

**UNIVERSITÉ DE M'SILA**  
**FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE**  
**DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES**

**Mémoire**

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine:** Mathématiques et Informatiques

**Filière:** Mathématiques

**Option:** Mathématiques Appliquées et discrètes

**Par**

*Mame souhila*

**THÈME**

<b>SUR LES</b>
<b>Applications de la techniques des transformations conforme</b>
<b>à un probleme d'écoulement d'un fluide</b>

Soutenu le : ../0./ 2016

Devant le jury composé de :

- 1).....
- 2)
- 3).....

**Dirigé par:**  
**Dr.A.Gasmi**

Année: 2015/2016

# *Remerciements*

Je tiens à remercier, en premier lieu, **ALLAH** qui m'a donné la force de rediger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercier **Prof .Gasmi.Abelkader** , pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères et mes soeurs qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

---

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

---

# Table des figures

**Figure 1.1:** Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme.

**Figure 1.2:** Représentation de la vitesse dans un écoulement parfait.

**Figure 1.3:** Représentation de la vitesse dans un écoulement visqueux.

**Figure 1.4:** Tube de courant.

**Figure 1.5:** S'écoulant autour d'un solide.

**Figure 1.6:** Plan de  $xy$ .

**Figure 1.7:** Plan de  $uv$ .

**Figure 2.1:** Plan de la variable  $\omega$ .

**Figure 2.2:** Plan de la variable  $z$ .

**Figure 2.3:** Écoulement hors de la fente.

**Figure 2.4:** Problème normalisé d'un écoulement hors de la fente.

**Figure 2.5:** Le plan potentiel pour l'écoulement hors une fente.

**Figure 2.6:** Le plan hodographe pour l'écoulement hors une fente.

**Figure 2.7:** Le plan de l'hodographe pour l'écoulement hors de la fente est mappé à ce demi-plan supérieur par la cartographie (2.10).

**Figure 2.8:** Le plan de l'hodographe pour l'écoulement hors de la fente est mappé à ce demi-plan supérieur par la cartographie (2.12).

**Figure 2.9:** La forme de jet paramétriquement par (2.22) et (2.23).

**Figure 3.1:** Écoulement hors de la fente.

**Figure 3.2:** Le problème sur le plan  $f$ .

**Figure 3.3:** Le problème mappé sur la moitié inférieure de la plane  $\zeta$ .

**Figure 3.4:** Le demi-cercle  $\Gamma$  séparé en différentes régions sur le plan  $\zeta$ .

---

# Liste des tableaux

**Tableau 2. 1:** Représentation des points du plan  $z$  sur le plan  $\omega$ .

**Tableau 2.2:** Représentation des points du plan  $z$  sur le plan  $\omega'$ .

**Tableau 2.3:** Représentation des points du plan  $\omega'$  sur le demi-plan supérieure  $\zeta_1$ .

**Tableau 2.4:** Représentation des points du plan  $\omega$  sur le demi-plan supérieure  $\zeta$ .

**Tableau 3.1:** Représentation des points du plan  $z$  sur le plan  $\omega$ .

**Tableau 3.2:** Représentation des points du plan  $\omega$  sur le plan  $\zeta$ .

**Figure 3.3:** Le problème mappé sur la moitié inférieure de la plane  $\zeta$ .

**Figure 3.4:** Le demi-cercle  $\Gamma$  séparé en différentes régions sur le plan  $\zeta$ .

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires et définitions</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Les fluides . . . . .	2
1.2.1 Les différentes cas de la matiere . . . . .	3
1.2.2 Masse volumique . . . . .	3
1.2.3 La densité . . . . .	3
1.3 Les écoulement des fluides . . . . .	3
1.3.1 Ecoulement uniforme: . . . . .	4
1.3.2 Ecoulement permanent: . . . . .	4
1.3.3 Ecoulement incompressible: . . . . .	4
1.3.4 Ecoulement irrotationnel: . . . . .	4
1.3.5 Ecoulement parfait: . . . . .	5
1.3.6 La viscosité: . . . . .	5
1.3.7 Ecoulement potentiel . . . . .	7
1.3.8 Potentiel complexe: . . . . .	7
1.4 Quelques équations de la mécanique des fluides . . . . .	7
1.4.1 Equation de la continuité . . . . .	7
1.4.2 Equation d'euler par un écoulement incompressible . . . . .	8
1.4.3 Equation de bernoulli . . . . .	8
1.4.4 Ligne de courant et fonction de courant: . . . . .	9

1.5	Fonctions analytique (holomorphe) . . . . .	10
1.6	Transformation au représentation . . . . .	11
1.6.1	Représentation conforme . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Solution analytique d'un problème du jet bidimensionnel</b>	<b>13</b>
2.1	Introduction . . . . .	13
2.2	Quelques transformations classiques . . . . .	13
2.2.1	Méthode de l'hodographe . . . . .	13
2.2.2	Les transformations de möbius . . . . .	14
2.2.3	La transformation de schwarz-christofel . . . . .	15
2.3	Position de problème . . . . .	17
2.4	La solution analytique . . . . .	19
2.4.1	Première étape . . . . .	19
2.4.2	La deuxième étape . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Application de la méthode d'Integro- différentiel à un problème de type jet</b>	<b>29</b>
3.1	Intoduction . . . . .	29
3.2	Formulation du problème . . . . .	29
3.3	Solution analytique . . . . .	31
3.3.1	Première étape . . . . .	31
3.3.2	La deuxième étape . . . . .	34
3.4	Conclusion générale . . . . .	37
	<b>Conclusion générale</b>	<b>37</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>

# Introduction

Les écoulements à surface libre de type jet sont présents dans beaucoup d'applications industrielles et urbaines : les chambres de combustion des moteurs, les pompes à jet, les réservoirs et l'architecture des barrages. Compte tenu de son importance pratique, ce type d'écoulement fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques, expérimentales et numériques.

On traite particulièrement les écoulements plan dans les cas incompressible et irrotationnel. Pour trouver la solution exacte du problème d'écoulement traité, où en négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on est utiliser la transformation de

Schwarz-Christoffel Ce type de transformation fut introduit indépendamment par ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL et HERMANN AMANDUS SCHWARZ en 1867 et 1869 respectivement, dans le contexte de la représentation conforme du demi-plan sur l'intérieur d'un polygone. On les trouve, et on résoud le problème analytiquement et on cherche une solution en considérant les paramètres du problème

Le présente mémoire comporte trois chapitres.

Après cette introduction on présente dans le premier chapitre les notions fondamentale de la mécanique des fluides ,tellque on traite les types des écoulements et quelque equations de la mécanique des fluides (bernoulli, continuité,...etc) et on diffénie aussi les lignes de courant et les transformation conforme.

Dans le second chapitre on traite le problème dans le cas où la tension de surface et l'effet de gravité sont négligeables. Dans ce cas, le problème admet un solution exacte. on utilise la méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre, on utilise tout d'abord la technique de transformation Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte.

Dans le dernier chapitre du memoire on étudier le problème d'un écoulement au-dessus on utilise la transformation hodographe pour la modilisation des plan et après on traite avec le des integro -différentiel pour trouvé la soulution analytique du problème

Enfin on termine ce travail par une conclusion générale

# Chapitre 1

## Notions préliminaires et définitions

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente les concepts de base de la mécanique des fluides : propriétés des fluides, équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et la viscosité et les lignes de courant.

### 1.2 Les fluides

Un fluide est un milieu matériel continu déformable, sans rigidité qui peut s'écouler c'est-à-dire subir de grandes variations de forme sous l'action de forces plus faibles, plus les variations de forme se déroulent lentement.

La notion de fluide s'oppose à celle de solide, cependant on considère les fluides et les solides comme des ensembles de particules matérielles infiniment petites.

-Solidement liées entre elles dans le cas des solides.

-Libres de se déplacer les unes par rapport aux autres dans le cas des fluides.

### 1.2.1 Les différentes cas de la matiere

Les trois étas de la matiere :

1. **Etat Solide:**Caracterise par une grande cohesion des molecules il a une forme et un volume propres.
2. **Etat Liquide:** Peut liéé→liquides très déformable il n'apas de forme propre et il a un volume propre →incompressible.
3. **Etat gazeux:**Un fluide est un milieu materiel parfaitement deformable on groupe sous cette application les plasmas, les gaz qui sont l'exemple des fluides compressible et les liquides qui sont des fluides peut incompressible.

### 1.2.2 Masse volumique

La masse volumique d'une substance est la masse d'unité de volume de cette substance on calcule par la relation suivante:

$$\mu = \rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}} = \frac{m}{v}.$$

### 1.2.3 La densité

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

dans le cas des liquides en prendra l'eau comme fluide de référence dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

## 1.3 Les écoulement des fluides

Dans la vie quotidienne, dans la nature et dans le domaine industriel, les écoulements présents la circulation de l'oxygène dans notre organisme est l'un des exemples de l'importance de l'écoulement dans la vie humaine, les tsunamis les cyclones ou les coulées de lave sont aussi des exemples de l'écoulement mais qui conduisent quelque fois à la grand dégâts pour l'humanité

### 1.3.1 Écoulement uniforme:

Un écoulement bidimensionnel à surface libre est dit uniforme si l'écoulement est de vitesse constante

$$A_1 = A_2$$

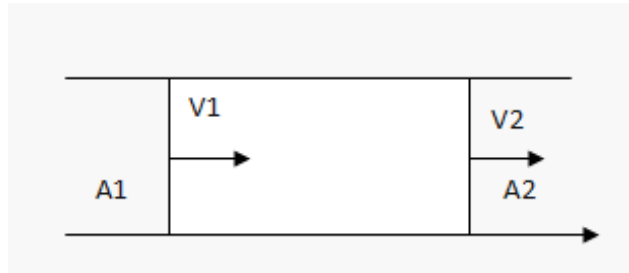


Figure 1.1: Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme

### 1.3.2 Écoulement permanent:

on dit aussi stationnaire, si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

### 1.3.3 Écoulement incompressible:

Un fluide est dit en un écoulement incompressible si sa masse volumique est constante au cours du mouvement ce qui se traduit par une dérivée partielle du champ scalaire de masse volumique nulle (description eulérienne)

$$\text{div} \rho = 0$$

### 1.3.4 Écoulement irrotationnel:

On dit que l'écoulement est irrotationnel si:

$$\text{rot} \vec{v} = 0$$

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

( $v$  la vitesse d'écoulement)

### 1.3.5 Ecoulement parfait:

Un écoulement parfait est une approximation dans le cas où les effets visqueux sont négligeables, et un fluide parfait possédant une viscosité rigoureusement nulle n'y a aucune implication que un sens.

fluide parfait  $\implies$  écoulement parfait

### 1.3.6 La viscosité:

La viscosité d'un liquide constitue une résistance à la déformation ou bien au glissement relatif de ses couches, cette propriété se manifeste par le fait que dans un liquide réel toutes les conditions déterminées naissant des contraintes tangentielles

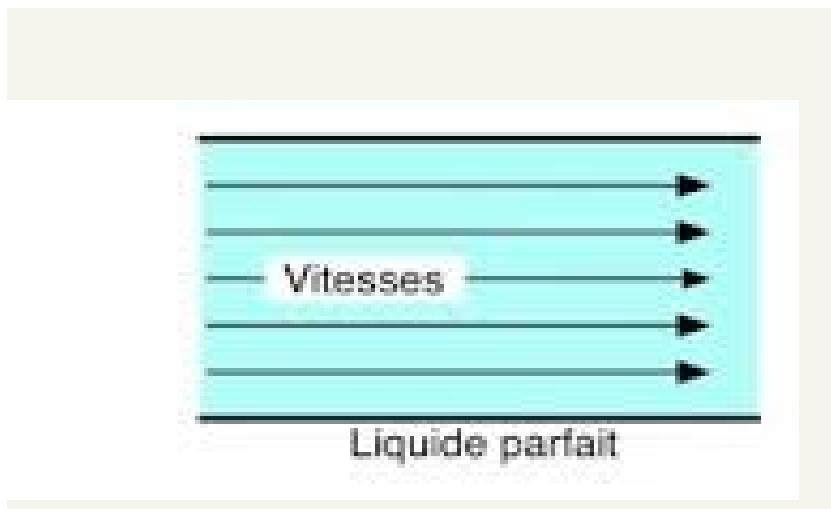


Figure 1.2: Représentation de la vitesse dans un écoulement parfait

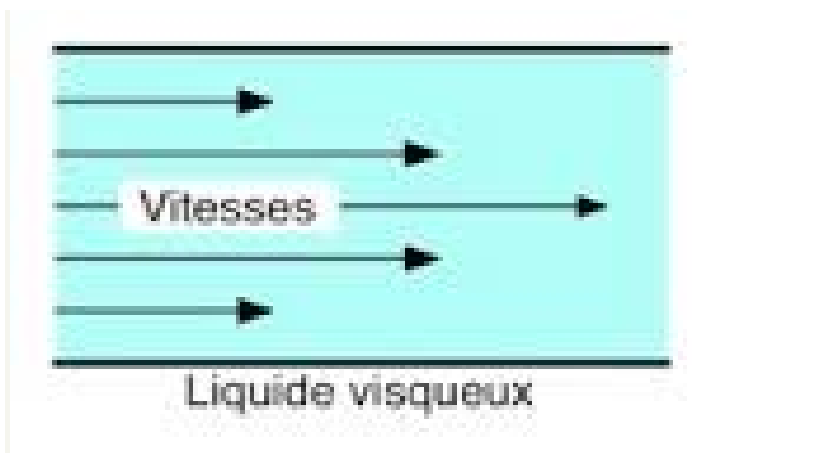


Figure 1.3: Représentation de la vitesse dans un écoulement visqueux

### 1.3.7 Écoulement potentiel

On dit qu'un écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est dérivé d'un potentiel c'est-à-dire:

$$\begin{aligned}\exists \phi / \overrightarrow{\text{grad}}\phi &= \overrightarrow{V} = u \overrightarrow{i} + v \overrightarrow{j} \\ v &= \nabla\phi \\ u &= \frac{\partial\phi}{\partial x}, v = \frac{\partial\phi}{\partial y}\end{aligned}$$

### 1.3.8 Potentiel complexe:

Lorsqu'un écoulement plan est conservatif et irrotationnel, il peut être complètement décrit un moyen d'une fonction analytique complexe appelée (potentiel complexe des vitesses) cette fonction complexe  $f(z)$  comporte une partie réelle correspondant au potentiel des vitesses  $\phi(x; y)$  est une partie imaginaire correspondant à la fonction de courant  $\psi(x, y)$  on définit ainsi

$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ f(z) &= \phi + i\psi.\end{aligned}$$

## 1.4 Quelques équations de la mécanique des fluides

### 1.4.1 Equation de la continuité

Le principe de conservation de masse impose que l'augmentation de masse pendant un certain temps  $t$ , du fluide contenu dans ce volume, doit être égale à la somme des masses de fluide qui y entrent, diminuée de celle qui sortent, qui donne par:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial}{\partial y^2}\phi = 0 \\ \Delta\phi = 0 \end{cases}$$

### 1.4.2 Equation d'euler par un écoulement incompressible

Soit l'écoulement incompressible d'un fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité dans un champ de force massique  $\vec{f}$ , en première approximation, sa masse volumique constante en un point quelconque du fluide  $m(x, y, z)$  et à un instant quelconque  $t$ , les champs de pression  $p(x; y; z; t)$  et de vitesse  $\vec{v}(x; y; z; t)$  vérifient les relations suivantes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f}$$

En coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  ces relations s'écrivent:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

### 1.4.3 Equation de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. Un certain travail est fourni au fluide lorsqu'il passe d'un point à un autre et ce travail est égal à la variation d'énergie mécanique. Dans le cas d'un fluide laminaire visqueux et incompressible, on obtient la relation suivante:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

où  $p_i$  est la pression aux points  $A_i$  où  $i = 1, 2$ . Si le fluide est non visqueux dans ce cas  $\Delta p_i$ . L'équation de Bernoulli se réduit à :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

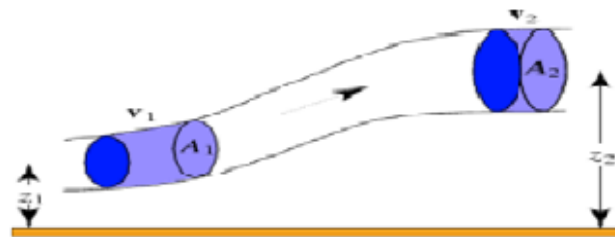


Figure 1.4: Tube de courant.

#### 1.4.4 Ligne de courant et fonction de courant:

Les ligne de courant et les trajectoire sont deux types de courbe qui ont été définie pour decrire l'écoulement d'un fluide la trajectoire représente le chemin d'une seule particule de fluide, la ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ces points au vecteur vitesse en ce point.

La définition d'une ligne de courant est donné par les équations:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \quad (1.1)$$

où  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  sont les éléments d'un segment de la ligne de courant dans un système de coordonnées cartésiennes dans le cas d'un écoulement permanent les lignes de courant sont des courbes fixes confodues les trajectoires

dans le cas d'un écoulement plan, l'équation (1.1) se reduite à:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

On notera que les surfaces des frontieres solides fixes sont toujours des lignes de courant puisque l'écoulement ne pas traverser des surfaces solides.

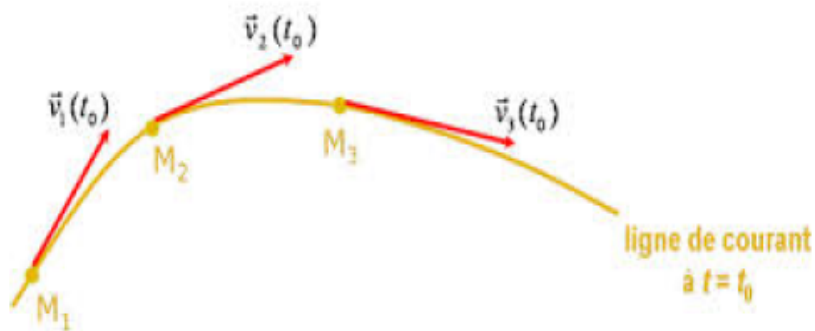


Figure 1.5: S'écoulant autour d'un solide.

## 1.5 Fonctions analytique (holomorphe)

Soit  $f(z)$  une fonction qui admet une dérivé, ses parties réelles et imaginaire sont différentiables et y vérifient les conditions de cauchy définissant ainsi une fonction analytique, est holomorphe.

Une fonction holomorphe peut être considérée comme une transformation  $(z) \rightarrow (\zeta)$

$$z \xrightarrow{f} \zeta = f(z) \text{ avec } \zeta = \xi + iv$$

$f(z)$ , holomorphe dans  $D$ , est une transformation conforme si  $f'(z) \neq 0$  dans  $D$ . Dans ces conditions, cette transformation est localement une similitude de rapport égal à  $|f'(z_0)|$  et d'angle de rotation  $\arg(f'(z_0))$  au point considéré  $z_0$ .

### **Théorème 1.5.1** (*Cauchy 1*)

Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $C$  un chemin fermé contenue ainsi que son intérieur dans  $D$ , alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Théorème 1.5.2** (*Cauchy 2*)

Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $C$  un chemin fermé ainsi que son intérieur dans  $D$ , alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

le chemin  $C$  étant parcouru dans le sens positif

**Théorème 1.5.3** (*des Résidus*)

soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans  $D$  à l'exception de singularités isolées, soit  $C$  un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$  ne passant par aucune des singularités de  $f$  et en contenant un nombre fini  $z_1, z_2, \dots, z_n$  dans son intérieur, alors

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f, z_k)$$

le chemin  $C$  étant parcouru dans le sens positif

## 1.6 Transformation au représentation

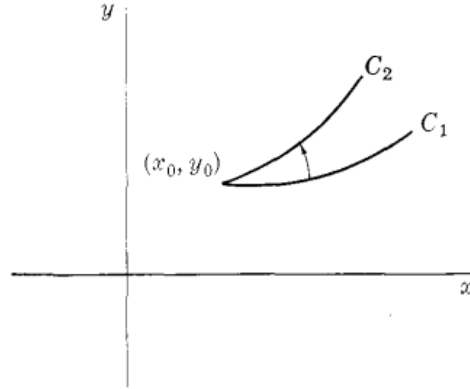
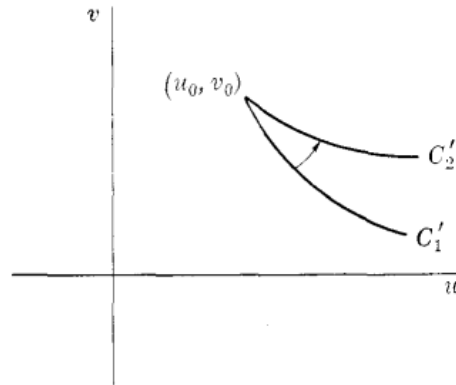
L'ensemble des équations

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

Définissons généralement une transformation ou une représentation qui établit une correspondance entre les points du plan  $uv$  et les points du plan  $xy$  les équations (1.2) sont appelées équation de la transformation si à chaque point du plan des  $uv$  correspond un point et un seul du plan des  $xy$  on parlera d'une transformation biunivoque, dans un tel cas un ensemble des points du plan  $xy$  [tel qu'une courbe ou un ouvert connexe] et réciproquement les ensembles des points qui se correspondent ainsi dans les deux plans sont souvent dits images l'un de l'autre.

### 1.6.1 Représentation conforme

Supposons que le point  $(x_0, y_0)$  du plan des  $xy$  soit transformé le point du plan  $uv$  [figure 1.3-figure1.4] cependant que les courbes  $C_1$  et  $C_2$ , se coupant en  $(u_0, v_0)$  une transformation telle que l'angle entre  $C'_1$  et  $C'_2$  en  $(u_0, v_0)$  est dite conforme en  $(x_0, y_0)$  une transformation qui conserve les angles en grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonal.

Figure 1.6: Le plan de  $xy$ Figure 1.7: Le plan de  $uv$ 

**Théorème 1.6.1** *Une fonction polygène définie dans une région  $\Omega$  est conforme sur cette région si et seulement si elle y est analytique. Une fonction polygène sur cette même région est anticonforme si et seulement si elle y est analytique en  $\bar{z}$  (c-à-d anti-analytique ou anti-holomorphe).*

# Chapitre 2

## Solution analytique d'un problème du jet bidimensionnel

### 2.1 Introduction

L'objectif dans ce chapitre, est l'étude d'écoulement bidimensionnel de type jet sur une surface libre (écoulement hors de la fente), où les effets de la gravité et de la tension de surface ne sont pas pris en considération. on utilise tout d'abord la méthode de la théorie aérodynamique libre basé sur la méthode hodographe et de la technique de transformation Schwarz-Christoffel pour obtenir la solution exacte

### 2.2 Quelques transformations classiques

Une transformation linéaire  $\omega = Az$ , avec  $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$  est double transformation : expansion, contraction liée au coefficient d'un angle .

#### 2.2.1 Méthode de l'hodographe

L'idée est d'échanger le rôle de la variable dépendante et de la variable indépendante, par exemple si on a un système d'équations aux dérivées partielles impliquant les variables dépendantes  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  on peut transformer ce système en système d'équation pour

$x(u, v)$  et  $y(u, v)$  par exemple, pour ce type de problème à deux variables

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

ce qui en différentiant par rapport à  $x$ , donc

$$1 = x_u u_x + x_v v_x$$

$$0 = y_u u_x + y_v v_x$$

ce qui permet de déterminer  $v_y v_x$

$$u_x = \frac{y_v}{J} \quad v_x = \frac{y_u}{J}$$

avec  $J = x_u y_v - x_v y_u$  le jacobien, en faisant de même avec  $y$ , on obtient

$$u_y = -\frac{x_v}{J} \quad v_y = \frac{x_u}{J}$$

tant que le jacobien est non nul, on peut faire l'inversion, on note que le jacobien de la transformation inverse  $J = u_x v_y - u_y v_x$  est non nul si  $J$  est non nul, la condition  $J \neq 0$  exclut donc le cas où soit  $u$ , soit  $v$  est constant ainsi que le cas où  $u$  est une fonction univoque de  $v$ , le dernier cas correspond au cas de l'ond simple.

## 2.2.2 Les transformations de Möbius

Soient  $a, b, c, d$  quatre nombres complexes tels que  $ad - bc \neq 0$ . La fonction complexe définie par:

$$\omega = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2.1}$$

s'appelle une transformation de Möbius ou parfois une transformation bilinéaire, Il nous convient dans ce que suit de considérer cette fonction comme une de  $C^\infty$  à  $C^\infty$ . La condition  $ad - bc \neq 0$  élimine les cas où  $T$  pourrait se réduire à une constante.

Les cas spéciaux à noter sont:

1. Les translations:  $T_a(z) = z + b$

2. Les multiplications:  $M_a(z) = az$

3. Les rotations:  $R_\alpha(z) = \exp(i\alpha)z$

4. Les inverses:  $I_a(z) = \frac{1}{z}$

Toute transformation de Möbius peut-être décomposée en un produit de transformations des types  $A$ ,  $B$  et  $D$ . En effet, si  $c \neq 0$  on a:

$$zT = z m_{\frac{a}{d}} \circ T_{\frac{a}{d}}$$

où, ce que veut dire la même chose

$$T(z) = T_{\frac{a}{d}}(m_{\frac{a}{d}}(z)) = T_{\frac{a}{d}}\left(\frac{a}{d}z\right) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \frac{az + b}{d}, \quad c \neq 0$$

$$\begin{aligned} zT &= T_{\frac{a}{c}}(m_{b-\frac{ad}{c}}(I(T_d(m_c(z)))))) = T_{\frac{a}{c}}(m_{b-\frac{ad}{c}}(I(cz + d))) \\ &= T_{\frac{a}{c}}\left(m_{b-\frac{ad}{c}}\left(\frac{1}{cz + d}\right)\right) = T_{\frac{a}{c}}\left(\frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}\right) = \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Les transformations de Möbius sont toujours inversibles. En effet l'inverse de (5) est

$$T^{-1}(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}.$$

**Théorème 2.2.1** *Les transformations de Möbius préserve la famille qui consiste de toutes les droites et tous les cercles du plan. on note que si l'on considère une droite comme étant un cercle de rayon infini on peut simplement dire ici que les transformations de Möbius préservent la famille de tous les cercles du plan.*

### 2.2.3 La transformation de Schwarz-Christofel

Considérons un polygone [figure 2.1] dans le plan des  $\omega$  ayant pour sommets  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  et pour angles inférieurs respectivement à  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , soit  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  les points correspondant respectivement à  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de l'axe réel du plan [figure 2.2], est donnée par

$$\frac{d\omega}{dz} = A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1}, \dots, (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1}$$

$$\omega = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1}, \dots, (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1}$$

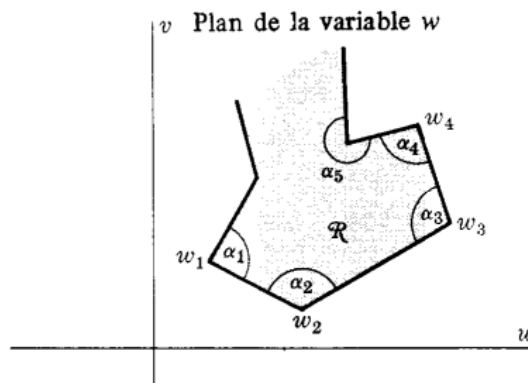


Figure 2.1: Plan de la variable  $\omega$

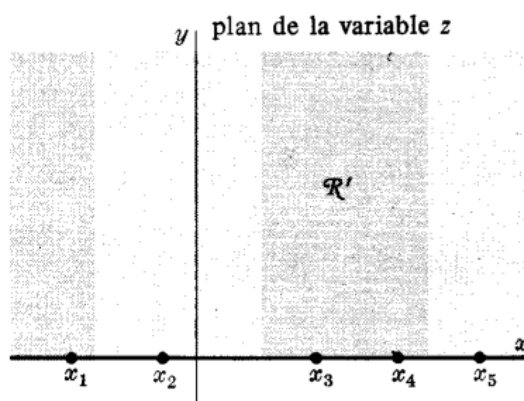


Figure 2.2: Plan de la variable  $z$

Une transformation qui représente l'intérieure  $R$  du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des  $z$ , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donné par:

$$\frac{d\omega}{dz} = \alpha(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} \alpha(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}, \dots, \alpha(z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \quad (2.2)$$

$$\omega = \int \alpha(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} \alpha(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}, \dots, \alpha(z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} dz + \beta \quad (2.3)$$

ou  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes complexes.

On notera que :

1. parmi les points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  on peut en choisir trois arbitrairement
2. les constantes  $A$  et  $B$  déterminent la taille, l'orientation et position  $u$  du polygone
3. il est commode de choisir un point par exemple  $x_n$ , à l'infini, cas dans lequel de dernier facteur de (2.2) et (2.3) n'existe pas
4. des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des limites de polygones fermés

## 2.3 Position du problème

Maintenant on montre comment l'application conforme permet d'obtenir les écoulements stable, non visqueux, incompressible et irrotationnel délimités par une combinaison des plans rigides et des surfaces libres.

On rappelle que ces écoulements peuvent être décrits par un potentiel complexe.

$$\omega(z) = \phi + i\psi \quad (2.5)$$

Où  $\phi$  et  $\psi$  sont la vitesse et fonction potentiels, et les composantes de vitesse sont alors donné par:

$$u - iv = \frac{d\omega}{dz}. \quad (2.6)$$

Tous les parois fixes doivent être rationalisées l'écoulement, afin que  $\psi = \text{Im } \omega = \text{constante}$ , et la vitesse doit être tangente à de telles limites.

Toute surface libre régulière doit être de même rationalisation du flux (c'est la condition limite cinématique). Toutefois, ce n'est pas suffisamment d'information, car l'emplacement de la surface libre n'est pas connu à l'avance. La condition supplémentaire d'être imposée (la condition limite dynamique) est que la pression atmosphérique externe est supposée être une constante connue. (Cette condition doit être généralisée si la tension superficielle est importante) du théorème de Bernoulli pour un flux continu on a :

$$p + \frac{1}{2}\rho |u^2| = p + \frac{1}{2}\rho \left| \frac{d\omega}{dz} \right|^2 = \text{constante}. \quad (2.7)$$

Et donc, si  $p$  est constante, il s'ensuit que  $\left| \frac{d\omega}{dz} \right|$  est constante, et cela donne des renseignements additionnels à fin de localiser la surface libre.

on va maintenant présente la technique de la solution, on prend comme un exemple l'étude d'écoulement hors d'un fente :

Le Fluide occupé le demi-plan supérieur  $y > 0$  et sur le plan à  $y = 0$  y un trous dans la mur dans l'intervall  $x \in [-a, a]$ , grâce à lequel le liquide s'écoule dans  $y < 0$  comme un jet entre deux surfaces libres. Les surfaces libres détachent des bords tangentiels,  $x \pm a$  de la fente (cette condition Kutta garantit que la vitesse est finie à ces points). L'épaisseur en jais est loin en aval  $2Qa$ , où le rapport de contraction  $Q$  doit être trouvé. L'organisation est dans la[ figure 2.3].

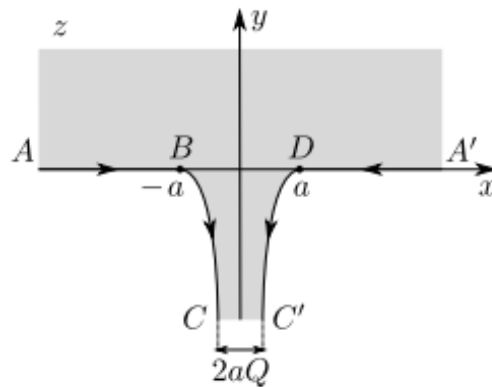


Figure 2.3: Ecoulement hors de la fente

si  $p \rightarrow p_\infty$  et  $u \rightarrow 0$  comme  $y \rightarrow \infty$ , donc du l'équation de bernoulli on a

$$p + \frac{1}{2}\rho|u|^2 = p_\infty \dots \dots (12)$$

d'autre part, sur les surfaces libre  $BC$  et  $DC'$  on a  $p = p_{atm}$  (la pression atmosphérique) par conséquent sur la surface libre on a  $|U| = u_\infty$  où  $u_\infty$  est la vitesse de l'écoulement uniforme au  $CC'$  et est donnée par:

$$\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_\infty - p_{atm} \quad (2.8)$$

on dimensionalise le problème par la mise à l'échelle  $z$  avec  $a$  et  $\omega$  avec  $U_\infty a$ , le problème est esquissé en normalisé [Figure 2.4], par symétrie, l'axe  $y$  est rationalisé, Qui on choisit d'être  $\psi = 0$ . Alors, étant donné que l'écoulement net dans le jet est  $2Q$ , on a  $\psi = Q$  sur la rationalisation  $A'DC'$  et  $\psi = -Q$  sur  $ABC$ . À l'infini dans le demi-plan supérieur  $\psi \sim Q - 2Q\theta/\pi$ , où  $\theta = \text{Arg}z$ , ce qui correspond à

$$\omega(z) \sim \frac{2Q}{\pi} \log z + Q \text{ comme } z \rightarrow \infty \text{ avec } \text{Im}z > 0 \quad (2.9)$$

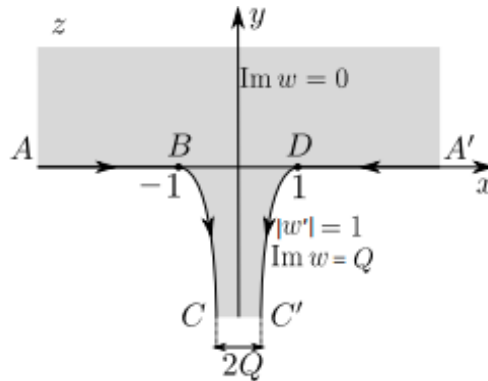


Figure 2.4: Problème normalisé d'un écoulement  
hors de la fente

## 2.4 La solution analytique

### 2.4.1 Première étape

Dans cette étape on utilise quelques transformations définies pour reformuler le problème posé on effectue :

le potentiel complexe dû à un point du puits de force  $4Q$ , et implique que  $\phi \rightarrow -\infty$  comme  $z \rightarrow \infty$  dans le demi-plan supérieur. Au  $CC'$  on a  $\phi \sim -U_\infty y$  et donc  $\phi \rightarrow \infty$  si  $y \rightarrow \infty$ . Le potentiel plane est donc comme illustré à la [figure 2.5] et qui est représenté aussi dans [tableau 2.1]

les point	plan $z$	plan $w$
$A'$	$x = +\infty, y = 0$	$\phi = -\infty, \psi = Qi$
$D$	$x = 1, y = 0$	$\phi = 0, \psi = Qi$
$C'$	$x = Q, y = -\infty$	$\phi = +\infty, \psi = Qi$
$A$	$x = -\infty, y = 0$	$\phi = -\infty, \psi = -Qi$
$B$	$x = -1, y = 0$	$\phi = 0, \psi = -Qi$
$C$	$x = -Q, y = -\infty$	$\phi = +\infty, \psi = -Qi$

Tableau 2.1: Représentation des points du plan  $z$   
sur le plan  $w$

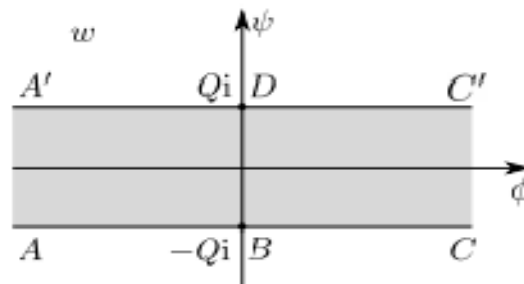


Figure 2.5: Le plan potentiel pour l'écoulement hors  
une fente.

Pour le plan hodographe, on note que la vitesse tend vers zéro à l'infini dans le demi-plan supérieur, alors  $\varphi' \rightarrow 0$  à  $AA'$ .

Les surfaces libres  $BC$  et  $CC'$  sont mappés sur des arcs de cercle trigonométrique, avec  $\{u = 1, v = 0\}$  à  $B$ ,  $\{u = 0, v = -1\}$  au  $CC'$  et  $\{u = -1, v = 0\}$  à  $D$ . Les murs  $AB$  et  $A'D$  sont mappés sur les lignes droites  $v = 0$ , avec  $u \rightarrow 0$  à  $A$  et  $A'$ ,  $u = 1$  à  $B$  et  $u = -1$  à  $D$ . Par conséquent le plan hodographe est comme illustré dans [ figure2.6 ] et qui en représente aussi dans [ tableau 2.2]:

les point	plan $z$	plan $\omega'$
$A'$	$x = +\infty, y = 0$	$u = 0, v = 0$
$D$	$x = 1, y = 0$	$u = -1, v = 0$
$C'$	$x = Q, y = -\infty$	$u = 0, \psi = -i$
$A$	$x = -\infty, y = 0$	$u = 0, v = 0$
$B$	$x = -1, y = 0$	$u = 1, v = 0$
$C$	$x = -Q, y = -\infty$	$u = 0, v = -i$

Tableau 2.2: Représentation des points du plan  $z$  sur le plan  $\omega'$

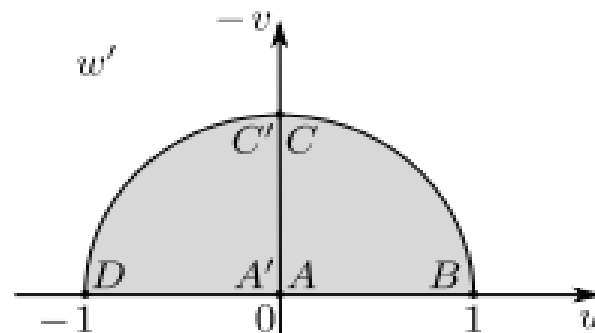


Figure 2.6: Le plan hodographe pour l'écoulement hors une fente.

l'application  $\zeta$  est:

$$\zeta = -\left(\frac{1 - \omega'}{1 + \omega'}\right)^2 \quad (2.10)$$

on transforme maintenant les plans hodographes à la demi-plan supérieure illustré dans la [ figure 2.7 ] et qui en représente aussi dans [ tableau 2.3 – 2.4 ]

les point	plan $\omega'$	plan $\zeta$
$A'$	$u = 0, v = 0$	$\xi = -1, \eta = 0$
$D$	$u = -1, v = 0$	$\xi = -\infty, \eta = 0$
$C'$	$u = 0, \psi = -i$	$\xi = 1, \eta = 0$
$A$	$u = 0, v = 0$	$\xi = -1, \eta = 0$
$B$	$u = 1, v = 0$	$\xi = 0, \eta = 0$
$C$	$u = 0, v = -i$	$\xi = 1, \eta = 0$

Tableau 2.3: Représentation des points du plan  $\omega'$  sur le demi-plan supérieure  $\zeta$

les point	plan $\omega$	plan $\zeta_1$
$A'$	$\phi = -\infty, \psi = Qi$	$\xi_1 = 0, \eta_1 = 0$
$D$	$\phi = 0, \psi = Qi$	$\xi_1 = -1, \eta_1 = 0$
$C'$	$\phi = +\infty, \psi = Qi$	$\xi_1 = -\infty, \eta_1 = 0$
$A$	$\phi = +\infty, \psi = Qi$	$\xi_1 = 0, \eta_1 = 0$
$B$	$\phi = 0, \psi = -Qi$	$\xi_1 = 1, \eta_1 = 0$
$C$	$\phi = +\infty, \psi = -Qi$	$\xi_1 = +\infty, \eta_1 = 0$

Tableau 2.4: Représentation des points du plan  $\omega$  sur le demi-plan supérieure  $\zeta_1$

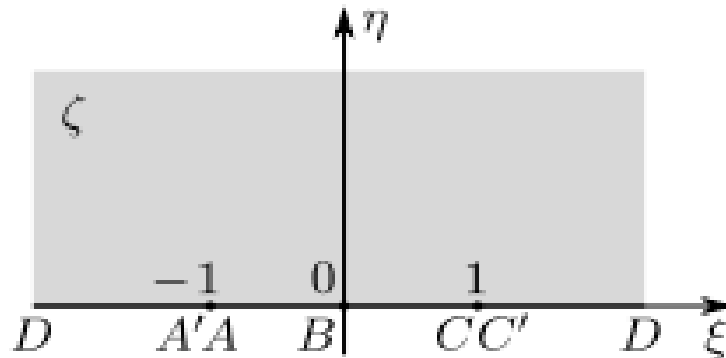


Figure 2.7: Le plan de l'hodographe pour l'écoulement hord de la fente est mappé à ce demi-plan supérieur par la cartographie (2.10)

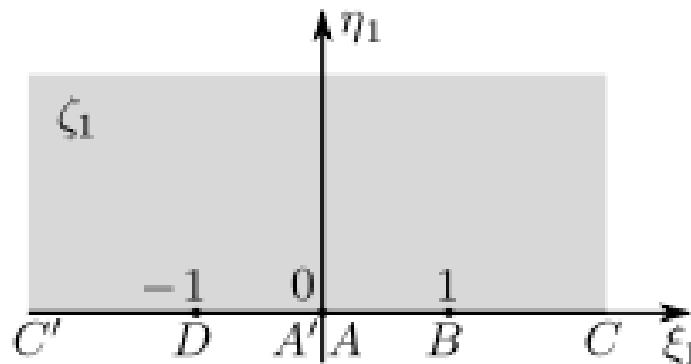


Figure 2.8: Le plan de l'hodographe pour l'écoulement hord de la fente est mappé à ce demi-plan supérieur par la cartographie (2.12)

## 2.4.2 La deuxième étape

Pour trouver la solution analytique de le problème précédent on applique la technique de transformation Schwarz-Christoffel on va obtenir tout d'abord l'application qui transforme le plan  $\omega$  [figure 2.5] à un demi-plan supérieur  $\zeta_1$  [figure 2.6]

la transformation de schwarz cristoffel donne:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \alpha \int (\varsigma_1 - 1)^{\pi/\pi-1} (\varsigma_1 + 1)^{\pi/\pi-1} (\varsigma_1 - 1)^{0/\pi-1} d\varsigma_1 \\
 &= \alpha \int (\varsigma_1)^{-1} d\varsigma_1 = \alpha \log(\varsigma_1) + \beta \\
 \omega &= \alpha \log(\varsigma_1) + \beta
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

pour obtenir  $\alpha$  et  $\beta$  en effet:

$$\begin{cases} iQ = \alpha \log(-1) + \beta \\ -iQ = \alpha \log(1) + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} iQ = 2\alpha \log(i) + \beta \\ \beta = -iQ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2Q}{\pi} \\ \beta = -iQ \end{cases}$$

donc en remplace dans (2.11) on obtient:

$$\omega = \frac{2Q}{\pi} \log(\varsigma_1) - iQ$$

$$\frac{\omega\pi}{2Q} = \log(\varsigma_1) - i\frac{Q\pi}{2Q}$$

$$\frac{\omega\pi}{2Q} = \log(\varsigma_1) - \log(e^{i\frac{\pi}{2}})$$

$$\frac{\omega\pi}{2Q} = \log\left(\frac{\varsigma_1}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) = \log\left(\frac{\varsigma_1}{i}\right)$$

donc

$$\varsigma_1 = ie^{\pi\omega/2Q} \tag{2.12}$$

on transforme le plan potentiel à la demi-plan supérieur illustré à [figure 2.8], mais les points de l'axe réel  $x$  sont dans le mauvais ordre! on peut réorganiser les points et donc transformer les plans  $\zeta_1$  sur les plans  $\zeta$  avec la transformation de möbius

$$\zeta = \frac{\zeta_1 - 1}{\zeta_1 + 1} \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{1 - \omega'}{1 + \omega'}\right)^2 = \frac{1 - ie^{\pi\omega/2Q}}{1 + ie^{\pi\omega/2Q}} \quad (2.14)$$

c'est possible, mais compliqué à résoudre.

Si on veut simplement la forme de la surface libre il y a un raccourci pour une forme paramétrique, dans la surface libre on sait que  $|\omega'| = 1$  et on peut écrire

$$\omega' = e^{-i\theta} \quad (2.15)$$

où  $\theta$  est l'angle de la surface fait avec l'axe  $x$ ,  $-\theta$  est l'angle polaire de le plan hodographe  $(u, -v)$ , sur  $BC$  on a  $-\pi/2 < \theta < 0$ , tout sur  $C'D$  on a  $-\pi < \theta < -\pi/2$ , comme on peut le voir à [ figure (2.5)]

substituer (2.15) dans (3.14) :

on a  $\omega' = e^{-i\theta}$  et aussi

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - \omega'}{1 + \omega'}\right)^2 &= \frac{1 - ie^{\pi\omega/2Q}}{1 + ie^{\pi\omega/2Q}} \\ &= \left(\frac{1 - e^{-i\theta}}{1 + e^{-i\theta}}\right)^2 = \frac{1 + e^{-2i\theta} - 2e^{-i\theta}}{1 + e^{-2i\theta} + 2e^{-i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 2} = -\left(\frac{1 - \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}}{1 + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}\right) \\ &= -\left(\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}\right) = -\tan^2(\theta/2) \\ \left(\frac{1 - \omega'}{1 + \omega'}\right)^2 &= \frac{1 - ie^{\pi\omega/2Q}}{1 + ie^{\pi\omega/2Q}} = -\tan^2(\theta/2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

on inverse pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1 - ie^{\pi\omega/2Q}}{1 + ie^{\pi\omega/2Q}} &= -\tan^2(\theta/2) \\ 1 - ie^{\pi\omega/2Q} &= -\tan^2(\theta/2)(1 + ie^{\pi\omega/2Q}) \\ 1 - ie^{\pi\omega/2Q} + \tan^2(\theta/2)(ie^{\pi\omega/2Q}) &= -\tan^2(\theta/2) \\ ie^{\pi\omega/2Q} &= \frac{1 + \tan^2(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 + \left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)}{1 - \left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \\
 ie^{\pi\omega/2Q} &= \frac{1 + \tan^2(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)} = \sec\theta
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

maintenant on dérive les deux côtés à l'égard de  $\theta$ , on obtient:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} (ie^{\pi\omega/2Q}) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\cos\theta}\right) = (\sec\theta)' \\
 \frac{i\pi}{2Q} e^{\pi\omega/2Q} \frac{d\omega}{dz} \frac{dz}{d\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \frac{1}{\cos\theta} \\
 \frac{i\pi}{2Q} e^{\pi\omega/2Q} \frac{d\omega}{dz} \frac{dz}{d\theta} &= \sec\theta \tan\theta
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

on remplace  $\omega'$  et  $e^{\pi\omega/2Q}$  dans les équations (2.15)et (2.17)on obtient:

$$\begin{aligned}
 ie^{\pi\omega/2Q} &= \sec\theta \\
 \frac{\pi}{2Q} \frac{d\omega}{dz} \frac{dz}{d\theta} &= \tan\theta \\
 \frac{dz}{d\theta} &= \frac{2Q}{\pi} e^{i\theta} \tan\theta
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

l'integration de cette *ODE* donne une équation paramétrique  $z(\theta)$  pour la position de la surface libre .En tenant les parties réelles et imaginaire ,on obtient:

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{d\theta} &= \frac{2Q}{\pi} e^{i\theta} \tan\theta = \frac{2Q}{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta) \tan\theta \\
 \text{donc } \frac{dx}{d\theta} &= \frac{2Q}{\pi} \sin\theta \quad \text{et} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{2Q}{\pi} \sin\theta \tan\theta
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

et l'integration de l'égard de  $\theta$  donne

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\theta} &= \frac{2Q}{\pi} \sin\theta \implies dx = \frac{2Q}{\pi} \sin\theta \\
 \implies x &= \int \frac{2Q}{\pi} \sin\theta d\theta = -\frac{2Q}{\pi} \cos\theta + c_1 \\
 \frac{dy}{d\theta} &= \frac{2Q}{\pi} \sin\theta \tan\theta \implies dy = \frac{2Q}{\pi} \sin\theta \tan\theta d\theta \\
 \implies y &= \frac{2Q}{\pi} \int \sin\theta \tan\theta d\theta = \frac{2Q}{\pi} \int \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} d\theta \\
 &= \frac{2Q}{\pi} \int \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} \frac{1 + \sin\theta}{1 + \sin\theta} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2Q}{\pi} \int \frac{1 + \sin \theta - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} d\theta \\
 &= \frac{2Q}{\pi} \int \frac{1 + \sin \theta - \cos \theta (\cos \theta - \cos \theta \sin \theta)}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} d\theta \\
 &= \frac{2Q}{\pi} \int \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} - \frac{\cos \theta (\cos \theta (1 + \sin \theta))}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} d\theta \\
 &= \frac{2Q}{\pi} \int \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos^2 \theta \left( \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)} - \cos \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{2Q}{\pi} \int \left( \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} - \cos \theta \right) d\theta \\
 &\implies y = \frac{2Q}{\pi} (\log |\sec \theta + \tan \theta| - \sin \theta) + c_2 \\
 x = -\frac{2Q}{\pi} \cos \theta + c_1 \quad \text{et} \quad y = \frac{2Q}{\pi} (\log |\sec \theta + \tan \theta| - \sin \theta) + c_2 \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

on calcule maintenant les constantes  $c_1$  et  $c_2$ , on prend comme exemple  $\theta = 0$  et  $x = -1$  et  $y = 0$  donc

$$\begin{aligned}
 -1 &= c_1 - \frac{2Q}{\pi} (\cos 0) \implies c_1 = -1 + \frac{2Q}{\pi} \\
 \text{et} \quad 0 &= \frac{2Q}{\pi} (\log |\sec 0 + \tan 0| - \sin 0) + c_2 \implies c_2 = 0 \\
 x = -\frac{2Q}{\pi} \cos \theta - 1 \quad \text{et} \quad y &= \frac{2Q}{\pi} (\log |\sec \theta + \tan \theta| - \sin \theta) \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

à point C on sait que  $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ , qui donne  $y \rightarrow -\infty$

$$\text{et } x \rightarrow -1 + \frac{2Q}{\pi} = -Q$$

$$\begin{aligned}
 \text{donc } \frac{2Q}{\pi} = -Q + 1 &\implies 2Q = \pi(-Q + 1) \implies Q(2 + \pi) = \pi \\
 &\implies Q = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0.611 \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

ce qui est en accord avec l'expérience, le resultat est tracée en forme de jet [figure 2.9]

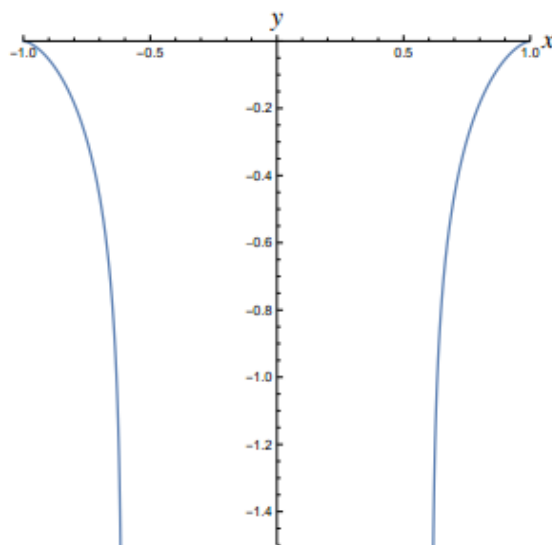


Figure 2.9: La forme de jet paramétriquement par (2.22) et (2.23).

# Chapitre 3

## Application de la méthode D'Integro-Différentiel à un problème de type jet

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on va dériver les équations pour le problème, y compris l'équation de Laplace et des conditions aux limites appropriées relatives à les hypothèses physiques du système d'écoulement. Dans le présent chapitre, on formule le problème avec l'utilisation d'une variable complexe théorie pour décrire le modèle, et simplifier la géométrie avec l'utilisation de la transformation hodographique. Une méthode intégro-différentiel est ensuite utilisée pour dériver une équation intégrale, qui décrit le problème entièrement.

### 3.2 Formulation du problème

On va établir que le débit du système présenté ici obéit à l'équation  $Q = \nabla\phi$ , dans le domaine de flux sauf à la source, ce qui implique

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (3.1)$$

on introduit la quantité  $\psi$ , connu sous le nom de fonction de flot, défini par

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial x}, v = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (3.2)$$

on fait la somme des équations (3.1) et (3.2) pour obtenir les équations de Cauchy-Riemann suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (3.3)$$

on laisse la variable complexe  $z = x + iy$  représenter le plan physique et introduire le potentiel complexe

$$\omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (3.4)$$

Qui, depuis  $\phi$  et  $\psi$  soumis aux équations Cauchy-Riemann, est une fonction analytique de  $z = x + iy$  domaine au sein de l'écoulement partout sauf à la source.

On introduit le complexe conjugué de vitesse,  $\omega$  exprimée en

$$\omega'(z) = \varphi(z) = u - iv. \quad (3.5)$$

Ce qui est aussi une fonction analytique, la vitesse complexe est liée à la vitesse du fluide qui exprime par:

$$\varphi = qe^{-i\delta}. \quad (3.6)$$

Où  $\delta$  est à l'angle du vecteur de la vitesse par rapport à l'axe horizontal et  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$  est le module de la vitesse.

Dans cette section on prend aussi comme exemple l'écoulement hors de la fente (l'exemple qui on a traité dans le chapitre précédent) mais dans ce cas on prendre avec les condition suivant:

le fluide occupé le demi-plan supérieure  $y > 0$ , sur le plan  $y = 0$  y un trous dans le mur dans l'intervall  $x \in [-a, 0]$ , et l'épaisseur dans ce cas l'on prend  $Qa$ , et après la normalisation de probleme donc l'écoulement net dans le jet est  $Q$ , on a  $\psi = -Q$  sur la rationalisation  $ABC$ , à l'infin dans le demi-plan supérieure l'organisation est dans par [figure 3.1].

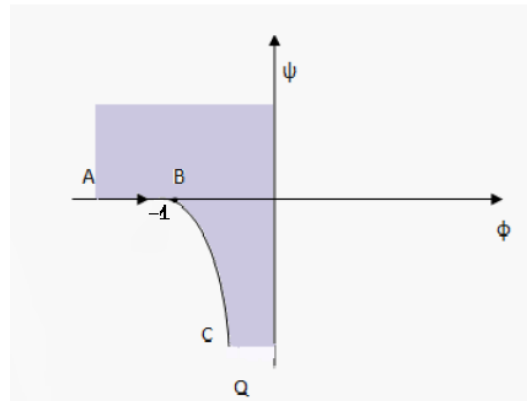


Figure 3.1: écoulement hors de la fente

### 3.3 Solution analytique

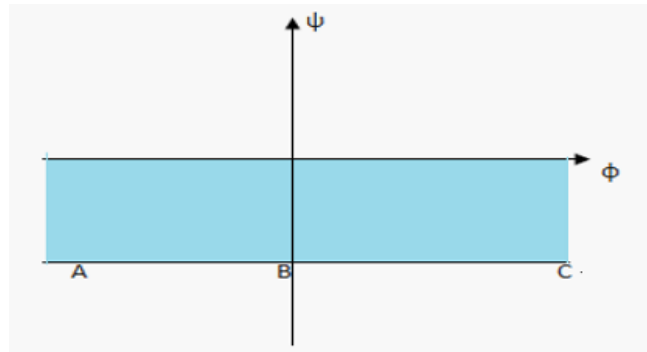
#### 3.3.1 Première étape

dans cette étape on utilise quelques transformations pour reformuler le problème posé .

On transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan  $\omega$ , [figure 3.1] à le demi-plan inférieur [figure 3.2], et qui on représente les points dans [tableau 3.1]

les points	plan $z$	plan $\omega$
$A$	$x = -\infty, y = 0$	$\phi = -\infty, \psi = -1$
$B$	$x = -1, y = 0$	$\phi = 0, \psi = -1$
$C$	$x = -1, y = -\infty$	$\phi = +\infty, \psi = -1$

Tableau 3.1: Représentation des points du plan  $z$  sur le plan  $\omega$

Figure 3.2: Le problème sur le plan  $\omega$ 

Tous les points du système sont maintenant situés sur la bande infinie entre  $\psi = 0$  et  $\psi = -1$  sur le plan  $f$ , afin de reformuler ce problème à l'aide d'une méthode des integro-différentiels on introduit la variable complexe  $\zeta = t + i\eta$ , permettant la bande infinie d'être mappée sur la partie inférieure de le plane  $\zeta$  dont la transformation conformationnelle:

$$\zeta = t + i\eta = e^{\pi\omega} \quad (3.7)$$

les points	plan $\omega$	plan $\zeta$
$A$	$\phi = -\infty, \psi = -1$	$t = +\infty, \eta = 0$
$B$	$\phi = 0, \psi = -1$	$t = -1, \eta = 0$
$C$	$\phi = +\infty, \psi = -1$	$t = -\infty, \eta = 0$

Tableau 3.2: Représentation des points du plan  $\omega$  sur le plan  $\zeta$

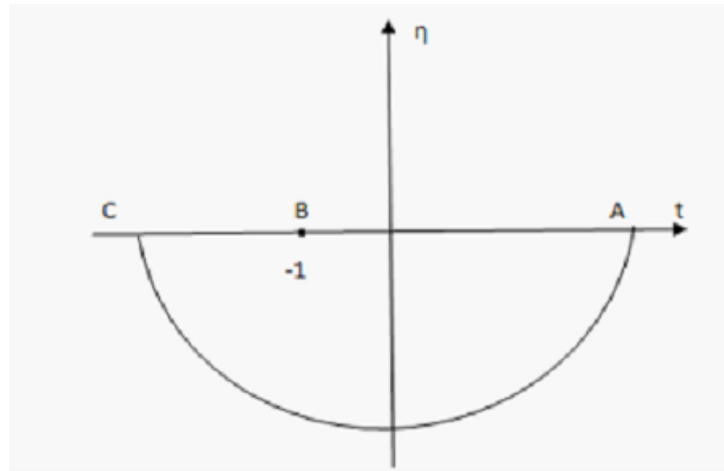


Figure 3.3: le problème mappé sur la moitié inférieure de le plan  $\zeta$

Tous les points d'importance sont situés sur l'axe réel sur le plan  $\zeta$ . La surface libre correspondent à  $-1 < t < \infty$  alors que le canal bas correspond à  $-\infty < t < -1$ . Le mur a une seule section sous la source  $-1 < t < 0$ .

Les équations doivent être reformulées pour le plan  $\zeta$  avec la géométrie du système intégré. on introduit une nouvelle fonction analytique, connue sous le nom de hodographe logarithmique, définie comme

$$\Omega(\zeta) = \delta(\zeta) + i\tau(\zeta). \quad (3.8)$$

Qui est liée à la vitesse complexe (3.5) par

$$\omega(z(\zeta)) = u - iv = \frac{1}{\mu} e^{-i\Omega(\zeta)}. \quad (3.9)$$

Où  $\mu$  est la profondeur moyenne de l'adimensionnelles fluide en amont. Afin d'obtenir l'interprétation physique de la fonction, on remanier le formulaire suivant:

$$\varphi = u - iv = \frac{1}{\mu} e^{\tau(\zeta)} e^{-i\delta(\zeta)}. \quad (3.10)$$

En comparant le résultat (3.10) à l'équation (3.6), on observe que  $\frac{1}{\mu} e^{\tau(\zeta)}$  et  $\delta = \delta(\zeta)$  Ainsi,  $\frac{1}{\mu} e^{\tau(\zeta)}$  donne l'ampleur de la vitesse du fluide et  $\delta(\zeta)$  donne l'angle entre le rationalise

et l'axe des  $x$ , et les valeurs limites sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } -\infty < t < -1 \\ \frac{-\pi}{2} \text{ si } -1 < t < 0 \\ \text{inconnu si } 0 < t < +\infty \end{array} \right. \quad (3.11)$$

### 3.3.2 La deuxième étape

Pour trouver la solution analytique de problème précédent on applique le théorème d'intégrale de Cauchy en effet :

L'équation qui concerne  $\tau(t)$  et  $\delta(t)$  sur l'axe réel peut être vérifiée en appliquant une courbe fermée faisant partie intégrante de la fonction  $\Omega(\zeta)$  autour de la courbe indiquée par  $\Gamma_0$  on le sens négatif avec la singularité à l'extérieur de la région de l'intégrale on invoque le célèbre théorème (1.5.1) de Cauchy c'est-à-dire :

$$\oint_{\Gamma_0} \frac{\Omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = 0 \quad (3.12)$$

où  $\zeta_0$  est un point à l'extérieur en fait on laisse  $\zeta_0$  se trouvent sur l'axe réel le point singulier  $\zeta_0 = t_0$  est évité en faisant un détour de demi-cercle de rayon définie autour d'elle dénotée par  $\Gamma_1$ , on utilise Théorème 1.5.3 (théorème des résidus) pour obtenir la contribution intégrale de  $\Gamma_1$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\Omega(\zeta)}{\zeta - t_0} d\zeta = i\pi\Omega(t_0)$$

aussi la contribution intégrale du demi-cercle de rayon infini, dénoté par

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\Omega(\zeta)}{\zeta - t_0} d\zeta = 0$$

ces résultats sont substitués à l'équation (3.12) pour donner

$$\Omega(t_0) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega(t)}{t - t_0} dt \quad (3.13)$$

qui en prenant les parties réelles et imaginaires donner

$$\tau(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(t)}{t - t_0} dt \quad (3.14)$$

$$\delta(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(t)}{t - t_0} dt \quad (3.15)$$

où les barres indiquent les valeurs principales de cauchy, région de l'intégral dans l'équation (3.14) est divisé en régions intégrales séparées marquées comme suite

region	limite supérieure $t$	limite inférieure $t$
$\Gamma_1$	$-\infty$	$-1$
$\Gamma_2$	$-1$	$0$
$\Gamma_3$	$0$	$+\infty$

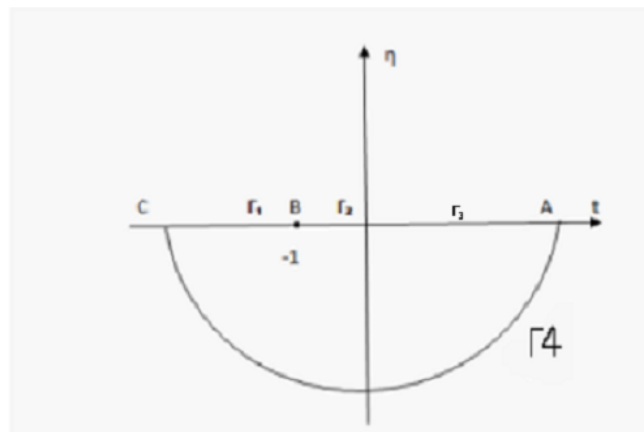


Figure 3.4: Le demi-cercle  $\Gamma$  séparé en différentes régions sur le plan  $\zeta$ .

Ainsi, l'intégrale dans l'équations (3.14) est divisie en deux intégrales

$$\begin{aligned} \tau(t_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\delta(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{\delta(t)}{t - t_0} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{-1} \frac{\delta(t)}{t - t_0} dt + \int_{-1}^0 \frac{\delta(t)}{t - t_0} dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{-1} \frac{-\pi/2}{t - t_0} dt + \int_{-1}^0 \frac{0}{t - t_0} dt \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^0 \frac{1}{t-t_0} dt = -\frac{1}{2} [\ln(t-t_0)]_{-1}^0 \right]$$

$$\tau(t_0) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t_0-1}{t_0}\right)$$

les variables sont bien changées à fin d'obtenir l'équation suivante:

$$\tau(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) \quad (3.16)$$

des expressions pour l'obtention de la coupe  $z$  les points situés sur la surface libre sont nécessaires, afin d'obtenir ces expressions on constate une expression pour  $z$  en réorganisons l'équation (3.9) pour donner

$$dz = \mu e^{i\Omega(\zeta)} d\omega \quad (3.17)$$

en différentions et réorganisation de la transformation (3.8) on obtient l'équation différentiel

$$\frac{d\zeta}{d\omega} = \pi e^{\pi\omega} = \pi\zeta \quad (3.18)$$

et donc l'équation (3.17) devient

$$dz = \mu e^{i\Omega(\zeta)} d\omega = \frac{\mu e^{i\Omega(\zeta)}}{\pi \pi\zeta} d\zeta$$

$\zeta$  est réel donc l'équation est devient

$$dz = \frac{\mu e^{i\Omega(t)}}{\pi t} dt$$

$$z(t) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^t \frac{e^{i\Omega(t')}}{t'} dt' = \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^t \frac{e^{-\tau(t')+i\delta(t')}}{t'} dt' \quad (3.19)$$

on a  $e^{i\delta} = \cos \delta + i \sin \delta$  et équation (3.7) sont utilisés pour obtenir les expressions de  $x$  et  $y$

$$x(t) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^t \frac{e^{-\tau(t')} \cos(\delta(t'))}{t'} dt'$$

$$y(t) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^t \frac{e^{-\tau(t')} \sin(\delta(t'))}{t'} dt'$$

## 3.4 Conclusion générale

Dans ce mémoire, on étudie les techniques de résolution du problème d'écoulement bidimensionnel de type jet, le fluide est supposé non visqueux et incompressible et l'écoulement est irrotationnel.

Dans ce travail on donne une formulation mathématique à ce problème posé pour quelque configuration possible de l'objet, le problème est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre qui est de forme inconnue. on adopte une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre et la méthode des intégraux différentiels pour trouver les paramètres de la surface libre du problème posé.

# Bibliographie

- [1] **Ben Hamouda, Riadh** , Notions de Mécanique des fluides, cours et exercices corrigés, Centre de Publication Universitaire, Tunis 2008
- [2] **Christophe Ancey**, Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides, Laboratoire hydraulique environnementale (LHE) .École Polytechnique Fédérale de Lausanne Écublens CH-1015 Lausanne.
- [3] **Damou Merzak** .MSC.PHD.mecanique des fluides ,reimpression 1996.
- [4] **Holger Paul Keeler**, BSc, BTech, arXiv:1402.4002v1 [physics.flu-dyn] 17 Feb 2014 Free surface flow due to a submerged source, Supervisor: Dr Scott McCue.
- [5] **kherfi salima**, Problème des écoulements au-dessus des obstacles avec l'effet de gravité, thèse master de universite de ouargla (2015)
- [6] **Laiadi abdelkader**, effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles , thèse magistère de universite de ouargla (2012).
- [7] **Murray, R**, VARIABLES COMPLEXES, Cours et problèmes, est traduit de : Theory and Problems of Complex Variables, . Spiegel Copyright © McGraw-Hill Inc, New York, 1973 ISBN France : 2-7042-0020-3.
- [8] **Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia**, Mécanique des fluides, Dunod, Paris, 2011 ISBN 978-2-10-056922-9..
- [9] **Salloum Zaynab** . Etude mathématique d'écoulements de fluides visco élastiques dans des domaines singuliers. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2008. Français. NNT : 2008PEST0017>. <tel-00461675>.

- [10] **Schinzinger Roland** et **Patricio A. A. Laura**, Conformal Mapping Méthodes and applications, Dover Publications, INC. Mineola, New York..
- [11] **Patrice Tauvel** Professeur à l'université de Poitiers,ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3 ,Cours et exercices corrigés,Dunod, Paris, 2006 ISBN 2 10 050074 0
- [12] Free surface flows,C5.6 Applied Complex Variables,Draft date: 11 January 2016 3-1