



UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et de L'informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs

Présenté par
SAHRAOUI Souheyla

Sujet

**Méthode de moving plane et équations elliptiques
semi-linéaires**

Soutenu le :23/06/2022

Devant le jury :

Mr. Sengouga Abdelmouhcene

M.C.A. Univ de M'sila

Président

Mr. Bougherara Brahim

M.C.A. Univ de M'sila

Encadreur

Mr. Mokhtari Abdelhak

M.C.A. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2021/2022

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

*Je tiens à remercier sincèrement **Mr : Bougherara Brahim** , pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour ses conseils.*

Mes remerciements vont également aux membres du jury

***"Mr : Sengouga Abdelmouhcene et Mr : Mokhtari Abdelhak "** qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.*

Aussi mes remerciements à tous les enseignants de département de mathématiques et précisément, les enseignants de spécialité équations aux dérivées partielles et applications.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Merci

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

*-A mes chers parents " **Messlemi et Aida** ",*

-A mon chère frère Blackder,

-A mes chères sœurs : Aichouche, Nour elhouda, Chahra, Malek, Omeyma,

-A toute la famille Sahraoui,

-A toute la famille Kouidri,

-A mon mari Yassine,

-A tous mes amis : Aid Safia, Djenidi Dounia, Zouid Lina, Hamidi Lobna,

Nadia, Kaltoum, Bouzina Amira, Loukar Néssrine, Faiza, Sarah, Ahlam,

ilham, Néssrine,

-A toute ma famille de département,

de Mathématiques,

-A toutes mes adorables que j'ai connu pendant

toute ma vie ...

Sahraoui Souheyla

Table des matières

Remerciements	1
Dédicace	2
Notation	4
1 Préliminaires et outils de base	7
1.1 L'espace de Lebesgue	7
1.2 Rappels sur les espaces de Sobolev	8
1.3 Théorème d'injection de Sobolev	10
2 Principe de maximum	12
2.1 Principe de maximum faible	12
2.2 Principe du maximum fort	15
2.3 Principe de comparaison généralisé	18
3 Méthode de moving plane pour certains problème elliptique	22
3.1 Préliminaire et résultats principaux	22
3.2 Preuve de théorème 3.1	23
3.3 Preuve de théorème 3.2	28
Abstract	35

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert.
X'	Dual topologique de X .
$(.,.)$	Le produit scalaire.
$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension N , N un nombre naturel non nul.
$\partial\Omega$	frontière de Ω .
$\langle.,.\rangle$	crochet de dualité entre X et son dual.
$\nabla u = Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$	gradient de u .
$\operatorname{div} u$	divergence u , $\operatorname{div} u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_N}$.
$f_n \rightarrow f$	dénote que la suite $\{f_n\}$ converge vers f .
$f_n \rightharpoonup f$	dénote que la suite $\{f_n\}$ converge faiblement vers f .
$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } (\int_{\Omega} u(x) ^p dx < +\infty \text{ tel que } 1 \leq p < \infty\}$.
q	conjugué de Hölder de p : $q = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $q = \infty$ si $p = 1$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω à support compact dans Ω .
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	$= \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$.
p.p.	presque partout.
$X \hookrightarrow y$	L'injection canonique de X dans Y est continue.
$X \hookrightarrow_c Y$	L'injection canonique de X dans Y est compacte.

Introduction générale

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons principalement aux propriétés qualitatives de solutions classiques de certains problèmes elliptiques. Plus précisément, nous nous intéresserons à la symétrie radiale des solutions classiques positives des équations aux dérivées partielles elliptiques dans des domaines symétriques de $\mathbb{R}^N$. La symétrie radiale est une propriété extrêmement importante si on considère solutions des équations des systèmes dans $\mathbb{R}^N$. En effet, sachant qu'une équation ou un système particulier n'admet que des solutions classiques radiales, on peut réduire le problème donné à celui d'une équation différentielle ordinaire (ODE) qui est plus facile à traiter. De plus, les question d'existence et non-existence sont bien mieux comprises lorsque l'on travaille dans le contexte des ODE. Autrement dit, établir la symétrie radiale des solutions est un outil utile pour établir l'existence ou la non-existence de solutions classiques à un problème donné. Dans cette approche, il s'avère souvent utile d'utiliser des estimations de désintégration a priori ainsi que des propriétés de symétrie.

La méthode utilisée à cet effet est la célèbre méthode de "moving plane" qui est très utiles pour établir la symétrie radiale des solutions. Malgré ses nombreuses applications récentes, le cœur de cette méthode est basé sur certaines notions élémentaires. En effet on aura besoin de :

1. Lemme de Hopf pour les opérateurs elliptiques ;
2. principes des maximums forts et faibles pour les opérateurs elliptiques ;
3. Autre version de principes de comparaison.

Le premier chapitre est consacré à rappeler quelques notions et résultats sur (L'espace

de Lebesgue, les espaces de Sobolev, Théorème d'injection de Sobolev, ...)

Le seconde chapitre est consacré à présenter le principe de maximum faible et forte, et aussi on donne d'autres version de principe de maximum utile dans la suite.

Dans le dernier chapitre, on applique la méthode de "Moving plan" au problème elliptique posés sur des domaines symétriques de $\mathbb{R}^N$, pour démontrer que les solutions sont radialement symétriques.

Préliminaires et outils de base

Ce premier chapitre, a pour objet la présentation des notions et des résultats utilisés dans les chapitres suivants (espace de Lebesgue, espaces de Sobolev...ect). Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx .

1.1 L'espace de Lebesgue

Définition 1.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p un nombre réel supérieur ou égal à 1. on appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tq } \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right) < \infty \right\}.$$

On définit la norme suivante

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.2. Pour $p = \infty$, on définit l'espace de Lebesgue comme suivante

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists C > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \right\}$$

On définit la norme suivante

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$$

Théorème 1.1. On a les propriétés suivantes :

- $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ est espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$;
- $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ est séparable pour tout $1 \leq p < \infty$;
- $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ est réflexif pour tout $1 < p < \infty$.

Notation 1.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lemme 1.1. (Inégalité de Hölder)

Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Si de plus $|\Omega| < \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

1.2 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans cette section, on fait un bref rappel sur les espaces de Sobolev. Pour une présentation plus complète de ces espaces, on réfère à l'ouvrage de H. Brézis [3] ou R. A. Adams [1]. Soit p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.3. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} u \in L^p(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle de u au sens des distribution. En d'autres termes, une fonction $u \in L^p(\Omega)$ est dans $W^{1,p}(\Omega)$ s'il existe N fonction $v_1, v_2, \dots, v_N \in L^p(\Omega)$ tel que

$$\int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int v_i \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \forall i \in 1, 2, \dots, N$$

on note $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \forall i = 1, 2, \dots, N$.

l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad (1.1)$$

Remarque 1.1. pour $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire suivante

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_i^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.1. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est :*

- Un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$;
- Un espace réflexif pour $1 < p < +\infty$;
- Un espace séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.4. *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ désignant l'ensemble des fonction de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω , et pour $1 \leq p < \infty$ L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, relativement à la norme (1.1). De manière équivalente, on a*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \text{avec } u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega (\text{au sens de trace}) \right\}.$$

Cette espace muni d'une norme équivalente à la norme (1.1), donnée par

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

pour $p = 2$, $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire suivante

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour les résultats sur les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ le lecteur pourra trouvé toutes les démonstrations dans l'ouvrage de Adams [1].

Citons cependant, que dans la plupart des cas, les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ ne coïncident pas.

Notation 1.2. *On note par $W^{-1,p'}(\Omega)$ le dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$, et dans le cas $p = 2$, on note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$.*

Théorème 1.2 (Inégalité de Poincaré). *Soit $1 \leq p < \infty$, et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ alors il existe une constante $C = C(\Omega, p)$ telle que*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Remarque 1.2. *Il est évident que cette inégalité ne peut être généralisée aux espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonction constantes sur Ω borné (ou de mesure finie).*

1.3 Théorème d'injection de Sobolev

Énonçons les théorèmes "d'injection" continue, et compacte établis pour les espaces de Sobolev définis sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.5. *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon continue dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow Y$ si :*

- a) *X est un sous-espace de Y .*
- b) *il existe $c > 0$ tel que pour tout $u \in X$:*

$$\|u\|_Y \leq c \|u\|_X$$

Définition 1.6. *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon compacte dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow_c Y$ si :*

- i) *X s'injecte de façon continue dans Y .*
- ii) *De toute suite bornée dans X on peut extraire une sous suite converge fortement dans Y .*

Théorème 1.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1 , et soit $1 \leq p < \infty$, on a*

- *Si $1 \leq p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,*
- *Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[.$*

— Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

De plus, si $p > N$ alors on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} C |x - y|^\alpha \quad p.p. \quad x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ et C dépende seulement de Ω et N . En particulier $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$

Théorème 1.4. (Théorème de Rellich-Kondrachov)[\[4\]](#) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 , on a

1. Si $p < N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*]$. où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,

2. Si $p = N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$.

3. Si $p > N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c C(\bar{\Omega})$

en particulier $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega)$ avec pour tout p

Principe de maximum

Le principe du maximum est une propriété des solutions de certaines équations aux dérivées partielles de type elliptique ou parabolique, qui dit qu'une fonction solution d'une telle équation sur un domaine atteint son maximum sur la frontière du domaine. De façon plus précise, le principe du maximum fort dit que si la fonction atteint son maximum à l'intérieur du domaine, elle est constante. Le principe du maximum faible dit que le maximum de la fonction est atteint sur la frontière du domaine.

Soit Ω un ouvert

$$\begin{cases} -\Delta u + c \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

est positive ou nulle dans $\bar{\Omega}$, et c est une fonction bornée et positive.

2.1 Principe de maximum faible

Théorème 2.1. *On suppose que $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$*

$$(i) \quad \text{Si } -\Delta u \leq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{alors} \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad (2.2)$$

$$(ii) \quad \text{Si } -\Delta u \geq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{alors} \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \quad (2.3)$$

Remarque 2.1. *A une fonction satisfaisant (2.2) s'appelle une sous-solution nous affirmons donc qu'une sous-solution atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$. De même, si (2.3) c'est vrai, u est une super solution et atteint son minimum sur $\bar{\Omega}$.*

Démonstration. On distingue la preuve en deux étapes :

1. Si $-\Delta u < 0$

Soit $x_0 \in \Omega$ telle que $u(x_0) = \min_{\bar{\Omega}} u$ (notons que le min est atteint car u continue sur $\bar{\Omega}$). $u(x_0) = 0$, alors la matrice hessienne est défini négatif ($Du(x_0) \leq 0$). $\Delta u(x_0) \leq 0$ et donc $-\Delta u(x_0) \geq 0$ (Contradiction). Donc x_0 ne réalise pas le min de u . D'où u atteint son minimum sur la frontière de Ω .

2. Si $-\Delta u \leq 0$

On définit la fonction suivante

$$u_\epsilon(x) = u(x) - \epsilon e^{x_1}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega, \epsilon > 0$$

On a alors

$$-\Delta u^\epsilon = -\Delta u - \epsilon \exp(x_1) < 0 \quad \text{dans } \Omega$$

D'après l'étape précédent on a $\max_{\bar{\Omega}} u^\epsilon = \max_{\partial\Omega} u^\epsilon$

D'autre par on a

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} u^\epsilon &= \max_{\bar{\Omega}} (u + \epsilon \exp(x_1)) \\ &= \max_{\bar{\Omega}} (u) + \epsilon \max_{\bar{\Omega}} \exp(x_1) \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\bar{\Omega}} u^\epsilon = \max_{\bar{\Omega}} u \quad (2.4)$$

Et on a

$$\begin{aligned} \max_{\partial\Omega} u^\epsilon &= \max_{\partial\Omega} (u + \epsilon \exp(x_1)) \\ &= \max_{\partial\Omega} (u) + \epsilon \max_{\partial\Omega} \exp(x_1) \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\partial\Omega} u^\epsilon = \max_{\partial\Omega} u \quad (2.5)$$

D'après (2.4) et (2.5) on en déduit que $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ ce qui finit la démonstration

□

Théorème 2.2. *On suppose que $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ et c est une fonction bornée et positive.*

i) *Si $-\Delta u + cu \leq 0$ dans Ω alors*

$$\max_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \quad (2.6)$$

ii) *Si $-\Delta u + cu \geq 0$ dans Ω alors*

$$\min_{\Omega} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^- \quad (2.7)$$

Remarque 2.2. *En particulier, on a si $-\Delta u = 0$ dans Ω alors*

$$\max_{\Omega} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| \quad (2.8)$$

En effet

$$(2.7) \implies -\min_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^-$$

$$\implies \max_{\Omega} (-u) \leq \max_{\partial\Omega} u^- \quad (2.9)$$

De (2.6) et (2.9) on a

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} u + \max_{\bar{\Omega}} (-u) &\leq \max_{\partial\Omega} u^+ + \max_{\partial\Omega} u^- \\ &= \max_{\partial\Omega} (u^+ + u^-) \\ &= \max_{\partial\Omega} |u| \end{aligned}$$

D'où

$$\max_{\Omega} |u| \leq \max_{\Omega} u^+ + \max_{\Omega} u^- \leq \max_{\partial\Omega} |u| \leq \max_{\Omega} |u|$$

Donc

$$\max_{\Omega} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

Démonstration. (de Théorème 2.2). i) Soit u une sous-solution (i.e. $-\Delta u + cu \leq 0$) et posons $V = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$, on a $-\Delta u = (-\Delta u + cu) - cu \leq -cu \leq 0$ dans V . D'après le théorème précédent 2.1

$\max_{\bar{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial\Omega} u^+$. Cela donne (2.6) dans le cas où $V \neq \emptyset$. Si $v = \phi$, alors $u < 0$ dans Ω et donc $u \leq u^+$, ce qui implique (2.6) immédiatement partout dans Ω , et (2.6) suit également.

ii) L'assertion (ii) découle de (i) en remplaçant u par $-u$ et en observant que $(-u^+) = u^-$. □

2.2 Principe du maximum fort

On a besoin de la définition suivante :

Définition 2.1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $x_0 \in \partial\Omega$. On dit que Ω satisfait la condition de la boule ouverte en x_0 si'il existe une boule ouverte $B \subset \Omega$ telle que $x_0 \in \partial B$.

Lemme 2.1 (Première version lemme de Hopf). On suppose que $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ et c est une fonction bornée et positive. Alors

1. Si $-\Delta u \leq 0$ dans Ω et il existe $x^0 \in \Omega$ tel que $u(x^0) > u(x)$, et on suppose aussi que Ω satisfait la condition de la boule ouvert en x_0 . Alors

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) = \nabla u(x^0) \nu > 0$$

où ν le vecteur normale extérieur à B en x^0 .

2. Si $-\Delta u + cu \geq 0$ alors on a le même résultat à condition que

$$u(x_0) \geq 0$$

Démonstration. On posent $c \geq 0$ et $B = B^0(0, r)$, $r > 0$ on a

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-|x|^2} - e^{-|r|^2}, x \in B(0, r) \\ -\Delta v + cv &= -\sum \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + cv \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)e^{-|x|^2} + c(e^{-|x|^2} - e^{-|r|^2}) \\ &= (-2|x|^2 + c)e^{-|x|^2} - ce^{-|r|^2} \leq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

on a $u(x^0) - u(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$

$$u(x^0) - u(x) > 0, \forall x \in \bar{B}(0, \frac{r}{2})$$

$u(x^0) - u(x) \geq u(x^0) - u(x^*) > 0$, où $u(x^*) = \inf_{\bar{B}} u$. On choisit ϵ telle que :

$$0 < \epsilon \|v\|_{L^\infty(k)} < u(x^0) - u(x^*), k = \partial B(0, \frac{r}{2})$$

$$u(x^0) - u(x) > \epsilon \|v\|_{L^\infty} \geq \epsilon v(x), \forall x \in k$$

Donc

$$u(x^0) > u(x) + \epsilon v(x), \forall x \in k \tag{2.11}$$

et pour $x = x^0$, on a $u(x^0) + \epsilon v(x^0) = u(x^0) \leq u(x^0)$.

Donc

$$u(x^0) \geq u(x) + \epsilon v(x), \forall x \in \partial B(0, r), \quad (2.12)$$

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \partial B(0, r)$$

De (2.10) on a

$$-\Delta(u + \epsilon v(x) - u(x^0)) + c(u + \epsilon v(x) - u(x^0)) \leq -cu(x^0) \leq 0 \quad \text{dans} \quad R \quad (2.13)$$

De (2.11) et (2.12) on a

$$u(x) + \epsilon v - u(x^0) \leq 0 \quad \text{sur} \quad \partial R \quad (2.14)$$

Donc d'après le principe de maximum faible (théorème 2.1), on a

$$\max_R(u(x) + \epsilon v(x) - u(x^0)) = \max_{\partial R}(u(x) + \epsilon v(x) - u(x^0)) \leq 0.$$

Donc $u(x) + \epsilon v(x) - u(x^0) \leq 0$ dans R . Mais $u(x^0) + \epsilon v(x^0) - u(x^0) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0) &= \nabla u(x^0) \nu + \epsilon \nabla v(x^0) \nu \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0) &= \lim_{t \rightarrow -0} \frac{u(x^0 + t\nu) + \epsilon v(x^0 + t\nu) - (u(x^0) + \epsilon v(x^0))}{t} \geq 0 \\ \text{Donc } \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) &\geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0) = \frac{\epsilon 2e^{|x^0|^2}}{r} x^0 \cdot x^0 = 2\epsilon r e^{-r^2} > 0$$

□

Théorème 2.3 (Deuxième version de lemme de Hopf). *Soit B une boule dans $\mathbb{R}^N$, et on considère l'opérateur elliptique*

$$L = -\Delta + c$$

où c est borné dans B , supposons que $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, satisfait

$$-\Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad B$$

S'il existe $x \in \partial B$, tel que :

$$0 < u(x_0) < u(x) \quad \forall x \in B.$$

alors on a $\partial_\nu u(x_0) < 0$ pour tout dérivé directionnelle ν , et on particulier, $\nabla u(x_0) \neq 0$

Démonstration. On définit l'opérateur suivant :

$$Ku = -\Delta u + \tilde{c}u$$

où

$$\tilde{c}(x) = c(x) + \|c\|_\infty \geq 0.$$

On a

$$Ku = -\Delta u + cu + \|c\|_\infty u$$

et on a $-\Delta u + cu \geq 0$ et $u \geq 0$ dans B (par hypothèse). Donc $Ku \geq 0$. Comme $\tilde{c} \geq 0$

Alors on peut appliquer le lemme de Hopf précédent (Lemme 2.1) et on a $\partial_\nu u(x_0) < 0$ et

$\nabla u(x_0) \neq 0$.

□

On donne maintenant le résultat principal concernant le principe de maximum forte.

Théorème 2.4. *On suppose $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ avec Ω est un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$ avec c est une fonction bornée et positive. Alors*

i) Si

$$-\Delta u + cu \leq 0 \quad \text{dans } \Omega$$

et Ω atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$ en un point intérieur, alors u is constant dans Ω .

ii) Si

$$-\Delta u + cu \geq 0 \quad \text{dans } \Omega$$

et u atteint son minimum sur $\bar{\Omega}$ en un point intérieur, alors u is constant dans Ω .

Démonstration. On pose $M = \max_{\bar{\Omega}} u$ et $C = \{x \in \Omega / u(x) = M\}$, On par hypothèse C est non vide.

supposons que $u \neq M$. Alors on pose

$$V = \{x \in \Omega / u(x) < M\}.$$

On va montrer que V est vide et par conséquent u est constante. Par absurde, on suppose que V est non vide et on choisit un point $y \in V$ tel que $d(y, C) < d(y, \partial\Omega)$, et soit B la plus grand boule de centre y qui inclus dans V . Alors il existe un point $x_0 \in C$ tel que $x_0 \in \partial B$. Clairement V satisfait la condition de la boule intérieure en x_0 , D'après le lemme de Hopf 2.2, on a $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$. Mais c'est une contradiction puisque u atteint son maximum à $x_0 \in \Omega$, on a $\nabla u(x_0) = 0$.

□

2.3 Principe de comparaison généralisé

Nous nous intéresserons ici au principe de comparaison requis pour la méthode de "moving plane". Plus précisément, nous établirons un principe de maximum important en comparant nos solutions avec une fonction positive Φ satisfaisant un problème aux valeurs propres dans le domaine Ω . Les principes de comparaison sont en général des résultats très utiles (et réalisables) pour la méthode de moving plane.

Nous remarquons que ceux-ci sont utiles même dans le cas des domaines non bornés. Par exemple, les techniques de comparaison (avec quelques estimations a priori) sont utilisées dans [7] lorsque l'on travaille avec des équations de Schrodinger non linéaires dans tout $\mathbb{R}^N$.

Notons que la fonction Φ ci dessous est supposée de $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Nous commençons par le résultat suivant :

Théorème 2.5. Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $\Phi, \lambda : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfaisant

$$\begin{cases} \Phi > 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ -\Delta\Phi + \lambda\Phi \geq 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.15)$$

on considère la fonction $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tel que $c(x) > \lambda(x)$ en tout point de Ω où u est négatif. Si u est une solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + cu \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

alors $u \geq 0$ dans Ω .

De plus, si Ω est non borné alors sous l'hypothèse supplémentaire suivant

$$\liminf_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Omega}} \frac{u(x)}{\Phi(x)} \geq 0$$

on a le même résultat.

Démonstration. Par absurde, on suppose que $u \not\geq 0$ dans Ω . On définit $v = \frac{u}{\Phi}$. Comme $v \geq 0$ sur $\partial\Omega$

et

$$\liminf_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Omega}} v(x) \geq 0$$

si Ω est non borné, Alors la fonction v atteint son minimum en un point $x_0 \in \Omega$ et en ce point on a :

$$\nabla v(x_0) = 0, -\Delta v(x_0) \leq 0$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \frac{1}{\Phi}(-\Delta u + u \frac{\Delta \Phi}{\Phi}) + 2(\frac{\nabla u}{\Phi} - u \frac{\nabla \Phi}{\Phi^2}) \cdot \frac{\nabla \Phi}{\Phi} \\ &= \frac{1}{\Phi}(-\Delta u + u \frac{\Delta \Phi}{\Phi}) + 2\nabla v \cdot \frac{\nabla \Phi}{\Phi} \end{aligned}$$

Ainsi, en x_0 on a

$$\frac{1}{\Phi}(-\Delta u + u \frac{\Delta \Phi}{\Phi}) = -\Delta v(x_0) \leq 0$$

Mais ce qui précède est impossible puisque

$$-\Delta u(x_0) + u(x_0) \frac{\Delta \Phi(x_0)}{\Phi(x_0)} \geq -c(x_0)u(x_0) + \lambda(x_0)u(x_0) > 0$$

(Ici on a utilisé $u(x_0) < 0$, pour obtenir la dernière inégalité). Ce qui donne une contradiction.

□

Le théorème précédent, donne le résultat remarquable suivant :

Corollaire 2.1. *[Principe de région étroite] Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et*

soit $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ minoré pour une constante m . Supposons en plus, qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Omega \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : a \leq x_1 \leq a + \ell \right\}$$

où $\ell > 0$ tel que $m > \frac{-1}{\ell^2}$.

Si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfait (2.16) alors $u \geq 0$ dans Ω

Dans le cas où Ω est non borné, alors si

$$\liminf_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Omega}} u(x) \geq 0$$

on a aussi $u \geq 0$ dans Ω .

Démonstration. On va appliquer le théorème 2.5 pour cela, il suffit de trouver une fonction

$\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} \Phi > 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ -\Delta\Phi - \frac{1}{\ell^2}\Phi \geq 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

On choisit la fonction Φ comme suivant :

$$\Phi(x) = \sin\left(\frac{x_1 - a + \epsilon}{\ell}\right)$$

avec $0 < \epsilon < \ell$, Il est clair que $\Phi > 0$ (car pour tout $x \in \Omega$, on a $\epsilon/\ell < (x_1 - a + \epsilon)/\ell$) sur $\bar{\Omega}$.

De plus pour tout $x \in \Omega$ on a

$$-\Delta\Phi(x) - \frac{1}{\ell^2}\Phi(x) = 0$$

En appliquant le théorème précédent avec Φ défini comme ci-dessus et avec $\lambda(x) = 1/\ell^2$, on déduit le résultat pour Ω est borné .

Si Ω est non borné alors

$$\liminf_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Omega}} u(x) \geq 0 \implies \liminf_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Omega}} \frac{u(x)}{\Phi(x)} \geq 0$$

□

et donc on a le résultat en appliquant de nouveaux le théorème 2.5. C.Q.F.D.

On donne maintenant le "decay principle" suivant qui est similaire au résultat précédent.

On a :

Corollaire 2.2. [*Principe de Decay*] Soit $c : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $R > 0$, on définit l'ensemble

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R\}$$

supposons qu'il existe $R > 0$, $\Omega \subseteq \Omega_R$ et une fonction $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, telle que

$$c(x) > -\frac{q(N-2-q)}{|x|^2} \quad \text{dans} \quad \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$$

où $0 < q < N-2$ est constante. Si u est satisfait de (2.16) et

$$\liminf_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Omega}} u(x)|x|^q \geq 0$$

alors $u \geq 0$ dans Ω .

Démonstration. Comme le corolaire précédent, la preuve revient à vérifier que les hypothèses du théorème 2.5 sont satisfaites pour les fonctions u , c sont comme l'énoncé de ce corolaire et pour $\Phi(x) = 1/|x|^q$ et $\lambda(x) = -q(N-2-q)/|x|^2$. $\square$

Méthode de moving plane pour certains problème elliptique

3.1 Préliminaire et résultats principaux

Dans ce chapitre on va étudier le problème suivante

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } B_1(0), \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_1(0) \end{cases} \quad (3.1)$$

On suppose que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne . Avant de moving, nous soulignons quelques problèmes importants qui tombent dans cette catégorie.

1. soit $k \geq 0$ et fixons $\beta, \gamma > 0$. Alors tout résultat établi pour (3.1) s'appliquera également aux solutions de

$$-\Delta u + \gamma u = \beta u^{2k+1} \text{ dans } B_1(0)$$

En particulier, cela couvre l'équation de Schrödinger stationnaire non linéaire

$$-\Delta u + u = u^3 \text{ dans } B_1(0)$$

avec la condition aux limites homogène.

2. Le problème (3.1) couvre le problème aux valeurs propres dans la boule $B_1(0)$ donné par

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{dans } B_1(0), \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_1(0) \end{cases} \quad (3.2)$$

pour $\lambda \neq 0$. En plus de (3.1), il sera possible de déduire la symétrie radiale pour un

sous-classe de solutions classiques positives au problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = u^p & \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \rightarrow 0 & \text{comme } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

pour n et p appropriés.

Sans plus tarder, formulons maintenant notre résultat principal, qui est le

Théorème 3.1. *Soit $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\bar{B}_1(0))$ une solution positive de (3.1). Alors, u est radialement symétrique et décroissant autour de l'origine.*

Théorème 3.2 (Théorème 5.3 [9]). *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ est solution positive de l'équation*

$$-\Delta u = u^p \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \quad (3.3)$$

telle que pour $n \geq 3$ et $p = \frac{n+2}{n-2}$, elle satisfait

$$u \in O(|x|^{2-n}) \quad (\text{i.e. } \exists c > 0 : |u(x)| \leq |x|^{2-n}, \forall x \in \mathbb{R}^N) \quad (3.4)$$

Alors, il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$ autour du quel u est radialement symétrique et décroissante.

Remarque 3.1. *Il est bien connu que tout fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ vérifiant l'hypothèse du théorème 3.2 doit être de la forme*

$$u(x) = \frac{(n(n-2)\lambda^2)^{\frac{n-2}{4}}}{(\lambda^2 + |x - x_0|^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

dans tout $\mathbb{R}^N$ pour certains $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Il est également facile de vérifier que la fonction ci-dessus est toujours une solution de (3.3).

3.2 Preuve de théorème 3.1

Soit $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\bar{B}_1(0))$ une solution du problème (3.1). Pour tout vecteur unitaire ν , il existe un unique hyperplan H_ν qui passe par l'origine et orthogonal à ν . Notre but est de montrer que pour tout vecteur unitaire ν , la fonction u est symétrique par rapport à H_ν dans l'ensemble $B_1(0)$ comme ce problème est symétrique, il suffit de prouver l'énoncé

pour le plan orthogonal à $(1, 0, \dots, 0)$. Autrement dit, nous montrons que u est symétrique par rapport à l'hyperplan

$$L_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 = 0\}.$$

Pour démontrer cette affirmation, on introduit certaines notations : Pour tout réel positif λ , on note

$$L_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 = \lambda\}.$$

De plus, étant donné $x \in \mathbb{R}^N$ on note x_λ la symétrie de x par rapport à l'hyperplan L_λ plus précisément, on pose

$$x_\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_n)$$

On pose aussi $\Sigma_\lambda = \{x \in B_1(0) : x_1 > \lambda\}$ la partie de la boule unité qui est à droite de L_λ .

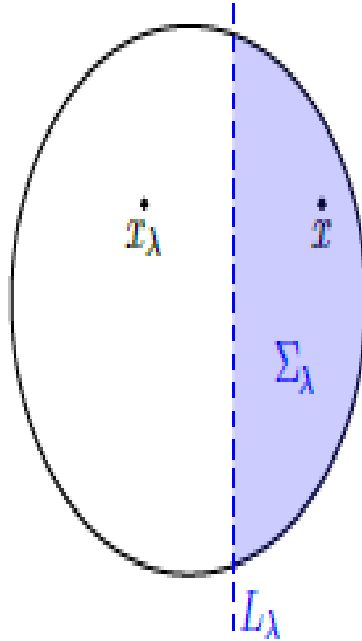


figure 01 : On commence par moving plane à gauche de la région

De plus, on défini

$$\begin{aligned} w_\lambda &: \bar{\Sigma}_\lambda \rightarrow R \\ w_\lambda(x) &= u(x_\lambda) - u(x) \end{aligned}$$

et remarque que w_λ est uniformément continue en λ et on a pour tout λ $w_\lambda \in C(\bar{\Sigma}_\lambda)$.

En effet, Comme u est continue sur ensemble compact, alors elle est uniformément continue.

D'où pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \bar{B}_1(0)$, on a

$$|x - y| \leq 2\delta \rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \epsilon$$

Alors, pour $0 \leq \eta \leq \lambda$, on a

$$|\eta - \lambda| = 2|x_\eta - x_\lambda|$$

D'où

$$|\eta - \lambda| \leq \delta \rightarrow |x_\eta - x_\lambda| \leq 2\delta \rightarrow |w_\eta(x) - w_\lambda(x)| = |u(x_\eta) - u(x_\lambda)| \leq \epsilon,$$

Pour tout $x \in \bar{\Sigma}_\lambda$.

Notre objectif principal est de montrer que $w_0 \equiv 0 \in \Sigma_0$ qui établit clairement la symétrie autour de L_0 . L'idée de base sera de montrer que

$$\bar{\lambda} = \inf \{ \lambda \in [0, 1] : w_\lambda \geq 0 \text{ dans } \Sigma_\lambda \} = 0.$$

Grâce à la continuité, on peut démontrer que l'infimum $\bar{\lambda}$ est atteint sur $[0, 1]$. Donc si $\bar{\lambda} = 0$, alors $w_0 \geq 0$ dans Σ_0 et par argument de symétrie, on en déduit que $w_0 \equiv 0$. Alors l'essentiel de la preuve est de démontrer que $\bar{\lambda} = 0$. On divise alors la preuve en deux étapes :

Étape 1 : On démontre que $\bar{\lambda} < 1$ (c'est à dire qu'on commence à déplacer le plan L_1 vers la gauche de la région).

En effet, on commence par quelque observation pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} -\Delta w_\lambda &= -\Delta u(x_\lambda) + \Delta u(x) \\ &= f(u(x_\lambda)) - f(u(x)) \\ &= c_\lambda(x)w_\lambda(x) \end{aligned}$$

dans Σ_λ , où

$$c_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & w_\lambda(x) = 0, \\ \frac{f(u(x_\lambda)) - f(u(x))}{u(x_\lambda) - u(x)} & w_\lambda(x) \neq 0 \end{cases}$$

On affirme que c_λ est bornée : Comme par hypothèse, u est continue sur la boule fermée $\bar{B}_1(0)$, alors le rang (l'image) de u est compact. Comme f est localement Lipschitzienne, il existe une constante C tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y| \quad \forall x, y \quad \text{dans rang de } u$$

Il ressort clairement de ce qui précède que $|c_\lambda(x)| < C$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et $x \in \Sigma_\lambda$.

Il s'en suit que, pour tout $\lambda \geq 0$, la valeur $-C$ est un minorant de c_λ , en espérant, d'appliquer d'appliquer le principe de région étroite (corollaire 2.1). On fixe $0 < \ell < 1$ petite tel que

$$\frac{-1}{\ell^2} < C$$

En posant $\lambda = 1 - \ell$, on remarque que Σ_λ est un domaine borné de largeur

De plus, $w_\lambda \geq 0$ sur $\partial\Sigma_\lambda$. En effet, sur $\partial\Sigma_\lambda \cap \partial B_1(0)$ on a

$$w_\lambda(x) = u(x_\lambda) - u(x) = u(x_\lambda) \geq 0$$

et sur $\partial\Sigma_\lambda \cap L_\lambda$ on a

$$w_\lambda(x) = u(x_\lambda) - u(x) = u(x) - u(x) = 0$$

D'après le principe de la région étroite (corollaire 2.1) appliqué sur w_λ , on déduit que $w_\lambda \geq 0$ dans $\bar{\Sigma}$. Donc $\bar{\lambda} \leq \lambda := 1 - \ell < 1$.

Ètape 2 : On est prêt maintenant à démontrer que $\bar{\lambda} = 0$. Supposons par absurde, que $\bar{\lambda} \neq 0$. On remarque que

$$\begin{cases} w_{\bar{\lambda}}(x) \geq 0 & \text{dans } \Sigma_\lambda \\ -\Delta w_{\bar{\lambda}} - c_{\bar{\lambda}}(x)w_{\bar{\lambda}}(x) \geq 0 & \text{dans } \Sigma_\lambda \end{cases}$$

De plus, $w_{\bar{\lambda}} > 0$ sur (sauf en deux point d'extrémité) $\partial\Sigma_{\bar{\lambda}} \cap \partial B_1(0)$. Donc, le principe de maximum fort (théorème 2.4) implique que $w_{\bar{\lambda}} > 0$ dans $\Sigma_{\bar{\lambda}}$. En particulier, on observe qu'il

existe $\alpha > 0$ tel que

$$w_{\bar{\lambda}} \geq \alpha \quad \text{dans} \quad \Sigma_{\bar{\lambda}+\ell/2}$$

où $\ell > 0$ est comme dans l'étape 1. En utilisant le fait que w_{λ} est uniformément continue en λ , on a pour $\delta \in (0, \ell/2)$ est suffisamment petite :

$$w_{\bar{\lambda}-\delta} \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Sigma_{\bar{\lambda}+\ell/2}$$

et $\bar{\lambda} - \delta > 0$. on défini

$$\Lambda = \Sigma_{\bar{\lambda}-\delta} \cap \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 < \bar{\lambda} + \ell/2\}$$

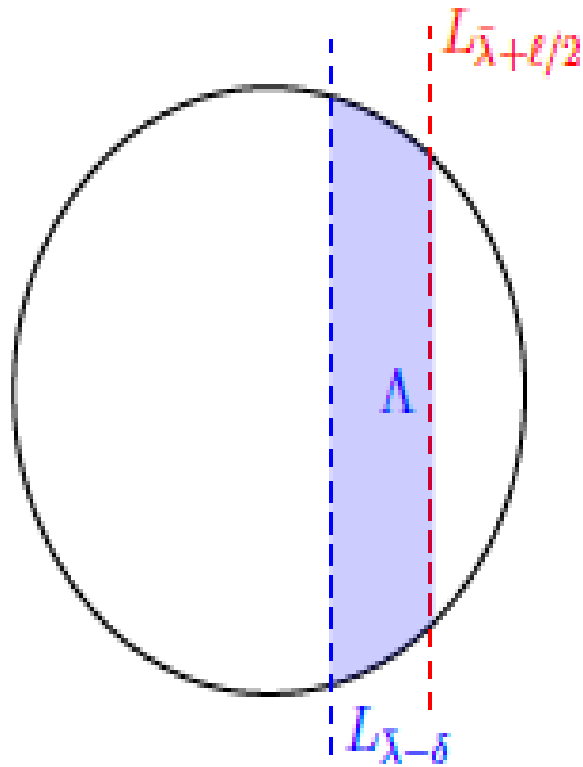


figure 02 : Une application du principe de région étroite (corollaire 2.1) à la balle

Comme dans l'étape 1, il est facile de voir que $w_{\bar{\lambda}-\delta} \geq 0$ sur $\partial\Lambda$. Encore une fois, on peut appliquer le principe de région étroite 2.1 pour voir que $w_{\bar{\lambda}-\delta} \geq 0$ dans Λ . Ce qui contredit avec le choix de $\bar{\lambda}$. D'où, on en déduit que $\bar{\lambda} = 0$.

Remarque 3.2. *L'argument de l'étape ci-dessus montre que $w_\lambda \geq 0$ pour chaque $0 \leq \lambda < 1$. Cette observation est la raison pour laquelle nous pouvons conclure que u est décroissant autour de l'origine à la fin de la preuve.*

3.3 Preuve de théorème 3.2

Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, on définit

$$L_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 = \lambda\}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\Sigma_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 > \lambda\}$$

et on définit aussi

$$\begin{aligned} w_\lambda : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ w_\lambda(x) &= u(x_\lambda) - u(x) \end{aligned}$$

On distingue la preuve en quatre étapes :

Ètape 1 : On montre qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $w_\lambda \geq 0$ dans Σ_λ . En effet, on fixe $0 < q < N-2$ et notons que $R \gg 1$. D'après (3.4), on a :

$$|u(x)| \leq \frac{C}{|x|^{\frac{n-2}{2}}} |x|^{-\frac{n-2}{2}}$$

et on a $c|x|^{-\frac{2}{n-2}} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$

c.a.d $\forall \epsilon > 0, \exists R \gg 1$ tel que si $|x| > R$, on a

$$c|x|^{-\frac{2}{n-2}} < \epsilon$$

et donc $|u(x)| \leq \frac{\epsilon}{|x|^{\frac{n-2}{2}}}$

On choisit $\epsilon = (q(N-2-q)/p)^{1/(p-1)}$

On obtient

$$u(x) < \frac{(q(N-2-q)/p)^{1/(p-1)}}{|x|^{(n-2)/2}} \quad \forall |x| \geq R \quad (3.5)$$

On va montrer qu'il existe une fonction $c_\lambda : \Sigma_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$c_\lambda(x) > \frac{q(N-2-q)}{|x|^2} \quad \text{dans } \{x \in \Sigma_\lambda : w_\lambda(x) < 0\}$$

et w_λ est satisfait

$$\begin{cases} -\Delta w_\lambda + c_\lambda w_\lambda & \geq 0 & \text{dans } \Sigma_\lambda \\ w_\lambda & \geq 0 & \text{sur } \partial\Sigma_\lambda \end{cases}$$

on a

$$\liminf_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Sigma_\lambda}} w_\lambda(x)|x|^q = \liminf_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Sigma_\lambda}} (u(x_\lambda) - u(x))|x|^q \leq \liminf_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Sigma_\lambda}} c(u(x_\lambda) - u(x))|x|^{q-2-N} = 0$$

(ici on a utilise les hypothèses $u \in O(|x|^{(N-2)})$ $q < N-2$). On conclut du corollaire 2.2 que $w_\lambda \geq 0$ dans Σ_λ .

On démontre maintenant les énoncés ci-dessus. Tout d'abord, il est immédiat, d'après la définition de w_λ de remarquer que $w_\lambda = 0$ sur $L_\lambda = \partial\Sigma_\lambda$ (car $x_\lambda = x$). Pour définir la fonction c_λ , on considère d'abords

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(t) &= t^p \end{aligned}$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$, le théorème des accroissements finis implique l'existence d'une fonction $\Phi_\lambda(x)$ entre $u(x_\lambda)$ et $u(x)$ tel que

$$\begin{aligned} u^p(x_\lambda) - u^p(x) &= f(u(x_\lambda)) - f(u(x)) \\ &= f'(\Phi_\lambda(x))(u(x_\lambda) - u(x)) \\ &= p\Phi_\lambda^{(p-1)}(x)w_\lambda(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

On a

$$\begin{aligned} -\Delta w_\lambda(x) &= -\Delta(u(x_\lambda) - u(x)) \\ &= -\Delta u(x_\lambda) + \Delta u(x) \\ &= |u(x_\lambda)|^p - |u(x)|^p \\ &= p\Phi_\lambda^{(p-1)}(x)w_\lambda(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donc

$$-\Delta w_\lambda(x) + (-p\Phi_\lambda^{(p-1)}(x))w_\lambda(x) = 0$$

On choisit

$$c_\lambda(x) = -p\Phi_\lambda^{(p-1)}(x)$$

Donc

$$-\Delta w_\lambda(x) + c_\lambda(x)w_\lambda(x) = 0$$

Soit $x \in \Sigma_\lambda$ un point quelconque tel que $w_\lambda(x) < 0$, Alors pour $|x| > \lambda > R$ on a $u(x_\lambda) < u(x)$, comme $\Phi_\lambda(x)$ est compris entre $u(x_\lambda)$ et $u(x)$, on a

$$0 < u(x_\lambda) < \Phi_\lambda(x) < u(x) < \frac{(n/p)^{p-1}}{|x|^{(n-2)/2}}$$

Où la dernière inégalité est vérifiée grâce à l'équation(3.5). Ce qui implique que

$$c_\lambda(x) = -p\Phi_\lambda^{(p-1)}(x) > -p \frac{q(N-2-q)/p}{|x|^{(N-2)(p-1)/2}} = -\frac{q(N-2-q)}{|x|^2}$$

Ètape 2 : On montre que pour tout $\lambda \in R$, les minimums locaux de la fonction $v_\lambda = \frac{w_\lambda}{\Phi}$, où $\Phi(x) = |x|^{-q}$ dans $B_R(0)$.

En effet, supposons par absurde qu'il existe un minimum local négatif $x_0 \notin B_R(0)$ de v_λ

Comme dans la preuve du théorème(2.5), Par un calcul simple, on obtient

$$-\Delta v_\lambda = \frac{1}{\Phi}(-\Delta w_\lambda + w_\lambda \frac{\Delta \Phi}{\Phi}) + 2\nabla v_\lambda \cdot \frac{\nabla \Phi}{\Phi}.$$

Donc, en x_0 on a

$$0 \leq -\Delta v_\lambda = \frac{1}{\Phi}(-\Delta w_\lambda + w_\lambda \frac{\Delta \Phi}{\Phi}). \quad (3.8)$$

D'autre part, comme dans l'étape 1, en remplaçant ϕ par sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned} -\Delta w_\lambda + w_\lambda \frac{\Delta \Phi}{\Phi} &= -\Delta w_\lambda - w_\lambda \frac{q(N-2-q)}{|x|^2} \\ &< -\Delta w_\lambda + c_\lambda w_\lambda = 0 \end{aligned}$$

en x_0 . (ici on a utiliser $w_\lambda(x_0) = v_\lambda(x_0)\Phi(x_0) < 0$). Ci qui donne contradiction avec (3.8)

Ètape 3 : On montre que : $\bar{\lambda} = \inf \{\lambda \geq 0 : w_\lambda \geq 0 \in \Sigma_\lambda\} > 0 \implies w_{\bar{\lambda}} \equiv 0$ dans $\Sigma_{\bar{\lambda}}$

En effet. Notons que grâce à la continuité de u , l'infimum $\bar{\lambda} > 0$ est atteint. Maintenant,

Supposons que $\bar{\lambda} > 0$. Grâce a le principe da maximum fort (théorème 2.4), on a ou bien $w_{\bar{\lambda}} \equiv 0$, ou

$$w_{\bar{\lambda}} > 0 \quad \text{dans} \quad \Sigma_{\bar{\lambda}}. \quad (3.9)$$

Notre but et de démontrer que $w_{\bar{\lambda}} \equiv 0$. alors on va montrer que si $w_{\bar{\lambda}} > 0$ dans $\Sigma_{\bar{\lambda}}$ alors, $\bar{\lambda}$ ne réalise pas l'infimum et donc une contradiction supposons alors que $w_{\bar{\lambda}} > 0$ dans $\Sigma_{\bar{\lambda}}$ et on montre que

$$\exists \quad \delta > 0 : w_{\bar{\lambda}-\delta} \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Sigma_{\bar{\lambda}-\delta}. \quad (3.10)$$

Si ce n'est pas le cas, alors il existe une suite de nombre positifs $\delta_j \rightarrow 0$, telle que l'inégalité (3.10) n'est pas satisfait pour tout j(i.e $\exists \quad x_i \in \Sigma_{\bar{\lambda}-\delta_j} : w_{\bar{\lambda}-\delta_j}$)

Soit q comme l'étape 1 et on pose

$$v_{\lambda} = \frac{w_{\lambda}}{\Phi} = w_{\lambda}|x|^q, \lambda > 0.$$

Notons que $v_{\lambda}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ (car $u \in O(|x|^{2-n})$). Alors la fonction $v_{\bar{\lambda}-\delta_j}$ atteint son minimum négatif en point noté $x_j \in \Sigma_{\bar{\lambda}-\delta_j}$ pour chaque $j \in \mathbb{N}$. D'après l'étape $|x_j| \leq R$, En passant à la limite (pour une sous-suite si nécessaire), on obtient que

$$x_j \rightarrow x_0.$$

Alors on a

$$0 \leq v_{\bar{\lambda}}(x_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} v_{\bar{\lambda}-\delta_j} \leq 0$$

et

$$\nabla v_{\bar{\lambda}}(x_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nabla v_{\bar{\lambda}-\delta_j}(x_j) = 0$$

D'où

$$v_{\bar{\lambda}}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla v_{\bar{\lambda}} = 0$$

et on a

$$w_{\bar{\lambda}}(x_0) = v_{\bar{\lambda}}(x_0)\Phi(x_0) = 0$$

$$\nabla w_{\bar{\lambda}}(x_0) = \Phi(x_0)\nabla v_{\bar{\lambda}}(x_0) + v_{\bar{\lambda}}(x_0)\nabla\Phi(x_0) = 0$$

D'après (3.9) , x_0 doit être dans $\partial\Sigma_{\bar{\lambda}}$. Alors D'après la deuxième version de lemme de Hopf (2.3), on en déduit que $\nabla w_{\bar{\lambda}}(x_0) \neq 0$ ce qui donne la contradiction.

D'où l'équation (3.10) est satisfaite et a la contradiction avec la définition de $\bar{\lambda}$. et donc $w_{\bar{\lambda}} \equiv 0$ dans $\Sigma_{\bar{\lambda}}$ ce qui termine la preuve de l'étape 3 .

Ètape 4 : Maintenant, on est prêt à démontrer que la solution u est radialement symétrique autour d'un point. De plus, la monotonie peut être déduit par la même manière de la preuve de théorème (3.2).

On a d'après l'étape 3 : si $\bar{\lambda} > 0$ alors $w_{\bar{\lambda}} = 0$ et donc $u(x_{\bar{\lambda}}) = u(x)$. D'où u est symétrique par rapport à l'hyperplan $L_{\bar{\lambda}}$. Si $\bar{\lambda} = 0$, alors on a $w_0 \geq 0$ sur Σ_0 par symétrie, on pour démontrer que $w_0 \geq 0$ dans $-\Sigma_0$ et donc on aura $w_0 \equiv 0$ sur Σ_0

D'ou u est symétrique par rapport à L_0 . Dans les deux cas, on a démontré que u est symétrique par rapport à direction $L_{\lambda_1} = \{x_1 = \lambda_1\}$

De manière similaire, on démontre que u est symétrique par rapport à la direction $\{x_i = \lambda_i\}$.

Alors on démontré maintenant que u est radialement symétrique par rapport à

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

comme u est décroissant par rapport tout direction $\{x_i = \lambda_i\}$, son maximum est atteint en λ . Soit maintenant v un vecteur unitaire, et on défini pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'hyperplans :

$$H_{\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^N : x.v = \alpha\}.$$

Par l'argument utilisé dans la démonstration de ce théorème on voit que u est monotone décroissant sur H_{α} , pour certain $\alpha \in \mathbb{R}$. En particulier, u atteint son maximum sur H_{α} .

Si H_{α} ne contient pas λ , alors il existe un voisinage ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^N$ où u est maximisé. En particulier, u est constant dans U . Donc

$$u^p = -\Delta u = 0 \quad \text{dans } U$$

Mais u est maximisé, on déduit que u est fonction positive, le maximum est 0 (i.e $u=0$).

Donc, H_α doit contenir λ . Puisque le vecteur unitaire v est arbitraire, donc u est radialement symétrique et monotone décroissant autour de λ .

Bibliographie

- [1] R.Adams.*Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] A. Benedek and Panzone.R. *The space L^p with mixed norme*. Duke Math. J**28**, 301-324 (1961).17
- [3] H.Brézis1. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris (1987).117
- [4] H.Brézis. *Equation et inéquation non linéaire dans les espaces vectoriels en dualité*. Annales de l'institut Fourier 18.1 115-175 (1968).
- [5] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.
- [6] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations* American Mathematical Society, Rhode Island, second edition, 2010.
- [7] Nirenberg Gidas .Ni. *Symmetry of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in R^n* . Advances in Mathematics Supplementary Studies, 1981.
- [8] Wenxiong Chen and Congming Li. *Maximum principles and the method of moving planes* ,2017.
- [9] Wenxiong Chen and Congming Li. *Classification of Solutions of Some Nonlinear Elliptic Equations*. Duke Mathematical Journal, 63(3), 1991.

Abstract

in this work is to study some important properties for elliptique problems posed on a symmetric domain . more precisely, we consider the following problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } B_R, \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_R \end{cases}$$

With $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is locally Lipschitz continuous and B_R is ball of radius R , we demonstrate that any solution of this type of problem is radially symmetric and decreasing. these properties allow us to transform the problem into a second order differential equation and therefore we simplify the study of existence of solution. The method used is called "moving plane method" and it is based on the use of the maximum principle and Hopf's lemma.

keywords : Sobolev spaces, elliptique equation, maximum principal, method of moving plane, comparison principal.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié certaines propriétés importantes pour des problème elliptique posé sur un domaine symétrique. plus précisément, on considère le problème suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } B_R, \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_R \end{cases}$$

Avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne et B_R est une boule de rayon R . on démontre que tout solution de ce type de problème est radialement symétrique et décroissante. Ces propriétés nous permet de transformation le problème en un équation différentielle de second ordre et par conséquent on simplifier l'étude de l'existence de la solution. La méthode utilisé s'appelle "moving plane méthode" et elle basé sur l'utilisation de principe de maximum et lemme de Hopf.

mots-clés : Espace de Sobolev, équation elliptique, principe de maximum, méthode de moving plane, principe de comparaison.

ملخص

في هذه المذكرة درسنا بعض الخصائص المهمة للمشكلات الناقصية المطروحة على ميدان متناظر B_R بشكل اكثر دقة و نأخذ في الاعتبار المسألة التالية $-\Delta u = f(u)$ تحت الشروط التالية $u = 0$ مع الدالة f المعرفة $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ محلية ليبشيزية و مستمرة و B_R عبارة عن كرة نصف قطرها R نوضح ان اي حل لهذا النوع من المسائل يكون مماثلا شعاعيا و متناقص . هذه الخصائص تسمح لنا بتحويل المسألة الى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، وبالتالي نقوم بتبسيط دراسة مشكل وجود الحل . الطريقة المستخدمة تسمى ' طريقة المستوى المتحرك ' وهي معتمدة على استخدام المبدأ الذروة و توطئة هوف .

كلمات المفتاحية: فضاء صوبولوف، مبدأ الذروة ، طريقة المستوى المتحرك، مبدأ المقارنة.