$

Le spectre résiduel de A est vide.

Proposition 3.3.3 *Soit un opérateur auto-adjoint. Le spectre de A est donné par :*

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ telle que } \exists \varphi_n \in D(A), \|\varphi_n\| = 1, \lim_{n \rightarrow 0} \|(A - \lambda)\varphi_n\| = 0 \right\}$$

Chapitre 4

Théorèmes de perturbation

On se propose dans cette section de voir, pour différents caractères des opérateurs A et B la nature de l'opérateur $A + B$ de domaine $D(A) \cap D(B)$ supposé dès maintenant non nul. Un premier pas dans la théorie des perturbations, consiste à étudier le caractère de l'opérateur $A + B$ lorsqu'on perturbe A par un autre opérateur B assez petit mais non borné appelé relativement borné.

Proposition 4.0.4 *Soient A et B deux opérateurs linéaires non bornés de domaines respectifs $D(A), D(B)$.*

Alors

- 1. Si A est borné et B est fermé, alors $A^* + B^*$ est fermé.*
- 2. Si $D(A), D(B), D(A) \cap D(B)$ sont denses dans H , alors*

$$A^* + B^* \subset (A + B)^*$$

Si de plus A est borné alors

$$A^* + B^* = (A + B)^*$$

Théorème 14 *Soit A un opérateur fermé de domaine dense $D(A)$, et B un opérateur A -borné tel que B^* est A^* -borné dont les bornes relatives sont strictement inférieures à*

Alors

$$A + B \text{ est fermé et } (A + B)^* = A^* + B^*.$$

Théorème 15 *Supposons A, B deux opérateurs non bornés ayant le même domaine $D(A) = D(B)$ vérifiant :*

$$\|(A - B)x\| \leq a(\|Ax\| + \|Bx\|) + b\|x\|$$

1. *A est fermé sur $D(A)$ si et seulement si B l'est aussi.*
2. *A est fermable sur $D(B)$ si et seulement si B est fermable et on a*
$$D(\overline{A}) = D(\overline{B})$$

Démonstration. [1] ■

Théorème 16 *Si A est un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$.si B , de domaine $D(B)$,est un opérateur symétrique A - borné de borne relative égale à 1, alors*

l'opérateur $A + B$ de domaine $D(A)$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(A)$.

Démonstration. [1] ■

4.1 Théorème de Kato-Rellich

Définition 4.1.1 soient T et A deux opérateurs à domaine dense. A est T -borné si les conditions suivantes réalisées

1. $D(T) \subset D(A)$.
2. $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall u \in D(A), \|Au\| \leq a \|Tu\| + b \|u\|$

Remarque 4.1.1 A est T -borné si et seulement si A est continu de $D(T)$, muni de la norme du graphe de T , dans H ou encore, dans le cas où T auto-adjoint, si et seulement si $A(T + i)^{-1}$ est un opérateur borné, il est T -borné pour tout T , avec borné relative nulle.

Proposition 4.1.1 soient T et A deux opérateurs à domaine dense telle que $D(T) \subset D(A)$.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall u \in D(A), \|Au\| \leq a \|Tu\| + b \|u\|$
2. $\exists \grave{a}, \grave{b} \in \mathbb{R}, \forall u \in D(A), \|Au\|^2 \leq \grave{a} \|Tu\|^2 + \grave{b} \|u\|^2$

Proposition 4.1.2 (Théorème de Kato-Rellich)

Soit T un opérateur auto-adjoint, et A un opérateur symétrique T -borné.

De born relative $a < 1$.

Alors $T + A$ est auto-adjoint sur $D(T)$,

Remarque 4.1.2 Soit T un opérateur auto-adjoint, et A un opérateur symétrique T -borné. De born relative $a < 1$.

Alors

$$\sigma(T + A) \subset \mathbb{R}.$$

4.2 Théorème de WEYL

Définition 4.2.1 Soient T et A deux opérateur fermés de l'espace de Hilbert H . A est relativement compact par rapport à T . Ou T -compact si les conditions suivantes sont réalisées :

1. $D(T) \subset D(A)$.
2. A est un opérateur compact de $D(T)$ muni de la norme du graphe de T à valeurs dans H .

Remarque 4.2.1 A est T -compact si et seulement si pour un λ dans l'ensemble résolvant de T , l'opérateur borné $A(T - \lambda)^{-1}$ est compact.

Cette compacité est alors vraie pour tout λ dans l'ensemble résolvant de T . Tout opérateur T -compact est T -borné.

Corollaire 4.2.1 Si T est auto-adjoint et si A symétrique et T -compact, Alors $T + A$ est auto-adjoint sur $D(T)$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Kato-Rellich ■

Proposition 4.2.1 (Théorème de WEYL)

Si T est auto-adjoint et si A est symétrique et T -compact, Alors

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(T + A)$$

Démonstration. [1] ■

Proposition 4.2.2 *Si $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $-\Delta + V$ est auto-adjoint sur H^2 , et son spectre essentiel est $[0, \infty[$.*

4.3 Théorème de PERSSON

Lemme 4.3.1 *Soit \mathcal{X}_Ω la fonction **caractéristique** d'une partie bornée de \mathbb{R}^d .*

La multiplication par \mathcal{X}_Ω est $-\Delta$ -compacte .

Proposition 4.3.1 *Soit $H = -\Delta + V$, où $V \geq 0$ est une fonction localement intégrable.*

*La multiplication par \mathcal{X}_Ω fonction **caractéristique** d'une partie bornée de \mathbb{R}^d est H -compacte.*

Définition 4.3.1 (*Suite de Zhislin*)

*Unr suite de **Zhislin** en $\lambda \in \mathbb{C}$ pour un opératrur fermé T dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ est une suite $\varphi_n \in D(A)$ de vecteurs unitaires, telle que chaque φ_n soit supportée hors de l'aboule de centre 0 et rayon n , avec :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda) \varphi_n = 0$$

Proposition 4.3.2 *Soit T auto-adjoint fortement localement compact. Un complexe λ appartient au spectre essentiel de T si et seulement s'il existe une suite de **Zhislin** en λ pour T .*

Démonstration. La condition suffisante est évidente puisqu'une suite de Zhislin est une suite singulière.

Prouvons la réciproque. Soit λ dans le spectre essentiel de T . Il existe donc une suite φ_n unitaire dans $D(T)$. de limite nulle pour la topologie faible, telle que $(T - \lambda) \varphi_n$ tend vers 0 en norme.

Soit φ la fonction donnée par la définition forte compacité locale.

En écrivant

$$u_n \varphi_m = u_n (i - T)^{-1} (i - T) \varphi_m,$$

On voit que pour n fixé :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_n \varphi_m = 0$$

En effet par compacité locale, l'opérateur $u_n (i - T)^{-1}$ est compact, et la suite

$$(i - T) \varphi_m = (\lambda - T) \varphi_m + (i - \lambda) \varphi_m \text{ converge faiblement vers } 0.$$

Posons $\psi_n = 1 - u_n$. Il résulte de ce qui précède que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\psi_n \varphi_m\| = 1$$

Mais d'autre part on a l'inégalité, puisque $\|u_n\|_\infty = 1$:

$$\|(\lambda - T) \psi_n \varphi_m\| \leq 2 \|(\lambda - T) \varphi_m\| + \|[T, u_n] \varphi_m\|$$

Puisque u_n est de norme 1, On obtient en utilisant la propriété ii dans la définition de la forte compacité locale une majoration du second terme :

Soit M tel que pour tout m : $\|(\lambda - T) \varphi_m\| \leq M$.

On obtient la convergence suivante quand $n \rightarrow \infty$, uniformément par rapport à m :

$$\|[T, u_n] \varphi_m\| \leq \|[T, u_n] (i - T)^{-1}\| (\|(\lambda - T) \varphi_m\| + |i - \lambda|) \rightarrow 0$$

Il existe alors des sous-suites $n(k), m(k)$ telles que

$$\|\psi_{n(k)} \varphi_{m(k)}\| \geq 1 - \frac{1}{k}$$

$$\|(\lambda - T) \psi_{n(k)} \varphi_{m(k)}\| \leq \frac{1}{k}$$

Il est clair que la suite $\psi_{n(k)} \varphi_{m(k)} \|\psi_{n(k)} \varphi_{m(k)}\|^{-1}$ est de Zhislin pour T en λ . ■

Conclusion

Les opérateurs non bornés sont des opérateurs défini seulement sur un sous ensemble de l'ensemble de départ.

Les opérateurs linéaires définis sur espace de dimension infini, et le spectre de cet opérateur déferent de 0 est un opérateur non compact.

Tout opérateur linéaire avec spectre égale \mathbb{C} ou ensemble vide, est un opérateur non borné.

Dans certaines propriétés, l'opérateur borné et le mème d'opérateur non borné mais comme un cas spécial, le spectre d'un opérateur borné est toujours un ensemble fermé et le spectre d'un opérateur non borné peutêtre vide ou non borné (égal à \mathbb{C})

Bibliographie

- [1] ABDELHALIM M., *Sur la Somme, le Produit et Passage à l'adjoint dans la Classe des Opérateurs Fermés sur un Espace de Hilbert*, 27 septembre 2011.
- [2] GTESCHL. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics With Applications to Schrödinger Operators*, American, 2000.
- [3] HAIMBREZIS., *ANALYSE FONCTIONNELLE théorie et applications*, Université de Pierre et Marie Curie et Ecole Polytechnique 1983.
- [4] LOKENATH D-PIOTR *Introduction to Hilbert space with application*, Academic Press 1990
- [5] NADIR M., *Cours d'analyse fonctionnelles*, Université de M'sila 2004.
- [6] NADIR M., *Cours sur les équations intégrales*, Université de M'sila.
- [7] RHENRY. *Spectre et pseudo spectre d'opérateurs non-auto adjoints (Thèse de doctorat)*, Université Paris-Sud, 2013.
- [8] PIERREL-BRUHL., *INTRODUCTION à la théorie spectrale*. **Université de Reims**
- [9] SYLVIEB., *spectre des opérateurs différentiels*, 28 janvier 2015.
- [10] SYLVIEB-GAVAGE., *spectre des opérateurs différentiels*, 1^{er} février 2010.
- [11] TKATO. *Perturbation Theory for linear Operators*, Université de USK, 1980.
- [12] TCOMETX. *Introduction à la Théorie Spectrale*, 2014.