

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

*L'application de la méthode des volumes finis aux quelques
écoulements potentiels bidimensionnels*

Présentée par :

ZITOUNI Asma

Soutenu publiquement le : 02/07/2019.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r N.Benhamidouche*

Encadreur : *M^d N.BOUNAB*

Examineur : *M^d W.Deloum*

prof, Université de M'sila

M.C.B, Université de M'sila

M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Je remercie d'abord **Dieu** Tout Puissant, de m'avoir donnée la force et le courage et de la santé pour faire ce travail, malgré tous les obstacles.

Je remercie également mon encadreur, *M^{me}* **Bounab Noura**, qui m'a aidé dans mon travail et a contribué au développement de cette modeste recherche, Je la remercie également pour la qualité du sujet proposé.

Mes remerciements vont aussi aux membres de jury **BenHamidouche.N** et le **W.Deloum** d'avoir accepté d'examiner et évaluer mon travail .

Je tiens également à remercier **Dr.Titoum Massoud**, Professeur à la Faculté des sciences et technologies et Je remercie aussi également l'étudiant **Gherbi Akram**, étudiant en master 2 à la Faculté de technologie pour les aider.

Je remercie aussi tous les étudiants et tous les professeurs de département de mathématiques.

Je voudrais également remercier ma famille (**ma mère, mon père et mes frères**) pour leur soutien et leur assistance tout au long de mes études.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À ma mère qu'est l'âme de ma vie.

À mon père qui m'a toujours soutenue.

À toute la famille.

À mes soeurs : Ismahan, Sana ,Inase.

À mes frères : Abd Salam Anis et Mohammed Yasser .

A tous mes amis.

À tous ceux qui m'ont aidé à faire ce travail de professeurs et d'étudiants à l'intérieur et
à l'extérieur de la faculté

Table des matières

| | |
|--------------------------------------------------------------|------------|
| Notation | vii |
| Introduction | ix |
| 1 Notions préliminaires et définitions | 1 |
| 1.1 Les fluides | 2 |
| 1.2 Débit | 3 |
| 1.2.1 Débit massique | 3 |
| 1.2.2 Débit volumique | 3 |
| 1.3 Les écoulements des fluides | 3 |
| 1.3.1 Écoulement stationnaire | 3 |
| 1.3.2 Écoulement incompressible | 4 |
| 1.3.3 Écoulement potentiel | 4 |
| 1.3.4 Écoulement irrotationnel | 4 |
| 1.3.5 Écoulement uniforme | 5 |
| 1.4 Description d'un fluide en mouvement | 6 |
| 1.4.1 Description de Lagrange | 6 |
| 1.4.2 Description d'Euler | 6 |
| 1.5 Quelques équations de la mécanique des fluides | 8 |
| 1.5.1 Équation de continuité | 8 |
| 1.5.2 Conservation de l'énergie du fluide | 9 |
| 1.5.3 Équation du mouvement des fluides | 10 |
| 1.5.4 Les équations de Stokes | 11 |
| 1.5.5 Théorème de Bernoulli | 11 |
| 1.5.6 Ligne et Fonction de courant | 12 |

| | | |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.5.7 | Équations différentielles des fonctions ϕ et ψ | 13 |
| 1.6 | Utilisation de la théorie de la variable complexe. | 14 |
| 1.7 | Théorie des lignes de courants libre | 15 |
| 1.8 | Transformation de Schwartz-Christoffel | 17 |
| 2 | Méthode des volumes finis | 20 |
| 2.1 | Principe de méthode | 22 |
| 2.2 | Position du problème | 23 |
| 2.3 | Sur la solution exacte | 24 |
| 2.3.1 | Formulatin et position du problème | 24 |
| 2.3.2 | La solution du problème | 26 |
| 2.4 | La présentation des logiciels de calcul | 32 |
| 2.4.1 | GAMBT | 32 |
| 2.4.2 | Fluent | 32 |
| 2.5 | Procédure de résolution en utilisant le code Fluent | 34 |
| 2.5.1 | Schéma amont du premier ordre | 34 |
| 2.5.2 | Schéma amount de deuxième ordre | 34 |
| 2.5.3 | Schéma Quick | 35 |
| 2.6 | Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement | 36 |
| 2.7 | Discrétisation de l'équation de transport | 37 |
| 2.8 | Résolution du problème | 39 |
| 2.9 | Discussion des résultats | 40 |
| 2.9.1 | La Vitesse | 43 |
| 2.9.2 | La Pression Statique | 43 |
| 2.9.3 | Fonction de courant | 43 |
| | Conclusion Générale | 44 |
| | Bibliographie | 47 |
| 3 | ANNEXE | 49 |

Table des figures

| | | |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Représentation de la vitesse dans un écoulement parfait et écoulement visqueux. | 2 |
| 1.2 | Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme. | 5 |
| 1.3 | Trajectoire de la particule P | 7 |
| 1.4 | Transformation conforme. | 15 |
| 1.5 | Plan de Ω | 18 |
| 1.6 | Plan de variable λ | 18 |
| 2.1 | Volume de contrôle. | 22 |
| 2.2 | Description de problème. | 25 |
| 2.3 | Plan de la variable Z | 25 |
| 2.4 | Plan de variable Ω | 30 |
| 2.5 | Plan de la variable f | 30 |
| 2.6 | Plan de la variable λ | 31 |
| 2.7 | la forme de la surface libre. | 31 |
| 2.8 | Schéma récapitulatif d'une simulation complète sous Gambit et Fluent. | 32 |
| 2.9 | principaux d'element utilisé en 2D. | 33 |
| 2.10 | Grille volumes finis. | 34 |
| 2.11 | La discrétisation. | 40 |
| 2.12 | Le contour de la magnitude de la vitesse. | 40 |
| 2.13 | La magnitude de vitesse. | 41 |
| 2.14 | Contour de la pression statique. | 41 |
| 2.15 | La pression statique. | 42 |
| 2.16 | Contour de la fonction de courant. | 42 |
| 2.17 | La fonction de courant. | 43 |

| | | |
|-----|---------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Fenêtre principale. | 49 |
| 3.2 | Différentes opérations pour créer la géométrie. | 49 |
| 3.3 | Fenêtre principale du logiciel Fluent. | 50 |
| 3.4 | Ouvrir le fichier (*.msh). | 50 |
| 3.5 | Géométrie du domaine physique. | 51 |
| 3.6 | Maillage du domaine physique. | 51 |
| 3.7 | type de maillage. | 52 |
| 3.8 | Méthode de discrétisation. | 52 |

Notation

| | |
|----------------------|-----------------------------------|
| ρ | Masse volumique |
| \vec{u} | Le vecteur vitesse |
| m | La masse |
| \vec{a} | L'accélération |
| P | La pression |
| S | La surface |
| V | Le volume |
| n | La normale |
| f | La force |
| C | Une courbe |
| (x, y) | Le plan |
| g | Accélération de la pesanteur |
| $W :$ | Nombre de Weber |
| $Fr :$ | Nombre de Froude |
| i | Le nombre complexe |
| z | La variable complexe |
| \hat{p} | La pression motrice |
| L_c | Longueur caractéristique |
| Γ | Tension superficielle |
| (u, ν) | Composantes du vecteur vitesse |
| ψ | Fonction de courant |
| ϕ | Fonction Potentielle |
| σ | Le tenseur des contraintes |
| $M_0(x_0, y_0, z_0)$ | Position initiale |
| $\vec{r} = (M_0, t)$ | Le vecteur position |
| ds | élément de surface de normale n |
| $\phi(x, t)$ | la fonction potentielle |
| $PlanZ$ | Le domaine d'écoulement réel |
| P | point au centre du volume fini |
| E | point à l'est du point P |
| N | point au nord du point P |
| W | point à l'ouest du point P |
| S | point au sud du point P |
| Γ | coefficient de diffusion |
| S_ϕ | Terme source |
| $\delta_{i,j}$ | Matrice identité |

Introduction générale

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes.

L'étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec le célèbre savon Archimède, connu par son principe qui fut à l'origine de la statique des fluides. Aujourd'hui, la dynamique des fluides est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

En mécanique des fluides, les problèmes des écoulements à surface libre d'un fluide parfait sont étudiés grâce à leur importance d'application dans plusieurs domaines. Les premiers travaux dans ce secteur sont caractérisés par l'utilisation de la méthode d'hodographe et de la transformation de Schwartz-Christoffel, qui peuvent traiter les écoulements qui ont une géométrie polygonale.

L'écoulement d'un fluide parfait a été étudié par plusieurs chercheurs tel Dias et J.M Vanden-Broeck (1990)[8], où ont étudié un écoulement en émergeant un bec bidimensionnel sous un angle. Différents problèmes de ce genre ont été étudiés par Vanden-Broeck [26], H.Mekias et B.Bouderah [5], A.Gasmi et H.Mekias[14] et N.Bounab [6] et d'autres.

Théoriquement, La solution exacte pour la forme de la surface libre est calculer par Dr D.Mustapha [17], l'effet des forces de la tension de surface et de la gravité sont négligés.

Dans ce travail on se propose d'étudier numériquement un écoulement à surface libre d'un fluide parfait devant un obstacle.

Notre travail est composé de deux parties :

Dans Le premier partie ,on présente les notions fondamentales de la mécanique des fluides ,quelque définitions des types des écoulements et les équations de la mécanique des fluides.

Dans la deuxième partie : on a étudié numériquement un problème d'un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide parfait devant un obstacle à la forme (marche descendante), en utilisant la méthode des Volumes finis à l'aide du logiciel de calcul Fluent pour traiter quelques caractéristiques des fluides. Enfin on termine ce travail par une conclusion générale.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET DÉFINITIONS

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et concepts de base de la mécanique des fluides.

1.1 Les fluides

Un fluide (liquide ou gaz), selon les physiciens, est un corps simple composé d'atomes ou de molécules identiques. Du point de vue mécanique, la définition d'un matériau est liée à sa déformation en fonction des contraintes : "un fluide, c'est quelque chose qui coule" sous l'action d'une contrainte donnée et même si la déformation est grande, ceci ne provoque pas la perte de cohésion entre ses molécules.

Les deux états de la matière :

Un liquide a "un volume propre, mais pas de forme propre", alors qu'un gaz n'a pas de "volume propre mais tend à occuper tout l'espace qui lui est offert". Sous les conditions normales de pression et de température, la distinction entre liquide et gaz est évidente mais à cause de la continuité de l'état fluide le passage de la phase gazeuse à la phase liquide peut se faire sous simple modification (élever la température par exemple).

Fluides parfaits

Un fluide parfait, dont l'écoulement se fait "sans frottements internes", est un fluide considéré comme non visqueux (est la caractéristique de résistance au glissement ou à la déformation d'un fluide).

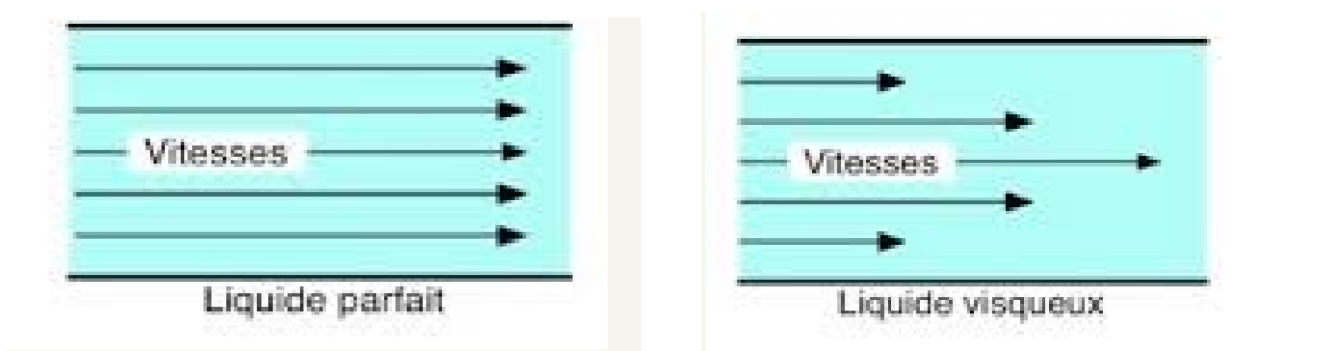


FIGURE 1.1 – Représentation de la vitesse dans un écoulement parfait et écoulement visqueux.

1.2 Débit

1.2.1 Débit massique

c'est la quantité de fluide qui travers la section S par unité de temps. Donnée par :

$$m = \int \int_S \int \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds.$$

1.2.2 Débit volumique

débit volumique à travers la section S par unité de temps. Donnée par :

$$V = \int \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} ds.$$

1.3 Les écoulements des fluides

Dans la vie quotidienne , dans la nature et dans le domaine industriel, les écoulements sont toujours présents. La circulation de l'oxygène dans notre organisme est l'un des exemples de l'importance de l'écoulement dans la vie humaine.

1.3.1 Écoulement stationnaire

Les écoulements stationnaires (on dit aussi permanent), sont les l'écoulements dont les composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps. Dans ce type des écoulement on a :

$$\partial_t u = \partial_t \rho = \partial_t T = \partial_t p = 0.$$

Un tel écoulement est possible lorsque le domaine, les forces massiques appliquées, les sources de chaleur et les conditions de bord sont elles aussi indépendantes du temps.

Par exemple Les équations de *Navier–Stokes* stationnaires s'écrivent :

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

1.3.2 Écoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure sa masse volumique est constante.

$$\rho = cte.$$

1.3.3 Écoulement potentiel

On dit que l'écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est dirivé d'un potentiel c'est-à-dire :

$$\vec{u} = \nabla\phi.$$

$$u = \frac{d\phi}{dx}, v = \frac{d\phi}{dy}.$$

La fonction $\phi(x, t)$ est le potentiel des vitesses.

1.3.4 Écoulement irrotationnel

Un écoulement est appelé écoulement irrotationnel si :

$$rot \vec{u} = 0. \quad (1.2)$$

Naturellement, un écoulement qui n'est pas irrotationnel est dit rotationnel.

Un écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel. En effet, on a :

$$u = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right).$$

$$rotu = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \right).$$

1.3.5 Écoulement uniforme

Un écoulement bidimensionnel a surface libre est dit uniforme si l'écoulement est de vitesse constante $A1 = A2$

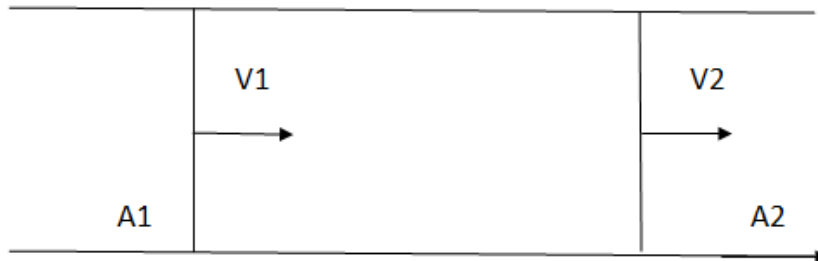


FIGURE 1.2 – Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme.

1.4 Description d'un fluide en mouvement

1.4.1 Description de Lagrange

Cette méthode consiste à étudier les différentes quantités (P, ρ , température T ...etc) pour chaque particule individuellement lors de son mouvement.

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées. L'identité d'une particule est donnée par sa position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

La description du mouvement est donc de déterminer le vecteur position $\vec{r}(M_0, t)$ à tout instant t pour toutes les particules du fluide.

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t) \text{ ou } \vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t).$$

C'est-à-dire :

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t).$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0; t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(M_0, t), \vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.$$

1.4.2 Description d'Euler

La méthode d'Euler consiste à décrire l'écoulement en donnant les composants de la vecteur vitesse et autres quantités physique en chaque point de l'espace c'est -à-dire ,on fixe un point dans l'espace et on remarque les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

A l'instant t_1 , on détermine en M une particule P_1 de vitesse \vec{u} et d'autres caractéristiques physique K .

Et à l'instant $t_2 = t_1 + \partial t$, on trouve au même point M de l'espace , une autre particule P_2 de vitesse et des caractéristiques physiques différentes.

Donc, on a en M et à l'instant t_1

$$\vec{u} = \vec{u}(P_1, t_1) = \vec{u}(x, y, z, t_1).$$

Et à l'instant t_2 , on a au même point M

$$\vec{u} = \vec{u}(P_2, t_2) = \vec{u}(x, y, z, t_2).$$

Trajectoire :

On définit la trajectoire comme le chemin suivi par une particule de fluide sur son mouvement.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

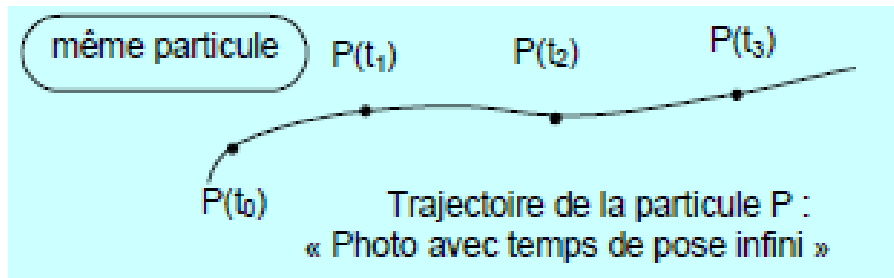


FIGURE 1.3 – Trajectoire de la particule P .

1.5 Quelques équations de la mécanique des fluides

1.5.1 Équation de continuité

Soit une partie d'un fluide de masse volumique ρ délimitée par une surface fermée S (de volume V). Soit dS un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée.

La partie de fluide a une masse $m = \int \int_V \rho dV$. Le débit massique sortant de la surface S est égal à $\int \int_S \rho \vec{u} dS$.

La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{dm_s}{dt} - \int \int_S \rho \vec{u} dS = \int \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Où $\frac{dm_s}{dt}$ représente le **débit massique** de fluide interne au volume considéré, compté positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puits. Compte tenu du théorème d'Ostrogradsky pour transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume,

$$\int \int_S \vec{u} dS = \int \int_V \text{div}(\rho \vec{u}) dV$$

L'équation de conservation de la masse écrite :

$$\frac{dm_s}{dt} = \int \int_V \left\{ \text{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} dV$$

L'égalité écrite ci-dessus est valide quel que soit le volume V considéré et l'intégrale est nulle, ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse :

$$\text{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

Deux cas particuliers sont alors à considérer :

1. Si le **fluide est incompressible** la masse volumique ne change pas dans le temps et l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad (1.4)$$

Pour un écoulement stationnaire ou non stationnaire. Cet écoulement est dit **isovolume**.

L'équation (1.4) exprime la conservation du volume d'un élément de fluide au cours de sa déformation par l'écoulement.

2. Le cas **d'un écoulement stationnaire** $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ alors :

$$\text{div}(\rho u) = 0 = \rho \text{div} u + (u \cdot \nabla) \rho.$$

En dehors du cas 1, il existe la possibilité d'écoulements isovolumes tels que

$(u \cdot \nabla) \rho = 0$, c'est-à-dire les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point, au vecteur vitesse.

1.5.2 Conservation de l'énergie du fluide

Nous allons évaluer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un élément de fluide de volume unité et de masse, en nous limitant aux écoulements de fluides incompressibles :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (1.5)$$

En utilisant l'équation de mouvement pour exprimer la dérivée eulérienne de la vitesse, (1.5) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + u_i f_i$$

Soit, en décomposant le tenseur des contraintes comme précédemment en une partie isotrope $-p\delta_{i,j}$, et en un déviateur $d_{i,j}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \frac{\partial u_i d_{i,j}}{\partial x_j} - d_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (1.6)$$

Ou bien, en notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = u \cdot \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \nabla \cdot (u \cdot d) - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (1.7)$$

Enfin, en tenant compte de la condition d'incompressibilité ($\nabla \cdot u = 0$), nous pouvons mettre le premier terme du membre de droite de (1.7) sous la forme d'une divergence, soit :

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = \nabla \cdot \left[u \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + u \cdot d \right] - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (1.8)$$

Récrivons cette équation d'évolution de l'énergie cinétique sous forme intégrale , en intégrant chacun des termes sur un volume V fixe et en utilisant le théorème de la divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V e_c dV \right) = \int_S \frac{\rho u^2}{2} u \cdot n dS + \int_S (\sigma \cdot u) \cdot n dS + \int_V u \cdot f dV - \sigma \cdot \nabla u dV \quad (1.9)$$

Quelle est la signification physique des différents termes de (1.9) :

1. le premier terme du second membre est le flux d'énergie cinétique "convectée" par l'écoulement à travers la surface S .
2. le second terme est le travail, par unité de temps, des contraintes exercées sur la surface S .
3. le troisième terme est le travail, par unité de temps, des forces en volume .
4. enfin, le quatrième terme est associé à la déformation du volume V . Il représente l'énergie dissipée par viscosité lors de cette déformation.

1.5.3 Équation du mouvement des fluides

Par la relation fondamentale de la dynamique , la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de volume V est égale à la somme des forces qui s'exercent sur cet élément de volume , soit :

$$\frac{d}{dt} \int_V [\rho u dx] = \int_V f dx + \int_{\Sigma} \sigma \cdot n ds$$

Où Σ est la surface délimitant le volume V , ds est un élément de surface de normale n , f est la force exercée par unité de volume et σ le tenseur des contraintes. La masse de l'élément de fluide ρdx reste constante dans ce mouvement. Il est donc possible d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_V [\rho u dx] = \int_V \rho \frac{du}{dt} dx$$

L'intégrale des forces de surface peut s'écrire , à l'aide du théorème d'Ostrogradsky sous la forme $\int_V \text{div} \sigma dx$. En faisant tendre le volume V vers zéro l'équation de mouvement devient :

$$\rho (\partial_t u + (u \cdot \nabla) u) = f + \text{div} \sigma \quad (1.10)$$

1.5.4 Les équations de Stokes

L'équation de Navier–Stokes :

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \rho(u.\nabla)u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}u = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

En négligeant dans l'équation de Navier–Stokes incompressible stationnaire les termes proportionnels à la masse volumique du fluide $(u.\nabla)u$, on obtient l'équation de Stokes

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div}u = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Plus la vitesse de l'écoulement est petite en regard des dimensions de Ω et de la valeur de la viscosité, plus le modèle de Stokes est une approximation valable des équations de *Navier–Stokes*. La différence fondamentale entre les deux équations est que le terme non linéaire en vitesse a disparu, l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles linéaire.

1.5.5 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement.

Premier théorème de Bernoulli

Dans un écoulement stationnaire, le long d'une trajectoire on a conservation de la charge

$$H = \frac{\hat{p}}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{Cont.}$$

$$\hat{p} = p + \rho g z.$$

Second théorème de Bernoulli

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \left[\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \frac{u^2}{2} \right] &= -\nabla \hat{p} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{\hat{p}}{\rho} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = \frac{\partial \phi}{\partial t} + g H \end{aligned}$$

1.5.6 Ligne et Fonction de courant

lignes de courant

on appelle ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur vitesse . Son équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dx}{u(x, y, t)} = \frac{dy}{v(x, y, t)} \quad t \text{ fix.}$$

Fonction de courant

si on considère l'écoulement est incompressible (i.e. $\frac{D\rho}{Dt} = 0$) alors l'équation de continuité sera donnée :

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

Ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (1.13)$$

Nous présentons une nouvelle fonction ψ de x et y que l'on appelle **fonction de courant** , vérifiant

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.14)$$

Les surfaces définies par ($\psi = cte$) sont des **lignes de courant**, en effet, la différentielle exacte de est donne

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy \quad (1.15)$$

Puisque $\psi = cte$, alors $\partial \psi = 0$, on trouve l'équation de la ligne de courant d'après (1.14).

Soient, C une courbe fine qui part d'un ligne de courant vers autre caractérisée par $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$ respectivement.

Soient \vec{n} un vecteur unitaire normale à C et orienté dans le sens de l'écoulement, le flux à travers C donné par :

$$Q = \int_C \vec{u} \cdot \vec{n} = \left(\int_C -u \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \int_C (v dx - u dy) dt$$

D'où

$$Q = \int_C \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \int_C d\psi$$

Par conséquent

$$Q = \psi_1 + \psi_2 \quad (1.16)$$

1.5.7 Équations différentielles des fonctions ϕ et ψ

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible non-visqueux. Puisque :

$$\vec{u} = \vec{\text{grad}} \phi$$

Et

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

Il vient que :

$$\text{div} \left(\vec{\text{grad}} \phi \right) = 0$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

C'est-à-dire :

$$\Delta \phi = 0. \tag{1.17}$$

De même, d'après :

$$\vec{u} = (u, v) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

Et

$$\text{rot } \vec{u} = 0$$

On trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

C'est-à-dire

$$\Delta \psi = 0.$$

D'où, la fonction potentielle ϕ et la fonction ligne de courant ψ et vérifient l'équation de **Laplace**.

Un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible, non visqueux est écoulement potentiel.

1.6 Utilisation de la théorie de la variable complexe.

Soient ϕ et ψ la fonction potentielle et la fonction de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. On rapport le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant $z = x + iy$, puis on définit la fonction complexe $f(z)$ par :

$$f(z) = \phi + i\psi \quad (1.18)$$

Tel que $i^2 = -1$.

$f(z)$ est appelé le potentiel complexe de l'écoulement.

Puisque la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ vérifient l'équation de Laplace, de plus on a :

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Alors les relations de Cauchy –Riemann :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (1.19)$$

La théorie des variables complexes offre une méthode, très puissante pour obtenir des solutions de quelques écoulement. Si le plan (x, y) est considéré comme plan de $z = x + iy$ la fonction $f(z)$ sera analytique dans le domaine de l'écoulement.

De plus La vitesse complexe est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= u - iv. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Sera aussi analytique le plan de l'écoulement. Cette très importante propriété va nous paramètre d'utiliser, par la suite, la théorie des fonctions analytiques complexe pour résoudre notre problème considéré.

Transformations conformes

Soit f une fonction de variable complexe de le plan Z vers le plan W .

Une transformation $f(z) = w$ est conforme, si l'angle entre deux courbes du plan Z est égale à l'angle qu'il y a entre les images de ces courbes dans la plan W .

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit conforme est que la fonction $f(z)$ soit analytique.

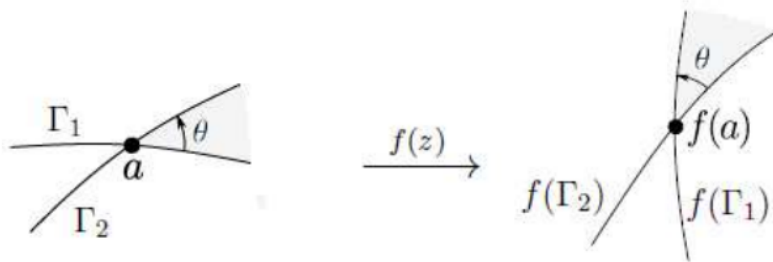


FIGURE 1.4 – Transformation conforme.

1.7 Théorie des lignes de courants libre

La théorie des lignes de courants libre consiste à étudier les problèmes d'écoulement potentiel, limité par des parois rigides rectilignes et des lignes de courant libre de formes inconnues, sur les quelles la pression est supposée constante.

Si les lignes de courant libres ne sont pas présentes et les effets de gravité sont négligés, la région d'écoulement dans le plan physique est un polygone. Aussi les lignes de courants libres présentes et les effets de gravité ainsi que les effets de la tension de surface sont négligés, la région d'écoulement peut être transformée par une transformation conforme à une région polygonale. Cette région est un parfait du plan hodographe défini

$$\Omega = \log \left(1 / \frac{df}{dz} \right).$$

Dans le cas où l'écoulement est délimité partiellement par des surfaces libres on donne la méthode de résolution introduite par Kirchhoff (1869).

L'idée est d'introduire la fonction complexe définie par :

$$\Omega = \log \left(U / \frac{df}{dz} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{U}{q} \right) + i\theta. \quad (1.21)$$

Où $f = \phi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = u - iv$, $q = \sqrt{u^2 + v^2}$, (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant de l'axe x et l'axe y respectivement, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U la vitesse de référence.

- La partie réelle de Ω est constante sur la ligne de courant libre, i.e. $\log\left(\frac{u}{q} = cte\right)$.
- La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rectiligne, i.e. $\theta = cte$.

Par conséquent, l'écoulement est représenté par une figure plane de côtés rectilignes (polygone) noté Ω .

A l'aide de transformation de Schwarz-Christoffel, le domaine Ω polygonal est transformé en un demi plan supérieur de la variable auxiliaire λ , Ainsi, dans le plan λ l'écoulement est uniforme représenté par la fonction potentielle $F(\lambda) = c\lambda$. Pour illustrer ce qui précède, on donne quelques propriétés de la transformation conforme de Schwarz-Christoffel.

1.8 Transformation de Schwartz-Christoffel .

On considérait un polygone [Figure (1.5)] dans le plan Ω , ayant pour sommets A_1, A_2, \dots, A_n et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soient A_1, A_2, \dots, A_n les points correspondant respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel du plan des λ [Figure(1.6)]. Transformation de Schwarz-Christoffel, transforme l'intérieur d'un polygone en demi-plan supérieur (ou inférieur) d'un autre plan. La transformation est donnée par :

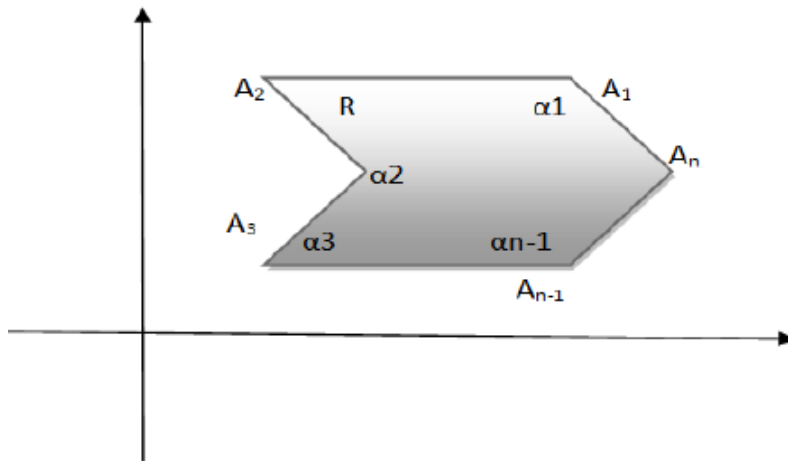
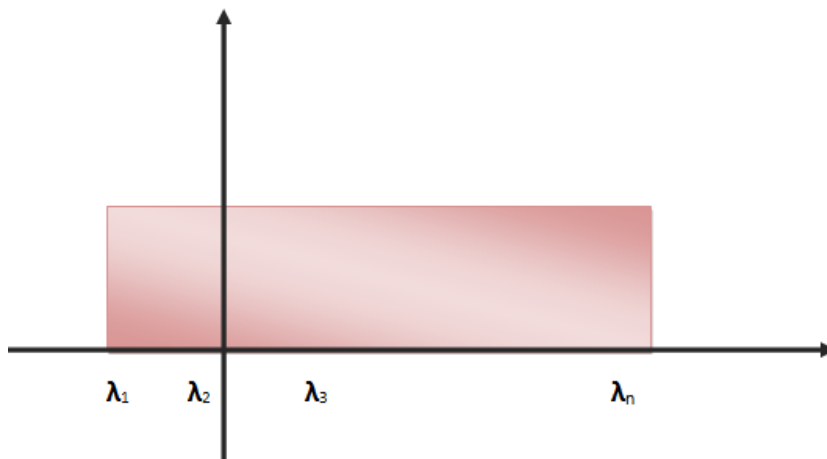
$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \alpha (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} \quad (1.22)$$

Ou bien

$$\Omega = \alpha \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} d\lambda + \beta \quad (1.23)$$

Ou α et β sont des constantes complexes. On notera que :

1. Parmi les points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes α et β déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple λ_n , à l'infini, cas dans lequel facteur de (1.23) n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limités de polygones.

FIGURE 1.5 – Plan de Ω .FIGURE 1.6 – Plan de variable λ .

Nombre de Weber

Le nombre de Weber (W) est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface d'un système multiphasique.

Il correspond au rapport des forces d'inertie et la tension superficielle. On le définit de la manière suivante :

$$W = \frac{\rho u^2 L_c}{T}.$$

Le nombre de Weber est principalement utilisé pour l'étude la formation de gouttes ou bulles.

Nombre de Froude

Le nombre de Froude étant le rapport entre l'énergie cinétique ($mu^2/2$) et l'énergie potentielle gravitationnelle (mgL_c). Il se définit donc de la manière suivante :

$$F_r = \frac{u}{\sqrt{gL_c}}.$$

MÉTHODE DES VOLUMES FINIS

Dans ce chapitre, on va traiter un écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre autour d'une marche descendente, dont les effets de la gravité et la tension de surface sont négligés , en utilisant la méthode des volumes finis à l'aide du logiciel Fleunt.

Introduction

Il existe plusieurs stratégies de résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) dont les trois plus utilisées sont (La méthode des éléments finis (MEF), la méthode des différences finies (MDF), La méthode des volumes finis(MVF)). Dans ce chapitre nous citons allons La méthode des volumes finis.

Pour la première fois en 1971, la méthode des volumes finis a été décrite par **PATANKAR** et **SPALDING** et publiée en 1980 par **PATANKAR** [18].

Cette méthode comporte une phase de maillage et une phase de discrétisation.

La phase de maillage consiste à diviser le domaine d'étude en de petits volumes appelés volumes de contrôle.

La phase de discrétisation lors de cette étape les équations sont intégrées dans les volumes de contrôle. Cette méthode est caractérisée par :

- Approche physique .
- S'adapte à une géométrie quelconque .
- Conservative .
- La base de tout les codes en Mécanique des Fluides : Fluent et CFX (ANSYS), StarCCM+ et ProStar (CD-Adapco).

La méthode des volumes finis est adaptée aux équations de la mécanique des fluides :

- équation de conservation de la masse.
- équation de conservation de la quantité de mouvement.
- équation de conservation de l'énergie [18].

Cette méthode a été étudié par plusieurs chercheurs tel N.Bounab [6].L'idée fondamentale des volumes finis est de définir un volume de contrôle et d'imposer la conservation des équations sur ce volume de contrôle.

2.1 Principe de méthode

cette méthode consiste à découper domaine d'étude en petite volumes "appelés volumes de contrôle" pour obtenir une domaine de calcul, chaque volume entoure un noeud principal P et pour un noeud principal P , les points E et W (E : *Est*, W : *West*) sont des voisins dans la direction X , tandis que N et S (N : *Nord*, S : *Sud*) sont ceux dans la direction Y . Le volume de contrôle entourant P est montré par des lignes discontinues.

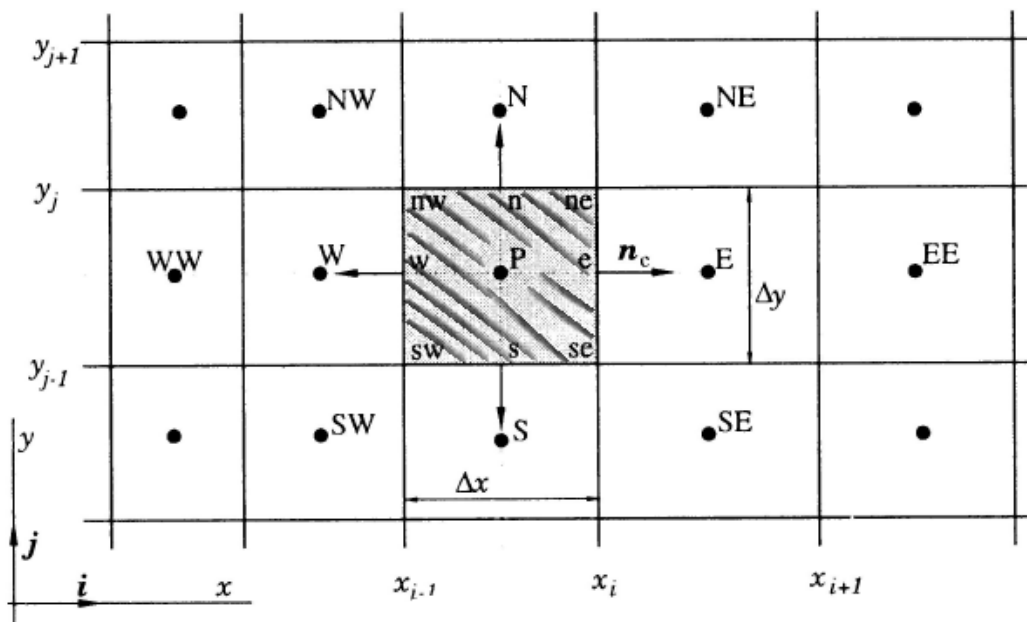


FIGURE 2.1 – Volume de contrôle.

2.2 Position du problème

On considère un écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible, délimité par des marches descendents (ABCD) avec (AB=3.5cm, BC=2.5cm, CD=3.5cm) et un surface libre (AFD) représenté dans la Figure(2.3) .

On suppose que l'écoulement a l'infini est uniforme de vitesse U . Sur la surface libre, puisque les tension de surface et les forces de gravité sont négligées, l'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cte. \quad (2.1)$$

On a le problème suivante :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{avec les conditions limite} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \text{sur AB, BC, CD} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{p}{\rho} = cte & \text{sur la surface libre} \end{cases} \quad (2.2)$$

2.3 Sur la solution exacte

Une solution exacte est calculée par Dr **Dilmi Mustafa**, qui étudie un écoulement autour d'une marche à surface libre où les effets de gravité et de tension de surface négligée.

Utilise d'abord la méthode des lignes de courant et la transformation de Schwartz-Christoffel pour obtenir la solution exacte [17].

2.3.1 Formulation et position du problème

Considérons un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux autour d'une marche, on peut étudier le problème sur le demi-plan supérieur ou inférieur.

On tire $(ABCD)$ on (xox') et (Bc) sur (yoy') la surface libre est (AD) .

On suppose l'écoulement à l'infini est uniforme de vitesse u et d'amplitude H .

On note par $\xi = u - iv$ où (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse et par $f = \phi + i\psi$ où : ϕ est la fonction potentiel, ψ est la fonction de courant.

L'équation de Bernoulli donne : (les tensions de surface libre sont négligées)

$$\frac{1}{2} |\xi|^2 + \frac{P}{\rho} = cst \quad \text{sur AD} \quad (2.3)$$

où ξ est la vitesse de l'écoulement, P est la pression et ρ est la densité du fluide (où $P = cst$) donc de l'équation (2.3) $|\xi| = cst$ sur la surface libre (AFD)

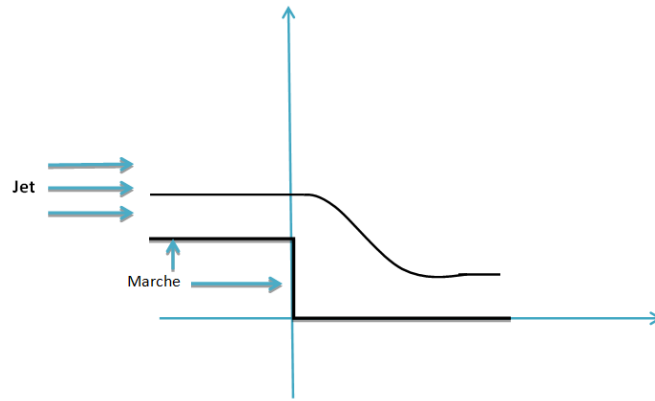


FIGURE 2.2 – Description de problème.

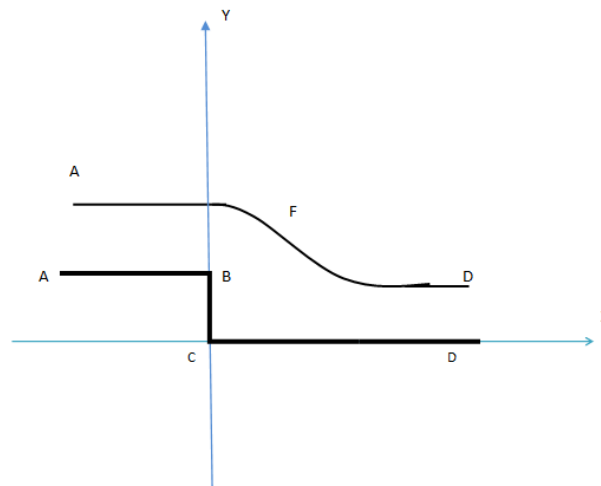


FIGURE 2.3 – Plan de la variable Z.

2.3.2 La solution du problème

De la transformation (1.21), on a :

$$\begin{aligned}\Omega &= \log \left(U \cdot \frac{dz}{df} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) . \\ &= \log \frac{U}{q} + i\theta.\end{aligned}\quad (2.4)$$

on transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable z en Ω plan de la variable λ [Figure (2.4)].

On choisit : $\phi = 0$ au point $(x, y) = (0, 0)$, $\psi = 0$ sur la ligne ABD et $\psi = HU$ sur la ligne de courant AD [Figure (2.5)] .

- La transformation conforme d'une bande dans Ω d'un autre plan complexe λ est donnée par le théorème de Schwartz-Christoffel.

On choisit les points correspondants sur le plan λ [Figure (2.6)] comme suit :

$$B(\lambda = -1, 0), A\left(\lambda = 0, \frac{\pi}{2}\right), F\left(\lambda = \frac{1}{2}, 2\pi\right) \text{ et } D\left(\lambda = 1, \frac{\pi}{2}\right)$$

on trouve une relation entre Ω et λ par la transformation conforme suivante :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \alpha (\lambda + 1)^{-1} (\lambda)^{-\frac{1}{2}} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^1 (\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

par intégration, on trouve :

$$\begin{aligned}\Omega &= \alpha \int (\lambda + 1)^{-1} (\lambda)^{-\frac{1}{2}} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^1 (\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}} d\lambda + \beta \\ &= A \int \frac{2\lambda - 1}{2(\lambda + 1)\sqrt{\lambda^2 - \lambda}} d\lambda + \beta\end{aligned}\quad (2.5)$$

On fait le changement de la variable $\sqrt{\lambda^2 - \lambda} = (\lambda - 1)h$ dans (2.5) on obtient :

$$\Omega = \alpha \int \frac{2}{h^2 - 1} dh - 3\alpha \int \frac{1}{2h^2 - 1} dh + \beta$$

d'où

$$\Omega = -\alpha \left[\log \left| \frac{h-1}{h+1} \right| - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2}h-1}{\sqrt{2}h+1} \right| \right] + \beta$$

Ce qui donne (en revert à la variable λ)

$$\Omega = -\alpha \left[\log \left| \frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}} \right| - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2\lambda} - \sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{2\lambda} + \sqrt{\lambda-1}} \right| \right] + \beta \quad (2.6)$$

où α et β sont des constantes à déterminer.

Pour cette détermination, on a :

1. Pour $\lambda = 1$, $\Omega = 0$. ce qui implique que $\beta = 0$

2. Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $\Omega = -i\frac{\pi}{4}$. ce qui implique que $\alpha = \frac{\frac{\pi}{4}}{-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan(2\sqrt{2})}$

On cherche maintenant, une relation entre f et λ qui transforme la bande du plan f vers le plan λ [Figure (2.4)].

En faisant la correspondance entre les points A , F et D

$$(A, 0, 0), F \left(\frac{1}{2}, \pi \right) \text{ et } (D, 1, 0)$$

on utilise le théorème de Schwartz-Christoffel, on trouve :

$$\frac{df}{d\lambda} = \alpha (\lambda - 1)^{-1} \lambda^{-1}$$

par intégration, on trouve :

$$f = \alpha \int (\lambda - 1)^{-1} \lambda^{-1} d\lambda + B \quad (2.7)$$

d'où

$$f = \alpha \log \left| \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right| + B \quad (2.8)$$

on détermine les constantes α et B :

$$\begin{cases} 1 - \text{Pour } \lambda = -1, f = 0 & \text{on a : } 0 = \alpha \log |2| + B \\ 2 - \text{Pour } \lambda = \frac{1}{2}, f = iHU & \text{on a : } B + \alpha \log |-1| = iHU. \end{cases} \quad (2.9)$$

de la relation (2.9), on trouve : $\alpha = \frac{HU}{\pi}, B = 0$

donc on a

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{HU}{\pi} \left(\frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \right) \quad (2.10)$$

de (1.21) et (2.6)

$$\begin{aligned} u \cdot \frac{dz}{df} &= \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}} \right) \left(\frac{\sqrt{2\lambda} + \sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{2\lambda} - \sqrt{\lambda-1}} \right)^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \right]^{\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan(2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}}} \\ &= u \cdot \frac{\frac{dz}{d\lambda}}{\frac{df}{d\lambda}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

de (2.10) et (2.11), on trouve :

$$u \cdot \frac{\frac{dz}{d\lambda}}{\frac{df}{d\lambda}} = u \cdot \frac{\frac{dz}{d\lambda}}{\frac{Hu}{\pi} \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{H}{\pi} \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}} \right) \left(\frac{\sqrt{2\lambda} + \sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{2\lambda} - \sqrt{\lambda-1}} \right)^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \right]^{\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan(2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}}} \\ z &= \int \left(\frac{H}{\pi} \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}} \right) \left(\frac{\sqrt{2\lambda} + \sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{2\lambda} - \sqrt{\lambda-1}} \right)^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \right]^{\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan(2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}}} \right) .d\lambda \end{aligned}$$

Sur la surface libre : $f = \phi$.

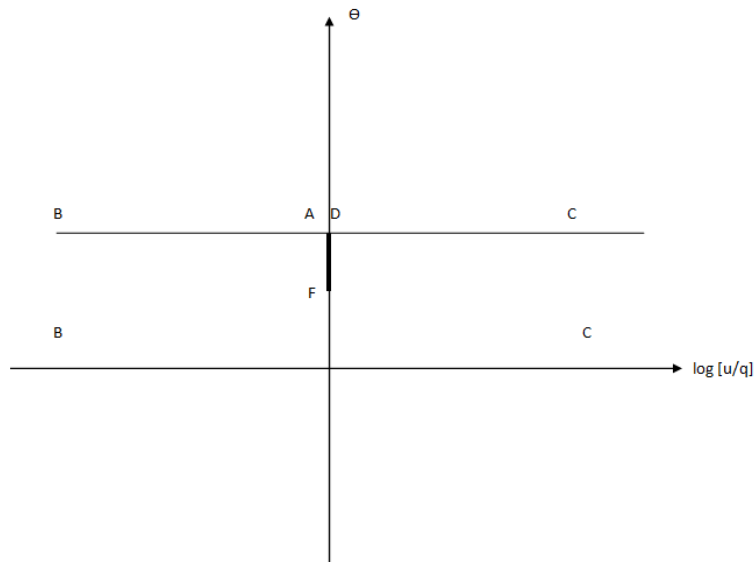
Donc la forme de la surface libre est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\phi) = \int \left(\frac{H}{\pi(\lambda(\lambda-1))} \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda-1}} \right) \left(\frac{\sqrt{2\lambda}+\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{2\lambda}-\sqrt{\lambda-1}} \right)^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \right] \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan(2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} \right) .d\lambda \\ y(\phi) = \int \left(\frac{H}{\pi(\lambda(\lambda-1))} \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda-1}} \right) \left(\frac{\sqrt{2\lambda}+\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{2\lambda}-\sqrt{\lambda-1}} \right)^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \right] \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan(2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} \right) .d\lambda \end{array} \right. \quad (2.12)$$

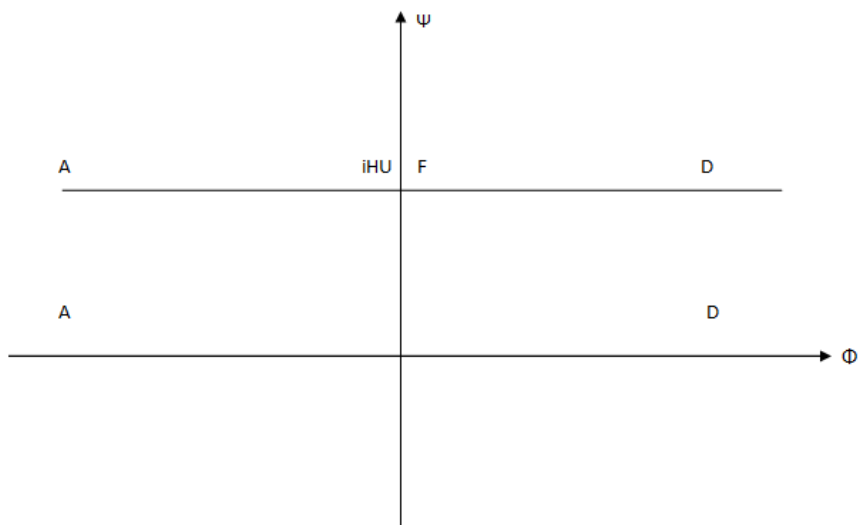
la forme : $\int \left(\frac{H}{\pi(\lambda(\lambda-1))} \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda-1}} \right) \left(\frac{\sqrt{2\lambda}+\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{2\lambda}-\sqrt{\lambda-1}} \right)^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \right] \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan(2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} \right) .d\lambda$

est une intégrale qu'on ne peut pas la résoudre par les méthodes d'intégration connues.

en intégrant numériquement (2.12), on obtient la forme de la surface libre. [Figure (2.7)]

FIGURE 2.4 – Plan de variable Ω .

Transformation du plan Z vers le plan Ω par la transformation de Kirchoff.

FIGURE 2.5 – Plan de la variable f .

transformation du plan Ω et le plan f par la transformation de Schwartz-Christoffel vers le plan λ .

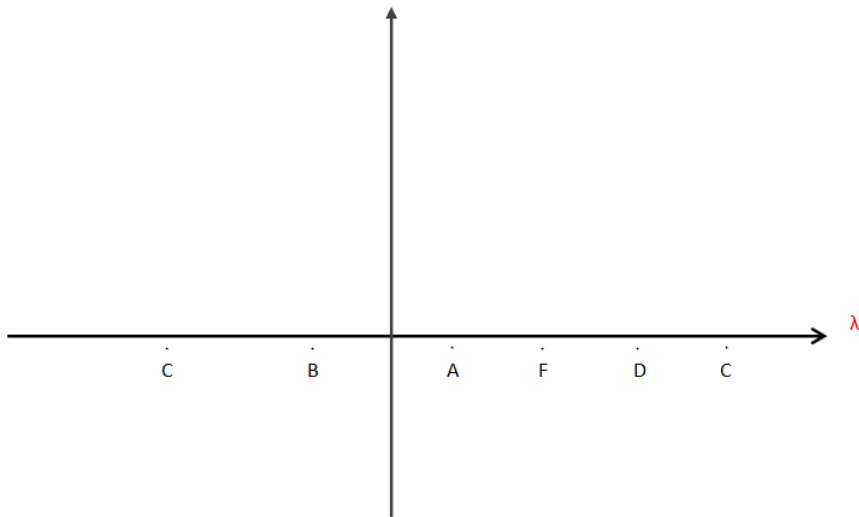
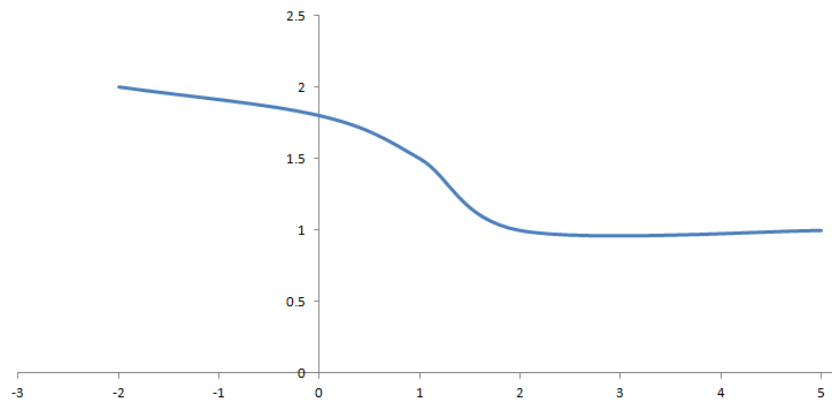
FIGURE 2.6 – Plan de la variable λ .

FIGURE 2.7 – la forme de la surface libre.

2.4 La présentation des logiciels de calcul

Gambit et Fluent sont des logiciels, sous licence commerciale, permettant de réaliser des simulations 2D ou 3D en mécanique des fluides allant de la construction du maillage avec Gambit à la résolution des équations de Navier Stokes et au post-traitement avec Fluent [20].

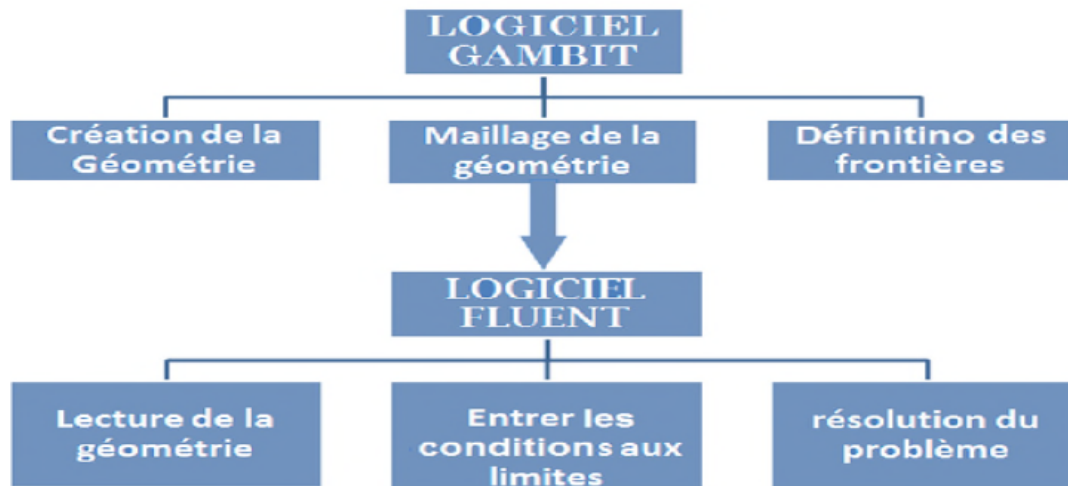


FIGURE 2.8 – Schéma récapitulatif d'une simulation complète sous Gambit et Fluent.

2.4.1 GAMBIT

Le logiciel Gambit est un générateur de maillage 2D/3D qui permet de dessiner et diviser le domaine physique avec une prédéfinition des frontières du domaine géométrique. Le logiciel Gambit génère un fichier et l'exporte pour qu'il soit traité ensuite par le logiciel Fluent [1].

2.4.2 Fluent

Fluent est un code CFD (Computational Fluid Dynamics, ou Dynamique des Fluides Numérique en français) commercial très utilisé dans l'industrie. Il permet de résoudre les écoulements fluides (champs de vitesses, de température). Ce produit dispose d'un outil de graphisme pour l'affichage des résultats et leur exploitation.

Le siège du groupe Fluent est situé à Lebanon, New Hampshire, USA, et compte des filiales en Belgique, Angleterre, France, Allemagne, Inde, Italie, Japon et Suède. Ses logiciels sont aussi vendus à travers le monde grâce à des joint-ventures, des partenariats et des distributeurs en Corée, Australie, Brésil, Chine, Taïwan, République Tchèque, Moyen Orient et dans la plupart des pays européens.

Maillage

Fluent traite plusieurs types de maillages très compliqués qui sont en général importés directement d'autres logiciels de génération de maillages (par exemple "GAMBIT"). Pour l'utilisation correcte de "Fluent" et pour connaître le lien entre les nœuds (cellules) ciblées et les nœuds ou faces voisines, il est noté que "Fluent" mentionne les points avec les indices $i, j, k, 1...etc.$ En plus il donne des topologies de certaines grilles qu'il accepte de résoudre selon le problème posé, on donne comme exemple les figures suivantes :

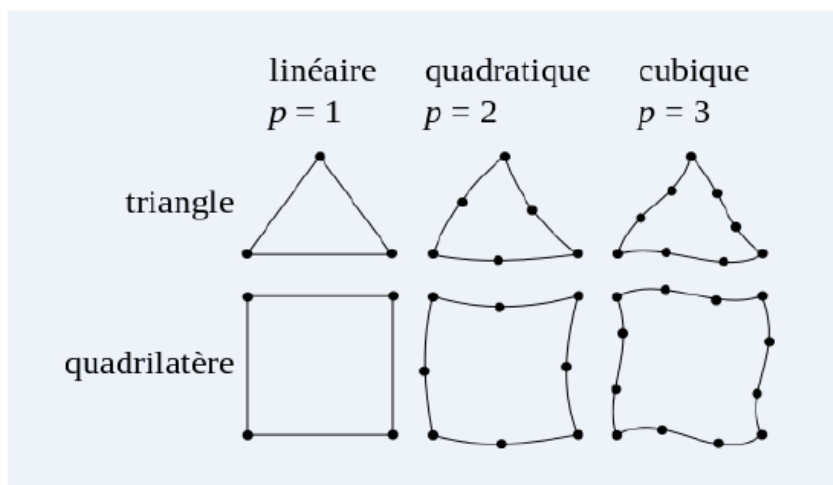


FIGURE 2.9 – principaux d'éléments utilisés en 2D.

Discrétisation

Le code Fluent utilise une technique qui consiste à intégrer les équations différentielles sur chaque volume de contrôle puis de les convertir en équations algébriques.

2.5 Procédure de résolution en utilisant le code Fluent

On présente dans ce paragraphe les différents schémas concernant l'équation de quantité de mouvement :

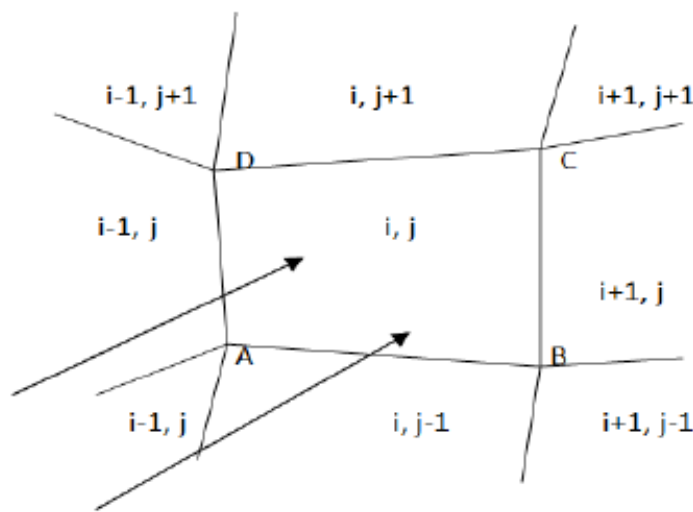


FIGURE 2.10 – Grille volumes finis.

2.5.1 Schéma amont du premier ordre

Pour le schéma amont de premier ordre le logiciel Fluent prend en considération la moyenne de toutes les valeurs d'une cellule comme la valeur stockée au centre de la même cellule. Et les valeurs aux faces sont égales à celle des cellules se trouvant au schéma amont.

2.5.2 Schéma amont de deuxième ordre

Pour les valeurs au centre des cellules, on fait un développement en série de Taylor. Mais pour la valeur sur la face sera :

$$\Phi_f = \Phi + \nabla\Phi\Delta S$$

$$\nabla\Phi = \frac{1}{V} \sum_f^N \Phi_f \tilde{A}. \quad (2.13)$$

L'équation (2.13) donne une autre approche basée sur le calcul de gradient, Φ et $\nabla\Phi$ représentent : la valeur du scalaire dans la cellule centrale et son gradient respectivement et ΔS désigne le vecteur de déplacement (cellule centrale sera avec amount une cellule face).

2.5.3 Schéma Quick

Il est conseillé pour les maillage quadrilateral ou hexaedrique, on peut l'écrire sous la forme :

$$\Phi = k \left(\frac{S_b}{S_c + S_b} \Phi_m + \frac{S_c}{S_c + S_b} \Phi_l \right) + (1 + k) \left(\frac{S_d}{S_c + S_d} \Phi_m + \frac{S_c}{S_c + S_d} \Phi_E \right). \quad (2.14)$$

On peut écrire alors l'équation de la continuité $\oint \rho U dA = 0$ sous forme décritisée suivante :

$$\sum_f^N J_f A_f = \sum_f^N \rho U_n A_f = 0.$$

U_n et A_f sont respectivement la composante normale de la vitesse sur une face et l'une des face qui contient le volume de controle. Pour la résolution, on a utilisé le code Fluent qui contient des fichiers concernant la lecture des données (la nature de fluide, la gravité, la viscosité et la pression ...) et d'autres concernant les détails de la géométrie du problème posé (les schémas de la décritisation, les conditions aux limites , ...).

2.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

L'équation différentielle de transport de quantité de mouvement est la suivante :

$$\oint p \vec{U} d \vec{A} = - \oint P I d \vec{A} + \oint \tau d \vec{A} + \int_v \vec{F} dV.$$

$-\oint P I d \vec{A}$: est la force totale de pression sur les N faces de polyèdre, ou :

I : est la matrice identité \vec{A} est le vecteur de surface.

A est la force totale visqueuse sur les N faces du polyèdre.

Ou :

τ : est le tenseur de contrainte.

$\int_v \vec{F} dV$: est le force totale de volume sur le volume du polyèdre, ou :

\vec{F} : est le vecteur de force.

L'équation discrétisée aura la forme suivante :

$$a_p U = \sum_f^{Nface} a_{nb} U_{nb} + \sum_f^{Nface} P_i \check{A} + S. \quad (2.15)$$

Ou :

a et a_{nb} sont les coefficients de linearisation. L'indice nb (neighbor) correspond aux cellules adjacentes.

2.7 Discrétisation de l'équation de transport

l'équation de transport dans le cas stationnaire, bidimensionnel de la manière suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial X} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial Y} (\rho v \phi)}_1 - \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\underbrace{\Gamma}_{3} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) \right]}_2 = \underbrace{S_\phi}_4$$

Avec :

1- terme convectif

2-Terme deffusif

3- Coeficient Gamma

4- terme source

Où :

L'intégration de terme convectif sur le volune de contrôle :

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial X} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial Y} (\rho v \phi) \right] dV &= \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} (\rho u \phi) dX dY + \int_s^n \frac{\partial}{\partial Y} (\rho v \phi) dX dY \\ &= [(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w] \Delta Y + [(\rho v \phi)_n - (\rho v \phi)_s] \Delta X \end{aligned}$$

En itégrant de terme convectif sur le volune de contrôle :

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) \right] dV &= \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) dX dY + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) dX dY \\ &= \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w \right] \Delta Y + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right] \Delta X \end{aligned}$$

terme convectif +terme diffusif

$$\begin{aligned} (\rho u \phi)_e \Delta Y - (\rho u \phi)_w \Delta Y + (\rho v \phi)_n \Delta X - (\rho v \phi)_s \Delta X - \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e \Delta Y - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w \right. \\ \left. \Delta Y + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n \Delta X - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s \Delta X \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\Gamma_e \frac{\Delta Y}{\Delta X} - (\rho u)_e \frac{\Delta Y}{2} \right) \phi_E + \left(\Gamma_w \frac{\Delta Y}{\Delta X} + (\rho u)_w \frac{\Delta Y}{2} \right) \phi_W - \left(\Gamma_n \frac{\Delta Y}{\Delta X} - (\rho v)_n \frac{\Delta Y}{2} \right) \phi_N + \left(\Gamma_s \frac{\Delta Y}{\Delta X} + (\rho v)_s \frac{\Delta Y}{2} \right) \phi_S$$

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2}$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}$$

$$a_N = D_n - \frac{F_n}{2}$$

$$a_S = D_s + \frac{F_s}{2}$$

l'équation algébrique finale s'écrit sous la forme :

$$a_p \phi_P = a_E \phi_P + a_W \phi_P + a_S \phi_P + a_N \phi_P$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S$$

avec :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e &= \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta X} \right) & \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_n &= \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta Y} \right) \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_w &= \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta X} \right) & \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_s &= \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta Y} \right) \end{aligned}$$

Flux diffusif :

$$D_e = \frac{\Delta Y}{\Delta Y} \Gamma_e / D_w = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \Gamma_w / D_n = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \Gamma_n / D_s = \frac{\Delta Y}{\Delta Y} \Gamma_s$$

Flux convectif :

$$f_e = \rho \Delta Y u_e / f_w = \rho \Delta Y u_w / f_n = \rho \Delta X u_n / f_s = \rho \Delta X u_s$$

Et :

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad \phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}$$

$$\phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2} \quad \phi_s = \frac{\phi_S + \phi_P}{2}$$

2.8 Résolution du problème

Un fichier de données (extension .cas) est créé suite à la lecture du fichier contenant les détails de la géométrie (extension. msh). Après vérification du maillage, on passe au type de solveur. Pour notre cas, c'est un solveur découplé avec une formulation implicite pour un cas dimensionnel et un écoulement stationnaire prenant en considération des vitesses absolues.

D'autres équations peuvent être ajoutées selon les phénomènes étudiés (transfert de chaleur, combustion, multiphases ...).

Les autres étapes du menu "define" sont les choix du fluide (air), des conditions d'opération (introduction de l'effet de la gravité et de la pression de référence) et l'introduction des conditions aux limites.

Le dernier menu utilisé pour entamer le calcul est le menu "solve".

On doit choisir les équations à résoudre, les schémas de discrétisation, les facteurs de sous-relaxation et les critères de convergence. Le calcul est initialisé d'après les conditions aux limites.

2.9 Discussion des résultats



FIGURE 2.11 – La discrétisation.

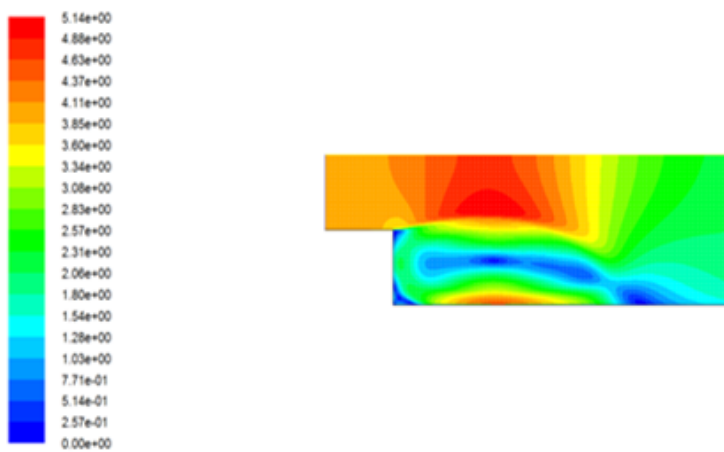


FIGURE 2.12 – Le contour de la magnitude de la vitesse.

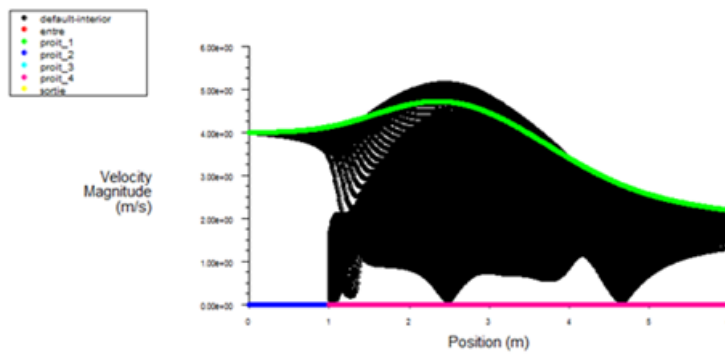


FIGURE 2.13 – La magnitude de vitesse.

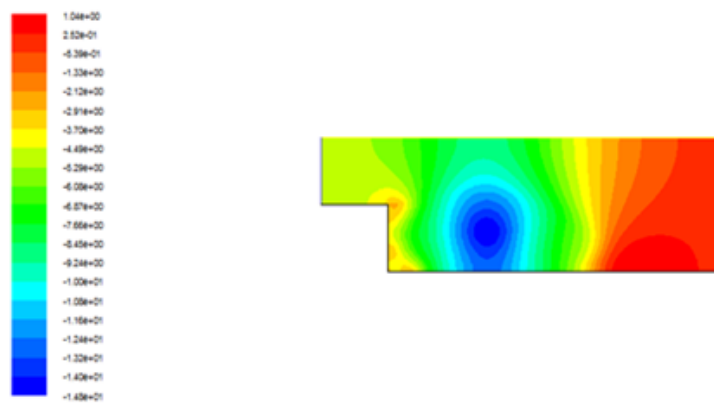


FIGURE 2.14 – Contour de la pression statique.

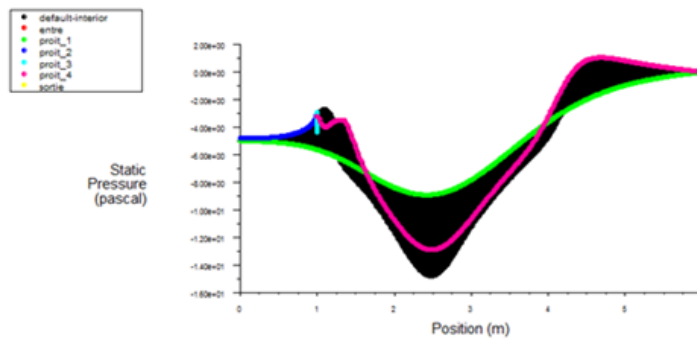


FIGURE 2.15 – La pression statique.

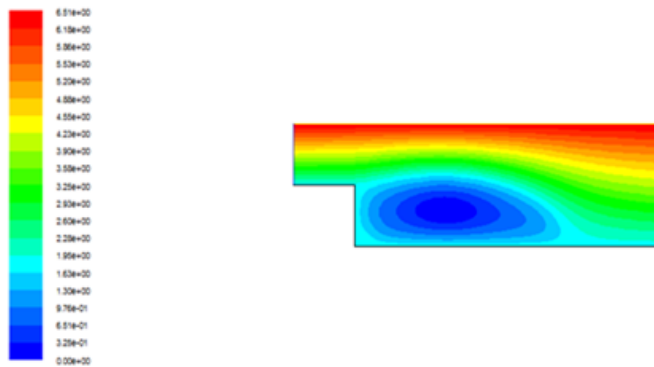


FIGURE 2.16 – Contour de la fonction de courant.

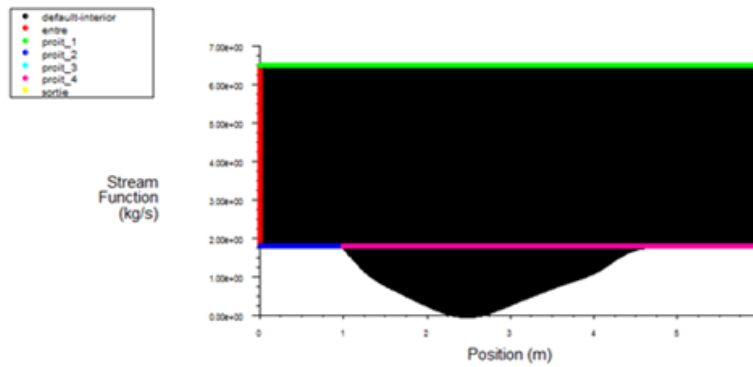


FIGURE 2.17 – La fonction de courant.

2.9.1 La Vitesse

D'après les Figures (2.12) et (2.13) nous remarquons que la vitesse d'écoulement est nul à côté des angle, juste les deux angles de la marche descendentes, et au centre de la marche, et presque nul à la fin de la de la marche (de 0 ou 1.54 m/s).

la vitesse s'augmente peu à peu depuis début de la marche (l'entré de la fluide) jusqu'au le milieu de la marche descendente (de 3.60 ou 5.14 m/s) cela ensuite se diminuer au prés la fin de la marche 2.31m/s.

2.9.2 La Pression Statique

D'après les Figures (2.14) et (2.15) nous remarquons que la pression Statique est nul dans le centre du point de rectangle des marches descendents ($-1.45 * 10^1 pa$) et elle s'augmente peu à peu a la fin de la marche descendente où elle atteint son maximun juste au bord du marche ou aussi au prés des angles (1.04pa).

2.9.3 Fonction de courant

Concernant la fonction de courant , sur la Figure (2.16) est dense au milieu de la marche (nul), elle s'augmente peu à peu jusqu'au elle atteint son maximun sur la partie superieur.

Conclusion générale

Dans ce mémoire on a étudié numériquement un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre d'un fluide parfait et incompressible , où on a appliqué la méthode des volumes finis à l'aide du logiciel de calcul Fluent qui nous a aidé de traiter ce type d'écoulement où on a aboutit à des bons resultats concernant : la vitesse, la pression statique et la fonction de courant.

En fin, changeant la géométrie d'obstacle , l'état de l'écoulement (quelques caractéristiques de fluide) ou bien l'application d'autres techniques de calculs seront notre perspectives et des futures.

Bibliographie

- [1] M.Abderrahmane, Simulation numérique de l'effet du gradient de température sur l'écoulement d'air dans une cheminée solaire.Université Mohamed Boudiaf de M'sila ,24 – 06 – 2018.
- [2] A.ABDELKADER,Calcul numérique d'un jet bidimensionnel d'un fluide devant un mur d forme quelconque,Thèse Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Sciences,Université Mohamed Boudiaf M'sila ,03/07/2018.
- [3] G.Birkhoff and E.H.Zarantello,Jets, wakes and cavities, New York ,1957.
- [4] B.Bouder and H.Mekais, The cusp free surface flow due to sink with effects of surface-tention,Kybernetez,G.B.August 2001.
- [5] B.Bouderah and H.Mekias, A cybernetic approach to the problem of cusp free-surface flow caused by a line sink on a sloping bottom ,Kybernetes, 31(2)(2002), 305 – 316.
- [6] N.Bounab, Simulation Numérique de Quelques écoulements potentiels en 2D "Curved Nozzle" Thèse de doctorat, Université Mohamed Boudiaf M'sila , (2015).
- [7] G.K.Batchlors, An introduction to Fluid dynamics,Cambridge,1967.
- [8] F.Dias and J.M. Vanden-Broeck, Flows amerging from a nozzle and filling under gravity. J. Fluid, Mech ,213(1990), 465 – 477.
- [9] F. DABBENE et H.PAILLERE, Initiation à la simulation numérique en mécanique des fluides : Eléments d'analyse numérique, Cours ensta MF307,6 juin 2003.
- [10] BOURICH (ENSAM),Cours de Mécanique des Fluides, Université Cadi Ayyad, Deuxième édition 2014.
- [11] P.Emmanuel à Mines Nancy ,Mécanique des fluides,Version du 21 octobre 2016
- [12] C.Grossetête, Mécanique des Fluides,Ellipses,Paris,1991.
- [13] A.Gasmi, Ecoulement potentiel et bidimensionnel issu d'un orifice d'un réservoir, Thèse de Magister ,1997.(Université de constantine).

- [14] A. Gasmi and H. Mekias, A jet from a container and flow past a vertical plate, *Appl. Math, Sci*, 1(2007), 2687 – 2698.
- [15] P. Le Quéré et B. Podvin, *Méthodes numériques pour les écoulements incompressibles*, 2010.
- [16] C. MEURIS, *Mécaniques des fluides*, Université Aix Marseille 1, 2008.
- [17] D. Mustapha, Résolution numérique d'un problème non linéaire dans un à frontière libre d'un jet autour d'une Marche Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER, Université Mohamed Boudiaf M'sila, 2006.
- [18] K. Noureddine et B. Khawla, Une Méthode Numérique de Volume Fini pour Résoudre la Conduction 2D dans une Plaque Rectangulaire en utilisant MATLAB, Centre Universitaire Salhi Ahmed Naama, Centre Universitaire Salhi Ahmed Naama, December 2018.
- [19] W. Peng and D.F. Parker, An ideal fluid jet impinging on an uneven wall, *J. Fluid mech.* (1997), vol. 333, pp. 231 – 255.
- [20] B. Syphax et A. Mahdi, Simulation numérique de l'étalement d'un film mince sur substrat plan par la technique centrifugation (Spin coating) (cylindre) Sous l'effet de gravité-application aux revêtements, Université Abderrahmane MIRA-Bejaia, 22 – 06 – 2017.
- [21] A. Stoukov, Introduction à la Mécanique des Fluides Numérique : Méthode "Volumes Finis", Département Hydraulique / Mécanique des Fluides, Version initiale : Octobre 2006, Revision : Février 2012.
- [22] M.R. Spiegel, Variables complexes cours et problèmes (série Schaum), Mc Grawhill, New York, 1973
- [23] M. Souhila, Applications de la technique des transformations conforme à un problème d'écoulement d'un fluide, Mémoire Présenté pour l'obtention du diplôme de Master, Université Mohamed Boudiaf M'sila, 2015/2016.
- [24] Jean-Marc Vanden-Broeck, Bubbles rising in tube and jets falling from a nozzle, *Phys. Fluids* 27(5), May 1984, P. 1090 – 1093.

-
- [25] Jean-Marc Vanden-Broeck, Flow under a gate, *Phys. Fluids* 29(10), october 1986, P 3148 – 3151.
- [26] J-M.Vanden-Brock, Free streamline model for a rising bubble, *phys.fluids*, 29(9)(1986), 2798 – 2801.
- [27] A.ZINEB, Etude numérique d'un écoulement Potentiel un jet devant un obstacle, Université Mohamed Boudiaf de M'sila , 04 – 06 – 2017.
- [28] cours Dr.Boulechfar Hichem ,Géométrie, équations gouvernantes, modèle physique, Université Mohamed Boudiaf de M'sila .

Résumé

ملخص: في هذه المذكرة قمنا بدراسة تدفق كموني ثنائي الابعاد لسائل مثالي ذو سطح حر امام عائق متمثل في درج مع اهمال قوى الجاذبية وتأثيرات السطح.

باستعمال طريقة الحجوم المنتهية وبمساعدة برنامج فليانت بهدف معالجة بعض خصائص السائل مثل : السرعة - دالة التدفق - الضغط .

الكلمات المفتاحية: سائل مثالي - التدفق المحتمل - الحجوم المنتهية - برنامج فليانت .

In this memory, we have numerically studied some potential flows of a perfect fluid in the face of an obstruction to the shape (walking down), neglecting the forces of gravity and surface tension, and using the finite volume method at using Fluent software to process some fluid characteristics.

Keywords : Perfect Fluid, Potential Flow, Finished Volumes, Fluent.

Dans cette mémoire , nous avons étudié numériquement quelques écoulement potentiels d'un fluide parfait devant un obstacle à la forme (marche descendente), en négligeant les force de la gravité et les tensions de la surface, et en utilisant la méthode des volumes finis et à l'aide du logiciel Fluent pour traiter quelques caractéristiques de fluide.

Mots-Clés : Fluide parfait ,Écoulement potentiel, Volums finis , Fluent.

ANNEXE

Présentation des logiciels (Gambit et Fluent)

Gambit

Après avoir lancé le logiciel, l'interface d'utilisation apparaît.

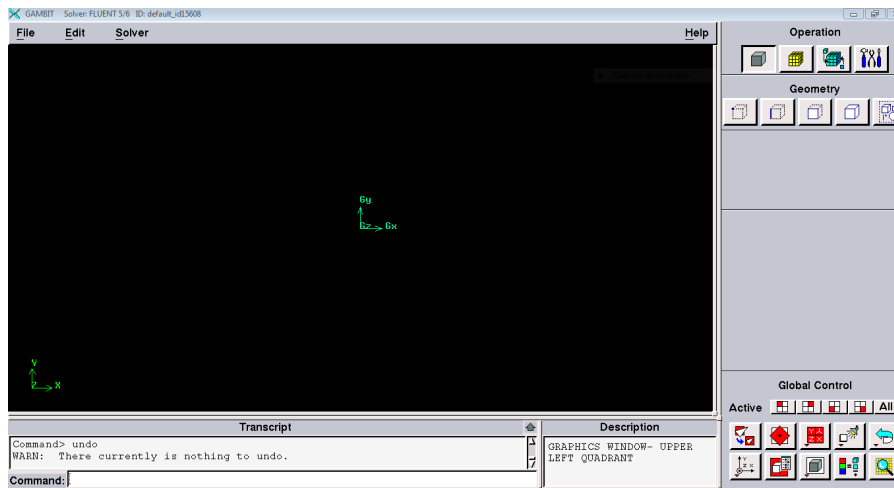


FIGURE 3.1 – Fenêtre principale.

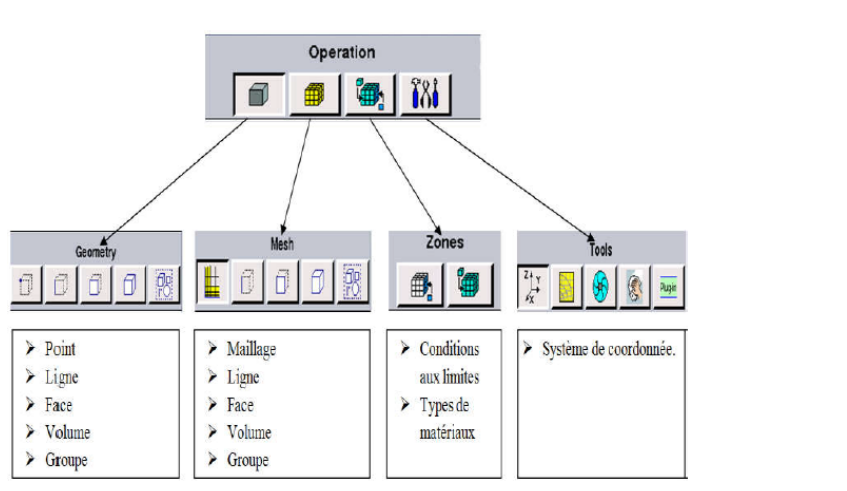


FIGURE 3.2 – Différentes opérations pour créer la géométrie.

Fluent

1- Après avoir lancé le logiciel fluent, l'interface d'utilisation apparait.

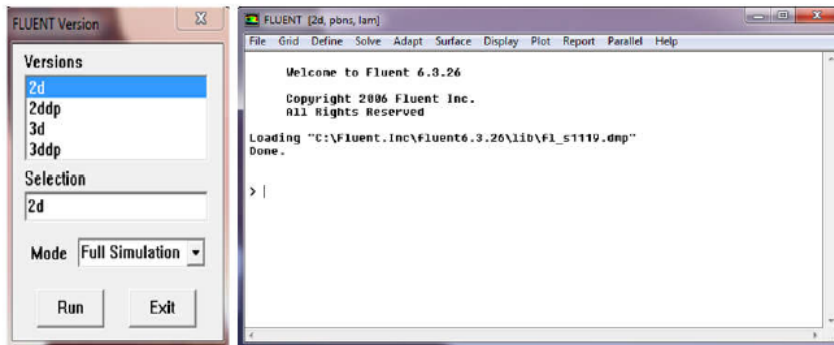


FIGURE 3.3 – Fenêtre principale du logiciel Fluent.

2- Ouvrir le fichier (*.msh) crée par Gambit

- Ouvrir le fichier pour la première fois :

File → **Read** → **case**

- Ouvrir le fichier lu précédemment

File → **Read** → **case & Data**

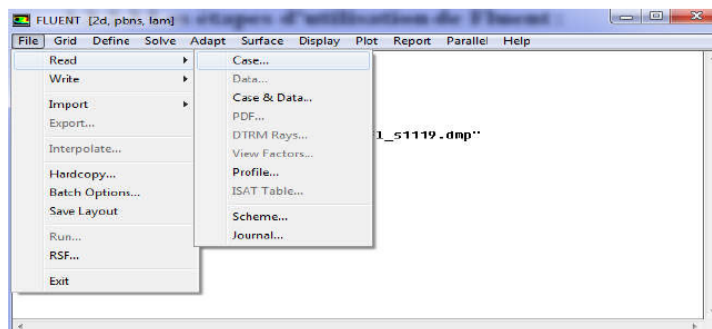


FIGURE 3.4 – Ouvrir le fichier (*.msh).

Exemple 3.1.

- Création de la géométrie

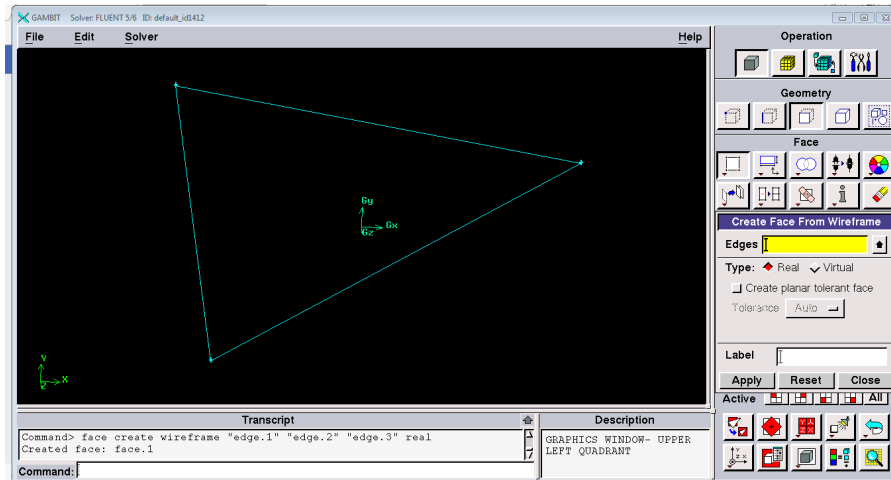


FIGURE 3.5 – Géométrie du domaine physique.

- Générer un maillage

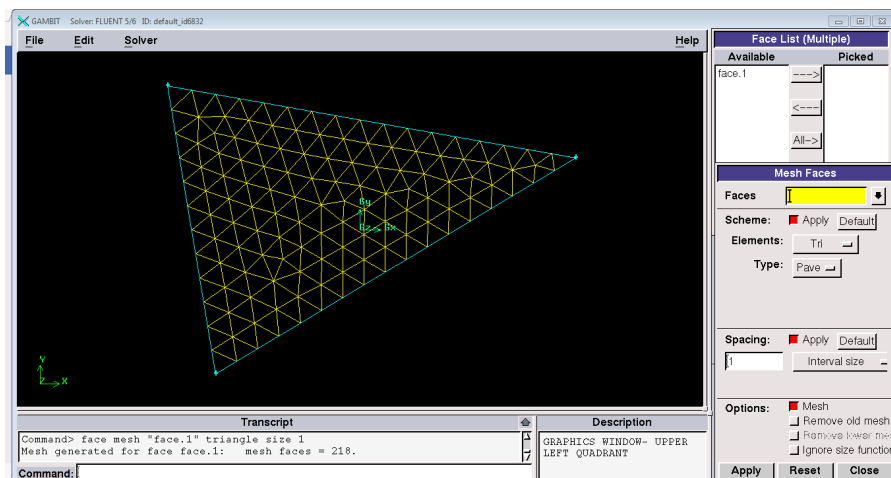


FIGURE 3.6 – Maillage du domaine physique.

- type de maillage

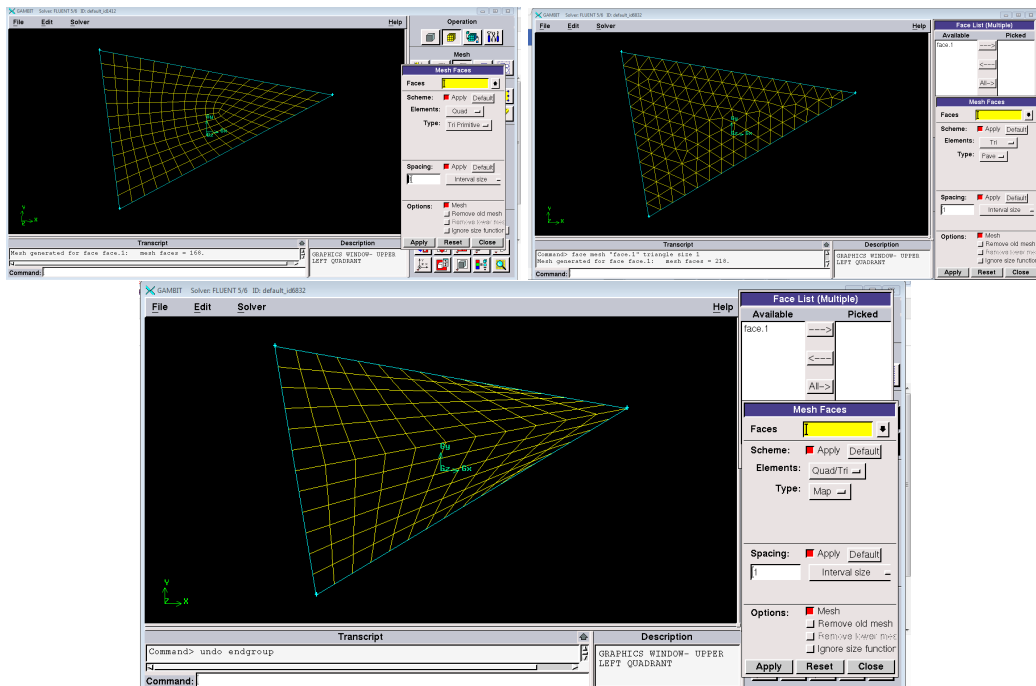


FIGURE 3.7 – type de maillage.

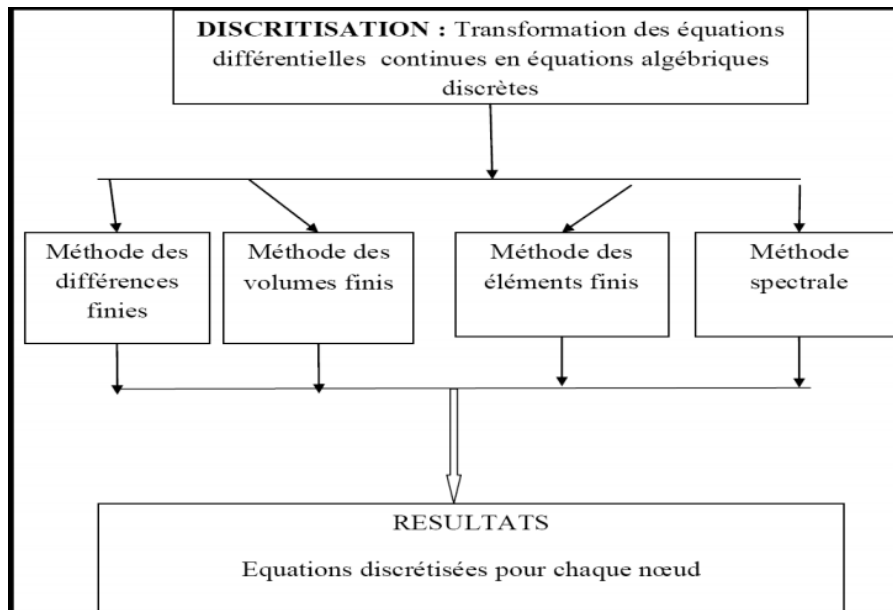


FIGURE 3.8 – Méthode de discrétisation.