REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDPs et applications

Thème

Problèmes inverses de terme source pour une équation de diffusion-onde fractionnaire

---

Présenté par :
M^{me} HAMRIT Leyla

Soutenu publiquement le : 17/06/2023.

Devant le jury composé de :

Président :	*ARIOUA* Yacine	M.C.A.,	Université de M'sila
Encadreur :	*NOUIRI* Brahim	M.C.A.,	Université de M'sila
Examinateur :	*DJERIOUI* Khayra	M.A.A.,	Université de M'sila

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir aidé à accomplir ce travail, puis je veux exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour tant d'amours et de soutiens moraux.

Dédicaces

Je dédie cette mémoire :

Ma mère

Mon père

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons considéré deux problèmes inverses de terme source pour une équation de diffusion-onde fractionnaire en espace et en temps. Premièrement, la récupération d'un terme source dépendant de l'espace est étudiée, deuxièmement, la détermination d'un terme source dépendant du temps est considérée. Un système bi-orthogonal de fonctions composés de fonctions de type Mittag-Leffler obtenues à partir d'un problème spectral et son problème adjoint. Les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité sont présentés pour le problème inverse de terme source dépendant de l'espace tandis que pour les résultats d'existence et d'unicité du terme source dépendant du temps sont prouvés. Quelques cas particuliers pour ces problèmes inverses de terme source sont discutés.

Mots-Clés : Problème inverse , Dérivée fractionnaire, Système bi-orthogoanl, Fonction de Mittag-Leffler.

In this memoir, we have considered two inverse source problems for a space-time-fractional diffusion-wave equation. Firstly, the recovery of a space-dependent source term is investigated, secondly, the determination of a time-dependent source term is considered. A bi-orthogonal system of functions composed of functions of Mittag-Leffler type obtained from a spectral problem and its adjoint problem. The existence, uniqueness and stability results are presented for the inverse space-dependent source problem while for the time-dependent source problem, existence and uniqueness results are proved. Some special cases for these inverse source problems are discussed.

Keywords : Inverse problem, Fractional derivative, Bi-orthogonal system, Mittag-Leffler function.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Préliminaires et système bi-orthogonal **3**

1.1 La fonction Gamma . . . 3
1.2 Intégrales Fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . 3
1.3 Dérivées Fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . 4
1.4 Dérivées Fractionnaires au sens de Caputo . . . 4
1.5 La fonction de Mittag-Leffler . . . 7
1.6 Transformation de Laplace . . . 8
1.7 Méthode de Fourier : . . . 10
1.8 La convergence Uniforme : . . . 10
1.9 Système bi-orthogonal . . . 10
1.9.1 Problème Spectral : . . . 10
1.9.2 Problème Adjoint . . . 12
1.9.3 Système bi-orthogonale . . . 13

2 Problème inverse de terme source dépendant de l'espace **15**

2.1 Position du problème . . . 15
2.2 Unicité de la solution : . . . 19

3 Problème inverse de terme source dépendant du temps **21**

3.1 Position du problème . . . 21
3.2 Construction de la solution : . . . 22
3.3 Existence de la solution : . . . 24
3.3.1 Convergence uniforme de la solution : . . . 26

Bibliographie **28**

Introduction générale

Les problèmes inverses pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire deviennent un outil important dans la modélisation de nombreux problèmes réels. Les problèmes inverses de terme source dépendant de l'espace pour l'équation de diffusion fractionnaire dans le temps sont considérés dans [3, 4, 2, 6]. Les problèmes inverses de détermination d'un terme source dépendant du temps sont considérés dans [5, 1, 7].

Dans ce mémoire, on considère l'équation de diffusion-onde fractionnaire suivante :

$$ {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t) = {}^{C}\mathcal{D}_x^{\beta} u(x,t) + F(x,t), \ (x,t) \in D_T, \tag{1} $$

avec les conditions initiales

$$ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ 0 \leq x \leq 1, \tag{2} $$

et les conditions aux limites mixtes homogènes

$$ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \ 0 \leq t \leq T. \tag{3} $$

Où $D_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, \ 0 < t \leq T\}$ avec $T > 0$, $F(x,t)$ est le terme source, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions données et ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}$ et ${}^{C}\mathcal{D}_x^{\beta}$ sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo par rapport à t et x d'ordre $1 < \alpha < 2$ et $1 < \beta < 2$, respectivement. Notre objective dans ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de deux problèmes inverses de terme source suivants :

☞ Pour le terme source $F(x,t) = r(x) f(x,t)$, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution $(u(x,t), r(x))$ du problème inverse (1)-(3) avec la condition supplémentaire suivante :

$$u(x,T) = h(x), \ 0 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

où h est une fonction donnée.

☞ Pour le terme source $F(x,t) = r(t) f(x,t)$, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution $(u(x,t), r(t))$ du problème inverse (1)-(3) avec la condition supplémentaire suivante :

$$u(0,t) = g(t), \ 0 \leq t \leq T, \tag{5}$$

où g est une fonction donnée.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous présentons quelques définitions de base du calcul fractionnaire, des propriétés et des lemmes liés à la fonction de Mittag-Leffer, la transformation de Laplace et le système bi-orthogonal.

Dans le deuxième chapitre, nous traitons le problème inverse de terme source dépendant de l'espace (1)-(4), avec $F(x,t) = r(x) f(x,t)$. Nous allons construire la solution en série en utilisant la méthode de Fourier. De plus, il sera montré que $u(x,t)$, ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t)$ et ${}^{C}\mathcal{D}_x^{\beta} u(x,t)$ représentent des fonctions continues en utilisant le critère de Weierstrass. Un résultat est présenté.

Dans le dernier chapitre, nous discutons le problème inverse de terme source dépendant du temps (1)-(3) et (5) avec $F(x,t) = r(t) f(x,t)$. Sous certaines conditions sur les données, nous avons prouvé que ce problème inverse est localement bien posé au sens de Hadamard. Notre méthode de la preuve basée sur la méthode de Fourier pour laquelle les fonctions propres qui sont des fonctions de Mittag-Leffer d'un problème spectral d'ordre fractionnaire et son problème adjoint.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET SYSTÈME BI-ORTHOGONAL

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions de base du calcul fractionnaire, des propriétés et des lemmes liés à la fonction de Mittag-Leffer, la transformation de Laplace et le système bi-orthogonal.

1.1 La fonction Gamma

Définition 1.1. :(voir([**?**]))la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(x)$ est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad o \qquad x \in \mathbb{C} \quad et \quad Re(x) > 0$$

Propriétés 1.1. :Nous avons les propriétés suivants :

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. $\Gamma(1) = 1 \quad$ **et** $\quad \Gamma(0) = \infty \quad$ **et** $\quad \Gamma(-n) = \pm\infty \qquad (n \in \mathbb{N})$
3. $\Gamma(n+1) = (1)_n \qquad (n \in \mathbb{N})$
4. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} \qquad ,(2n-1)!! = 1.3...(2n-1) \qquad (n \in \mathbb{N})$
   $(Z)_0 = 1 \quad , \quad (Z)_n = Z(Z+1)....(Z+n-1) \qquad (n \in \mathbb{N})$

1.2 Intégrales Fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2. :(voir([**?**]))soit $f \in L^1_{loc}$une fonction a valeur réelles localement intégrable.les intégrales de Riemann-Liouville gauche et droite d'ordre α sont définies par :

$$I^\alpha_{0^+,z}f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^z (z-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \quad \alpha > 0$$
$$I^\alpha_{1^-,z}f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_z^1 (\tau-z)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \quad \alpha > 0$$

respectivement.
Pour $n \in \mathbb{N}$,on note $AC^n[0,1]$,l'espace des fonction a valeurs réelles $f(t)$ qui ont des dérivées continues jusqu'a l'ordre $n-1$ dans $[0,1]$ telle que $f^{(n-1)}(t)$ appartient a l'espace de fonction absolument continues $AC[0,1]$

$$AC^n[0,1] = f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \in AC[0,1]$$

1.3 Dérivées Fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3. :(voir([**?**]))soit$f \in L^1_{loc}$et $n = [\alpha]$,les dérivées Fractionnaires au sens de Riemann-Liouville gauche et droite d'ordre α sont définies par :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}_{0^+,z} f(z) &= \frac{d^n}{dz^n} \ I^{n-\alpha}_{0^+,z} f(z) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \ \frac{d^n}{dz^n} \ \int_0^z \frac{f(\tau)}{(z-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \qquad , \quad z>0 \\
{}^{RL}D^{\alpha}_{1^-,z} f(z) &= (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \ I^{n-\alpha}_{1^-,z} f(z) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \ \frac{d^n}{dz^n} \ \int_z^1 \frac{f(\tau)}{(\tau-z)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad , \quad z<0
\end{aligned}$$

respectivement.

1.4 Dérivées Fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.4. :(voir([**?**]))soit $f \in AC^n[0,1]$ et $n = [\alpha]$,les dérivées Fractionnaires au sens de Caputo gauche et droite d'ordre α sont définies par :

$$\begin{aligned}
{}^{c}D^{\alpha}_{0^+,z} f(z) &= I^{n-\alpha}_{0^+,z} \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^z \frac{f^{(n)}(\tau)}{(z-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \qquad , \quad z>0 \\
{}^{c}D^{\alpha}_{1^-,z} f(z) &= (-1)^n I^{n-\alpha}_{0^+,z} \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_z^1 \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau-z)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad , \quad z<1
\end{aligned}$$

respectivement.

Lemme 1.1. *:(voir([**?**])) :supposons que* $0 < \epsilon < 1$ *,*$f \in AC[a,b]$ *et* $g \in L^p[a,b]$ *,*$1 < p < \infty$.
Alors la formule d'intégration par parties suivante est vérifiée :

$$\int_a^b f(z)\ \ {}^{RL}D^{\alpha}_{a^+,z}g(z)dz = \int_a^b g(z)\ \ {}^{c}D^{\alpha}_{b^-,z}f(z)dz + f(z)\ \ I^{1-\alpha}_{a^+,z}g(z)|^{z=b}_{z=a}$$
$$\int_a^b f(z)\ \ {}^{RL}D^{\alpha}_{b^-,z}g(z)dz = \int_a^b g(z)\ \ {}^{c}D^{\alpha}_{a^+,z}f(z)dz - f(z)\ \ I^{1-\alpha}_{b^-,z}g(z)|^{z=b}_{z=a}$$

Démonstration. :on utilise la définition de la dérivées Fractionnaires au sens de Riemann-Liouville :
on a :

$$\int_a^b f(z)^{RL}D^{\alpha}_{a^+,z}g(z)dz = \int_a^b f(z)\frac{d}{dz}I^{1-\alpha}_{a^+,z}g(z)dz.$$

d'aprés l'intégration par partie :

$$= f(z)I^{1-\alpha}_{a^+,z}g(z)|^{z=b}_{z=a} - \int_a^b f'(z)I^{1-n}_{a^+,z}g(z)dz.$$
$$= f(z)I^{1-\alpha}_{a^+,z}g(z)|^{z=b}_{z=a} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b\int_a^z f'(z)\frac{g(\tau)}{(z-\tau)^{\alpha}}d\tau dx.$$

d'après le théorème de Fubini :

$$= f(z)I^{1-\alpha}_{a^+,z}g(z)|^{z=b}_{z=a} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b\int_a^z f'(z)\frac{g(\tau)}{(z-\tau)^{\alpha}}dxd\tau.$$
$$= f(z)I^{1-\alpha}_{a^+,z}g(z)|^{z=b}_{z=a} + \int_a^b f'(z)^{c}D^{\alpha}_{b^-,z}g(z)dz$$
$$= \int_a^b f(z)\frac{d}{dz}I^{1-\alpha}_{a^+,z}g(z)dz.$$

□

Lemme 1.2. *:(voir([**?**])) :pour $h_1, h_2 \in C^1[a,b]$,la fonction suivant est vérifiée :*

$$\frac{d}{dz}\big(f(z)*g(z)\big) = f(z)g(a) + f(z)*\frac{d}{dz}g(z)f(a) + g(z)*\frac{d}{dz}f(z).$$

$'*'$représente la convolution intégrale donnée par :

$$f(z)*g(z) = \int_a^z f(\tau)g(z-\tau)d\tau. \qquad a \le \tau \le z$$

Démonstration. :en prenant la dérivée de l'intégrale de convolution,en utilisant la règle de

Leibniz pour les intégraes :
nous avons :

$$\frac{d}{dz}\left[\int_{\alpha}^{\beta} G(z,\beta)d\tau\right] = G(z,\beta)\frac{d^{\beta}}{dz} - G(z,\alpha)\frac{d^{\alpha}}{dz} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial G(z,\tau)}{\partial G}d\tau.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\int_{a}^{z} f(z)g(z-\tau)d\tau\right) &= f(z)g(z-z) + \int_{a}^{z} \frac{d}{dz}f(\tau)g(z-\tau)d\tau.\\ &= f(z)g(0) + \int_{a}^{z} f(z)\frac{d}{dz}g(z-\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{d}{dz}\left(\int_{a}^{z} f(z)g(z-\tau)d\tau\right) = f(z)g(0) + f(z) * \frac{d}{dz}g(z).$$

□

Quelques propriétés des intégrales fractionnaires et des dérivées fractionnaires :

Lemme 1.3. *:(voir([?])) :soit* h_i *une suite de fonction sur* $(a, b]$ *,pour chaque* $i \in \mathbb{N}$ *,telle que :*

1. *pour* $\beta > a$ *,*${}^cD^{\beta}_{a^+,x}h_i(x)$ *existe* $\forall i \in \mathbb{N}$ $a < x \leq b$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} h_i(x)$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} {}^cD^{\beta}_{a^+,x}h_i(x)$ *sont uniformément convergents sur l'intervalle* $[a + \beta, b]$, $\quad \forall \beta > 0.$
   Alors, $\sum_{i=1}^{\infty} h_i(x)$ *est* β*différentiable,où* $\sum_{i=1}^{\infty} h_i(x)$ *est la série des fonctions et il doit satisfaire :*

$$ {}^cD^{\beta}_{a^+,x} \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} {}^cD^{\beta}_{a^+,x}h_i(x)$$

Lemme 1.4. *:(voir([?])) :si* $\beta \in \mathbb{R}$*,et*λ *tel que*: $\pi\alpha/2 < \lambda < \pi, x \in \mathbb{C}$*tel que* $\left|\lambda x^{\beta}\right| \geq 0$ *,*$\lambda \leq |arg(x)| \leq \pi$ *,et K est une constance réelles.Alors,*

$$\left|E_{\beta}(\lambda x^{\beta})\right| \leq \frac{K}{1 + |\lambda x^{\beta}|}$$

1.5 La fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.5. :(voir([?])) :la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètre est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad \mathbb{R}e(\alpha) > 0 \ , \quad \beta \in \mathbb{C}$$

pour $\beta = 1$, $E_{\alpha,\beta}$ se réduit a la fonction de Mittag-Leffler a paramètre unique,
càd :

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Propriétés 1.2. :(voir([?])) :pour tout $z \in \mathbb{C}$,la fonction de Mittag-Leffler est satisfait les relation suivants :

1. $E_1(\pm z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k z^k}{\Gamma(k+1)} = e^{\pm z}$

2. $E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cos z$

3. $E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cosh z$

4. $E_{1/2}(\pm z^{1/2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k z^{1/2}}{\Gamma(1/2k+1)} = e^z \left[1 + erf(\pm z^{1/2})\right] = e^z \ erfc \ (\pm z^{1/2})$

avec $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$

Quelques résultats liés aux fonctions de Mittag-Leffler :

Lemme 1.5. *:(voir([?])) :pour* $\lambda, \mathbb{R}e(\beta), x > 0$ *,les fonctions de Mittag-Leffler ont les propriétés suivants :*
pour $n = 1$ *nous avons les formules suivantes :*
${}^{c}D^{\alpha}_{0^+,x}\Big(E_{\beta,1}(x,\lambda)\Big) = \pm\lambda \ E_{\beta,1-\alpha}(x,\pm\lambda)$
${}^{RL}D^{\alpha}_{0^+,x}\Big(E_{\beta,1}(x,\lambda)\Big) = \ E_{\beta,1-\alpha}(x,\pm\lambda)$

1.6 Transformation de Laplace

Définition 1.6. :(voir([?])) :la transformation de Laplace classique par la formule intégrale suivante :

$$\Big(\mathcal{L}f\Big)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \ f(z) \ dz$$

a condition que la fonction f (l'original de laplace) soit absolument intégrable sur le demi-axe $(0, +\infty)$ .Dans ce cas,l'image de la transformation de Laplace (également appelée image de Laplace) ,c'est-à-dire la fonction :

$$F(s) = \Big(\mathcal{L}f\Big)(s)$$

Propriétés 1.3. :(voir([?])) :nous avons les propriétés suivantes :

– la transformation de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$\Big(\mathcal{L}I^{\alpha}_{0^+,z} \ f\Big)(s) = s^{-\alpha} \ \Big(\mathcal{L}f\Big)(s) \qquad ,\mathbb{R}e \ \alpha > 0.$$

– la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$\Big(\mathcal{L}^{RL}D^{\alpha}_{0^+,z} \ f\Big)(s) = s^{-\alpha} \ \Big(\mathcal{L}f\Big)(s) - \sum_{k=1}^{n} \ s^{k-1} \ \Big({}^{RL}D^{\alpha-k}_{0^+,z}f\Big)(z)|_{z=0} \qquad , n-1 < \mathbb{R}e \leq n.$$

– la transformation de laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$\Big(\mathcal{L}^c D^{\alpha}_{0^+,z}\ f\Big)(s) = s^{-\alpha}\ \Big(\mathcal{L}f\Big)(s) - \sum_{k=0}^{n-1}\ s^{\alpha-k-1}\ f^{(k)}(0^+) \qquad\qquad , n-1 < \mathbb{R}e \leq n.$$

Proposition 1.1. *:*
soit $f(x) = x^{\beta-1}\ E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{\alpha})$ *fonction de Mittag-Leffler*
on va calculer la transformation de Laplace de cette fonction :

$$\begin{aligned}
\Big(\mathcal{L}f(x)\Big)(s) = \mathcal{L}\big(x^{\beta-1}\ \ E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{\alpha})\big) &= \mathcal{L}\big(x^{\beta-1}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\big) \\
&= \int_0^{\infty}\ e^{-sx}\ \ x^{\beta-1}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{\alpha} k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ \int_0^{\infty}\ e^{-sx}\ \ x^{\beta-1+\alpha k}\ dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ \mathcal{L}(x^{\beta}+\alpha k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ \frac{\Gamma(\beta+\alpha k)}{s^(\beta+\alpha k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s^(\beta+\alpha k)} = \frac{1}{s^{\beta}}\ \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\lambda}{s^{\alpha}})^k
\end{aligned}$$

on a : $\sum_{k=0}^{\infty}\ x^k = \frac{1}{1-x}$
Alors :

$$\mathcal{L}\Big(x^{\beta-1}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\Big) = \frac{1}{s^{\beta}}\ \frac{1}{1-\frac{\lambda}{s^{\alpha}}} = \frac{1}{s^{\beta}}\ \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha}-1}$$

Donc :

$$\mathcal{L}\big(x^{\beta-1}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\big) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}$$

si $\alpha = \beta = \lambda = 1 \qquad \mathcal{L}\Big(E_{1,1}(x)\Big) = \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}(e^x)$

1.7 Méthode de Fourier :

Définition 1.7. :(voir([?])) :si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$,sa transformée de Fourier est la fonction $\mathbf{F}(f) = f^{\wedge}$ donnée par la formule suivant :

$$\mathbf{F}\{f(x), \xi\} \to f^{\wedge}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

par la transformation de Fourier inverse,on trouve :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i\xi x} dx$$

1.8 La convergence Uniforme :

Définition 1.8. :on dit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si :

$$\forall \xi > 0, \ \exists N_\xi \in \mathbb{N} \ (n \geq N_\xi) \ \Rightarrow \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad d\Big(f_n(x), f(x)\Big) \leq \xi$$

on a le résultat fondamental suivant :
si $(f_n)_n$ est une suite des fonctions continues convergent uniformément sur X vers une fonction f ,alors f est continué sur X.

1.9 Système bi-orthogonal

1.9.1 Problème Spectral :

on a l'équation de diffusion-onde fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_t^\alpha U(x,t) = {}^cD_x^\beta U(x,t) + F(x,t) \\ U(0,t) = U_x(L,t) \end{cases}$$

on pose : $F(x,t) = 0$ et $U(x,t) = X(x)Y(t)$
Alors : $X(x)^c D_t^\alpha Y(t) = Y(t)^c D_x^\beta X(x)$

$$\frac{{}^cD_t^\alpha Y(t)}{Y(t)} = \frac{{}^cD_x^\beta X(x)}{X(x)} = \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Donc : ${}^cD_x^\beta X(x) = \lambda X(x)$
on a : $U_x(0,t) = X'(0)Y(t) = 0,$ Alors $X'(0) = 0 \quad \forall\, t \in [0,1]$
et : $U(1,t) = X(1)Y(t) = 0,$ Alors $X(1) = 0 \quad \forall\, t \in [0,1]$
Donc le problème spectral est :

$$\begin{cases} {}^cD^{\beta}_{0^+,x}X(x) = \lambda X(x) \\ X'(0) = X(1) = 0 \qquad\qquad 1 < \beta < 2 \end{cases} \tag{1.1}$$

d'après la transformation de Laplace :

$$\mathcal{L}\Big({}^cD^{\beta}_{0^+,x}X(x)\Big) = \lambda\ \ \mathcal{L}\Big(X(x)\Big)$$

$$s^{\beta}\mathcal{L}\Big(X(x)\Big) - s^{\beta-1}X(0) - s^{\beta-2}X'(0) = \lambda\ \ \mathcal{L}\Big(X(x)\Big)$$

$$\mathcal{L}\Big(X(x)\Big) = \frac{X(0)s^{\beta-1}}{s^{\beta}-\lambda}$$

Alors les fonctions propres du problème spectral sont :

$$X(x) = X(0)\ \ E_{\beta}(\lambda x^{\beta})$$

si $x = 1$,d'où $X(1) = E_{\beta}(\lambda) = 0$
d'aprés le théorème $(4.17)(voir([\textbf{?}]))$ les valeurs propres λ ,qui sont les racines de la fonction Mittag-Leffler $E_{\beta,2}(\lambda)$,elles situés de la dehors de l'ongle $|arg\lambda| \leq \frac{\pi\lambda}{2}$ avec $1 < \beta < 2$
Complet l'ensemble des fonctions propres X(x) est complet :
par définition : $\forall f \in L^2(0,1)$: $\int_0^1 f(x)\ \ X_n(x)\ \ dx = 0$, $\forall n \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$
on a :

$$X_n(x) = E_{\beta}(\lambda_n x^{\beta})$$

$$\begin{aligned}
\big\langle f, E_{\beta}(\lambda_n x^{\beta})\big\rangle &= \int_0^1 f(x)E_{\beta}(\lambda_n x^{\beta})dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^k x^{k\beta} f(x)}{\Gamma(\beta k+1)}dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^k x^{k\beta} f(x)}{\Gamma(\beta k+1)} \int_0^1 x^{\beta k} f(x)dx \\
&= \int_0^1 f(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^k x^{k\beta} f(x)}{\Gamma(\beta k+1)} \int_0^1 x^{\beta k} f(x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \int_0^1 f(x)dx = 0 \\ \int_0^1 x^{\beta k} f(x)dx = 0 \end{cases}$$

1.9.2 Problème Adjoint

le problème adjoint du problème spectral est :

$$\begin{aligned} \left\langle {}^cD^{\beta}_{0^+,x}X(x), Y(x) \right\rangle &= \int_0^1 Y(x) {}^cD^{\beta}_{0^+,x}X(x)\ dx \\ &= \int_0^1 Y(x)\ \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\ \int_0^x\ \frac{X''(\xi)}{(x-\xi)^{\beta}-1}\ d\xi\ dx \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini (Formule de Dirichlet) :

$$\begin{aligned} \left\langle {}^cD^{\beta}_{0^+,x}X(x), Y(x) \right\rangle &= \int_0^1 X''(\xi)\ \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\ \int_{\xi}^1\ \frac{Y(x)}{(x-\xi)^{\beta}-1}\ dx\ d\xi \\ &= \int_0^1 X''(\xi)\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(\xi)\ d\xi \end{aligned}$$

Avec l'intégration par parties deux fois,on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle {}^cD^{\beta}_{0^+,x}X(x), Y(x) \right\rangle &= X'(\xi)\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(\xi)|_1^0 - \int_0^1 X'(\xi)\ \frac{d}{d\xi}\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(\xi)\ d\xi \\ &= X'(\xi)\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(\xi) - X(\xi)\ \frac{d}{d\xi}\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(\xi)|_1^0 + \int_0^1 X(\xi)\ \frac{d^2}{d\xi^2}\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(\xi)\ d\xi \end{aligned}$$

on pose : ${}^{RL}D^{\beta-1}_{1,\xi} = -\frac{d}{d\xi}\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(\xi)$
et ${}^{RL}D^{\beta-1}_{1,\xi} = \frac{d^2}{d\xi^2}\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(\xi)$

$$\begin{aligned} \left\langle {}^cD^{\beta}_{0^+,x}X(x), Y(x) \right\rangle &= X'(\xi)\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(\xi) + X(\xi)\ {}^{RL}D^{\beta-1}_{1,\xi}\ Y(\xi)|_1^0 + \int_0^1 X(\xi)\ {}^{RL}D^{\beta-1}_{1,\xi}\ d\xi \\ &= X'(1)\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(1) + X(1)\ {}^{RL}D^{\beta-1}_{1,\xi}\ Y(\xi)|^{\xi=1} - X'(0)\ I^{2-\beta}_{1,\xi}\ Y(0) - \\ & X(0)\ {}^{RL}D^{\beta-1}_{1,\xi}\ Y(\xi)|^{\xi=0} + \left\langle X(x), {}^{RL}D^{\beta}_{1,\xi}\ Y(x) \right\rangle \end{aligned}$$

Donc le problème Adjoint est :

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\beta}_{1,\xi}Y(x) = \lambda Y(x) \\ {}^{RL}D^{\beta-1}_{1,\xi}Y(0)|_{x=0} \qquad 1 < \beta < 2 \end{cases} \tag{1.2}$$

d'après la transformation de Laplace :

$$\mathcal{L}\Big({}^{RL}D^{\beta}_{1,\xi}Y(x)\Big) = \lambda\mathcal{L}\Big(Y(x)\Big)$$

$$s^{\beta}\mathcal{L}\Big(Y(x)\Big)(s) - -s\Big({}^{RL}D^{\beta-2}_{1,\xi}Y\Big)(x)|_{x=0} = \lambda\mathcal{L}\Big(Y(x)\Big)$$

$$\mathcal{L}\Big(Y_n(x)\Big) = \frac{cs}{s^{\beta}-\lambda}$$

Alors les fonctions propres du problème adjoint sont :

$$Y(x) = x^{\beta-2}E_{\beta,\beta-1}\left(\lambda x^{\beta}\right)$$

1.9.3 Système bi-orthogonale

les deux système $(1,1)$ $(1,2)$ forment un système bi-orthogonal :

$$\langle X_n, Y_n\rangle = \int_0^1 X_n \;\; Y_n \;\; dx = \begin{cases} cte & si \;\; n = m \\ 0 & si \;\; n \neq m \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\langle X_n, Y_n\rangle &= \int_0^1 E_{\beta}(\lambda_n x^{\beta}) \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k x^{\beta k}}{\Gamma(\beta k+1)}\end{aligned}$$

Lemme 1.6. *:(voir([?])) :pour* $\beta > 0, \lambda \in \mathbb{R}$ *les fonctions propres et les valeurs propres pour EDF :*

$$^{c}D^{\beta}_{0^+,x}\varphi(x) + [\lambda + q(x)]\varphi(x) = 0$$

satisfaire les propriétés suivantes :

- *toutes les valeurs propres sont des nombres premières.*
- *l'ensemble des fonctions propres est complet dans* $L^2[0,1]$*.*

Lemme 1.7. *:(voir([?])) :pour tout* $h(x) \in \mathbb{C}^{\not\models}(0,1)$ *tel que* $h'(0) = 0 = h(1), alors$:

$$|\lambda_n| \leq \frac{K}{|\lambda_n|\,(1-\alpha)(2-\alpha)}\Big(h'(0) + \int_0^1 h''(x)(1-x)^{2-\alpha}\ dx\Big)$$

quand K *est une constante et* $h_n = \langle h(x), Y_n \rangle$

Lemme 1.8. *:(voir([?])) :pour* $g \in \mathbb{C}[0,T]$*et* $\lambda \in \mathbb{R}$*,la relation suivante est vérifiée :*

$$\left|g(x) * x^{\beta-1}E_\beta(\lambda x^\beta)\right| \leq \frac{c_1}{\lambda}\,\|g\|_{\mathbb{C}[0,T]} \qquad , \lambda \neq 0.$$

où c_1*est une constance.*

Lemme 1.9. *:(voir([?])) :les valeurs propres* λ_n*,qui sont les zéros de la fonction* $E_\beta(\lambda x^\beta)$*,vérifient les relations suivantes :*

- $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$*,pour* $k \geq 1$.
- *pour n assez grand et* $arg(\lambda_n) > \frac{\alpha\pi}{2}$*,on a :*
  $\left|e^{\lambda_n t}\right| < 1$ *et* $|\lambda_n| \to O(n^\alpha) \quad , 1 < \alpha < 2.$

CHAPITRE 2

PROBLÈME INVERSE DE TERME SOURCE DÉPENDANT DE L'ESPACE

Dans ce chapitre, nous traitons le problème inverse de terme source dépendant de l'espace (1)-(4), avec $F(x,t) = r(x) f(x,t)$. Nous allons construire la solution en série en utilisant la méthode de Fourier. De plus, il sera montré que $u(x,t)$, ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t)$ et ${}^{C}\mathcal{D}_x^{\beta} u(x,t)$ représentent des fonctions continues en utilisant le critère de Weierstrass. Un résultat est présenté.

2.1 Position du problème

Soients,$\alpha, \beta \in]1,2[$et$L, T > 0$.On considère l'équation de diffusion-onde fractionnaire suivante :

$$ {}^{c}D_t^{\alpha} u(x,t) = {}^{c}D_x^{\beta} u(x,t) + F(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{D}_T. \tag{2.1} $$

avec les conditions initiales :

$$ u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), \;\; 0 \leq x \leq 1. \tag{2.2} $$

et les conditions aux limites mixtes homogènes :

$$ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; 0 \leq t \leq T. \tag{2.3} $$

Où $F(x,t)$ est le terme source,$\varphi(x)$et$\psi(x)$sont des fonctions données et${}^{c}D_t^{\alpha}$et${}^{c}D_x^{\beta}$sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo par rapport a t et x définies par :

$$ {}^{c}D_t^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,s)/\partial s^2}{(t-s)^{\alpha-1}}\, ds $$
$$ {}^{c}D_x^{\beta} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^x \frac{\partial^2 u(\xi,t)/\partial \xi^2}{(x-\xi)^{\beta-1}}\, d\xi $$

Où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma d'Euler.

▷ Pour le terme source $F(x,t) = r(x) f(x,t)$,on va étudier l'existence et l'unicité de la solution

$\Big(u(x,t), r(x)\Big)$ du problème inverse$(2.1) - (2.3)$avec la condition supplémentaire suivante :

$$u(1,t) = h(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{2.4}$$

Où h est une fonction donnée.

Théorème 2.1. *:(voir([**?**])) :supposons que :*

1. $\varphi \in \mathbb{C}^2(0,1)$ *et* $\varphi'(0) = 0 = \varphi(1)$

2. $h \in \mathbb{C}^2(0,1)$ *et* $h'(0) = 0 = h(1)$

Démonstration. :la démonstration consiste en deux étapes,dans la première étape,nous construit la solution du $(PI-1)$,tandis que dans la deuxième étape,nous avons établi le résultat de régularité. □

étape01 **:Construction de la solution :**
on considère le problème suivant :

$$^{c}D_t^{\alpha}u(x,t) = {}^{c}D_x^{\beta}u(x,t) + r(x)f(x,t) \tag{2.5}$$

en utilisant la méthode de Fourier, et s'écrit comme suite :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \ Z_n(t) \ \ X_n(x) \tag{2.6}$$

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \ f_n(t) \ \ X_n(x) \tag{2.7}$$

Où $Z_n(t)$et$f_n(t)$sont les inconnues.
en remplace(2.6)et(2.7)dans(2.5),on trouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ X_n(x) \ \ {}^{c}D_t^{\alpha} \ \ Z_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \ Z_n(t) \ \ {}^{c}D_x^{\beta} \ \ X_n(x) + r(x)\sum_{n\geq 0}^{\infty} \ X_n(x)f_n(t)$$

Alors :

$$X_n(x) \ \ {}^{c}D_t^{\alpha} \ \ Z_n(t) = Z_n(t) \ \ {}^{c}D_x^{\beta} \ \ X_n(x) + r(x)X_n(x)f_n(t)$$

d'où les inconnues $Z_n(t)$et$X_n(x)$ sont liées par les EDF$_s$:

$$^{c}D_t^{\alpha} \ \ Z_n(t) = \lambda_n Z_n(t) + r(x)f_n(t)$$

en utilisant la transformation de Laplace et la condition initiale(2.2),on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big({}^{c}D_t^{\alpha} Z_n(t)\Big) &= \lambda_n \mathcal{L}\Big(Z_n(t)\Big) + r(x)\mathcal{L}\Big(f_n(t)\Big) \\ s^{\alpha}(\mathcal{L}Z)(s) - s^{\alpha-1}Z(0) - s^{\alpha-2}Z'(0) &= \lambda_n \mathcal{L}(Z) + r(x)\mathcal{L}\Big(f_n(t)\Big) \\ \mathcal{L}\Big(Z_n(t)\Big) &= \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-\lambda_n}Z(0) + r(x)\mathcal{L}\Big(f_n(t)\Big) \end{aligned}$$

Donc :

$$Z_n(t) = Z(0)E_{\beta}(\lambda_n x^{\beta}) + r(x)f_n(t)Y_n(x) \tag{2.8}$$

la condition(2.4)permet d'obtenir l'expression suivante :

$$f_n(t) = \frac{h_n - Z(0)E_{\beta}(\lambda_n x^{\beta})}{Y_n(x)} \tag{2.9}$$

Ainsi :

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{Z(0)E_{\beta}(\lambda_n x^{\beta})+r(x)f_n(t)Y_n(x)\right\}X_n(x) \tag{2.10}$$

$$r(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{h_n-Z(0)E_{\beta}(\lambda_n x^{\beta})}{Y_n(x)}\right\}X_n(x) \tag{2.11}$$

étape02 **:Existence de la solution :**
on va démontre que :$r(x), u(x,t), {}^{c}D_t^{\alpha}u(x,t)$ et ${}^{c}D_x^{\beta}u(x,t)$sont converge uniforme :

1. on va montre que $r(x)\in\mathbb{C}(0,1)$,en utilisant lemme(1.4)et(1.7),on trouve :

$$|r(x)|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_1K_2}{|\lambda_n|\,x(1-\alpha)(2-\alpha)}\Big(h'(0)+K_1\varphi'(0)\int_0^1 K_1\varphi'(x)+h''(x)(1-x)^{2-\alpha}dx\Big)$$

   lemme(1.6)et le test intégral de Cauchy pour la convergence des séries impliquant que $r(x)\in\mathbb{C}(0,1)$.

2. Ensuit,on va montre que $u(x,t)\in\mathbb{C}(0,1)$,d'après le lemme (1.5),on obtient la relation suivante de (2.5)

$$|u(x,t)|\leq\sum_{n=0}^{\infty}K_1^2\left\{(1+K_1K_2)\,|\varphi_n|+K_2\,|h_n|\right\}$$

   le lemme(1.7)assure la continuité de $u(x,t)$

3. Pour la convergence de ${}^{c}D_{0+,t}^{\alpha}u(x,t)$,considérons ce qui suit :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\ {}^{c}D_{0+,x}^{\alpha}u(x,t)\ \ Z_n(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\lambda_n Z_n(t)+r(x)f_n(t)\right\}X_n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\ \lambda_n Z_n(t)+r(x)f(x,t)\end{aligned}$$

   En utilisant(2.8)avec le lemme(1.5)et(1.7),la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n Z_n(t)X_n$ peut être prouvée.De plus,f(x,t) c'est déjà converge uniforme.

4. Ainsi,le lemme(1.3),nous avons :

$${}^{c}D_t^{\alpha}u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\ {}^{c}D_t^{\alpha}\ \ Z_n(t)\ \ X_n(x)$$

De même ,en utilisant le lemme(1.4),on obtient :

$$^{c}D_t^{\beta}u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \; Z_n(t) \; X_n(x)$$

d'après le lemme(1.7) :$^{c}D_t^{\alpha}u(x,t)$ et $^{c}D_x^{\beta}u(x,t)$ sont converge uniformément.

2.2 Unicité de la solution :

Théorème 2.2. *:(voir([?])) :soient* $\{u_1(x,t), r_1(x)\}$ *et* $\{u_2(x,t), r_2(x)\}$ *deux ensembles solutions réguliers des* $(PI-1)$
si $u_1(x_0,t) = u_2(x_0,t)$ *pour certains* $x_0 \in (0,1)$*,alors* $r_1(x) = r_2(x)$*et* $u_1(x,t) = u_2(x,t)$*pour tout* $x \in (0,1)$*et* $(x,t) \in \Pi$*,respectivement.*

Démonstration. :considérons les fonction suivant :

$$Z_{n1}(t) = \int_0^1 u_1(x,t)Y_n(x)$$
$$Z_{n2}(t) = \int_0^1 u_2(x,t)Y_n(x)$$

Appliquant la dérivée fractionnaire de Caputo $^{c}D_t^{\alpha}(.)$aux deux côtés :

$$^{c}D_t^{\alpha}Z_{n1}(t) = \int_0^1 {}^{c}D_t^{\alpha}u_1(x,t)Y_n(x)$$

En simplifiant,on trouve :

$$^{c}D_t^{\alpha}Z_{n1}(t) = \lambda_n Z_{n1}(t) + r(x)f_{n1}(t)$$

En utilisant la transformation de Laplace et la condition initiale(2.2)

$$Z_{n1}(t) = Z_1(0)E_{\beta 1}(\lambda_n x^{\beta 1}) + r_1(x)f_{n1}(t)$$

De même ,l'expression pour $Z_{n2}(t)$est obtenue :

$$Z_{n2}(t) = Z_2(0)E_{\beta 2}(\lambda_n x^{\beta 2}) + r_2(x)f_{n2}(t)$$

D'où : $u_1(x_0,t) = u_2(x_0,t)$,c-à-d : $Z_{n1}(t) = Z_{n2}(t)$,si$x = x_0$

Alors :

$$\begin{aligned} r_1(x)f_{n1}(t)Y_n(x) &= r_2(x)f_{n2}(t)Y_n(x) \\ \Rightarrow \Big(r_1(x)f_{n1}(t) - r_2(x)f_{n2}(t)\Big)Y_n(x) &= 0 \\ \Rightarrow r_1(x)f_{n1}(t) - r_2(x)f_{n2}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Alors : $r_1(x) = r_2(x)$ et donc : $u_1(x,t) = u_2(x,t)$
L'unicité de la solution. □

CHAPITRE 3

PROBLÈME INVERSE DE TERME SOURCE DÉPENDANT DU TEMPS

Dans ce chapitre, nous étudions le problème inverse de terme source dépendant du temps (1)-(3) et (5) avec $F(x,t) = r(t)\, f(x,t)$. Sous certaines conditions sur les données, nous avons prouvé que ce problème inverse est localement bien posé au sens de Hadamard. Notre méthode de la preuve basée sur la méthode de Fourier pour laquelle les fonctions propres qui sont des fonctions de Mittag-Leffer d'un problème spectral d'ordre fractionnaire et son problème adjoint.

3.1 Position du problème

Soient $\alpha, \beta \in]1,2[$ et $L, T > 0$. On considère l'équation de diffusion-onde fractionnaire suivante :

$$ {}^{c}D_t^{\alpha} u(x,t) = {}^{c}D_x^{\beta} u(x,t) + F(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{D}_T. \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales :

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), \;\; 0 \leq x \leq 1. \tag{3.2}$$

et les conditions aux limites mixtes homogènes :

$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; 0 \leq t \leq T. \tag{3.3}$$

Où $F(x,t)$ est le terme source,$\varphi(x)$et$\psi(x)$sont des fonctions données et${}^{c}D_t^{\alpha}$et${}^{c}D_x^{\beta}$sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo par rapport a t et x définies par :

$$\begin{aligned} {}^{c}D_t^{\alpha} u(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,s)/\partial s^2}{(t-s)^{\alpha-1}}\, ds \\ {}^{c}D_x^{\beta} u(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^x \frac{\partial^2 u(\xi,t)/\partial \xi^2}{(x-\xi)^{\beta-1}}\, d\xi \end{aligned}$$

Où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma d'Euler.

▷ Pour le terme source $F(x,t) = r(t)f(x,t)$,on va étudier l'existence et l'unicité de la solution $\Big(u(x,t), r(t)\Big)$ du problème inverse$(3.1)-(3.2)$avec la condition supplémentaire suivante :

$$u(1,t) = g(t), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{3.4}$$

Où g est une fonction donnée.

3.2 Construction de la solution :

on considère le problème suivant :

$$^cD_t^\alpha u(x,t) = {}^cD_x^\beta u(x,t) + r(t)f(x,t) \tag{3.5}$$

en utilisant la méthode de Fourier,et s'écrit comme suit :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \; Z_n(t) \; X_n(x) \tag{3.6}$$

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \; f_n(t) \; X_n(x) \tag{3.7}$$

en remplace(3.6)et(3.7)dans(3.5),on trouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \; X_n(x) \;\; ^cD_t^\alpha \;\; Z_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \; Z_n(t) \;\; ^cD_x^\beta \;\; X_n(x) + r(t)\sum_{n\geq 0}^{\infty} \; X_n(x)f_n(t)$$

Alors :

$$X_n(x) \;\; ^cD_t^\alpha \;\; Z_n(t) = Z_n(t) \;\; ^cD_x^\beta \;\; X_n(x) + r(t)X_n(x)f_n(t)$$

d'où les inconnues $Z_n(t)$et$X_n(x)$ sont liées par les EDF$_s$:

$$^cD_t^\alpha \;\; Z_n(t) = \lambda_n Z_n(t) + r(t)f_n(t)$$

en utilisant la transformation de Laplace et la condition initiale(3.2),on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big({}^{c}D_t^{\alpha} Z_n(t)\Big) &= \lambda_n \mathcal{L}\Big(Z_n(t)\Big) + r(t)\mathcal{L}\Big(f_n(t)\Big) \\
s^{\alpha}(\mathcal{L}Z)(s) - s^{\alpha-1}Z(0) - s^{\alpha-2}Z'(0) &= \lambda_n \mathcal{L}(Z) + r(t)\mathcal{L}\Big(f_n(t)\Big) \\
\mathcal{L}\Big(Z_n(t)\Big) &= \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-\lambda_n} Z(0) + r(t)\mathcal{L}\Big(f_n(t)\Big)
\end{aligned}$$

Donc :

$$Z_n(t) = \varphi_n E_{\beta}(\lambda_n x^{\beta}) + r(t) f_n(t) * Y_n(x) \tag{3.8}$$

Où$'*'$est la convolution intégrale et $f_n(t) = \langle f(x,t), Y_n(x) \rangle$
Alors,la solution de $(PI-1)$écrit comme suit :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varphi_n E_{\beta}(\lambda_n x^{\beta}) + r(t) f_n(t) * Y_n(x) \right\} X_n(x) \tag{3.9}$$

Où $r(t)$doit être déterminé.

3.3 Existence de la solution :

Nous prouverons l'existence de la solution de $(PI-2)$dans le domaine Π sous les hypothèse du théorème suivant :

Théorème 3.1. *:(voir([?])) :supposons que les conditions suivants soient satisfaites :*

- $\varphi \in \mathbb{C}$ *tel que* $\varphi'(0,t) = 0 = \varphi(1)$.
- $f \in \mathbb{C}(\Pi)$ *tel que* $f'(0,t) = 0 = f(1,t)$.*De plus*$f(1,t) \neq 0$ *et :*

$$0 < \frac{1}{M} \leq |f(1,t)| \qquad , M > 0$$

- $g \in \mathbb{AC}[0,T]$ *et* $g(t)$*vérifie la condition :* $\varphi(x) = g(0)$

Alors,il existe une unique solution régulière de $(PI-2)$

Démonstration. Considérons l'espace des fonctions continues $\mathbb{C}[0,T]$avec la norme de Tchebychev :

$$\|f\|_{\mathbb{C}[0,T]} := max_{0\leq t\leq T}\,|f(t)|$$

pour prouver l'existence unique du terme source dépendent du temps $r(t)$,nous utilisons la condition supplémentaire(3.5),qui conduit a la relation :

$${}^{c}D_t^{\alpha}u(1,t) = {}^{c}D_t^{\alpha}g(t)$$

En utilisant(3.1),on obtient :

$${}^{c}D_t^{\alpha}u(1,t) = {}^{c}D_x^{\beta} + F(1,t){}^{c}D_x^{\beta} + r(t)f(1,t) = {}^{c}D_t^{\alpha}g(t)$$

ce qui implique :

$$r(t) = \Big(f(1,t)\Big)^{-1}\left\{{}^{c}D_t^{\alpha}g(t) + \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n Y_n(x)Z_n(t)dx\right\} \tag{3.10}$$

Où $Z_n(t)$pour $n \in \mathbb{N}$sont donnée par(3.6)

on définit un opérateur :$\mathbb{B} : \mathbb{C}[0,T] \longrightarrow \mathbb{C}[0,T]$par :

$$\mathbb{B}\Big(r(t)\Big) := r(t)$$

Où $r(t)$donnée par(3.10)

$$\mathbb{B}\Big(r(t)\Big) = \Big(f(1,t)\Big)^{-1}\left\{{}^cD_t^\alpha g(t) + \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n Y_n(x)Z_n(t)dx\right\}$$
$$\mathbb{B}\Big(r(t)\Big) = \Big(f(1,t)\Big)^{-1}\{{}^cD_t^\alpha g(t) + \mathbb{Z}(t) + \mathbb{K}(t,\tau)r(\tau)\}$$

Où

$$\mathbb{Z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\varphi_n X_n(x)Y_n(x)dx. \tag{3.11}$$
$$\mathbb{K}(t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n f_n(\tau)X_n(x)Y_n(x)dx. \tag{3.12}$$

Pour montrer que l'application $\mathbb{B} : \mathbb{C}[0,T] \longrightarrow \mathbb{C}[0,T]$ est une contraction.Tout d'abord,nous allons montrer que pour $r(t) \in \mathbb{C}[0,T]$,on a $\mathbb{B}\Big(r(t)\Big) \in \mathbb{C}[0,T]$ "représente une fonction continué"c-à-d : les séries implique $(3.11)et(3.12)$sont uniformément convergents.

1. considérons :

$$|\mathbb{Z}(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_1}{|\lambda_n|}|\varphi_n| \tag{3.13}$$

   En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,on obtient :

$$|\mathbb{Z}(t)| \leq \Big(|\varphi_n|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_1^2}{|\lambda_n|}\Big)^{1/2}$$

   – la série $\sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_n|$ est convergente,puisque $\varphi \in L^2(0,1)$est une fonction continué.
   – la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_1^2}{|\lambda_n|}$ est convergent par supposition.
   Donc,la série dans (3.13) est converge uniformément.

2. considérons :

$$|\mathbb{K}(t,\tau)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_1}{|\lambda_n|}|f_n(\tau)| \tag{3.14}$$

   Alors,la série dans (3.14) est converge uniformément,car la continuité de $f(x,t)$.

de (1)et(2),$\mathbb{B}\Big(r(t)\Big)$ est bien définit.

Nous avons prouvé que pour $r(t) \in \mathbb{C}[0,T]$ et $\mathbb{B}\Big(r(t)\Big) \in \mathbb{C}[0,T]$.De plus,on peut écrit :

$$\|\mathbb{K}(t,\tau)\|_{\mathbb{C}[0,T]} \leq k_1$$

Maintenant, nous allons montrer que l'application $\mathbb{B}\Big(r(t)\Big) := r(t)$ est une contraction.
prender :

$$|\mathbb{B}(r_1) - \mathbb{B}(r_2)| = \Big(f(1,t)\Big)^{-1} \{\mathbb{K}(t,\tau)\,|r_1(\tau) - r_2(\tau)|\}$$

par les hypothèse du théorème (3.1) ,on a :

$$|\mathbb{B}(r_1) - \mathbb{B}(r_2)| \leq TK_1M_1max_{0\leq t\leq T}\,|r_1(\tau) - r_2(\tau)|$$
$$|\mathbb{B}(r_1) - \mathbb{B}(r_2)| \leq TK_1M_1\,\|r_1 - r_2\|_{\mathbb{C}[0,T]}$$

Alors,l'application $\mathbb{B}(.)$ est une contraction pour $T < \frac{1}{K_1M_1}$,ce qui assure la détermination unique de $r(.) \in \mathbb{C}[0,T]$ par le théorème du point fixe de Banach. □

3.3.1 Convergence uniforme de la solution :

pour montrer l'existence de la solution $\Big(u(x,t), r(t)\Big)$ du $(PI-1)$,nous allons montre que : $u(x,t)$, ${}^cD_t^\alpha u(x,t)$ et${}^cD_x^\beta u(x,t)$sont converge uniforme.
d'après (3.8)

$$|Z_n(t)| \leq |\varphi_n X_n| + |r(t)f_n(t) * Y_n(x)|$$

on a : $r(t) \in \mathbb{C}[0,T]$,alors il existe : $M_2 > 0$ tel que : $|r(t)| \leq M_2$
alors en utilisant le lemme (1.8),on a :

$$|Z_n(t)| = |\varphi_n|\,c_2 + \frac{M_2c_2}{k}\,|f_n(t)|$$

on a : $u(x,t) = \langle Y_n(x), f(x,t)\rangle$pour $n \in \mathbb{N}$.En utilisant le lemme (1.8),on obtient :

$$|u(x,t)| = \frac{c_1}{|\lambda_n|\,x}\sum_{n=0}^{\infty}\{c_1\,|\varphi_n| + r(t)f_n(t) * Y_n(x)\} \tag{3.15}$$

la continuité de $\varphi(x)$et$r(t)$et les lemmes (1.8)et(1.9)et l'inégalité ont établi la converge uniforme de la solution $u(x,t)$.
De même, les séries correspondant ${}^cD_t^\alpha u(x,t)$ et${}^cD_x^\beta u(x,t)$ représenté une fonction continué.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié deux problèmes inverses de terme source pour une équation de diffusion-onde fractionnaire avec conditions aux limites mixtes. Les dérivées fractionnaires impliquées dans le temps et l'espace sont définies au sens de Caputo d'ordre $1 < \alpha < 2$ et $1 < \beta < 2$, respectivement. Ce mémoire se déroule en deux étapes :

- ✓ **Problème inverse de terme source dépendant de l'espace** : avec la condition finale à un instant T, ce problème inverse a été considéré. Un système bi-orthogonal de fonctions obtenu à partir du problème spectral et de son problème adjoint. Nous avons utilisé la méthode de Fourier. Sous certaines hypothèses sur les données, nous avons démontré que le problème inverse est bien posé.
- ✓ **Problème inverse de terme source dépendant du temps** : avec une condition supplémentaire au point 0. Nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution, en utilisant la méthode de Fourier et le théorème de point fixe de Banach. Quelques cas particuliers des problèmes inverses sont discutés et des exemples numériques particuliers sont présentés.

Comme perspectives, ils existent quelques des problèmes inverses importants liés à l'équation différentielle fractionnaire espace-temps (1) :

- ☞ Étude théorique des problèmes inverses pour des données initiales ou aux limites liés à l'équation (1)
- ☞ Étude numérique des problèmes inverses liés à l'équation (1) avec des conditions aux limites locales ou non locales.

Bibliographie

[1] M. Ali, S. Aziz, and S. A. Malik. Inverse source problems for a space-time fractional differential equation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 28(1) :47–68, 2020.

[2] M. Ali and S.A. Malik. An inverse problem for a family of time fractional diffusion equations. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 25 :1299–1322, 2017.

[3] M. Kirane and S.A. Malik. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the linear heat equation involving fractional derivative in time. *Appl. Math. Comput.*, 218 :163–170, 2011.

[4] M. Kirane, S.A. Malik, and M.A. Al-Gwaiz. An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions. *Math. Methods. Appl. Sci.*, 36 :1056–1069, 2013.

[5] H. Lopushanska and V. Rapita. Inverse coefficient problem for the semi-linear fractional telegraph equation. *Electron. J. Differ. Equ.*, 153 :1–13, 2015.

[6] S.A. Malik and S. Aziz. An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions. *Comput. Math. Appl.*, 73 :2548–2560, 2017.

[7] S.A. Malik, A. Ilyas, and A. Samreen. Simultaneous determination of a source term and diffusion concentration for a multi-term space-time fractional diffusion equation. *Mathematical Modelling and Analysis*, 26(3) :411–431, 2021.

ملخص: في هذه المذكرة، درسنا مسألتين عكسيتين لمعادلة انتشار- موجة الكسرية في المكان والزمان. بداية قمنا بدراسة المسألة العكسية ذات معامل المصدر متعلق بمتغير المكان وثانيا قمنا بدراسة المسألة العكسية ذات معامل المصدر متعلق بمتغير الزمن. جملة ثنائية متعامدة من الدوال متعلقة بدوال من النوع ميتاغ - ليفلر والتي تم الحصول عليها من مسألة طيفية والمسألة المرفقة بها. تم عرض نتائج الوجود والوحدانية والاستقرار للمسألة العكسية ذات معامل المصدر متعلق بمتغير المكان، في حين قمنا بإثبات نتائج الوجود والوحدانية للمسألة العكسية الثانية. ناقشنا حالات خاصة لهذين المسألتين العكسيتين.

كلمات مفتاحية: مسألة عكسية، مشتقة كسرية، جملة ثنائية التعامد، دالة ميتاغ- ليفلر.

Dans ce mémoire, nous avons considéré deux problèmes inverses de terme source pour une équation de diffusion-onde fractionnaire en espace et en temps. Premièrement, la récupération d'un terme source dépendant de l'espace est étudiée, deuxièmement, la détermination d'un terme source dépendant du temps est considérée. Un système bi-orthogonal de fonctions composés de fonctions de type Mittag-Leffler obtenues à partir d'un problème spectral et son problème adjoint. Les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité sont présentés pour le problème inverse de terme source dépendant de l'espace tandis que pour les résultats d'existence et d'unicité du terme source dépendant du temps sont prouvés. Quelques cas particuliers pour ces problèmes inverses de terme source sont discutés.

Mots-Clés : Problème inverse , Dérivée fractionnaire, Système bi-orthogoanl, Fonction de Mittag-Leffler.

In this memoir, we have considered two inverse source problems for a space-time-fractional diffusion-wave equation. Firstly, the recovery of a space-dependent source term is investigated, secondly, the determination of a time-dependent source term is considered. A bi-orthogonal system of functions composed of functions of Mittag-Leffler type obtained from a spectral problem and its adjoint problem. The existence, uniqueness and stability results are presented for the inverse space-dependent source problem while for the time-dependent source problem, existence and uniqueness results are proved. Some special cases for these inverse source problems are discussed.

Keywords : Inverse problem, Fractional derivative, Bi-orthogonal system, Mittag-Leffler function.