



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Sur l'opérateur de composition dans certains cas des espaces de Sobolev

Présenté par
ZEKRAOUI Aichouche

Devant le jury composé de :

<i>M^r</i> DRIHEM Douadi	prof	Université de M'sila	Président.
<i>M^r</i> MOUSSAI Madani	prof	Université de M'sila	Encadreur.
<i>M^r</i> LAKEHAL Aissa	MAA	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, et le courage d'étudier. Je tiens à remercier le professeur **Madani Moussai**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire. Mes remerciements vont également à tous les membres du jury Messieurs les professeurs Douadi Drihem et Aissa Lakhhal qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et d'examiner ce travail. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes amis et mes parents.

Table des matières

Introduction	1
Notation	2
1 Composition sur l'espace de Sobolev d'après Brezis-Mironescu	1
1.1 Rappel sur les espaces L^p	1
1.2 L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$	2
1.3 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	3
1.4 Espace de Sobolev fractionnaires	4
1.5 L'espace de Lizorkin-Triebel	5
1.6 Inégalités maximales et quelques propriétés de $F_{p,q}^s$	7
1.7 Le lemme Runst-Sickel	9
2 Théorème de composition dans $W^{1,p}$	14
2.1 Quelques rappels sur l'intégration	14
2.2 Convolution et régularisation	15
2.2.1 Convolution des fonctions	15
2.2.2 Suites régularisantes	15
2.3 Critère de compacité forte dans L^p	17
2.4 Dérivation d'un produit de composition	18

3	Théorème de composition sur $W^{m,p}$	21
3.1	Opérateurs de composition sur les espaces de Sobolev $W^{m,p}$	21
3.1.1	Opérateurs de composition sur les sous espaces de $W^{m,p}$	23
3.2	Un résultat sur les espaces $W^{m,p} \cap \dot{W}^{1,pm}$	24

Introduction

Les espaces de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ est fait l'objet de travaux de recherche, en particulier dans la théorie des équations aux dérivées partielles et en analyse fonctionnelle. Dans ce mémoire nous allons faire une étude sur le cas de composition sur ces espaces dans certains sens ce travail est basé essentiellement dans l'article de H. Brezis, P. Mironescu.[5] et le livre de T. Runst and W. Sickel. [10]. Concernant la composition sur certains espaces fonctionnels autres que les espaces de Sobolev, on cite la référence [2] où l'auteur a étudié la composition sur les espaces de Sobolev à valeurs vectorielles.

Notre mémoire est organisé en trois chapitres :

-Dans le premier chapitre nous regroupons quelques définitions et propriétés sur les espaces de Lebesgue L^p , de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s$ et de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

-Dans le deuxième chapitre nous donnons la décomposition sur $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ d'après H. Brezis-P. Mironescu.

-Le troisième chapitre est consacré à la composition sur $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ d'après Runst-Sickel ainsi par un résultat sur $W^{m,p} \cap \dot{W}^{1,pm}$.

Notation

- \mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}^n : Un espace Euclidien de dimension n.
- Ω : Ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue.
- $|\Omega|$: la mesure de Lebesgue de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- $L^p(\Omega)$: L'espace des fonctions mesurable sur Ω .
- $L^{p^*}(\Omega)$: Est L'espace dual de $L^p(\Omega)$.
- p^* : Est l'exposant conjugué de p tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.
- $C_0^\infty = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:L'espace des fonctions de classe C^∞ support compact incluse dans Ω .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit scalaire de \mathbb{R}^n .
- $L_{loc}^1(\Omega)$: L'espace des fonctions localement intégrable sur Ω .
- $Supp f$: Support de la fonction f .
- $W^{1,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles au sens faible d'ordre 1 sont également dans $L^p(\Omega)$.
- $H^1(\Omega)$: $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)$.
- $F_{p,q}^s$: Espace de Lizorkin-Triebel .

Chapitre 1

Composition sur l'espace de Sobolev d'après Brezis-Mironescu

1.1 Rappel sur les espaces L^p

Dans ce qui suit on considère Ω un ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue on pose :

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on pose :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On muni $L^p(\Omega)$ par la norme :

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par p^* l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Proposition 1.1.1 (Inégalité de Hölder). Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p^*}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Alors :

$$fg \in L^1 \text{ et } \int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}$$

Preuve. Voir [4] page 56. ■

Proposition 1.1.2 (Inégalité de Young). Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ avec $r \geq p$ et $r \geq q$ alors

$$\|f * g\|_r = \|f\|_p \|g\|_q.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder on obtient une inégalité d'interpolation :

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha} \text{ avec } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Preuve. Voir [4] page 57. ■

1.2 L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n si Ω est un intervalle on l'écrira I .

Définition 1.2.1 $W^{1,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions f telle que

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_p + \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_p$$

Est fini.

Remarque 1.2.1 Il est bien connu que $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach .

Preuve. Voir [4] page 121. ■

Proposition 1.2.1 *Soit $1 \leq p < n$ alors*

$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ où q est donné par $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ et il existe une constante $C = C(p, n)$ telle que

$$\|f\|_q \leq C \|\nabla f\|_q.$$

Cette inclusion est connue comme l'injection de Sobolev, pour sa preuve voir par exemple [12].

1.3 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.3.1 *Soient $m \geq 2$ et $1 \leq p \leq \infty$,*

$W^{m,p}(\Omega)$ *est l'espace de fonctions f telle que*

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_p < +\infty.$$

Définit par récurrence l'espace de Sobolev comme le suit :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f : \partial f \in W^{m-1,p}(\Omega)\}.$$

On pose :

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Est l'espace de Sobolev usuel, défini par :

$$\|f\|_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_2.$$

On sait que l'espace H^m est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle + \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle.$$

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Corollaire 1.3.1 Soit $m \geq 1$ un entier et $1 \leq p < \infty$. On a :

1. Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$
2. Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n) \forall q \in [p, +\infty[$.
3. Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Avec injections continues.

Preuve. Voir [4] page 168. ■

1.4 Espace de Sobolev fractionnaires

On peut définir un espace de Sobolev à exposant non entier, c'est -à- dire $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$

Définition 1.4.1 Soient $0 < s < 1$ et $1 \leq p < \infty$. On pose $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev fractionnaire des fonctions f telle que

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \|f\|_p + \left[\iint \left[\frac{(f(x) - f(y))^p}{|x - y|^{s+\frac{n}{p}}} dx dy \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

On définit $W^{s,p}$ pour s non entier, $s > 1$ comme suit on écrit $s = m + \sigma$ avec m partie entière de s , et on pose :

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega); D^\alpha u \in W^{s,p}(\Omega); \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| = m \} .$$

1.5 L'espace de Lizorkin-Triebel

Soit φ dans C^∞ une fonction sur \mathbb{R}^n telle que $\varphi(\xi) = 1$, pour $|\xi| \leq 1$, et $\varphi(\xi) = 0$, pour $|\xi| \geq 2$, on pose

$$\varphi_j(\xi) = \varphi_j(2^{-j}\xi) - \varphi(2^{-j+1}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, j \geq 1.$$

et $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) = 1$ si $\xi \in \mathbb{R}$. Soit $f \in S'$ alors

$$\varphi_k(D)f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi_k f})(x), \quad k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Ce qui donne $f = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(D)f$ convergence dans S' , voir par exemple [6].

Définition 1.5.1 Soit $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$ alors, l'espace de Lizorkin-Triebel est l'ensemble suivant :

$$F_{pq}^s = \left\{ f \in S', \|f\|_{F_{pq}^s} = \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} |\varphi_k(D)f(\cdot)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < \infty \right\},$$

avec la modification usuelle si $q = \infty$.

Remarque 1.5.1 On peut définir F_{pq}^s par les opérateurs maximaux, il suffit de remplacer

$\varphi_k(D)f$ par

$$\varphi_k^{*,a} f(x) = \sup \frac{|\varphi_k(D)f(y)|}{(1 + 2^k |x - y|)^a} \text{ pour } a > \frac{n}{\min(p, q)}.$$

F_{pq}^s est un espace quasi- Banach (espace de Banach si $p \geq 1, q \geq 1$) et il est indépendant du choix de la fonction .C'est-à-dire, si on change φ par ψ de même type on obtient une norme équivalente .

Preuve. Voir [12] page 109. ■

Proposition 1.5.1 Soit $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$ On a :

$$S \subset F_{pq}^s \subset S'.$$

Preuve. Voir [12] page 96. ■

Remarque 1.5.2 Dans [10] on trouvera plusieurs propriétés de $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$,comme les inclusions, la dérivation....etc, que nous les données privément :

1. $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,q}^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\varepsilon > 0$
2. $F_{p_1,q}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p_2,r}^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ pour tout s_1, s_2, p_1, p_2, q et r telle que : $s_1 - \frac{n}{p_1} \geq s_2 - \frac{n}{p_2}$ et $p_1 < p_2$.
3. Clairement on a alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$.
4. Si $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ alors $\partial f \in F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, et on a une norme équivalente :

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \|f\|_{F_{p,q}^{s-1}} + \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_{F_{p,q}^{s-1}}$$

et par récurrence , on peut changer $F_{p,q}^{s-1}$ par $F_{p,q}^{s-m}$ pour $m = 2, 3, \dots$,

Preuve. Voir [12] page 59. ■

Remarque 1.5.3 L'espace $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ admet des normes équivalentes continue lorsque $s > 0$, qui ne sont pas nécessaires pour ce travail. Voir aussi [8] et [9].

Remarque 1.5.4 L'espace $F_{p,q}^s$ s'injecte dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ lorsque $s > \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $0 < p \leq 1$.

1.6 Inégalités maximales et quelques propriétés de $F_{p,q}^s$

1. $L^p = F_{p,2}^0$, $1 < p < \infty$.
2. $W^{m,p} = F_{p,2}^m$, $m = 1, 2, \dots$, $1 < p < \infty$.
3. $W^{s,p} = F_{p,p}^s$, $0 < s < \infty$.s non-entier, $1 \leq p < \infty$.
4. $L^{s,p} = F_{p,2}^s$, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$.
5. $L^\infty \subset F_{\infty,\infty}^0$ i-e : $\sup_{j,x} |f_j(x)| \leq C \|f\|_{L^\infty}$, l'espace $F_{\infty,\infty}^0$ est l'espace de Hölder .

Preuve. Voir [12] (2.3.5). ■

Remarque 1.6.1 $1 \leq p < \infty$, $0 < s < \infty$, $s = k + \sigma$, $0 < \sigma < 1$

$$\|f\|_{W^{s,p}}^p = \|f\|_{W^{s,p}}^p - \|D^k f\|_{L^p}^p + \iint_{\mathbb{R}^n \mathbb{R}^n} \frac{|D^k f(x) - D^k f(y)|^p}{(x-y)^{n+\sigma p}} dx dy.$$

Preuve. Voir [12] (2.6.1). ■

Proposition 1.6.1 On a

1. Pour $1 < p \leq \infty$ et toute fonction f , on a $\|Mf\|_{L^p} \sim \|f\|_{L^p}$.
2. Pour $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, et toute suite de fonction (f_j)

$$\| \|Mf_j(x)\|_{l^q} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \| \|f_j(x)\|_{l^q} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

3. Pour tout $\varphi \in S$ fixe et toute fonction f , on a

$$|f * \varphi^t(x)| \leq C M f(x). \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Voir [6] les pages 13, 55 et 57. ■

Proposition 1.6.2 Pour toute fonction $f \in L_{loc}^1$ on a

$$|f_j(x)| \leq C M f(x), j \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

et

$$\left| \sum_{j \geq k} f_j(x) \right| \leq C M f(x), k \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Voir [6]. ■

Proposition 1.6.3 On a $0 < s < \infty$ et $0 < p < \infty, 0 < r < \infty$.

Alors :

$$F_{p,r}^s \cap L^\infty \subset F_{2p,r}^{s/2} \text{ pour tout } 0 < q \leq \infty.$$

Preuve. Voir [12] lemme 2 page 331. ■

Proposition 1.6.4 Pour $-\infty < s_1 < s_2 < \infty, 1 < p_1, p_2 \leq \infty, 1 < q_1, q_2 \leq \infty, 0 < \theta < 1$

et $s = \theta s_1 + (1 - \theta) s_2, \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$

et pour tout $0 < q < \infty$

$$\|f\|_{F_{p,2}^s} \leq C \|f\|_{F_{p_1,q_1}^{s_1}}^\theta \|f\|_{F_{p_2,q_2}^{s_2}}^{1-\theta}.$$

Où C dépend de s_i, p_i, θ et q .

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder deux fois. ■

Proposition 1.6.5 :Pour $0 \leq s_1 < s_2 < \infty$, $1 < p_1 \leq \infty$, $1 < p_2 < \infty$, $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$,

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}.$$

$$\|f\|_{W^{s,p}} \leq C \|f\|_{W^{s_1,p_1}}^\theta \|f\|_{W^{s_2,p_2}}^{1-\theta}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition 1.6.1 avec $q_1 = q_2 = 2$. ■

Lemme 1.6.1 Soit $-\infty < s_1 < s_2 < \infty$, $0 < q < \infty$, $0 < \theta < 1$. Posons

$s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$. Alors pour chaque suite (a_j) on a

$$\|2^{sj} a_j\|_{l^q} \leq C \|2^{s_1 j} a_j\|_{l^\infty}^\theta \|2^{s_2 j} a_j\|_{l^\infty}^{1-\theta}.$$

Preuve. Voir [5]. ■

1.7 Le lemme Runst-Sickel

Soit $0 < s < \infty$, $1 < q < \infty$, $1 < p_1 \leq \infty$, $1 < p_2 \leq \infty$, $1 < r_1 \leq \infty$, $1 < r_2 \leq \infty$ tel que

Proposition 1.7.1 Soient $s > 0$, $1 < p_1, p_2, q < \infty$ et $1 < r_1, r_2 \leq \infty$. Pour tout $f \in F_{p_1,q}^s \cap L^{r_1}$ et $g \in F_{p_2,q}^s \cap L^{r_2}$

on a :

$$\|fg\|_{F_{p,q}^s} \leq Mf \|(2^{sj} g_j)\|_{l^q(L^p)} + Mg \|(2^{sj} f_j)\|_{l^q(L^p)},$$

et

$$\|fg\|_{F_{p,q}^s} \leq C(\|f\|_{F_{p_1,q}^s} \|g\|_{r_2} + \|g\|_{F_{p_2,q}^s} \|f\|_{r_1}).$$

Preuve. Voir [10] page 345. ■

Proposition 1.7.2 On a

1. Pour $1 < q < \infty$, $0 < s < \infty$, $1 < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$, $1 < r_1 < \infty$, $1 < r_2 < \infty$,
 $0 < \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r_1} < 1$, l'application $(f, g) \rightarrow fg$ est continue de

$$(F_{p_1, q}^s \cap L^{r_1}) \times (F_{p_2, q}^s \cap L^{r_2}) \text{ dans } F_{p, q}^s.$$

2. Pour $1 < q < \infty$, $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, si on a deux suites (f_j) et (g_j) telle que

$$f_j \rightarrow f \text{ dans } F_{p, q}^s, \quad \|f_j\|_{L^\infty} \leq C$$

et

$$g_j \rightarrow g \text{ dans } F_{p, q}^s, \quad \|g_j\|_{L^\infty} \leq C$$

alors

$$f_j g_j \rightarrow fg \text{ dans } F_{p, q}^s.$$

3. Pour $1 < q < \infty$, $0 < s < \infty$, $1 < p_1 < \infty$, $1 < r < \infty$, $1 < p < \infty$

tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r}$ si

$$f_j \rightarrow f \text{ dans } F_{p_1, q}^s, \quad \|f_j\|_{L^\infty} \leq C$$

et

$$g_j \rightarrow f \text{ dans } F_{p, q}^s \cap L^r,$$

alors

$$f_j g_j \rightarrow fg \text{ dans } F_{p, q}^s.$$

Nous allons le théorème de Brezis-Mironescu

Théorème 1.7.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f \in C^m$ que $f, f', \dots, f^m \in L^\infty$ alors l'application $T_f : u \mapsto f \circ u$ est continue de $W^{s, p}(\Omega) \cap W^{1, sp}(\Omega)$ dans $W^{s, p}(\Omega)$.

Preuve. Si $s \in \mathbb{Z}$ [utilisant le inégalités de Gagliardo-Nirenberg] si $s \notin \mathbb{Z}$ alors

$$W^{s,p} \cap W^{1,sp} \ni u \mapsto f(u) \in L^p$$

est bien défini et continue . car $f(0) = 0$, f est Lipschitz et $W^{s,p} \hookrightarrow L^p$ donc on prouve que :

$$W^{s,p} \cap W^{1,sp} \ni u \mapsto Df(u) = f'(u)Du \in W^{s-1,p},$$

est bien défini et continue . Avec

$$m = [s] + 1 \geq 2,$$

on obtient, en utilisant (corollaire (1.5.1)), que l'inclusion

$$W^{s,p} \cap W^{1,sp} \hookrightarrow W^{m-1, \frac{sp}{m-1}} \cap W^{1,sp},$$

est continue. En appliquant le théorème (1.7.1) à l'entier

$$s = m - 1 \geq 1,$$

nous trouvons que si

$$u_j \rightarrow u \text{ dans } W^{s,p} \cap W^{1,sp},$$

alors

$$f'(u_j) \rightarrow f'(u) \text{ dans } F_{\frac{sp}{m-1}, 2}^{m-1} = W^{m-1, \frac{sp}{m-1}}, \quad (1.7.1)$$

et

$$\|f'(u_j)\|_{L^\infty} \leq C,$$

et on a si

$$u^p \rightarrow u \text{ dans } W^{s,p} \cap W^{1,sp}$$

alors

$$Du_j \rightarrow Du \text{ dans } W^{s-1,p} \cap L^{sp} = F_{p,p}^{s-1} \cap L^{sp} \quad (1.7.2)$$

En utilisant (1.7.1) et l'inégalité de type Gagliardo-Nirenberg (corollaire (1.5.2)) avec $q = p$, $s = m - 1$, $\theta = \frac{s-1}{m-1}$, $p = \frac{sp}{m-1}$, alors si

$$u_j \rightarrow u \text{ dans } W^{s,p} \cap W^{1,sp},$$

alors

$$f'(u_j) \rightarrow f'(u) \text{ dans } F_{\frac{sp}{s-1},p}^{s-1}, \quad (1.7.3)$$

et

$$\|f'(u_j)\|_{L^\infty} \leq C.$$

Enfin par (1.7.2), (1.7.3), le lemme Runst-Sickel (proposition (1.7.2) et (1.6.2))

$$f'(u)Du \in F_{p,p}^{s-1} = W^{s-1,p},$$

et que si

$$u_j \rightarrow u \text{ dans } W^{s,p} \cap W^{1,sp},$$

alors

$$f'(u)Du_j \rightarrow f'(u)Du \text{ dans } W^{s-1,p}.$$

■

On donne un autre théorème de Brezis-Mironescu

Théorème 1.7.2 Soient $1 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$. Alors, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $T_f : u \mapsto f \circ u$ est continue de $F_{p,q}^s \cap W^{1,sp}$ dans $F_{p,q}^s$.

Preuve. Voir [4]. ■

Chapitre 2

Théorème de composition dans $W^{1,p}$

Dans ce chapitre, nous donnerons un théorème de composition dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , d'après le résultat de Brezis [4], corollaire (8.11), page 215. Voir aussi [11] et [13].

2.1 Quelques rappels sur l'intégration

Nous rappelons que l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, en particulier l'espace $C_0(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^1(\Omega)$.

Théorème 2.1.1 (*Théorème de représentation de Riesz*) Soit $1 < p < \infty$ et soit $f \in (L^p)'$. Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in L^p(\Omega).$$

De plus on a : $\|u\|_{p'} = \|f\|_p$.

Pour le cas $p = 1$, on a le résultat suivant :

Théorème 2.1.2 Soit $f \in (L^1)'$ Alors il existe $u \in L^\infty$ unique tel que

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in L^1.$$

On a de plus $\|u\|_{L^\infty} = \|f\|_{(L^1)'}$.

2.2 Convolution et régularisation

2.2.1 Convolution des fonctions

Théorème 2.2.1 Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$.

Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n . On pose

$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et .

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Preuve. C'est l'inégalité de Young. Voir par exemple [1]. ■

Proposition 2.2.1 Pour le support d'une convolution, nous avons la propriété simple suivante :

$$\text{Supp} (f * g) \subset \overline{\text{Supp} f + \text{Supp} g}.$$

2.2.2 Suites régularisantes

Définition 2.2.1 On appelle suite régularisante toute suite $(\ell_k)_{k \geq 1}$ de fonctions telle que

$$\ell_k \in D(\mathbb{R}^n), \text{ supp } \ell_k \subset B(0, \frac{1}{k}), \int_{\mathbb{R}^n} \ell_k(x) dx = 1, \ell_k \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

Remarque 2.2.1 Il existe des suites régularisantes. En effet, il suffit de fixer une fonction

$\ell \in D(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{Supp } \ell \subset B(0, 1)$, $\ell \geq 0$ sur \mathbb{R}^n et $\ell > 0$ prendre par exemple la fonction

$$\ell(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

On considère ensuite $\ell_k(x) = C\ell(kx)$ avec $C^{-1} = \int_{\mathbb{R}^n} \ell(x) dx$.

Proposition 2.2.2 Soit $f \in C(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\ell_k * f \rightarrow f,$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^n .

Preuve. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact fixé. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ (dépendant de K et ε) tel que

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K, \forall y \in B(0, \delta).$$

On a :

$$(\ell_k * f)(x) - f(x) = \int [(\ell_k * f)(x) - f(x)] \ell_k(y) = \int_{B(0, \frac{1}{k})} [(\ell_k * f)(x) - f(x)] \ell_k(y),$$

et donc pour $k > \frac{1}{\delta}$ et $x \in K$,

$$|(\ell_k * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \ell_k(x) dx = \varepsilon.$$

■

Théorème 2.2.2 Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$ alors

$$\ell_k * f \rightarrow f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [4] page 71. ■

2.3 Critère de compacité forte dans L^p

Théorème 2.3.1 (M. Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $\omega \subset \Omega$.

Soit \mathcal{F} un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$$

tel que

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon, \forall h \in \mathbb{R}^n \text{ avec } |h| < \delta \text{ et } \forall f \in \mathcal{F}.$$

Alors $\mathcal{F}|_\omega$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Preuve. Voir [4] page 73. ■

Corollaire 2.3.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $\omega \subset \Omega$.

Soit \mathcal{F} un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \forall \omega \subset \subset \Omega, \exists \delta > 0 \\ \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon, \forall h \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \subset \subset \Omega \text{ tel que } \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Alors \mathcal{F} relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

Preuve. Voir [4] page 7. ■

2.4 Dérivation d'un produit de composition

On commence par le lemme de dérivation suivante :

Lemme 2.4.1 Soit $g \in L^1_{loc}(I)$ pour y_0 fixé dans I on pose

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, \quad x \in I$$

Alors

$$v \in C(I) \text{ et } \int_I v(x)\varphi'(x)dx = - \int_I g(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in D(I).$$

Preuve. On a :

$$\int_I v\varphi' = \int_I \left[\int_{y_0}^x g(t)dt \right] \varphi'(x)dx = - \int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt$$

Appliquant le théorème de Fubini on en déduit que

$$\int_I v\varphi' = - \int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b g(t)dt \int_t^b \varphi'(x)dx = - \int_I g(t)\varphi(t)dt.$$

■

Remarque 2.4.1 Le lemme (2.4.1) montre que la primitive v d'une fonction g de L^p

appartient à $W^{1,p}$ dès que $v \in L^p$ ce qui est toujours le cas lorsque I est borné.

Théorème 2.4.1 (Opérateur de prolongement) Soit $1 \leq p \leq \infty$ il existe un opérateur de prolongement

$$P : W^{1,p}(I) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$$

linéaire et continu tel que

1. $Pu|_I = u, \forall u \in W^{1,p}(I).$

$$2. \|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^p(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I).$$

$$3. \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I).$$

(Où C dépend seulement de $|I| \leq \infty$).

Preuve. On a $(Pu)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \geq 0. \\ u(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$ La preuve Voir [4] page

126. ■

Remarque 2.4.2 *Il est bien connu que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$, en particulier si on remplace I par \mathbb{R}^n .*

Théorème 2.4.2 *Il existe une constante C (dépendante seulement de $|I| \leq \infty$) telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I), \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

autrement dit $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ avec injection continue pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Preuve. Voir [4] page 129. ■

Corollaire 2.4.1 *(Dérivation d'un produit) Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

$$uv \in W^{1,p}(I) \text{ et } (uv)' = u'v + uv'.$$

De plus on a la formule d'intégration par parties

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv'$$

Preuve. Voir [4] page 131. ■

D'après le théorème de composition sur $W^{1,p}(I)$ de [1] page 132.

Théorème 2.4.3 Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $G(0) = 0$ et soit $u \in W^{1,p}(I)$. Alors

$$G \circ u \in W^{1,p}(I)$$

et

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Preuve. Soit $M = \|u\|_{L^\infty}$. Comme $G(0) = 0$ il existe une constante C telle que $|G(s)| \leq C|s|$ pour $s \in [-M, +M]$. Donc $G \circ u \in L^p(I)$ puisque $|G \circ u| \leq C|u|$. De même $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$. Il reste à vérifier que

$$\int_I (G \circ u)\varphi' = - \int (G' \circ u)u'\varphi, \forall \varphi \in C_c'(I) \quad (2.4.1)$$

Supposons d'abord que $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une suite (u_n) de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$ et dans $L^\infty(I)$. Donc $G \circ u_n \rightarrow G \circ u$ dans $L^\infty(I)$ et $(G' \circ u_n)u_n' \rightarrow (G' \circ u)u'$ dans $L^p(I)$ or on a :

$$\int (G \circ u_n)\varphi' = - \int (G' \circ u_n)u_n'\varphi, \forall \varphi \in C_c'(I)$$

D'où l'on déduit (2.4.1). Pour le cas $p = \infty$ on procède comme au corollaire (2.4.1). ■

Remarque 2.4.3 Le théorème précédent ainsi que sa démonstration sont dû à [4] page 132.

Nous avons essayé de comprendre cette preuve dans le but de faire une éventuelle généralisation.

Chapitre 3

Théorème de composition sur $W^{m,p}$

3.1 Opérateurs de composition sur les espaces de Sobolev $W^{m,p}$

Dans ce paragraphe, nous donnons un résultat dû à Brezis [10]. Soit $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue on appelle opérateur de composition, l'application :

$$T_G : (f_1, \dots, f_m) \rightarrow G(f_1, \dots, f_m).$$

Pour étudier la continuité de T_G sur l'espace de Sobolev, on commence par la remarque suivante :

Remarque 3.1.1 *La Condition*

$$G(0) = 0 \tag{3.1.1}$$

est nécessaire.

Remarque 3.1.2 *On a $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$, $i = 1, \dots, l$, et $c_{\gamma,l,\alpha_1 \dots \alpha_l}$ sont certaines constantes combinatoires et $|\alpha^i| = \sum_{k=1}^n \alpha_k^i$, pour G et f suffisamment dérivables*

on a :

$$\left(\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_n^{\gamma_n}} G(f) \right) (x) = \sum_{l=1}^{|\gamma|} \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_l = \gamma \\ |\alpha^i| \neq 0}} c_{\gamma, l, \alpha_1 \dots \alpha_l} G^{(l)}(f(x)) \frac{\partial^{|\alpha^1|} f}{\partial x_1^{\alpha_1^1} \dots \partial x_n^{\alpha_n^1}}(x) \dots \frac{\partial^{|\alpha^l|} f}{\partial x_1^{\alpha_1^l} \dots \partial x_n^{\alpha_n^l}}(x)$$

Définition 3.1.1 On dit que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est super-critique si on a $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$, i.e. $m > \frac{n}{p}$ ou $m = n$ et $p = 1$.

Théorème 3.1.1 Soit $m = 2, 3, \dots$, et soit $1 \leq p < \infty$. Supposons (3.1.2). Soit $W^{m,p}$ super-critique. Alors

$$T_G(W_p^m) \hookrightarrow W_p^m \quad (3.1.2)$$

si et seulement si $G \in W^{m,p,loc}(\mathbb{R})$.

Preuve. Voir [10] les pages 268-274, Où dans l'étape 1 on démontre le cas $p > 1$, en utilisant la formule

$$\|G(f)\|_{W^{m,p}} \sim \|G(f)\|_p + \sum_{j=1}^n \|\partial_j^m G(f)\|_p \quad (3.1.3)$$

et l'inclusion :

$$W^{m-1,p,loc}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{\infty,loc}(\mathbb{R}), m \geq 2.$$

Dans la 2^e étape on démontre le cas $p = 1$, en utilisant la continuité absolue. Dans une dernière étape on démontre la nécessité. Les détails de la démonstration se trouve dans [10]. ■

Le lemme suivant joue un rôle important dans la preuve des conditions nécessaires. Nous le rappelons :

Lemme 3.1.1 Soit $m = 1, 2, \dots$, et soit $1 \leq p < \infty$. Supposons qu'on a

$$T_G(W^{m,p}, n) \subset W^{m,p}.$$

Alors pour toute boule $Q \subset \mathbb{R}^n$ il existe $A, B > 0$ tel que $\|G(f)\|_{W^{m,p}(Q)} \leq B$ pour tout f , implique $\|f\|_{W^{m,p}(Q)} \leq A$.

Preuve. Voir [10] page 275. ■

Définition 3.1.2 On dit que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est sous-critique si $W^{m,p} \not\subset L^\infty$, i.e. $m \leq \frac{n}{p}$, $p > 1$.

Théorème 3.1.2 Soit $m = 2, 3, \dots$, et soit $1 \leq p < \infty$. Soit $W^{m,p}$ sous-critiques telle que

$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continu et soit $G(0) = 0$

1. Si $m = n/p > 2$ alors $T_G(W^{m,p}) \subset W^{m,p}$ si et seulement si $G' \in W^{m-1,p,unif}(\mathbb{R})$.
2. Soit $1 < p < \infty$ et $2 \leq m < n/p$ ou $p = 1$ et $3 \leq m < n$. Alors $T_G(W^{m,p}) \subset W^{m,p}$ si et seulement si $G(t) = ct$, $t \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.
3. Si $n \geq 3$ alors

$$T_G(W_1^2(\mathbb{R}^n)) \hookrightarrow W_1^2(\mathbb{R}^n)$$

si et seulement si $G'' \in L^1(\mathbb{R})$.

Preuve. Voir [10] les pages 275,276,277. ■

3.1.1 Opérateurs de composition sur les sous espaces de $W^{m,p}$

Ce paragraphe est en cours dû à Runst et Sickel [4]. Soit $m = 2, 3, \dots$. Nous appelons une fonction à valeur réelle G m -admissible si

$$G(0) = 0 \text{ et } \|G^{(l)}\|_\infty \leq M, \quad l = 1, \dots, m, \quad (3.1.4)$$

est valable pour une constante $M > 0$.

Théorème 3.1.3 Soit $1 \leq p < \infty$ et $m \geq 2$.

1. Soit G m -admissible. Alors T_G envoie $W^{m,p} \cap \dot{W}^{1,pm}$ dans lui-même. De plus :

$$\|G(f)\|_{W^{m,p}} \leq cM \|f\|_{\dot{W}^{1,pm}}^m + \|f\|_{W^{m,p}} \quad (3.1.5)$$

pour toutes les $f \in W^{m,p} \cap \dot{W}^{1,pm}$.

2. Soit $G(f) \in W^{m,p}$ pour tout m -admissible G . Alors $f \in W^{m,p} \cap \dot{W}^{1,pm}$.

Preuve. Voir [10] les pages 279-280. ■

3.2 Un résultat sur les espaces $W^{m,p} \cap \dot{W}^{1,pm}$

Ce paragraphe est une partie d'un travail de Bourdand-Moussai 2019 [3].

Les espaces d'Adams-Frazier in-homogènes et homogènes sont définis comme suit :

$$A^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p} \cap \dot{W}^{1,pm}(\mathbb{R}^n).$$

L'espace est muni par la semi-norme :

$$\|f\|_{A^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\dot{W}^{1,pm}(\mathbb{R}^n)}, \text{ et si } m \geq \frac{n}{p} \implies A^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 3.2.1 $\forall f, f' \in C_b^{m-1}(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$, l'opérateur de composition T_f est défini et continu comme une application de $W^{m,p} \cap \dot{W}^{1,pm}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Preuve. Selon la formule de Faa di Bruno, voir [2, (7), p. 6108], il faut prouver la continuité des applications

$$g \rightarrow (f^{(s)} \circ g)g^{(\gamma_1)} \dots g^{(\gamma_s)},$$

de $A^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout

$$s = 1, \dots, m, |\gamma_r| > 0 (r = 1, \dots, s), \sum |\gamma_r| = m. \quad (3.2.1)$$

■

L'outil principal est le suivant :

Lemme 3.2.1 *Sous la condition (3.3.1), $(\varphi_1, \dots, \varphi_s) \rightarrow \varphi_1^{(\gamma_1)}, \dots, \varphi_s^{(\gamma_s)}$ définit une application multilinéaire bornée à partir de $(\dot{W}^{m,p} \cap \dot{W}^{1,pm}(\mathbb{R}^n))^s$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Voir [2] les pages 6110-6111. ■

Nous terminons ce chapitre par un rappel sur les inégalités de Gagliardo-Nirenberg sur les espaces de Sobolev.

Proposition 3.2.1 *Supposons qu'on a $f \in W^{k,q/k}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors pour tout entier $k \geq 1, q \geq k$.*

On a :

$$\|f\|_{W^{k-1,q/(k-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{W^{k,q/k}(\mathbb{R}^n)}^{1-1/k} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1/k}.$$

Preuve. Voir [7] page 40. ■

Proposition 3.2.2 *Supposons qu'on a $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors pour tout entier $p \geq 1, k > l \geq 1$.*

On a :

$$\|f\|_{W^{l,pk/l}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)}^{l/k} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{(k-l)/k}.$$

Preuve. Voir [7] page 42. ■

Bibliographie

- [1] G. Bergh, J. Löfström. Interpolation Theory, an Introduction. Springer 1976.
- [2] G. Bourdaud. Superposition in homogeneous and vector valued Sobolev spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 6105-6130.
- [3] G. Bourdaud, M. Moussai. Continuity of composition operators in Sobolev spaces. Ann. I. H. Poincaré-AN 36(2019), 2053-2063.
- [4] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle Théorie et Application. Masson Paris 1987.
- [5] H. Brezis, P. Mironescu. Gagliardo-Nirenberg, composition and products in fractional Sobolev spaces. J. Evol. Equ. 1 (2001) , 387-404.
- [6] M. Frazier and B. Jawerth. A discrete transform and decomposition of distributions spaces. J. Funct. Anal. 93 (1990), 34-170.
- [7] V. Georgiev. Semilinear Hyperbolic Equations. MSJ memoirs 7, 209 pp. (2005).
- [8] B. Jawerth. Some observations on Besov and Lizorkin-Triebel spaces. Math. Scand. 40 (1977), 94-104.
- [9] M. Moussai. Characterisation of homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces via differences. Appl. Math. J. Chinese Univ. 33 no. 2 (2018), 188-208.
- [10] T. Runst and W. Sickel. Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin and New York, 1996.

- [11] E. Stein. Harmonic Analysis. Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [12] H. Triebel. Theory of Function Spaces, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [13] C. Zuily. Distributions et EDP Exercices Corrigés. Hermann 1986.

Résumé

Pour m un entier naturel, p un réel entre 1 et l'infinie et f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , il s'agit d'étudier, dans certains cas particuliers, la continuité de l'opérateur de composition Sobolev par $T(g) = f \circ g$ sur l'espace de Sobolev $W(m, p)$ intersection avec l'espace de Sobolev homogène $W(1, mp)$, appelé espace de Adams-Frazier.

Mots clés : Espaces de Sobolev, Espaces de Lizorkin-Triebel, Continuité.

Abstract

For m a natural number, and p between 1 and infty, and for a function f defined from \mathbb{R} to \mathbb{R} we study, in some particular cases, the continuity of the composition operator $T(g) = f \circ g$ on the Adams-Frazier spaces, which are defined as the intersection between Sobolev spaces and homogeneous counterpart.

Key words : Sobolev, spaces, Lizorkin-Triebel spaces, Continuity.

ملخص المذكرة:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة فضاءات سو بولاف و فضاءات ليزوركين-تربيل حيث اعطينا بعض الخصائص لهذه الفضاءات. ثم قمنا بدراسة معاملاتنا والاستمرارية لهذه الفضاءات.

الكلمات المفتاحية : فضاءات سو بولاف ، فضاءات ليزوركين –تربيل، التركيبية، الاستمرارية.