



N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE
L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

Spécialité : Mathématiques

Option : Logique mathématique, Langages formels et Analyse non
standard

Par
BOUAD Aissa

SUJET

Relation de couverture floue et ordre

Soutenu publiquement le 15 / 07 / 2010 devant le jury composé de :

A. BOUDAUD	Pr.	Université de M'sila	Président
A. AMROUNE	M.C.	Université de M'sila	Rapporteur
Dj. BENTERKI	Pr.	Université F.A de Sétif	Examineur
A. MERZOUGUI	M.C.	Université de M'sila	Examineur
L. ZEDAM	M.C.	Université de M'sila	Examineur

Promotion : 2007/2008

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur A. AMROUNE Maître de Conférences à l'Université de M'sila, pour ces conseils précieux et pour ces encouragements, ainsi que pour la confiance et l'aide qu'il m'a accordé pour mener ce travail à terme.

Je remercie Monsieur A. BOUDAUD Professeur à l'Université de M'sila, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Mes remerciements vont également à Monsieur Dj. BENTERKI Professeur à l'Université Ferhat Abbas de Sétif, A. MERZOUGUI Maître de Conférences à l'Université de M'sila et L. ZEDAM Maître de Conférences à l'Université de M'sila, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je n'oublierai pas de remercier ma famille qui m'a toujours encouragé et soutenu, ainsi que tous mes amis

Je dédie ce modeste travail :
A mes très chers parents.
A toute ma famille. . .

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	4
1.1 Relations	5
1.2 Normes triangulaires	6
1.3 Implications et biimplications résiduelles	10
1.4 Treillis.	13
2 Relations d'ordre flou et couvertures	15
2.1 Relation de couverture classique	16
2.2 Relations de couverture floues	23
3 Construction des ordres flous	32
3.1 Trace à gauche et trace à droite d'une relation binaire floue	33
3.2 Factorisation implicite	41
3.3 Intersection et produit cartésien des ordres flous	43
4 Fuzzification d'ordre et représentations basées sur inclusion	48
4.1 Fuzzification des ordres classiques	49
4.2 Ordres flous générés par des familles d'ensembles flous	65
4.3 Représentation d'un ordre basé sur inclusion	70
Conclusion	75

Introduction

Dés leur première parution en 1971 dans l'article de A. Zadeh[23] (Similarity relations and fuzzy orderings), les relations de similarité et celles de l'ordre flous ont motivé plusieurs chercheurs de proposer des généralisations des trois axiomes classiques (Réflexivité, antisymétrie et transitivité). Certains avec moins d'axiomes, d'autres avec des axiomes plus faibles. La notion de l'ordre partiel flou (Fuzzy partial ordering), est apparue pour la première fois dans les travaux de Zadeh[23] où seulement la norme minimale a été utilisée.

Plusieurs travaux ont été poursuivis dans cette direction où les chercheurs ont essayé de généraliser la notion de l'ordre flou, notamment SV. Ovchinnikov (Similarity relations, fuzzy partitions, and fuzzy orderings)[14] paru en 1991, et U. Bodenhofer dans les articles intitulés (A similarity-based generalization of fuzzy orderings preserving the classical axioms)[3] paru en 2000, et (A compendium of fuzzy weak orders : Representations and constructions)[5] paru en 2007, où la t-norme largement considérée et B. Šešelja dans les articles (Fuzzy Covering Relation and Ordering : An Abstract Approach)[18] paru en 2006, et l'article (Fuzzy Ordering Relation and Fuzzy Poset)[19] paru en 2007.

Le but de ce travail est d'assimiler les concepts et les résultats de B. Šešelja[18] et ceux de U. Bodenhofer[4].

Commençons par le travail de B. Šešelja, ce dernier a introduit la notion de couverture floue généralisant celle de couverture classique et qui puisse être utilisée pour la construction d'un ordre flou. Il a explicité les rapports existants entre, un ordre classique défini sur un ensemble non vide X , et la relation de couverture correspondante définie

sur ce même ensemble. Inversement, il a utilisé une relation de couverture afin de définir la relation d'ordre flou correspondante.

Dans ses travaux, U. Bodenhofer[4] s'intéresse au traitement des concepts alternatifs de l'ordre flou, de point de vue, représentation et construction. Cette approche généralise aussi, le rapport important entre l'ordre flou, et la similarité floue. On constate une large utilisation de la norme triangulaire, pour définir la relation d'ordre flou (T-ordre), et l'implication et la biimplication résiduelles.

Dans le cadre des concepts cités ci-dessus, nous avons essayé de détailler la démonstration de certains théorèmes, et de prouver d'autres non démontrés[4], [18]. Notre mémoire est réparti en quatre chapitres.

Le premier chapitre, concerne les préliminaires et les notions de base nécessaires pour la réalisation de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous traitons, la fuzzification du concept de couverture, et le lien entre l'ordre et la relation de couverture associée.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse aux relations d'ordre, et aux relations d'équivalence définies à l'aide d'une implication et biimplication résiduelle, ainsi qu'à la construction d'une T-relation d'équivalence à partir d'un T-préordre.

Enfin, le dernier chapitre discute la fuzzification d'un ordre classique en donnant une méthode pour construire de telles relations au moyen d'une pseudo-métrique.

Chapitre 1

Préliminaires

Résumé

Dans ce chapitre, nous donnons quelques notions de base concernant les ensembles, les relations, les relations d'ordre, et les relations d'équivalence. Tout en concentrant notre travail sur les normes triangulaires et leurs propriétés.

Contenu

1.1 Relations

1.2 Normes triangulaires

1.3 Implications et biimplications résiduelles

1.4 Treillis

1.1 Relations

Relations classiques

Définition 1.1.1. Une relation binaire R , de l'ensemble X vers l'ensemble Y , est une partie de $X \times Y$. Pour $(x, y) \in R \subseteq X \times Y$, on note xRy .

Définition 1.1.2. Soit X un ensemble non vide, une relation binaire R sur X , est une partie de $X \times X$.

Propriétés d'une relation binaire sur un ensemble X

Définition 1.1.3. Soit R une relation binaire sur un ensemble non vide X .

R est réflexive si et seulement si $\forall x \in X, xRx$.

R est symétrique si et seulement si $\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow yRx$.

R est antisymétrique si et seulement si $\forall x, y \in X, [xRy \text{ et } yRx] \Rightarrow x = y$.

R est transitive si et seulement si $\forall x, y, z \in X, [xRy \text{ et } yRz] \Rightarrow xRz$.

Définition 1.1.4. Une relation R qui est réflexive, antisymétrique et transitive, est dite une relation d'ordre sur X . On la note par \leq . S'il existe au moins deux éléments $x, y \in X$, tels que $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$, alors l'ordre est dit partiel. Si pour tout $x, y \in X$, $x \leq y$ ou $y \leq x$, alors l'ordre est dit totale et X est dit totalement ordonné.

Ensembles flous

Définition 1.1.5. Un ensemble flou μ sur un ensemble X , est une application de X dans L où L est un treillis.

Opérations ensemblistes sur les parties floues

Soient $\mu : X \rightarrow [0, 1], \nu : X \rightarrow [0, 1]$ deux ensembles flous de X .

Définition 1.1.6. $\mu \cap \nu = \delta$ si et seulement si, pour tout $x \in X, \delta(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$.

Définition 1.1.7. $\mu \cup \nu = \eta$ si et seulement si, pour tout $x \in X, \eta(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$.

Définition 1.1.8. $\mu \subseteq \nu$ si et seulement si $\mu(x) \leq \nu(x)$, pour tout $x \in X$.

Définition 1.1.9. $(\mu = \nu)$ si et seulement si $\mu(x) = \nu(x)$, pour tout $x \in X$.

Relation floue (au sens de Zadeh)

Définition 1.1.10. Une relation floue R entre n ensembles X_1, X_2, \dots, X_n (relation n -aires), est une application R de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ dans $[0, 1]$.

Cas particuliers

- 1) Si $n = 2$ on dit que R est une relation binaire floue entre X_1, X_2 .
- 2) Si $n = 2$ et $X_1 = X_2 = X$, on dit que R est une relation binaire floue sur X .

Définition 1.1.11. Soit X un ensemble classique non vide, un sous ensemble flou A de $X \times X$, (c'est-à-dire $A : X \times X \rightarrow [0, 1]$) est dit une relation binaire floue sur X .

Composition de deux relations floues

Définition 1.1.12. La composition de deux relations floues R_1 sur $X \times Y$ et R_2 sur $Y \times Z$, est une relation floue $R = R_1 \circ R_2$ sur $X \times Z$ définie par :

$$\forall (x, z) \in X \times Z, R(x, z) = \sup_{y \in Y} (\min \{R_1(x, y), R_2(y, z)\}).$$

L-Relations floues

Définition 1.1.13. Soit L un treillis complet, une relation floue R sur X est une application de $X \times X$ dans L , brièvement (L -relation).

Définition 1.1.14. Soit R une (L -relation) floue sur X :

R est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in X, R(x, x) = 1$.

R est symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, R(x, y) = R(y, x)$.

R est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, R(x, y) \wedge R(y, x) > 0 \Rightarrow x = y$.

R est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X, \rho(x, z) \geq R(x, y) \wedge R(y, x)$.

1.2 Normes triangulaires

Définition 1.2.1. [4] Une relation binaire $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, associative, commutative et non décroissante, qui admet 1 comme élément neutre est appelé norme triangulaire, (brièvement t -norme). Une t -norme T est dite continue à gauche si et seulement si les applications partielles $T(x, \cdot), T(\cdot, x)$ sont continues à gauches.

Sur l'ensemble des t -normes. On pose :

$$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow \text{pour tout } x, y \in [0, 1], T_1(x, y) \leq T_2(x, y).$$

Dans le cas où $T_1 \leq T_2$ on dit que T_1 est plus faible que T_2 et inversement T_2 est plus forte que T_1 .

Définition 1.2.2. [7], [13] Une t -norme T_1 domine une autre t -norme T_2 si et seulement si pour tout $x, y, u, v \in [0, 1]$,

$$T_1(T_2(x, y), T_2(u, v)) \geq T_2(T_1(x, u), T_1(y, v)).$$

lemme 1.2.3.[7], [13]

- 1) Toute t -norme domine elle même.
- 2) T_M (La t -norme minimale) domine toutes les t -normes.
- 3) Si T_1 domine T_2 alors T_1 est plus forte que T_2 .

Preuve.

(1) Soient $x, y, u, v \in [0, 1]$,

$T(T(x, y), T(u, v)) = T(T(x, u), T(y, v))$. (Car T est associative et commutative).

(2) Soient $x, y, u, v \in [0, 1]$, on montre que, $\min(T(x, y), T(u, v)) \geq T(\min(x, u), \min(y, v))$.

On a 4 cas différents.

(i) Si $x \leq u$ et $y \leq v$, alors $\min(x, u) = x$, $\min(y, v) = y$ et $(T(x, y) \leq T(u, v))$. (D'après la définition de la non décroissance de T), donc

$$T(\min(x, u), \min(y, v)) = T(x, y) = \min(T(x, y), T(u, v)).$$

(ii) Si $x \leq u$ et $v \leq y$, alors, $T(\min(x, u), \min(y, v)) = T(x, v)$.

On montrera que, $T(x, v) \leq \min(T(x, y), T(u, v))$.

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq u \\ \text{et} \\ v \leq y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T(x, v) \leq T(u, v) \\ \text{et} \\ T(x, v) \leq T(x, y) \end{array} \right. \Rightarrow T(x, v) \leq \min(T(x, y), T(u, v)).$$

Donc, $\min(T(x, y), T(u, v)) \geq T(\min(x, u), \min(y, v))$.

(iii) Si $x \geq u$ et $y \geq v$, alors $\min(x, u) = u$ et $\min(y, v) = v$.

D'où $T(\min(x, u), \min(y, v)) = T(u, v) = \min(T(x, y), T(u, v))$.

(iv) Si $x \geq u$ et $y \leq v$, donc $T(\min(x, u), \min(y, v)) = T(u, y)$.

On va montrer que, $T(u, y) \leq \min(T(x, y), T(u, v))$.

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \leq x \\ \text{et} \\ y \leq v \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T(u, y) \leq T(x, y) \\ \text{et} \\ T(y, u) \leq T(u, v) \end{array} \right\} \Rightarrow T(u, y) \leq \min(T(x, y), T(u, v)).$$

Donc, $\min(T(x, y), T(u, v)) \geq T(\min(x, u), \min(y, v))$.

(3) (T_1 domine T_2) \Rightarrow (T_1 est plus forte que T_2).

Soient $x, y, u, v \in [0, 1]$, on a $T_1(T_2(x, y), T_2(u, v)) \geq T_2(T_1(x, u), T_1(y, v))$.

Pour $x = v = 1$, alors

$$T_1(T_2(1, y), T_2(u, 1)) \geq T_2(T_1(1, u), T_1(y, 1)).$$

Donc, $T_1(y, u) \geq T_2(u, y)$.

D'où, T_1 est plus forte que T_2 . ■

Si on définit sur l'ensemble des t-normes, la relation de dominance R , alors R est réflexive, antisymétrique et la transitivité (reste un problème ouvert à ma connaissance).

On pose, $S = \{T/T \text{ une t-norme}\}$. On définit sur S la relation de dominance R comme suit : pour tout $T_1, T_2 \in S$, $T_1 R T_2 \Leftrightarrow T_1$ domine T_2 . C'est à dire, $\forall (x, y, u, v) \in [0, 1]^4$,

$T_1(T_2(x, y), T_2(u, v)) \geq T_2(T_1(x, u), T_1(y, v))$. D'après le lemme 1.2.3 R est réflexive.

On montre que R est antisymétrique, soient $T_1, T_2 \in S$,

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 R T_2 \\ \text{et} \\ T_2 R T_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_2 \leq T_1 \\ \text{et} \\ T_1 \leq T_2 \end{array} \right\} \Rightarrow T_1 = T_2.$$

D'où, R est antisymétrique.

La transitivité est un problème ouvert (à ma connaissance).

Définition 1.2.4. [13]

Une application $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ est une t-norme archimédienne continue, si et seulement si, il existe une fonction continue et strictement décroissante, $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ avec $f(1) = 0$, appelée fonction génératrice additive, tels que pour tout $x, y \in [0, 1]$, la condition suivante est vérifiée $T(x, y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0)))$.

La fonction génératrice f définie au dessus, est déterminée uniquement à une constante multiplicative positive près.

Exemple 1.2.5. Les trois opérations suivantes T_L (t-norme de Łuksiewicz), T_P (t-norme produit drastique), T_M (t-norme minimale de Zadeh) sont les t-normes les plus connues, de plus elles sont continues et vérifient : $T_L \leq T_P \leq T_M$.

$$T_M(x, y) = \min(x, y), T_P(x, y) = x.y, T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0).$$

On montre que, $T_P \leq T_M$ et $T_L \leq T_P$. En effet : Soient $x, y \in [0, 1]$,

$$\begin{cases} x.y \leq x \\ \text{et} \\ x.y \leq y \end{cases} \Rightarrow x.y \leq \min(x, y) \Rightarrow T_P(x, y) \leq T_M(x, y).$$

Montrons maintenant que, $T_L \leq T_P$, soient $x, y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (x - 1) \leq 0 \\ (1 - y) \geq 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow (x - 1)(1 - y) \leq 0 \\ &\Rightarrow x - x.y + y - 1 \leq 0 \\ &\Rightarrow x + y - 1 \leq x.y. \end{aligned}$$

On obtient que le $\max(x + y - 1, 0) \leq x.y$, (car $0 \leq x.y$), D'où, $T_L \leq T_P$.

On sait que, si f est une fonction génératrice additive d'une t-norme T , alors f est continue, strictement décroissante, $f(1) = 0$ et $T(x, y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0)))$.

Montrons que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1 - x$, est une fonction génératrice additive pour T_L .

Il est clair que f est continue, strictement décroissante sur $[0, 1]$,

$$f(1) = 0 \text{ et } f^{-1}(x) = 1 - x.$$

Vérifions que, $T_L(x, y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0)))$.

Si, $x + y - 1 > 0$, on a $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) = x + y - 1$, alors,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0))) &= f^{-1}(\min(2 - x - y, 1)) \\ &= 1 - 2 + x + y \\ &= x + y - 1 = T_L(x, y). \end{aligned}$$

Si $x + y - 1 < 0$, alors $1 - x - y > 0$, donc $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) = 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0))) &= f^{-1}(\min(2 - x - y, 1)) \\ &= f^{-1}(1) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

(Puisque $x + y - 1 < 0 \Rightarrow 1 - x - y > 0 \Rightarrow 2 - x - y > 1$).

D'où, $T_L(x, y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0)))$.

On va montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = -\ln x$ est une fonction génératrice additive pour T_P . Il est facile de montrer que f est continue, strictement décroissante, $f(1) = 0$ et $f^{-1}(x) = e^{-x}$. Il reste à montrer que, $T_P(x, y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0)))$.

Soient, $x, y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0))) &= f^{-1}(f(x) + f(y)) \\ &= e^{-(-\ln x - \ln y)} \\ &= e^{-\ln x \cdot y} \\ &= x \cdot y = T_P(x, y). \end{aligned}$$

Donc, f est une fonction génératrice additive pour T_P .

1.3 Implications et biimplications résiduelles

Définition 1.3.1. [4] Soit T une t -norme continue à gauche, l'implication résiduelle \vec{T} est définie comme suit : $\vec{T}(x, y) = \sup \{u \in [0, 1] / T(x, u) \leq y\}$.

lemme 1.3.2. [9] Soit T une t -norme continue à gauche, alors les propriétés suivantes sont satisfaites pour tous $x, y, z \in [0, 1]$.

$$(I.1) \quad x \leq y \text{ si et seulement si } \vec{T}(x, y) = 1.$$

$$(I.2) \quad T(x, y) \leq z \text{ si et seulement si } x \leq \vec{T}(y, z).$$

$$(I.3) \quad T(\vec{T}(x, y), \vec{T}(y, z)) \leq \vec{T}(x, z).$$

$$(I.4) \quad \vec{T}(1, y) = y.$$

$$(I.5) \quad T(x, \vec{T}(x, y)) \leq y.$$

$$(I.6) \quad y \leq \vec{T}(x, T(x, y)).$$

De plus \vec{T} est non croissante et continue à gauche par rapport à la première variable, et non décroissante et continue à droite par rapport à la deuxième variable.

D'une façon analogue. Dans le cas boolien nous pouvons aussi utiliser une implication résiduelle, pour définir un concept logique d'une relation d'équivalence.

Preuve.

(I.1) $x \leq y$ si et seulement si $\overrightarrow{T}(x, y) = 1$

(\Rightarrow)

Soient $x, y \in [0, 1]$, telle que, $x \leq y$.

On a $\mu \leq 1$ (car $\mu \in [0, 1]$) alors, $T(x, \mu) \leq T(y, 1) = y, \forall \mu \in [0, 1]$.

Donc, $\vee \{\mu \in [0, 1], T(x, \mu) \leq y\} = 1$, D'où, $\overrightarrow{T}(x, y) = 1$.

(\Leftarrow)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T}(x, y) = 1 &\Rightarrow \vee \{\mu \in [0, 1], T(x, \mu) \leq y\} = 1 \\ &\Rightarrow T(x, 1) \leq y \\ &\Rightarrow x \leq y. \end{aligned}$$

(I.2) $T(x, y) \leq z$ si et seulement si $x \leq \overrightarrow{T}(y, z)$.

(\Rightarrow)

Soient $x, y, z \in [0, 1]$, telle que $T(x, y) \leq z$. On a

$\overrightarrow{T}(y, z) = \vee \{\mu \in [0, 1], T(y, \mu) \leq z\}$, et on a $T(x, y) \leq z$, alors $x \in \{\mu \in [0, 1], T(y, \mu) \leq z\}$, donc

$x \leq \vee \{\mu \in [0, 1], T(y, \mu) \leq z\}$, d'où, $x \leq \overrightarrow{T}(y, z)$.

(\Leftarrow)

On a, $x \leq \overrightarrow{T}(y, z)$. On pose,

$\overrightarrow{T}(y, z) = \vee \{\mu \in [0, 1], T(y, \mu) \leq z\} = \mu_0$. Alors $x \leq \mu_0$, donc $T(x, y) \leq T(y, \mu_0) \leq z$.

D'où, $T(x, y) \leq z$.

(I.3) On montre que, $T(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, z)) \leq \overrightarrow{T}(x, z)$.

On pose,

$u_0 = \overrightarrow{T}(x, y) = \vee \{u \in [0, 1], T(x, u) \leq y\}$.

$v_0 = \overrightarrow{T}(y, z) = \vee \{v \in [0, 1], T(y, v) \leq z\}$.

$w_0 = \overrightarrow{T}(x, z) = \vee \{w \in [0, 1], T(x, w) \leq z\}$.

On sait que, $T(x, u_0) \leq y$, alors $T(T(x, u_0), v_0) \leq T(y, v_0) \leq z$.

Donc, $T(x, T(u_0, v_0)) \leq z$, alors $T(u_0, v_0) \in \{w \in [0, 1], T(x, w) \leq z\}$, Alors $T(u_0, v_0) \leq w_0$.

D'où, $T(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, z)) \leq \overrightarrow{T}(x, z)$.

(I.4) On va montrer que $\overrightarrow{T}(1, y) = y$.

Pour tout $y \in [0, 1]$, on a :

$$\overrightarrow{T}(1, y) = \vee \{u \in [0, 1], T(1, u) \leq y\} = y.$$

(I.5) On veut montrer que pour tout $x, y \in [0, 1]$, $T(x, \overrightarrow{T}(x, y)) \leq y$.

On a $T(\overrightarrow{T}(1, x), \overrightarrow{T}(x, y)) \leq \overrightarrow{T}(1, y) \leq y$, (D'après (I.3))

(I.6) Montrons que, pour tout $x, y \in [0, 1]$, $y \leq \overrightarrow{T}(x, T(x, y))$, On a :

$y \in \{u \in [0, 1] / T(x, u) \leq T(x, y)\}$, donc $y \leq \overrightarrow{T}(x, T(x, y))$. ■

Définition 1.3.3. [4] La biimplication \overleftarrow{T} d'une t-norme continue à gauche T est définie comme suit, $\overleftarrow{T}(x, y) = T(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, x))$.

lemme 1.3.4. [4] Soit T une t-norme continue à gauche, les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$(B.1) \quad \overleftarrow{T}(x, y) = 1 \text{ si et seulement si } x = y.$$

$$(B.2) \quad \overleftarrow{T}(x, y) = \overleftarrow{T}(y, x).$$

$$(B.3) \quad \overleftarrow{T}(x, y) = \min(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, x)).$$

$$(B.4) \quad T(\overleftarrow{T}(x, y), \overleftarrow{T}(y, z)) \leq \overleftarrow{T}(x, z).$$

$$(B.5) \quad \overleftarrow{T}(x, y) = \overrightarrow{T}(\max(x, y), \min(x, y)).$$

Preuve.

(B.1)

On montre que pour tout $x, y \in [0, 1]$, $\overleftarrow{T}(x, y) = 1 \Leftrightarrow (x = y)$.

$$\overleftarrow{T}(x, y) = 1 \Leftrightarrow T(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, x)) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{T}(x, y) = 1; \\ \text{et} \\ \overrightarrow{T}(y, x) = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

(B.2) De la définition, la preuve est triviale.

(B.3) On montrera que, pour tout $x, y \in [0, 1]$, $\overleftarrow{T}(x, y) = \min(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, x))$.

Soient $x, y \in [0, 1]$, on a $\overleftarrow{T}(x, y) = T(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, x))$.

On remarque que l'égalité est vérifiée pour toute t-norme T , alors, elle est vraie pour la t-norme minimale, prenons $T = T_m$.

(B.4) Montrons que, pour tout $x, y, z \in [0, 1]$, $T(\overleftarrow{T}(x, y), \overleftarrow{T}(y, z)) \leq \overleftarrow{T}(x, z)$

Soient $x, y, z \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} T(\overleftarrow{T}(x, y), \overleftarrow{T}(y, z)) &= T(T(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, x)), T(\overrightarrow{T}(y, z), \overrightarrow{T}(z, y))) \\ &= T(T(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, z)), T(\overrightarrow{T}(z, y), \overrightarrow{T}(y, x))) \\ &= \text{(D'après la dominance de } T \text{ à elle même)} \quad . \\ &\leq T(\overrightarrow{T}(x, z), \overrightarrow{T}(z, x)) \\ &\leq \overleftarrow{T}(x, z). \end{aligned}$$

(B.5) On va montrer que pour tout $x, y, z \in [0, 1]$, $\overleftarrow{T}(x, y) = \overrightarrow{T}(\max(x, y), \min(x, y))$.

Soient $x, y \in [0, 1]$, si $x \leq y$ alors,

$$\overrightarrow{T}(\max(x, y), \min(x, y)) = \overrightarrow{T}(y, x) = T(1, \overrightarrow{T}(y, x)) = T(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, x)) = \overleftarrow{T}(x, y);$$

si $y \leq x$, alors,

$$\overrightarrow{T}(\max(x, y), \min(x, y)) = \overrightarrow{T}(x, y) = T(\overrightarrow{T}(x, y), 1) = T(\overrightarrow{T}(x, y), \overrightarrow{T}(y, x)) = \overleftarrow{T}(x, y)$$

■

1.4 Treillis.

Définition 1.4.1. *Un treillis L , est un ensemble partiellement ordonné tel que tout pair d'éléments (a, b) de L admet une borne supérieure, notée $a \vee b$, et une borne inférieure notée $a \wedge b$. On le note (L, \leq, \wedge, \vee) .*

Définition 1.4.2. *Un treillis L est fermé, s'il possède un plus grand élément et un plus petit élément. (Qu'on notera respectivement $1_L, 0_L$.)*

Proposition 1.4.3. *Soit (L, \leq, \wedge, \vee) un treillis et soient a, b, c et $d \in L$. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a \wedge c \leq b \wedge d$ et $a \vee c \leq b \vee d$.*

Exemple 1.4.4. Soit $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ l'ensemble des diviseurs positifs de 12. Alors $(D(12), /)$ est un treillis, où x/y signifiée (x divise y).

Exemple 1.4.5. $S = \{a, b, c\}$, $(P(S), \subseteq)$ est un treillis, où $P(S) = \{A / A \subseteq S\}$.

Définition 1.4.6. Un treillis L est dit complet, si et seulement si tout sous-ensemble de L admet une borne supérieure et une borne inférieure dans L .

Notation 1.4.7. Dans le cas où L est un treillis complet on utilise cette notation, $\vee Q$ (respectivement $\vee x_i$) pour la borne supérieure d'un sous-ensemble (respectivement une famille des éléments de L) et $\wedge Q$ (respectivement $\wedge x_i$) pour la borne inférieure d'un sous-ensemble (respectivement une famille des éléments de L).

Proposition 1.4.8. Si (L, \leq, \wedge, \vee) est un treillis complet, alors

$\wedge \phi = 1$ et $\vee \phi = 0$.

Preuve. Pour tout $x \in L$, alors, $((y \in \phi) \Rightarrow y \leq x)$, donc x est un majorant de ϕ .

Donc, $\vee \phi = \wedge \{x, x \in L\} = \wedge L = 0$, alors $\vee \phi = 0$.

De la même façon pour tout $x \in L$, x est un minorant de ϕ .

Donc, $\wedge \phi = \vee \{x, x \in L\} = \wedge L = 1$, alors $\wedge \phi = 1$. ■

Théorème 1.4.9. Tout treillis complet est fermé.

Chapitre 2

Relations d'ordre flou et couvertures

Résumé

On définit la relation de couverture classique à partir d'un ordre classique \leq de la façon suivante : $x \prec y \iff x \leq y$ avec $x \neq y$, et il n'existe aucun z tel que $x < z < y$, d'une part, d'autre part, on définit la relation floue de couverture déduite d'un ordre partiel flou sur le même ensemble comme suit : Soit ρ une L -relation d'ordre flou sur X , on définit la L -relation floue $\theta\rho$ comme une sous-relation de ρ , définie par :

$$\theta\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \text{ ou } \rho(x, z) \wedge \rho(z, y) > 0, \text{ pour quelques } z \notin \{x, y\}; \\ \rho(x, y) & \text{si } \rho(x, z) \wedge \rho(z, y) = 0, \text{ pour tout } z \notin \{x, y\}. \end{cases}$$

$\theta\rho$ est appelée alors relation de couverture floue associée à ρ .

Contenu

2.1 Relation de couverture classique

2.2 Relation de couverture floue

2.1 Relation de couverture classique

Dans ce chapitre, on considère un ensemble flou comme une application d'un ensemble P fini, ou dénombrable, dans un treillis complet L .

Définition 2.1.1. *La relation $<$ est déduite directement de l'ordre usuel \leq , par :*

$$x < y \Leftrightarrow x \neq y \text{ et } x \leq y.$$

Définition 2.1.2. [18] *Si \leq est une relation d'ordre classique sur X , alors la relation de couverture notée \prec définie sur le même ensemble X ,*

est donnée par : $x \prec y \iff x < y$ et il n'existe aucun z telles que : $x < z < y$.

La connexion de la relation de couverture et l'ordre déduit d'un ordre usuel est donné par le lemme suivant :

lemme 2.1.3. [18] *Soit a et b deux éléments différents d'un ensemble ordonné fini (P, \leq) , alors : $a \leq b \iff a \prec b$, ou $a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b$, pour certains $c_1, c_2, \dots, c_n \in P$.*

Preuve.

(\Rightarrow)

Soient a, b deux éléments de P tel que $a \leq b$, et \mathcal{F} l'ensemble des chaines A de P reliant a à b , c'est-à-dire, $\mathcal{F} = \{A/A \text{ est une chaine de } P \text{ vérifiant } \min A = a \text{ et } \max A = b\}$, $\mathcal{F} \neq \phi$ (Car la chaine $\{a, b\} \in \mathcal{F}$).

Si $a \prec b$, le problème est résolu.

Si $a \not\prec b$, (Puisque P est fini) alors il existe une chaine maximale B de \mathcal{F} tel que :

$$B = \{a, c_1, c_2, \dots, c_n, b\} \text{ tel que } a \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n \leq b.$$

Si $a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b$ le problème est résolu.

Si non, il existe au moins un élément i_0 , $i_0 \leq n$ tel que $c_{i_0} \not\prec c_{i_0+1}$,

par conséquent il existe au moins un $k \in P$ tel que $k \notin \{c_{i_0}, c_{i_0+1}\}$ et $c_{i_0} \leq k \leq c_{i_0+1}$.

Il est claire que $k \notin B$.

On prend B' la chaine telle que : $B' = \{a, c_1, c_2, \dots, c_{i_0}, k, c_{i_0+1}, \dots, c_n, b\}$.

On remarque que $B' \in \mathcal{F}$ et $B \subset B'$ ce qui contredit la maximalité de B .

(\Leftarrow)

On a $a \prec b \Rightarrow a < b \Rightarrow a \leq b$.

Si non, il existe $c_1, c_2, \dots, c_n \in P$, tel que $a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b$. Donc, $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$ par transitivité de $<$ on a $a < b \Rightarrow a \leq b$. ■

Dans ce qui suit on donne la propriété suivante de la relation de couverture déduite d'un ordre donné dont nous aurons besoin.

lemme 2.1.4. [18] *Soit \leq une relation d'ordre classique sur X , \prec la relation de couverture associée à \leq . Alors : Pour tout $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in X$,*

$$\text{si } x \prec y_1 \prec y_2 \prec \dots \prec y_n, \text{ alors } x \neq y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ et } x \not\prec y_i, \forall i = 2, 3, \dots, n \quad (2.1)$$

Preuve.

Soient $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in X$, tel que

$x \prec y_1 \prec \dots \prec y_n$ par définition de la relation \prec , on a

$$x < y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Donc, $x \neq y_i \forall i = 1, 2, \dots, n$

et on a $x \prec y_1 \Rightarrow x < y_1$, et on a $x < y_i$ et $y_i \prec y_{i+1}$, alors,

$y_i < y_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$. par transitivité de $<$ on a,

$x < y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$, donc

$x \neq y_i, i = 1, 2, \dots, n$, et $x < y_1 < \dots < y_n$, alors

$x \neq y_i, i = 1, 2, \dots, n$ et $x < y_1 < y_i, i = 2, 3, \dots, n$. D'où $x \not\prec y_i, i = 2, 3, \dots, n$. ■

Pour l'inverse, on définit une relation binaire particulière classique sur un ensemble X , et on prouve qu'il est possible de l'utiliser pour définir un ordre sur X .

Théorème 2.1.5. [18] *Soit \prec une relation binaire sur X vérifiant la propriété (2.1) du lemme 2.1.4. Alors, il est possible de définir une relation d'ordre sur X , tel que pour X fini, cette relation coïncide avec l'ordre ayant \prec comme relation de couverture.*

Preuve.

Soit \prec une relation sur l'ensemble non vide X , qui vérifie la propriété (2.1) du **Lemme 2.1.4**, pour tout $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in X$,

$$x \prec y_1 \prec \dots \prec y_n \iff \begin{cases} x \neq y_i; \forall i = 1, 2, \dots, n; \\ \text{et} \\ x \not\prec y_i, \forall i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

On définit la relation \leq sur X comme suit, pour tout $a, b \in X$,

$$a \leq b \iff \begin{cases} a = b, \\ \text{ou} \\ a \prec b, \\ \text{ou} \\ a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \text{ pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X. \end{cases}$$

On montre que \leq est une relation d'ordre.

1-Par définition la relation \leq est réflexive.

2-On va prouver que \leq est une relation antisymétrique, soient $a, b \in X$,

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq b \\ \text{et} \\ b \leq a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{et} \\ \left(\begin{array}{l} a = b \\ \text{ou} \\ a \prec b \\ \text{ou} \\ \left(\begin{array}{l} a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \end{array} \right) \\ \text{et} \\ \left(\begin{array}{l} b = a \\ \text{ou} \\ b \prec a \\ \text{ou} \\ \left(\begin{array}{l} b \prec c'_1 \prec c'_2 \prec \dots \prec c'_n \prec a, \\ \text{pour quelques } c'_1, c'_2, \dots, c'_n \in X. \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
a = b \text{ et } b = a \\
\text{ou} \\
a = b \text{ et } b \prec a \\
\text{ou} \\
a = b \text{ et } \left(\begin{array}{l} b \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \\
\text{ou} \\
a \prec b \text{ et } b = a \\
\text{ou} \\
a \prec b \text{ et } b \prec a \\
\text{ou} \\
\left(\begin{array}{l} a \prec b \text{ et } b \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \\
\text{ou} \\
\left(\begin{array}{l} a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \text{ et } b = a \\
\text{ou} \\
\left(\begin{array}{l} a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \text{ et } b \prec a \\
\text{ou} \\
\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \\ \text{et} \\ \left(\begin{array}{l} b \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec a \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \end{array} \right.
\end{array} \right.$$

$\Rightarrow a = b.$

Donc, \leq est antisymétrique.

3) On va montrer que \leq est transitive, soient a, b et $c \in X$,

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq b \\ \text{et} \\ b \leq c \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} a = b \\ \text{ou} \\ a \prec b \\ \text{ou} \\ \left(a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \right) \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \\ \text{et} \\ \left(\begin{array}{l} b = c \\ \text{ou} \\ b \prec c \\ \text{ou} \\ \left(b \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_m \prec c \right) \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_m \in X \end{array} \right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a = b \text{ et } b = c) \\ \text{ou} \\ (a = b \text{ et } b \prec c) \\ \text{ou} \\ a = b \text{ et } \left(\begin{array}{l} b \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_m \prec c \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_m \in X \end{array} \right) \\ \text{ou} \\ a \prec b \text{ et } b = c \\ \text{ou} \\ (a \prec b \text{ et } b \prec c) \\ \text{ou} \\ a \prec b \text{ et } \left(\begin{array}{l} b \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_m \prec c \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_m \in X \end{array} \right) \\ \text{ou} \\ \left(\begin{array}{l} a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \text{ et } b = c \\ \text{ou} \\ \left(\begin{array}{l} a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \text{ et } b \prec c \\ \text{ou} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \\ \text{et} \\ \left(\begin{array}{l} b \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_m \prec c \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_m \in X \end{array} \right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} (a = c) \\ \text{ou} \\ (a \prec c) \\ \text{ou} \\ \left(\begin{array}{l} a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_m \prec c \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_m \in X \end{array} \right) \\ \text{ou} \\ a \prec c \\ \text{ou} \\ (a \prec b \prec c) \\ \text{ou} \\ \left(\begin{array}{l} a \prec b \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_m \prec c \\ \text{pour certains } b, c_1, c_2, \dots, c_m \in X \end{array} \right) \\ \text{ou} \\ \left(\begin{array}{l} a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec c \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n \in X \end{array} \right) \\ \text{ou} \\ \left(\begin{array}{l} a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b \prec c \\ \text{pour certains } c_1, c_2, \dots, c_n, b \in X \end{array} \right) \\ \text{ou} \\ \left(\begin{array}{l} a \prec \alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \dots \prec \alpha_p \prec c \\ \text{pour certains } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in X \end{array} \right) \end{array} \right. \\
\Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a = c \\ \text{ou} \\ a \prec c \\ \text{ou} \\ \left(\begin{array}{l} a \prec \beta_1 \prec \beta_2 \prec \dots \prec \beta_j \prec c \\ \text{pour certains } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j \in X. \end{array} \right) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a \leq c.$$

Donc, \leq est transitive.

D'où, \leq est une relation d'ordre.

Montrons que R , la relation de couverture déduite de \leq , coïncide avec \prec .

Soient a, b deux éléments de X tel que $a < b$,

s'il n'existe aucun élément c de X tels que, $a < c < b$ par définition aRb ; et d'après la propriété 2.1 on a, $a \prec b$; s'il existe un élément c de X tels que, $a < c < b$ alors a n'est pas en relation avec b par R ; d'autre part on pose $x = a, y_1 = c, y_2 = b$,

alors d'après la propriété 2.1 on a, $a \not\prec b$. D'où $R = \prec$. ■

2.2 Relations de couverture floues

Définition 2.2.1. [18] Soit ρ une L -relation sur X . On définit une relation floue

θ_ρ de X^2 dans L , comme une sous-relation de ρ , par :

$$\theta_\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \text{ ou } \rho(x, z) \wedge \rho(z, y) > 0, \text{ pour quelques } z \notin \{x, y\}; \\ \rho(x, y) & \text{si } \rho(x, z) \wedge \rho(z, y) = 0, \text{ pour tout } z \notin \{x, y\}. \end{cases}$$

On appelle θ_ρ relation de couverture floue associée à la relation d'ordre flou ρ .

Théorème 2.2.2. [18] Soit θ_ρ une relation de couverture floue associée à la relation

d'ordre flou ρ définie comme suit :

$$\theta_\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \text{ ou } \rho(x, z) \wedge \rho(z, y) > 0 \text{ pour quelques } z \notin \{x, y\}; \\ \rho(x, y) & \text{si } \rho(x, z) \wedge \rho(z, y) = 0 \text{ pour tout } z \notin \{x, y\}. \end{cases}$$

Alors la condition suivante est vérifiée :

pour tout $n \in N$, si $\theta_\rho(x_1, x_2) \wedge \theta_\rho(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge \theta_\rho(x_{n-1}, x_n) > 0$ alors,

$x_1 \neq x_i$ pour tout $i = 2, \dots, n$ et $\theta_\rho(x_1, x_i) = 0$ pour tout $i = 3, \dots, n$. (**)

Preuve.

θ_ρ la relation de couverture floue associé à la relation d'ordre floue ρ , donnée par :

$$\theta_\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \text{ ou } \rho(x, z) \wedge \rho(z, y) > 0 \text{ pour quelque } z \notin \{x, y\}; \\ \rho(x, y) & \text{si } \rho(x, z) \wedge \rho(z, y) = 0 \text{ pour tout } z \notin \{x, y\}. \end{cases}$$

Soit $n \in N$, on a,

$\theta_\rho(x_1, x_2) \wedge \theta_\rho(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge \theta_\rho(x_{n-1}, x_n) > 0 \Rightarrow \theta_\rho(x_i, x_{i+1}) > 0$, pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Donc, $\theta_\rho(x_i, x_{i+1}) = \rho(x_i, x_{i+1}) > 0$, pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

Par transitivité de ρ on obtient $\rho(x_1, x_i) \geq \rho(x_1, x_{i-1}) \wedge \rho(x_{i-1}, x_i) > 0$, pour tout $i = 2, \dots, n$.

On pose $A = \{i \in \{2, \dots, n\} : x_i = x_1\}$.

Si $A = \phi$, le problème est résolu.

Si $A \neq \phi$ on pose $i_0 = \min A$.

Donc, on a $\rho(x_1, x_{i_0-1}) \wedge \rho(x_{i_0-1}, x_{i_0}) > 0$, alors $x_1 = x_{i_0-1}$ car ρ est antisymétrique.

Donc, $i_0 - 1 \in A$, ce qui contredit le faite que $i_0 = \min A$.

Alors $A = \phi$, D'où, il n'existe aucun élément $i \in \{2, \dots, n\}$ tel que $x_1 = x_i$.

Il reste à montrer que, $\theta_\rho(x_1, x_i) = 0$, pour tout $i = 3, \dots, n$.

Posons $B = \{i \in \{3, \dots, n\}, \theta_\rho(x_1, x_i) > 0\}$.

Si $B = \phi$ le problème est résolu.

Si $B \neq \phi$ on prend $i_0 = \min B$.

Alors $\theta_\rho(x_1, x_{i_0}) > 0 \Rightarrow \theta_\rho(x_1, x_{i_0}) = \rho(x_1, x_{i_0}) > 0$, et on a par définition

$$\theta_\rho(x_1, x_2) \wedge \theta_\rho(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge \theta_\rho(x_{i_0-1}, x_{i_0}) > 0$$

$$\Rightarrow \rho(x_1, x_{i_0-1}) \wedge \rho(x_{i_0-1}, x_{i_0}) \geq \rho(x_1, x_2) \wedge \rho(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge \rho(x_{i_0-1}, x_{i_0}) > 0$$

(Car ρ est transitive).

Donc, $\rho(x_1, x_{i_0-1}) > 0$, alors $i_0 - 1 \in B$ ce qui contredit le faite que $i_0 = \min B$.

D'où, $\theta_\rho(x_1, x_{i_0}) = 0$. ■

Une approche abstraite de faire la couverture sans se référer à aucun ordre, est la suivante : On observe que nous somme capable de la formuler sous des conditions particulières sur L .

Théorème 2.2.3. [18] *Soient X un ensemble non vide, L un treillis infini complet et distributif et θ une relation floue sur X satisfaisant la propriété :*

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \theta(x_1, x_2) \wedge \theta(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-1}, x_n) > 0, \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} x_1 \neq x_i, \forall i = 2, \dots, n; \\ \text{et} \\ \theta(x_1, x_i) = 0, \forall i = 3, \dots, n. \end{array} \right.$$

Alors il existe une relation d'ordre flou ρ_θ définie par θ , telle que sa relation de couverture floue est θ .

Preuve. Soit X un ensemble fini et L un treillis complet et distributif.

$\theta : X^2 \longrightarrow L$ une relation floue sur X , tel que,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta(x_1, x_2) \wedge \theta(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-1}, x_n) > 0$, alors

$x_1 \neq x_i, \forall i = 2, \dots, n$ et $\theta(x_1, x_i) = 0, \forall i = 3, \dots, n$

On définit la relation ρ_θ comme suit :

$$\rho_\theta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y; \\ \text{et} \\ \bigvee_{x_i \in X, n \in \mathbb{N}} (\theta(x, x_1) \wedge \theta(x_2, x_2) \wedge \dots \wedge \theta(x_n, y)) & \text{si non.} \end{cases}$$

Montrons que ρ_θ est une relation d'ordre.

ρ_θ est réflexive par définition. On montre que ρ_θ est antisymétrique, soient $x, y \in X$:

$x \neq y$, calculons $\rho_\theta(x, y) \wedge \rho_\theta(y, x)$

$$\begin{aligned} \rho_\theta(x, y) \wedge \rho_\theta(y, x) &= \begin{cases} \bigvee_{x_i \in X, n \in \mathbb{N}} (\theta(x, x_1) \wedge \theta(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge \theta(x_n, y)) \\ \wedge \\ \bigvee_{y_i \in X, m \in \mathbb{N}} (\theta(y, y_1) \wedge \theta(y_1, y_2) \wedge \dots \wedge \theta(y_m, x)). \end{cases} \\ &= \bigvee_{x_i \in X, n \in \mathbb{N}} (\theta(x, x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_n, y)) \wedge \bigvee_{y_i \in X, m \in \mathbb{N}} (\theta(y, y_1) \wedge \dots \wedge \theta(y_m, x)) \\ &= \bigvee_{p \in \mathbb{N}^*} \theta(x, z_1) \wedge \theta(z_1, z_2) \wedge \dots \wedge \theta(z_n, y) \wedge \theta(y, z_{n+1}) \wedge \dots \wedge \theta(z_p, x). \text{(D'après la distributivité)} \end{aligned}$$

Puisque $x = z_0 = z_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et d'après (**). On a :

$\theta(z_0, z_1) \wedge \theta(z_1, z_2) \wedge \dots \wedge \theta(z_n, y) \wedge \theta(y, z_{n+1}) \wedge \dots \wedge \theta(z_p, z_{p+1}) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donc,

$\bigvee_{p \in \mathbb{N}} \theta(z_0, z_1) \wedge \theta(z_1, z_2) \wedge \dots \wedge \theta(z_n, y) \wedge \theta(y, z_{n+1}) \wedge \dots \wedge \theta(z_p, z_{p+1}) = 0$, alors

$\rho_\theta(x, y) \wedge \rho_\theta(y, x) = 0$. D'où ρ_θ est antisymétrique.

On va montrer que ρ_θ est transitive, soient $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned} \rho_\theta(x, y) \wedge \rho_\theta(y, z) &= \begin{cases} \bigvee_{x_i \in X, n \in \mathbb{N}} (\theta(x, x_1) \wedge \theta(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge \theta(x_n, y)) \\ \wedge \\ \bigvee_{y_i \in X, m \in \mathbb{N}} (\theta(y, y_1) \wedge \theta(y_1, y_2) \wedge \dots \wedge \theta(y_m, z)). \end{cases} \\ &= \bigvee_{n \in \mathbb{N}^*} (\theta(x, x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_n, y)) \bigvee_{m \in \mathbb{N}^*} (\theta(y, y_1) \wedge \dots \wedge \theta(y_m, z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee_{p \in \mathbb{N}^*} (\theta(x, y_1) \wedge \dots \wedge \theta(y_n, y)) \wedge (\theta(y, y_{n+1}) \wedge \dots \wedge \theta(y_p, z)) \text{ (D'après la distributivité)} \\
&= \bigvee_{p \in \mathbb{N}} (\theta(x, x_0) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-1}, x_n)) \wedge (\theta(x_n, x_{n+1}) \wedge \dots \wedge \theta(x_p, z)). \\
&\leq \rho_\theta(x, z), \text{ donc, } \rho_\theta \text{ est transitive.}
\end{aligned}$$

On va montrer que $\theta_{\rho_\theta} = \theta$, telle que

$$\theta_{\rho_\theta}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \text{ ou } \rho_\theta(x, z) \wedge \rho_\theta(z, y) > 0 \text{ pour quelques } z \notin \{x, y\}; \\ \rho_\theta(x, y) & \text{si } \rho_\theta(x, z) \wedge \rho_\theta(z, y) = 0 \text{ pour tout } z \notin \{x, y\}. \end{cases}$$

Si $x = y$ on a $\theta_{\rho_\theta}(x, y) = 0$.

On montrera que $\theta(x, x) = 0$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} \text{Si } x_1 = x_i \text{ pour quelques } i \in \{2, \dots, n\}, \\ \text{ou} \\ \theta(x_1, x_i) > 0 \text{ pour quelques } i \in \{3, \dots, n\}. \end{cases} \Rightarrow \theta(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-1}, x_n) = 0.$$

On prend $x = x_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Alors on a $\theta(x, x) \wedge \theta(x, x) \wedge \dots \wedge \theta(x, x) = 0$, donc $\theta(x, x) = 0$.

Si $x \neq y$ et $\rho_\theta(x, z) \wedge \rho_\theta(z, y) > 0$ pour quelques $z \notin \{x, y\}$, alors $\theta_{\rho_\theta}(x, y) = 0$.

D'autre part et d'après (**), on a :

$$\rho_\theta(x, z) \wedge \rho_\theta(z, y) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bigvee_{n \in \mathbb{N}^*} (\theta(x, x_1) \wedge \theta(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge \theta(x_n, z)) \\ \wedge \\ \bigvee_{n \in \mathbb{N}^*} (\theta(z, z_1) \wedge \theta(z_1, z_2) \wedge \dots \wedge \theta(z_m, y)) > 0. \end{cases}$$

Donc, $\bigvee_{p \in \mathbb{N}^*} \theta(x, z_1) \wedge \theta(z_1, z_2) \wedge \dots \wedge \theta(z_p, y) > 0$. (D'après la distributivité)

Alors, il existe au moins un $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\theta(x, z_1) \wedge \theta(z_1, z_2) \wedge \dots \wedge \theta(z_{p_0}, y) > 0$.

Donc, d'après (**), on a pour tout $i \in \{2, \dots, p_0 + 1\}$ tel que $y = z_{p_0+1}$ alors $\theta(x, z_i) = 0$.

Donc, $\theta(x, z_{p_0+1}) = 0$, alors $\theta(x, y) = 0$, d'où $\theta_{\rho_\theta}(x, y) = \theta(x, y) = 0$.

Finalement si $\rho_\theta(x, z) \wedge \rho_\theta(z, y) = 0$ pour tout $z \notin \{x, y\}$, alors $\theta_{\rho_\theta}(x, y) = \rho_\theta(x, y)$.

Mais $\rho_\theta(x, z) \wedge \rho_\theta(z, y) = 0$, donc $\theta(x, y) = \theta_{\rho_\theta}(x, y)$. ■

Exemple 2.2.4. Soit $X = \{x, y, z, u, v\}$ et $L = [0, 1]$

ρ	x	y	z	u	v
x	1	0.2	0.2	0.2	0
y	0	1	0	0.5	0
z	0	0	1	0.5	0
u	0	0	0	1	0
v	0	0	0.1	0.4	1

On va montrer que ρ est une relation d'ordre flou.

(1) On vérifiera la réflexivité de ρ .

On a $\forall x \in X, \rho(x, x) = 1$, donc ρ est réflexive.

(2) Vérifions que ρ est antisymétrique.

On a pour tout $x, y \in X$, si $x \neq y$ on a $\rho(x, y) \wedge \rho(y, x) = 0$.

Alors ρ est antisymétrique.

(3) On vérifie que ρ est transitive.

Soit $a, b, c \in X$, si $a = c$, alors $\rho(a, c) \geq \max(\min_{t \in X}(\rho(a, t), \rho(t, c)))$.

Si $a = x$ et $c = y$ il est facile de voir que :

$$\rho(x, y) \geq \max(\min_{t \in X}(\rho(x, t), \rho(t, y))) \Rightarrow 0.2 \geq \max[0, 2, 0, 2, 0, 0, 0].$$

Si $a = x$ et $c = z$, on a alors

$$\rho(x, z) = 0.2 \geq \max(\min_{t \in X}(\rho(x, t), \rho(t, z))) = 0.2 = \max[0.2, 0, 2, 0, 0, 0].$$

Si $a = x$ et $c = u$ on vérifiera que

$$\rho(x, u) = 0.2 \geq \max(\min_{t \in X}(\rho(x, t), \rho(t, u))) = \max[0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0].$$

Si $a = x$ et $c = v$ on a

$$\rho(x, v) = 0 \geq \max(\min_{t \in X}(\rho(x, t), \rho(t, v))) = \max[0, 0, 0, 0, 0] = 0.$$

de la même façon on vérifie que

$$\rho(a, c) \geq \max(\min_{t \in X}(\rho(a, t), \rho(t, c))).$$

$$\text{On a : } \theta_\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \text{ ou } \rho(x, z) \wedge \rho(z, y) \gg 0 \text{ pour quelque } z \notin \{x, y\}; \\ \rho(x, y) & \text{si } \rho(x, z) \wedge \rho(z, y) = 0 \text{ pour tout } z \notin \{x, y\}. \end{cases}$$

ρ	x	y	z	u	v
x	0	0.2	0.2	0	0
y	0	0	0	0.5	0
z	0	0	0	0.5	0
u	0	0	0	0	0
v	0	0	0.1	0	0

Exemple 2.2.5. Soit $X = \{x, y, z; u; v\}$ et L un treillis distributif défini comme suit,

L

On définit la relation floue θ comme suit :

θ	x	y	z	u	v
x	0	p	q	0	0
y	0	0	0	0	q
z	0	0	0	p	q
u	0	0	0	0	0
v	0	0	0	0	0

Il faut montrer que θ vérifie la condition suivante :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta(x_1, x_2) \wedge \theta(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-1}, x_n) > 0$; alors $x_1 \neq x_i \forall i = 2, \dots, n$ et $\theta(x_1, x_i) = 0, \forall i = 3, \dots, n$.

On a.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x_1 = x_i \text{ pour quelques } i \in \{2, \dots, n\} \\ \text{ou} \\ \theta(x_1, x_i) > 0 \text{ pour quelques } i \in \{3, \dots, n\} \end{array} \right. \Rightarrow \theta(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-1}, x_n) = 0.$$

Soit $x_1 = x_2 = x$, alors $\theta(x_1, x_2) \wedge \theta(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-1}, x_n) = 0$ et $\theta(x_1, x_i) > 0$ pour certains $i \in \{3, \dots, n\}$.

On pose.

$x_1 = x_2 = x$ et $x_3 = y$ et $x_4 = z$.

Alors $\theta(x_1, x_2) \wedge \theta(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-1}, x_n) = 0, \forall n \geq 3$.

On calcule $\rho_\theta(a, b)$.

On sait que $\rho_\theta(a, a) = 1$ pour tout $a \in X$.

Si $a = x$ et $b = y$, alors

$$\begin{aligned} \rho_\theta(x, y) &= \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \theta(x, x_1) \wedge \theta(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge \theta(x_n, y). \\ \rho_\theta(x, y) &= \bigvee \left[\begin{array}{l} \theta(x, y), \theta(x, z) \wedge \theta(z, y), \theta(x, u) \wedge \theta(u, y), \theta(x, v) \wedge \theta(v, y), \\ \theta(x, z) \wedge \theta(z, u) \wedge \theta(u, y), \\ \theta(x, z) \wedge \theta(z, v) \wedge \theta(v, y), \theta(x, u) \wedge \theta(u, z) \wedge \theta(z, y), \\ \theta(x, u) \wedge \theta(u, v) \wedge \theta(v, y) \\ \theta(x, v) \wedge \theta(v, z) \wedge \theta(z, y), \theta(x, v) \wedge \theta(v, u) \wedge \theta(u, y), \\ \theta(x, z) \wedge \theta(z, u) \wedge \theta(u, v) \wedge \theta(v, y), \\ \theta(x, z) \wedge \theta(z, v) \wedge \theta(v, u) \wedge \theta(u, y), \\ \theta(x, v) \wedge \theta(v, u) \wedge \theta(u, v) \wedge \theta(v, y), \\ \theta(x, v) \wedge \theta(v, z) \wedge \theta(z, u) \wedge \theta(u, y), \\ \theta(x, u) \wedge \theta(u, v) \wedge \theta(v, z) \wedge \theta(z, y), \\ \theta(x, u) \wedge \theta(u, z) \wedge \theta(z, v) \wedge \theta(v, y) \end{array} \right] \\ &= \bigvee [p, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] = p. \end{aligned}$$

De la même façon on peut calculer $\rho_\theta(x, u)$.

$$\rho_\theta(x, u) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}^*} \theta(x, x_1) \wedge \theta(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge \theta(x_n, u)$$

$$\rho_\theta(x, u) = \bigvee \left[\begin{array}{l} \theta(x, u), \theta(x, z) \wedge \theta(z, u), \theta(x, y) \wedge \theta(y, u), \theta(x, v) \wedge \theta(v, u), \\ \theta(x, z) \wedge \theta(z, y) \wedge \theta(y, u), \\ \theta(x, z) \wedge \theta(z, v) \wedge \theta(v, u), \theta(x, y) \wedge \theta(y, z) \wedge \theta(z, u), \\ \theta(x, y) \wedge \theta(y, v) \wedge \theta(v, u) \\ \theta(x, v) \wedge \theta(v, z) \wedge \theta(z, u), \theta(x, v) \wedge \theta(v, y) \wedge \theta(y, u), \\ \theta(x, z) \wedge \theta(z, v) \wedge \theta(v, y) \wedge \theta(y, u) \\ \theta(x, z) \wedge \theta(z, y) \wedge \theta(y, v) \wedge \theta(v, u), \\ \theta(x, v) \wedge \theta(v, y) \wedge \theta(y, z) \wedge \theta(z, u) \\ \theta(x, v) \wedge \theta(v, z) \wedge \theta(z, y) \wedge \theta(y, u), \\ \theta(x, y) \wedge \theta(y, v) \wedge \theta(v, z) \wedge \theta(z, u), \\ \theta(x, y) \wedge \theta(y, z) \wedge \theta(z, v) \wedge \theta(v, u), \end{array} \right]$$

$$\rho_\theta(x, u) = \bigvee [r, r, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] = r.$$

De la même façon on peut calculer.

ρ_θ	x	y	z	u	v
x	1	p	q	r	q
y	0	1	0	0	q
z	0	0	1	p	q
u	0	0	0	1	0
v	0	0	0	0	1

On va vérifier que $\theta_{\rho_\theta} = \theta$.

On sait que,

$$\theta_{\rho_\theta}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \text{ ou } \rho_\theta(a, t) \wedge \rho_\theta(t, b) \geq 0 \text{ pour quelques } t \notin \{a, b\}; \\ \text{et} \\ \rho_\theta(a, b) & \text{si } \rho_\theta(a, t) \wedge \rho_\theta(t, b) = 0 \text{ pour tout } t \notin \{a, b\}. \end{cases}$$

Si $a = b$, on a $\theta_{\rho_\theta}(a, a) = 0$ pour tout $a \in X$.

Si $a \neq b$, calculons $\theta_{\rho_\theta}(a, b)$ et pour le faire on calcule $\rho_\theta(a, t) \wedge \rho_\theta(t, b)$.

Si $a = x$ et $b = y$.

On calcule $\theta_{\rho_\theta}(x, y)$.

$$\rho_\theta(x, z) \wedge \rho_\theta(z, y) = q \wedge 0 = 0,$$

$$\rho_\theta(x, u) \wedge \rho_\theta(u, y) = r \wedge 0 = 0,$$

$$\rho_\theta(x, v) \wedge \rho_\theta(v, y) = q \wedge 0 = 0.$$

Alors $\rho_\theta(x, t) \wedge \rho_\theta(t, y) = 0$ pour tout $t \notin \{x, y\}$.

Donc, $\theta_{\rho_\theta}(x, y) = \rho_\theta(x, y) = p$.

De la même façon on calcule $\theta_{\rho_\theta}(x, z)$.

$$\rho_\theta(x, y) \wedge \rho_\theta(y, z) = p \wedge 0 = 0,$$

$$\rho_\theta(x, u) \wedge \rho_\theta(u, z) = r \wedge 0 = 0,$$

$$\rho_\theta(x, v) \wedge \rho_\theta(v, z) = q \wedge 0 = 0.$$

Alors $\rho_\theta(x, t) \wedge \rho_\theta(t, z) = 0$ pour tout $t \notin \{x, y\}$.

Donc, $\theta_{\rho_\theta}(x, z) = \rho_\theta(x, z) = q$.

D'une manière analogue on calcule $\theta_{\rho_\theta}(x, u)$.

$$\rho_\theta(x, y) \wedge \rho_\theta(y, u) = p \wedge 0 = 0,$$

$$\rho_\theta(x, z) \wedge \rho_\theta(z, u) = q \wedge p = r.$$

Alors $\rho_\theta(x, t) \wedge \rho_\theta(t, z) > 0$ pour $t = z$.

Donc, $\theta_{\rho_\theta}(x, u) = 0$.

de la même méthode on peut calculer les valeurs de θ_{ρ_θ} . On trouve :

θ_{ρ_θ}	x	y	z	u	v
x	0	p	q	0	0
y	0	0	0	0	q
z	0	0	0	p	q
u	0	0	0	0	0
v	0	0	0	0	0

Alors $\theta_{\rho_\theta} = \theta$.

Chapitre 3

Construction des ordres flous

Résumé

Dans ce chapitre on s'intéresse aux relations d'ordre et aux relations d'équivalence définies à l'aide d'une implication et biimplication résiduelle, ainsi qu'à la façon de construire une T -relation d'équivalence à partir d'un T -préordre. On arrive enfin, à construire un ordre comme une intersection ou produit cartésien.

Contenu

3.1 Trace à gauche et trace à droite d'une relation binaire floue

3.2 Factorisation implicite

3.3 Construction d'un ordre flou au moyen d'une intersection et d'un produit cartésien

3.1 Trace à gauche et trace à droite d'une relation binaire floue

Relations d'ordres flous.

Définition 3.1.1. [4] Soit T une t -norme et R une relation floue binaire sur X .

R est T -transitive si et seulement si $T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$, pour tout $x, y, z \in X$.

R est complètement forte si et seulement si $\max(R(x, y), R(y, x)) = 1$, pour tout $x, y \in X$.

Définition 3.1.2. Une relation floue R est dite une relation d'ordre flou si et seulement si R est réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition 3.1.3. [4] Les relations floues qui sont réflexives et T -transitives sont appelées préordre flou au sens de T , brièvement (T -préordre). Un T -préordre, symétrique est appelé relation d'équivalence floue au sens de T , brièvement (T -équivalence).

Définition 3.1.4. [4] Soit R une relation binaire floue sur un domaine X , sa trace à gauche R^g et sa trace à droite R^d sont des relations floues définies de la manière suivantes :

$$R^g(x, y) = \inf_{z \in X} (\overrightarrow{T}(R(z, x), R(z, y))).$$

$$R^d(x, y) = \inf_{z \in X} (\overrightarrow{T}(R(y, z), R(x, z))).$$

Proposition 3.1.5. [9] Soit R une relation binaire floue sur un domaine X et T une t -norme continue à gauche, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) R est réflexive.

(2) $R^g \subset R$.

(3) $R^d \subset R$.

Preuve.

(1) \Rightarrow (2)

Soient $x, y \in X$, on a

$$R^g(x, y) = \inf_{z \in X} (\overrightarrow{T}(R(z, x), R(z, y)) \leq \overrightarrow{T}(R(x, x), R(x, y)) = \overrightarrow{T}(1, R(x, y)) = R(x, y).$$

Donc, $R^g \subset R$.

(1) \Rightarrow (3)

Soient $x, y \in X$, on a

$$R^d(x, y) = \inf_{z \in X} (\overrightarrow{T}(R(y, z), R(x, z))) \leq \overrightarrow{T}(R(y, y), R(x, y)) = \overrightarrow{T}(1, R(x, y)) = R(x, y).$$

Donc, $R^d \subset R$.

2) \Rightarrow (1)

Soient $x, y \in X$, on a $R(x, y) \geq R^g(x, y) = \inf_{z \in X} (\overrightarrow{T}(R(z, x), R(z, y)))$.

Donc, il existe un $z_0 \in X$, tel que

$$R(x, x) \geq \overrightarrow{T}(R(z_0, x), R(z_0, x)) = 1. \text{ (D'après (I.1)).}$$

Donc, R est réflexive.

De la même façon on montre que (3) \Rightarrow (1).

Soient $x, y \in X$, $R(x, y) \geq R^d(x, y) = \inf_{z \in X} (\overrightarrow{T}(R(y, z), R(x, z)))$.

Donc, il existe un $z_0 \in X$, tel que :

$$R(x, y) \geq \overrightarrow{T}(R(y, z_0), R(x, z_0)).$$

Alors pour $x = y$ on a, $R(x, x) \geq \overrightarrow{T}(R(x, z_0), R(x, z_0)) = 1$,

Donc, $R(x, x) = 1$.

En conséquence, R est réflexive.

D'où, (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3). ■

Proposition 3.1.6. [9] *Soit R une relation binaire floue sur un domaine X , T une t -norme continue à gauche. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) R transitive.

(2) $R \subset R^d$.

(3) $R \subset R^g$.

Preuve.

(1) \Rightarrow (2)

Soit R une relation floue transitive.

Soient $x, y, z \in X$, on a $T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z) \stackrel{(I,2)}{\Leftrightarrow} R(x, y) \leq \overrightarrow{T}(R(y, z), R(x, z))$,
alors $R(x, y) \leq \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(R(y, z), R(x, z)) = R^d(x, y)$. D'où, $R \subset R^d$.

(1) \Rightarrow (3)

Soient $x, y \in X$, on a $R^g(x, y) = \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(R(z, x), R(z, y))$.

et on a $\overrightarrow{T}(R(z, x), R(z, y)) = \vee \{u \in [0, 1], T(R(z, x), u) \leq R(z, y)\}$,

alors $R(x, y) \in \{u \in [0, 1], T(R(z, x), u) \leq R(z, y)\}, \forall z \in X$.

Donc, $R(x, y) \leq \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(R(z, x), R(z, y))$.

Alors $R(x, y) \leq R^g(x, y), \forall x, y \in X$. D'où, $R \subset R^g$.

(2) \Rightarrow (1)

$R \subset R^g \Rightarrow R$ est transitive.

Soient $x, y \in X$ on a :

$R \subset R^g \Leftrightarrow$ pour tout $z \in X$

$R(x, y) \leq \overrightarrow{T}(R(z, x), R(z, y)) \stackrel{(I,2)}{\Leftrightarrow} T(R(x, y), R(z, x)) \leq R(z, y)$

$\Leftrightarrow T(R(z, x), R(x, y)) \leq R(z, y)$, donc R est transitive.

De la même façon on démontre l'implication (3) \Rightarrow (1). ■

Corollaire 3.1.7. [9] *Soit T une t -norme continue à gauche. Une relation binaire floue R sur un domaine X est un T -préordre si et seulement si l'égalité $R = R^g = R^d$ est vérifiée.*

Preuve.

(\Leftrightarrow)

R est un T -préordre équivalent à R est réflexive et T -transitive équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} R^d \subset R \\ \text{et} \\ R^g \subset R \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} R \subset R^d \\ \text{et} \\ R \subset R^g \end{array} \right\} \text{ équivalent à } R = R^g = R^d.$$

D'après les propositions 3.1.5 et 3.1.6. ■

Corollaire 3.1.8. [9] *On considère une t -norme T continue à gauche. Une relation binaire floue E sur un domaine X est une T -relation d'équivalence si et seulement si l'égalité suivante :*

$$E(x, y) = \inf_{z \in X} (\overleftarrow{T}(E(z, x), E(z, y))) = \inf_{z \in X} (\overleftarrow{T}(E((y, z), E(x, z)))) \text{ est vérifiée.}$$

Preuve.

(\Rightarrow)

E est une T -relation d'équivalence, on montrera que :

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(z, x), E(z, y)) \\ &= \inf_{z \in X} (\overrightarrow{T}(E(z, x), E(z, y)), \overrightarrow{T}(E((z, y)), E(z, x))). \end{aligned}$$

Car E est un T -préordre, alors, d'après le corollaire 3.1.7, on a $E = E^d = E^g$.

$$E^g(x, y) = \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(E(z, x), E(z, y)) \text{ et } E^d(x, y) = \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(E((y, z)), E(x, z)).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \inf_{z \in X} \left(\overleftarrow{T}(E((y, z)), E(x, z)) \right) &\leq \overleftarrow{T}(E((y, z)), E(x, z)), \forall z \in X \\ &\leq \overrightarrow{T}(E((y, z)), E(x, z)), \forall z \in X \\ &\leq \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(E(y, z), E(x, z)) \\ &= E^d(x, y) \\ &= E(x, y) \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } E(x, y) \geq \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E((y, z)), E(x, z)) \dots \dots \dots (1).$$

d'autre part, on a $E(x, y) \in \{u \in [0.1], T(E((y, z)), u) \leq E(x, z)\}$, car E est T -transitive.

$$\text{Donc, } E(x, y) \leq \overrightarrow{T}(E((y, z)), E(x, z)), \forall z \in X.$$

(Puisque E est symétrique), on a : $E(x, y) = E(y, x) \leq \overrightarrow{T}(E(x, z), E(y, z)), \forall z \in X$.

$$\text{En conséquence, } E(x, y) \leq \inf_{z \in X} (\min(\overrightarrow{T}(E(y, z), E(x, z)), \overrightarrow{T}(E(x, z), E(y, z)))).$$

$$\text{Donc, } E(x, y) \leq \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(y, z), E(x, z)) \dots \dots \dots (2).$$

$$\text{D'où, } E(x, y) = \inf_{z \in X} \left(\overleftarrow{T}(E(y, z), E(x, z)) \right).$$

(\Leftarrow)

On montrera que E est une T -relation d'équivalence.

$$(i) \text{ Montrons que } E \text{ est réflexive, soit } x \in X, \text{ on a } \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(E(z, x), E(z, x)) = 1.$$

Donc, $E(x, x) = 1$, d'où, E est réflexive.

(ii) On va montrer que E est symétrique, soient $x, y \in X$,

$$E(x, y) = \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(z, x), E(z, y)) = \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(z, y), E(z, x)) = E(y, x).$$

$$E(x, y) = \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(y, z), E(x, z)) = \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(x, z), E(y, z)) = E(y, x).$$

D'où, E est symétrique.

(iii) On montre que E est T -transitive, soient $x, y, t \in X$, montrons que,

$$T(E(x, y), E(y, t)) \leq E(x, t), \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned}
& T(E(x, y), E(y, t)) \\
&= T(\inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(z, x), E(z, y)), \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(z, y), E(z, t))) \\
&= \inf_{z \in X} T(\overleftarrow{T}(E(z, x), E(z, y)), \overleftarrow{T}(E(z, y), E(z, t))) \\
&\leq \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(z, x), E(z, t)), \text{ (D'après I.4)} \\
&= E(x, t). \text{ D'ou, } E \text{ est } T\text{-transitive. } \blacksquare
\end{aligned}$$

L'idée la plus évidente pour définir un ordre flou est de généraliser les trois axiomes (Réflexivité, antisymétrie, transitivité). La première définition de ce type se voit sous le nom (Ordre partiel flou) où seulement la norme minimale T_M est considérée. Nous donnons une définition plus que celle-ci générale admettant une t -norme arbitraire.

Définition 3.1.9. [4] *Soit T une t -norme arbitraire. Un T -préordre est appelé ordre flou au sens de T , (brièvement T -ordre), si et seulement si l'axiome appelé T -antisymétrie est vérifiée, c'est-à-dire pour tout $x, y \in X$, si $x \neq y$ alors $T(R(x, y), R(y, x)) = 0$.*

Bien que les relations d'équivalences puissent être conçues comme noyaux symétrique des préordres, les ordres sont obtenus au moyen des préordres par factorisation aux sens de noyaux symétriques et préordres. Dans le cas flou, les relations d'équivalences floues sont décrites uniquement par les noyaux symétriques des préordres flous. Cependant, les ordres flous ne sont pas construits comme factorisation des préordres flous. C'est pourquoi la définition 3.1.9 est bien une généralisation simple sans prendre le fond algébrique en considération.

Définition 3.1.10. [4] *Soit $R : X^2 \rightarrow [0,1]$ une relation binaire floue, on dit que R est un ordre flou au sens de la t -norme T et la T -relation d'équivalence E (sur le même domaine X), ou simplement (T - E -ordre), si et seulement si R est T -transitive; de plus, elle satisfait les deux axiomes suivants :*

- (1) R est E -réflexive c'est-à-dire $\forall x, y \in X, E(x, y) \leq R(x, y)$.
- (2) T - E -antisymétrique c'est-à-dire $\forall x, y \in X, T(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y)$.

Il est facile de vérifier que la définition 3.1.10 coïncide avec la définition de T -ordre si E est remplacée par l'égalité classique. De plus, tout T -ordre dans le sens de la définition 3.1.9 est un T - E -ordre tel que :

$$E(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y; \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

lemme 3.1.11. [4]

- 1) Tout ordre classique est un ordre flou au sens de tout t -norme T et l'égalité classique.
- 2) Toute T -relation d'équivalence E est elle même un T - E -ordre. De plus, toute T -relation d'équivalence donnée E est le plus petit T - E -ordre. (C'est-à-dire : le plus partiel).
- 3) Si R est un T - E -ordre, alors sa relation inverse $G(x, y) = R(y, x)$ est aussi un T - E -ordre.
- 4) Si une t -norme T_1 est plus forte qu'une t -norme T_2 , alors tout T_1 - E -ordre est un T_2 - E -ordre.

Preuve.

- 1) On suppose que R est une relation d'ordre classique,

$$E(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y; \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Et on montre que R est un T - E -ordre.

- i)* Soient $x, y \in X$,

Si $x = y$, on a $E(x, y) = R(x, y) = 1$, donc $E(x, y) \leq R(x, y)$.

Si $x \neq y$, on a $E(x, y) = 0 \leq R(x, y)$.

Donc, R est E -réflexive.

- ii)* On montrera que R est T - E -antisymétrique, soient $x, y \in X$,

montrons que $T(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y)$.

Si $x = y$, donc l'inégalité est vérifiée.

Si $x \neq y$ et car R est antisymétrique, alors $R(x, y) \wedge R(y, x) = 0$, donc

$T(R(x, y), R(y, x)) \leq R(x, y) \wedge R(y, x) = 0 \leq E(x, y)$.

Donc, l'inégalité est vérifiée.

D'où, R est T - E -antisymétrique.

- iii)* On va montrer que R est T -transitive, soient $x, y, z \in X$, on a, pour toute t -norme

$T, T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, y) \wedge R(y, z) \leq R(x, z)$.

Donc, R est T -transitive.

D'où, R est T - E -ordre.

2) Soit E une T -relation d'équivalence.

Pour montrer que E est un T - E -ordre il suffit de montrer que,

E est E -réflexive et T - E -antisymétrique.

Soient $x, y \in X$,

a) $E(x, y) \leq E(x, y)$, donc E est E -réflexive.

b) $T(E(x, y), E(y, x)) \leq E(x, y)$ (Car $T(x, y) \leq T(x, 1) = x$), donc, E est T - E -antisymétrique.

D'où, E est T - E -ordre.

3) On suppose que R est un T - E -ordre et on montre que,

$G(x, y) = R(y, x)$ est un T - E -ordre.

Si R est un T - E -ordre.

(i) Montrons que G est E -réflexive, soient $x, y \in X$,

$$E(x, y) = E(y, x) \leq R(y, x) = G(x, y).$$

Donc, G est E -réflexive.

(ii) On montre que G est T - E -antisymétrique, soient $x, y \in X$,

$$T(G(x, y), G(y, x)) = T(L(y, x), L(x, y)) \leq E(x, y).$$

D'où, G est T - E -antisymétrique.

(iii) Montrons que G est T -transitive, soient $x, y, z \in X$,

$$T(G(x, y), G(y, z)) = T(R(y, x), R(z, y)) = T(R(z, y), R(y, x)) \leq R(z, x) = G(x, z).$$

Donc, G est un T - E -ordre.

4) Soient T_1, T_2 , deux t-normes tels que T_1 est plus forte que T_2 .

Montrons que, si R est un T_1 - E -ordre, alors R est un T_2 - E -ordre.

Soit R un T_1 - E -ordre.

a) La E -réflexivité de R est évidente.

b) On montre que R est T_2 - E -antisymétrique, soient $x, y \in X$,

$$T_2(R(x, y), R(y, x)) \leq T_1(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y).$$

Donc, R est T_2 - E -antisymétrique.

c) On va montrer que R est T_2 -transitive, soient $x, y, z \in X$,

$$T_2(R(x, y), R(y, z)) \leq T_1(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z).$$

Donc, R est T_2 -transitive.

D'où, R est un T_2 - E -ordre. ■

Nous donnons dans l'ordre quelques types de relations d'ordres flous et de quoi peuvent-ils être utilisés, nous donnons deux exemples simples, mais d'importances fondamentales.

Exemple 3.1.12. Inclusions floues.

Il est trivial que pour tout ensemble classique non vide X , l'inclusion ordinaire d'ensembles \subseteq est un ordre sur l'ensemble des parties de X , (i.e. $P(X)$). Dans le cas flou, $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, A(x) \leq B(x)$, définit un ordre flou sur $\mathcal{F}(X)$. Dans le cadre des logiques multivalentes basées sur des t-normes continues à gauche [11], [13]. Une méthode usuelle pour définir l'inclusion floue au sens de la t-norme continue à gauche T , est donnée comme suit :

$INCL_T(A, B) = \inf_{x \in X} \overrightarrow{T}(A(x), B(x))$, ceci n'est qu'un fuzzification de la propriété d'inclusion classique, ($\forall x \in X, (x \in A \Rightarrow x \in B)$), si on remplace le quantifieur universel par l'infimum, et l'implication booléenne par l'implication floue [6]. Etant donné une t-norme continue à gauche T , il suit du propriétés élémentaires des t-normes et implications résiduelles ([9]), que $INCL_T$ définit un ordre flou sur l'ensemble des parties floues $\mathcal{F}(X)$ (au sens de T) et $SIM_T(A, B) = \inf_{x \in X} \overleftarrow{T}(A(x), B(x))$.

Exemple 3.1.13. Ordre linéaire avec imprécision.

La relation floue $R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ \max(1 - x + y, 0) & \text{si non.} \end{cases}$ est un ordre flou sur \mathbb{R} au

sens de la t-norme T_L , et la T_L -relation d'équivalence $E : E(x, y) = \max(1 - |x - y|, 0)$.

Cet exemple correspond à une situation familière de tous les jours, malgré qu'un ordre linéaire classique est connu, il y a une certaine tolérance pour l'indiscernablement qui est pris en considération même quand les ordres sont intéressants. Considérons les deux exemples suivants :

- 1) Les humains n'interprète pas. la relation "au moins aussi grand que " dans le sens

strict : $taille(x) \leq taille(y)$. On prend toujours en considération que la différence entre tailles voisines. est négligeable (La différence entre (179,9 et 180,00)), même si nous avons un concept claire pour l'ordre des tailles qui sont simplement des nombres réels positives, il y a sans doute une certaine tolérance pour l'imprécision dans ce sens.

2) On suppose que quelqu'un envoie une question à un point d'information touristique demande une chambre à l'hôtel ne dépasse pas les 1000 DA par nuit. Dans tout les cas, il apparut approprié de lui offrir une chambre qui coûte 1010 DA.

3.2 Factorisation implicite

En analogie avec le cas classique, il est facile de prouver que le noyau symétrique d'un T -préordre est une T -équivalence. Le théorème suivant montre un pas plus loin, comment construire une T -équivalence tel que, un T -préordre donné peut être considéré comme un ordre flou.

Théorème 3.2.1. [4] *On suppose que R est un T -préordre, et \tilde{T} est une t -norme dominant T , alors R est un ordre flou au sens de T et la T -relation d'équivalence E , telle que : $E(x, y) = \tilde{T}(R(x, y), R(y, x))$.*

Preuve.

(i) On va montrer que R est E -réflexive, soient $x, y \in X$, on a :

$$E(x, y) = \tilde{T}(R(x, y), R(y, x)) \leq \tilde{T}(R(x, y), 1) = R(x, y).$$

Donc, R est E -réflexive.

(ii) Montrons que R est T - E -antisymétrique, soient $x, y \in X$,

$$T(R(x, y), R(y, x)) \leq \tilde{T}(R(x, y), R(y, x)) = E(x, y).$$

Donc, R est T - E -antisymétrique.

Par supposition que R est T -transitive. Alors, R est un T - E -ordre. ■

Selon le lemme 1.2.3, le théorème 3.2.1 reste vrai pour $\tilde{T} = T$ et $\tilde{T} = T_M$, et nous obtenons un unique majorant et un unique minorant pour la relation d'équivalence floue sous-jacente.

Corollaire 3.2.2. [4] *Un T -préordre R est un ordre flou au sens de la t -norme T et la T -relation d'équivalence E si seulement si,*

$$\text{pour tout } x, y \in X, T(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y) \leq \min(R(x, y), R(y, x)).$$

De plus, les deux bornes elles même sont des T -relations d'équivalence.

Preuve.

(\Leftarrow)

On a R est T -préordre et pour tout $x, y \in X$,

$$T(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y) \leq \min(R(x, y), R(y, x))$$

(1) On va montrer que R est E -réflexive, on a :

$$E(x, y) \leq \min(R(x, y), R(y, x)) \leq R(x, y).$$

(2) R est T - E -antisymétrique, évidente.

(3) R est T -transitive, évidente, donc, R est un T - E -ordre.

(\Rightarrow)

R est un T - E -ordre, puisque R est une T - E -relation antisymétrique, on a :

$T(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y)$ et car R est E -réflexive et symétrique, on a :

$E(x, y) \leq R(x, y)$ et $E(y, x) \leq R(y, x)$. Alors

$$E(x, y) \leq \min(R(x, y), R(y, x)),$$

de plus puisque T_M domine toute autre t -norme T et R un T -préordre, d'après

le théorème 3.2.1

$K(x, y) = \min(R(x, y), R(y, x))$ est une T -relation d'équivalence. En effet :

(i) On va montrer que K est une T -relation d'équivalence.

(1) Soit $x \in X, K(x, x) = \min(R(x, x), R(x, x)) = 1$, donc K est réflexive.

(2) Soit $x, y \in X, K(x, y) = \min(R(x, y), R(y, x)) = K(y, x)$, donc K est symétrique.

(3) Soit $x, y, z \in X, T(K(x, y), K(y, z)) = T(\min(R(x, y), R(y, x)) \min(R(y, z), R(z, y)))$.

$$\begin{aligned} T(K(x, y), K(y, z)) &= T(\min(R(x, y), R(y, x)) \min(R(y, z), R(z, y))) \\ &\leq \min(T(R(x, y), R(y, z)) T((R(y, x), R(z, y)))) \\ &\leq \min(R(x, z), R(z, x)) \\ &= K(x, z). \text{ Donc, } K \text{ est une } T\text{-relation d'équivalence.} \end{aligned}$$

(ii) On pose $F(x, y) = T(R(x, y), R(y, x))$.

On va montrer que F est une T -relation d'équivalence.

1) Soit $x \in X$, $F(x, x) = T(R(x, x), R(x, x)) = 1$, donc F est réflexive.

2) La symétrie est évidente.

3) La transitivité, soient $x, y, z \in X$, on montre que, $T(F(x, y), F(y, z)) \leq F(x, z)$.

$$\begin{aligned} T(F(x, y), F(y, z)) &= T(T(R(x, y), R(y, x)), T(R(y, z), R(z, y))) \\ &\leq T(T(R(x, y), R(y, z)), T(R(y, x), R(z, y))) \\ &\leq T(R(x, z), R(z, x)) \\ &= F(x, z). \text{ Donc, } F \text{ est transitive.} \end{aligned}$$

D'où, F est une T -relation d'équivalence. ■

3.3 Intersection et produit cartésien des ordres flous

Dans le cas classique, il y a des différents types pour construire un ordre comme intersection ou produit cartésien. Cette section est consacrée à la fuzzification de ces résultats. Le théorème suivant fournit une construction comment deux ordres flous s'intersectent pour obtenir un nouveau ordre flou.

Théorème 3.3.1. [4] *On suppose que R_1 est un T - E_1 -ordre sur X et R_2 est un T - E_2 -ordre sur X . Si \tilde{T} est une t -norme dominant T alors :*

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \tilde{T}(R_1(x, y), R_2(x, y)), \text{ est un } T\text{-}E\text{-ordre telle que} \\ E(x, y) &= \tilde{T}(E_1(x, y), E_2(x, y)). \end{aligned}$$

Preuve.

On montrera que R est un T - E -ordre.

1) La E -réflexivité, soient $x, y \in X$, on a,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_1(x, y) \leq R_1(x, y) \\ E_2(x, y) \leq R_2(x, y) \end{array} \right. &\Rightarrow \tilde{T}(E_1(x, y), E_2(x, y)) \leq \tilde{T}(R_1(x, y), R_2(x, y)) \\ &\Rightarrow E(x, y) \leq R(x, y). \text{ Donc, } R \text{ est } E\text{-réflexive.} \end{aligned}$$

2) La T - E -antisymétrie, soient $x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned}
T(R(x, y), R(x, y)) &= T\left(\tilde{T}(R_1(x, y), R_2(x, y)), \tilde{T}(R_1(y, x), R_2(y, x))\right) \\
&\leq \tilde{T}(T(R_1(x, y), R_1(y, x)), T(R_2(x, y), R_2(y, x))) \\
&\leq \tilde{T}(E_1(x, y), E_2(y, x)) \\
&= E(x, y). \text{Donc, } R \text{ est } T\text{-}E\text{-antisymétrique.}
\end{aligned}$$

3) La T -transitivité, soient $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned}
T(R(x, y), R(y, z)) &= T(\tilde{T}(R_1(x, y), R_2(x, y)), \tilde{T}(R_1(y, z), R_2(y, z))) \\
&\leq \tilde{T}(T(R_1(x, y), R_1(y, z)), T(R_2(x, y), R_2(y, z))) \\
&\leq \tilde{T}(R_1(x, y), R_2(y, z)) \\
&= R(x, y). \text{Donc, } R \text{ est } T\text{-transitive.}
\end{aligned}$$

D où R est un T - E -ordre. ■

Comme une conséquence immédiate du théorème 3.3.1, nous déduisons que :
si $\tilde{T} = T_M$ et $E_1 = E_2 = E$, mais la relation d'équivalence floue sous-jacente est préservée.

Corollaire 3.3.2. [4] Soient R_1, R_2 deux T - E -ordres sur X , l'intersection au sens de la t-norme T_M , $R(x, y) = \min(R_1(x, y), R_2(x, y))$ est un T - E -ordre.

Preuve.

D'après le théorème 3.3.1, si on prend $\tilde{T} = T_M$ et $E_1 = E_2 = E$.

On obtient alors que, $R(x, y) = \min(R_1(x, y), R_2(x, y))$, est un T - E -ordre. ■

Le théorème 3.3.1 et le corollaire 3.3.2 restent généralement valable pour toute intersection finie d'ordres flous, parce que la dominance porte inductivement au cas du des relations n-aires :

$$T(\tilde{T}(x_1, \dots, x_n), \tilde{T}(y_1, \dots, y_n)) \leq \tilde{T}(T(x_1, y_1), \dots, T(x_n, y_n)).$$

De plus, la monotonie des t-normes fournit la base pour un genre de dominance "transfini" (au sens de la t-norme T_M) :

$$T(\inf_{i \in I}(x_i), \inf_{j \in I}(y_j)) \leq \inf_{i \in I}(\inf_{j \in I}T(x_i, y_j)) \leq \inf_{i \in I}T(x_i, y_i). \quad (3.1)$$

Corollaire 3.3.3. [4] Soit I un ensemble d'indices qui n'est pas nécessairement fini et soit $(R_i)_{i \in I}$ et $(E_i)_{i \in I}$ deux familles de relations floues sur X , tel que tout R_i est un

T - E_i -ordre, Alors :

$R(x, y) = \inf_{i \in I} (R_i(x, y))$ est un T - E -ordre, tel que,

$E(x, y) = \inf_{i \in I} (E_i(x, y))$.

Preuve.

1) La E -réflexivité, pour tout $x, y \in X$, on a :

$E_i(x, y) \leq R_i(x, y)$ pour tout $i \in I$, alors

$\inf_{i \in I} (E_i(x, y)) \leq \inf_{i \in I} (R_i(x, y))$, donc $E(x, y) \leq R(x, y)$.

D'où, R est E -réflexive.

2) La T - E -antisymétrie, soient $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} T(R(x, y), R(y, x)) &= T(\inf_{i \in I} (R_i(x, y)), \inf_{i \in I} (R_i(y, x))), \\ &\leq \inf_{i \in I} (\inf_{i \in I} (T(R_i(x, y), (R_i(y, x)))), \\ &\leq \inf_{i \in I} (T(R_i(x, y), (R_i(y, x))), \\ &\leq \inf_{i \in I} (E_i(x, y)) = E(x, y). \end{aligned}$$

Donc, R est T - E -antisymétrique.

3) La T -transitivité, soient $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} T(R(x, y), R(y, z)) &= T(\inf_{i \in I} (R_i(x, y)), \inf_{i \in I} (R_i(y, z))), \\ &\leq \inf_{i \in I} (\inf_{i \in I} (T(R_i(x, y), (R_i(y, z)))), \\ &\leq \inf_{i \in I} (T(R_i(x, y), (R_i(y, z))), \\ &\leq \inf_{i \in I} R_i(x, z), \\ &= R(x, z). \end{aligned}$$

Donc, R est T -transitive.

D'où R est un T - E -ordre. ■

Dans le cas classique, il y a deux approches de base pour définir l'ordre sur les espaces produit au moyen des ordres sur les espaces composants (produits cartésien), c'est-à-dire la conjonction des relations composantes, et la composition lexicographique.

Théorème 3.3.4. [4] *On considère une famille finie d'ensembles classiques non vides (X_1, \dots, X_n) , T une t -norme, (R_1, \dots, R_n) , (E_1, \dots, E_n) deux familles de relations floues telles que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ E_i est une T -équivalence sur X_i et R_i est un T - E_i -ordre*

sur X_i . Si une t -norme \tilde{T} dominant T , l'application

$$\begin{aligned}\tilde{R} : (X_1 \times \dots \times X_n)^2 &\longrightarrow [0, 1] \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &\longrightarrow \tilde{T}(R_1(x_1, y_1), \dots, R_n(x_n, y_n))\end{aligned}$$

est un ordre flou au sens de T et la T -relation d'équivalence floue \tilde{E} telle que :

$$\tilde{E}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \tilde{T}_{1 \leq i \leq n}(E_i(x_i, y_i)).$$

Remarque : Parfois on note $\tilde{T}(R_1(x_1, y_1), \dots, R_n(x_n, y_n))$ par $\tilde{T}_{1 \leq i \leq n}(R_i(x_i, y_i))$.

Preuve.

(i) On va montrer que \tilde{E} est une T -relation d'équivalence.

1) La réflexivité, soit $x_i \in X_i$ on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ $\tilde{E}(x_i, x_i) = 1$ donc $\tilde{T}_{1 \leq i \leq n}(E_i(x_i, x_i)) = 1$, alors, $\tilde{E}((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = 1$.

D'où, \tilde{E} est réflexive.

2) La symétrie, soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in (X_1 \times \dots \times X_n)$,

$$\begin{aligned}\tilde{E}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &= \tilde{T}_{1 \leq i \leq n}(E_i(x_i, y_i)) \\ &= \tilde{T}_{1 \leq i \leq n}(E_i(y_i, x_i)) \quad (\text{Car } E_i \text{ est symétrique}) \\ &= \tilde{E}((y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n)).\end{aligned}$$

Donc, \tilde{E} est symétrique.

3) La T -transitivité, soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in (X_1 \times \dots \times X_n)$

$$\begin{aligned}T(\tilde{E}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)), \tilde{E}((y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n))) \\ = T(\tilde{T}_{1 \leq i \leq n}(E_i(x_i, y_i)), \tilde{T}_{1 \leq i \leq n}(E_i(y_i, z_i))) \\ \leq \tilde{T}_{1 \leq i \leq n}(T(E_i(x_i, y_i)), T(E_i(y_i, z_i))) \quad (\text{D'après la dominance}) \\ \leq \tilde{T}_{1 \leq i \leq n}(E_i(x_i, z_i)) \quad (\text{D'après la } T\text{-transitivité de } E_i) \\ = \tilde{E}((x_1, \dots, x_n), (z_1, \dots, z_n)).\end{aligned}$$

Donc, \tilde{E} est T -transitive.

D'où, \tilde{E} est T -équivalence.

(ii) On va montrer que \tilde{R} est un T - \tilde{E} -ordre

1) La \tilde{E} -réflexivité, soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in (X_1 \times \dots \times X_n)$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &= \tilde{T}_{1 \leq i \leq n} (E_i(x_i, y_i)) \\
&\leq \tilde{T}_{1 \leq i \leq n} (R_i(x_i, y_i)) \\
&\leq \tilde{R}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)). \text{ D'où, } \tilde{R} \text{ est } \tilde{E}\text{-réflexive.}
\end{aligned}$$

2) La T - \tilde{E} -antisymétrie, soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in (X_1 \times \dots \times X_n)$,

$$\begin{aligned}
T(\tilde{R}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)), \tilde{R}((y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n))) &= T(\tilde{T}_{1 \leq i \leq n} (R_i(x_i, y_i)), \tilde{T}_{1 \leq i \leq n} (R_i(y_i, x_i))) \\
&\leq \tilde{T}_{1 \leq i \leq n} (T(R_i(x_i, y_i), R_i(y_i, x_i))) \\
&\leq \tilde{T}_{1 \leq i \leq n} (E_i(x_i, y_i)) \\
&= \tilde{E}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)). \text{ Donc, } \tilde{R}
\end{aligned}$$

est T - \tilde{E} -antisymétrique.

3) La T -transitivité, soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in (X_1 \times \dots \times X_n)$,

$$\begin{aligned}
T(\tilde{R}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)), \tilde{R}((y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n))) \\
\leq T(\tilde{T}_{1 \leq i \leq n} (R_i(x_i, y_i)), \tilde{T}_{1 \leq i \leq n} (R_i(y_i, z_i))) \\
\leq \tilde{T}_{1 \leq i \leq n} (T(R_i(x_i, y_i), R_i(y_i, z_i))) \text{ (D'après la dominance)} \\
\leq \tilde{T}_{1 \leq i \leq n} (R_i(x_i, z_i)) \text{ (D'après la } T\text{-transitivité de } R_i) \\
= \tilde{R}((x_1, \dots, x_n), (z_1, \dots, z_n)). \text{ Donc, } \tilde{R} \text{ est } T\text{-transitive.}
\end{aligned}$$

D'où, \tilde{R} est un T - \tilde{E} -ordre. ■

Corollaire 3.3.5. [4] *D'une manière analogue, le théorème 3.3.4 reste vrai pour*

$\tilde{T} = T_M$ même si le produit cartésien n'est pas fini c'est à dire :

$\tilde{R}((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \inf_{i \in I} (R_i(x_i, y_i))$ est un T - \tilde{E} -ordre, tel que :

$\tilde{E}((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \inf_{i \in I} (E_i(x_i, y_i))$,

où E_i est une T -équivalence et R_i un T - E_i -ordre sur X .

Chapitre 4

Fuzzification d'ordre et représentations basées sur inclusion

Résumé

On discute dans ce chapitre la fuzzification d'une relation ordre classique, en donnant une méthode pour construire de telles relations au moyen d'une pseudo-métrique. Enfin, nous démontrons que les deux relations floues $INCR_T$ et SIM_T sont fondamentales dans le sens que nous pouvons introduire les T -préordres, T -équivalences et T - E -ordres dans l'ensemble des parties floues muni de l' $INCR_T$ et la SIM_T .

Contenu

- 4.1 Fuzzification des ordres classiques
- 4.2 Ordres flous générés par une famille d'ensembles flous
- 4.3 Représentations basées sur inclusion

4.1 Fuzzification des ordres classiques

Dans l'exemple 3.3.13, nous avons discuté la motivation générale, derrière ce que nous avons appelé ordre linéaire avec imprécision, c'est-à-dire : ordres flous fuzzifiant un ordre linéaire classique. Nous avons déjà mentionné l'importance pratique de cette classe d'ordres flous. Maintenant nous fournissons une représentation unique, et une méthode pour construire de telles relations au moyen de pseudo-métrie.

Définition 4.1.1. [4]

(i) Soit \leq un ordre classique sur X , et E une relation d'équivalence floue sur X . On dit que E est compatible avec \leq si et seulement si l'implication suivante est satisfaite, pour tout $x, y, z \in X$, $(x \leq y \leq z) \Rightarrow E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z))$.

(ii) E est séparable $\Leftrightarrow (E(x, y) = 1 \Rightarrow x = y)$

lemme 4.1.2. [8] Soit R un T - E -ordre sur X . Le noyau \trianglelefteq_R de R est défini par :

$\forall x, y \in X, x \trianglelefteq_R y \Leftrightarrow R(x, y) = 1$, est un préordre classique sur X . De plus \trianglelefteq_R est un ordre partiel classique sur X , si et seulement si E est séparable. Si E est séparable, alors \trianglelefteq_R est un ordre total classique sur X si et seulement si R est un T - E -ordre complètement fort sur X .

Preuve.

(i) Montrons que \trianglelefteq_R est un préordre classique sur X .

Soient $x, y \in X$, $x \trianglelefteq_R y \Leftrightarrow R(x, y) = 1$, on a :

$R(x, x) \geq E(x, x) = 1$, donc $R(x, x) = 1$, alors $x \trianglelefteq_R x$, donc \trianglelefteq_R est réflexif.

Montrons que \trianglelefteq_R est transitif, soient $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned} x \trianglelefteq_R y \text{ et } y \trianglelefteq_R z &\Rightarrow R(x, y) = 1 \text{ et } R(y, z) = 1 \\ &\Rightarrow 1 = T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z) \text{ (Car } R \text{ est transitif)} \\ &\Rightarrow R(x, z) = 1 \Rightarrow x \trianglelefteq_R z. \text{ Donc, } \trianglelefteq_R \text{ est un préordre.} \end{aligned}$$

(ii) E est séparable $\Leftrightarrow (\trianglelefteq_R \text{ est un ordre partiel})$.

(\Rightarrow)

On suppose que E est séparable,

on veut montrer que \trianglelefteq_R est antisymétrique, soient $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
x \trianglelefteq_R y \text{ et } y \trianglelefteq_R x &\Rightarrow R(x, y) = 1 \text{ et } R(y, x) = 1 \\
&\Rightarrow 1 = T(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y). \text{ (Car } R \text{ est } E\text{-antisymétrique)} \\
&\Rightarrow E(x, y) = 1 \Rightarrow x = y. \text{ (Car } E \text{ est séparable).}
\end{aligned}$$

Donc, \trianglelefteq_R est antisymétrique.

D'où, \trianglelefteq_R est un ordre partiel.

(\Leftarrow)

On va montrer que E est séparable.

$$E \text{ est séparable} \Leftrightarrow (E(x, y) = 1 \Rightarrow x = y) \Leftrightarrow (x \neq y \Rightarrow E(x, y) \neq 1),$$

soient $x, y \in X$, $E(x, y) = 1 \Rightarrow x = y$, On a $1 = E(x, y) \leq R(x, y)$, donc $R(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \trianglelefteq_R y \dots (1)$.

$$\text{On a } 1 = E(y, x) \leq R(y, x) \text{ [car } E(x, y) = E(y, x) = 1].$$

$$\text{Donc, } R(y, x) = 1 \Leftrightarrow y \trianglelefteq_R x \dots (2).$$

D'après (1) et (2), on a $x = y$. (Car \trianglelefteq_R est antisymétrique)

D'où, E est séparable.

(iii) Si E est séparable, alors, $(\trianglelefteq_R \text{ est linéaire}) \Leftrightarrow (R \text{ est complètement fort})$.

(\Rightarrow)

Soient $x, y \in X$, on suppose que \trianglelefteq_R est linéaire.

$$\begin{aligned}
(\trianglelefteq_R \text{ est linéaire}) &\Leftrightarrow (x \trianglelefteq_R y \text{ ou } y \trianglelefteq_R x) \\
&\Leftrightarrow (R(x, y) = 1 \text{ ou } R(y, x) = 1) \quad \blacksquare \\
&\Leftrightarrow (R \text{ est complètement fort}).
\end{aligned}$$

Théorème 4.1.3. [3] *Soit R un T - E -ordre, il existe un ordre classique \leq tel que E est compatible avec \leq , et l'implication suivante est satisfaite :*

$$x \leq y \Rightarrow R(x, y) = 1. \tag{4.1}$$

Si R est complètement fort alors \leq peut être choisi comme ordre linéaire. De plus \leq est maximal dans le sens qu'il n'existe aucun ordre \leq' tel que :

$$\leq' \subseteq R \text{ et } \{(x, y) / x \leq y\} \subseteq \{(x, y) / x \leq' y\}.$$

Preuve. D'après le lemme 4.1.2 pour tout T - E -ordre R sur X , le noyau \trianglelefteq_R est un

préordre, donc pour tout $x, y \in X$, on définit la relation \sim comme le noyau symétrique de \preceq_R qui est une relation d'équivalence.

$$x \sim y \Leftrightarrow R(x, y) = 1 \wedge R(y, x) = 1 \Leftrightarrow x \preceq_R y \wedge y \preceq_R x.$$

En effet : Pour tout $x \in X$,

$$R(x, x) = 1 \Leftrightarrow x \sim x, \text{ donc } \sim \text{ est réflexive, pour tout } x, y \in X,$$

$$x \sim y \Leftrightarrow R(x, y) = 1 \wedge R(y, x) = 1$$

$$\Leftrightarrow R(y, x) = 1 \wedge R(x, y) = 1 \Leftrightarrow y \sim x. \text{ d'où, } \sim \text{ est symétrique.}$$

Pour tout $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \sim y \\ \text{et} \\ y \sim z \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R(x, y) = 1 \wedge R(y, x) = 1 \\ \text{et} \\ R(y, z) = 1 \wedge R(z, y) = 1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R(x, y) = 1 \wedge R(y, z) = 1 \\ \text{et} \\ R(z, y) = 1 \wedge R(y, x) = 1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow R(x, z) = 1 \wedge R(z, x) = 1 \text{ (D'après la transitivité de } R) \\ &\Rightarrow x \sim z. \end{aligned}$$

Donc, \sim est transitive.

D'où, \sim est une relation d'équivalence.

Un résultat fondamental qui vient de l'axiome de choix, chaque ensemble peut être ordonné linéairement. Il est de plus possible de trouver un ordre linéaire pour toute classe d'équivalence au sens de \sim . Pour toute classe d'équivalence $\langle x \rangle$, on note son ordre par \leq_x . On définit la relation \leq comme suit, pour tout $x, y \in X$,

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq_x y & \text{si } x \sim y; \\ x \preceq_R y & \text{si } x \not\sim y. \end{cases} \quad (4.2)$$

On va montrer que \leq est un ordre.

(i) La réflexivité est évidente.

(ii) L'antisymétrie, soient $x, y \in X$, montrons que $[x \leq y \wedge y \leq x] \Rightarrow x = y$

(1) Si $x \sim y$, donc, $[x \leq y \wedge y \leq x] \Rightarrow [x \leq_x y \wedge y \leq_x x] \Rightarrow x = y$ (Car \leq_x est un ordre total.)

(2) Si $x \approx y$,

$$[x \leq y \wedge y \leq x] \Rightarrow [x \trianglelefteq_R y \wedge y \trianglelefteq_R x]$$

$$\Rightarrow [R(x, y) = 1 \wedge R(y, x) = 1] \Rightarrow x \sim y. \text{ contraction.}$$

D'où, \leq est antisymétrique.

(iii) On va montrer que \leq est transitif, soient $x, y, z \in X$, tel que $x \leq y \wedge y \leq z$, il y a 4 possibilités.

(a) $x \sim y$ et $y \sim z$, donc x, y, z appartenant à $\langle x \rangle$.

$$\text{Donc, } (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow (x \leq_x y \wedge y \leq_x z) \Rightarrow (x \leq_x z) \Rightarrow (x \leq z).$$

(b) $x \sim y$ et $y \approx z$, donc $x \approx z$.

Pour montrer que $x \leq z$ il suffit de montrer que $R(x, z) = 1$ (Car R est T -transitive.),

$$\text{on a, } 1 = T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z) \leq 1 \text{ (Par définition de } \sim \text{ et } \leq)$$

Donc, $R(x, z) = 1$, alors $x \trianglelefteq_R z$. D'où, $x \leq z$.

(c) $x \approx y$ et $y \sim z$, donc $x \approx z$.

Pour montrer que $x \leq z$ il suffit de montrer que $R(x, z) = 1$, (Car R est T -transitive),

$$\text{on a } 1 = T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z) \leq 1, \text{ donc } R(x, z) = 1, \text{ alors } x \trianglelefteq_R y.$$

D'où, $x \leq z$.

(d) $x \approx y$ et $y \approx z$, on a $x \trianglelefteq_R y \wedge y \trianglelefteq_R z$ et $y \not\trianglelefteq_R x$ et $z \not\trianglelefteq_R y$.

On montre que $x \trianglelefteq_R z$ et que $z \not\trianglelefteq_R x$, $x \trianglelefteq_R z$ est claire d'après la transitivité de \trianglelefteq_R .

Inversement, on suppose que $z \trianglelefteq_R x$ est vraie, et comme $y \trianglelefteq_R z$ est vrai, alors d'après la transitivité de \trianglelefteq_R on a, $y \trianglelefteq_R x$, contradiction, donc $x \leq z$.

De plus, il est claire d'après la définition de la relation \leq que $x \trianglelefteq_R y$ est une condition nécessaire pour que $x \leq y$ soit vraie, donc, $x \leq y \Rightarrow R(x, y) = 1 \Rightarrow x \trianglelefteq_R y$, c'est-à-dire $\leq \subseteq \trianglelefteq_R$.

Si R est linéaire fort, on sait que pour tout $x, y \in X$,

$$x \trianglelefteq_R y \text{ ou } y \trianglelefteq_R x, \text{ donc } x \leq y \text{ ou } y \leq x \text{ dans le cas où } x \approx y.$$

Mais si $x \sim y$ la linéarité est évidente, d'après la linéarité de \leq_x .

Montrons la maximalité de \leq . On suppose qu'il existe une relation d'ordre \leq' tel que

$$\leq \subseteq \leq' \subseteq \triangleleft_R.$$

Supposons que $\leq \subseteq \leq'$ c'est-à-dire il existe deux éléments différents x, y tel que $x \leq' y$ et $x \not\leq y$ donc il y a deux cas.

(a) Si $x \sim y$ alors la linéarité de \leq_x implique $y \leq x$, donc $y \leq' x$, d'où $x = y$. contradiction.

(b) Si $x \not\sim y$, on a, $(x \leq' y) \Rightarrow R(x, y) = 1 \Rightarrow (x \triangleleft_R y) \Rightarrow (x \leq y)$ (contradiction).

D'où, il n'existe aucune relation \leq' telle que $\leq \subseteq \leq' \subseteq \triangleleft_R$.

Il reste à montrer la compatibilité de E avec \leq , soient $x, y, z \in X$, tel que $x \leq y \leq z$, donc $R(x, y) = R(y, z) = R(x, z) = 1$, Donc,

$$\begin{aligned} E(x, y) &\geq T(R(x, y), R(y, x)) \\ &= R(y, x) \\ &\geq T(R(y, z), R(z, x)) \\ &= R(z, x) \geq E(x, z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E(y, z) &\geq T(R(y, z), R(z, y)) \\ &= R(z, y) \\ &\geq T(R(z, x), R(x, y)) \\ &= R(z, x) \geq E(x, z) \end{aligned}$$

Donc, $E(x, y) \wedge E(y, z) \geq E(x, z)$.

D'où, E est compatible avec \leq . ■

Théorème 4.1.4. [3] *Considérons une relation floue R sur un ensemble non vide X , et une T -relation d'équivalence E sur le même domaine X . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *R est un T - E -ordre complètement fort.*

(ii) *Il existe un ordre linéaire classique \leq telle que la relation E soit compatible avec \leq , et que R peut être représenté comme suit :*

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ E(x, y) & \text{si non.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Preuve.

$ii) \Rightarrow (i)$

$$\text{On a : } R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ E(x, y) & \text{si non.} \end{cases}$$

1) La E -réflexivité, soient $x, y \in X$, on a, $R(x, y) \geq E(x, y)$ (Par définition)

Donc, R est E -réflexif.

2) La T - E -anti-symétrie, soient $x, y \in X$,

$$\text{si } x \leq y, \text{ alors } T(R(x, y), R(y, x)) = T(1, R(y, x)) = R(y, x) = E(y, x) = E(x, y).$$

De la même façon si $y \leq x$.

Donc, R est T - E -antisymétrique.

3) La T -transitivité, soient $x, y, z \in X$, on veut montrer que,

$$T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$$

Cas N°	$x \leq y$	$y \leq z$	$x \leq z$	$T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$
1	1	1	1	1(ok)
2	1	1	0	cas impossible
3	1	0	1	1(ok)
4	1	0	0	1?
5	0	1	1	1(ok)
6	0	1	0	1?
7	0	0	1	1(ok)
8	0	0	0	1?

Il reste a vérifier le 4 ème, 6 ème et 8 ème cas.

1) La vérification du 4 ème cas. On a $x \leq y, y \not\leq z$ et $x \not\leq z$, on a par définition de R

$$[R(x, y) = 1, R(y, z) = E(y, z) \text{ et } R(x, z) = E(x, z)] \text{ alors,}$$

$$T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z) \Leftrightarrow E(y, z) \leq E(x, z),$$

et puisque \leq est un ordre linéaire, on a donc, $z \leq x \leq y \implies E(z, y) \leq \min(E(z, x), E(x, y))$.

(Car E est compatible avec \leq).

D'où, $E(y, z) \leq E(y, z)$ (Car E est symétrique).

Donc, l'inégalité $T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$ est vérifiée.

D'où, le 4 ème cas est vérifié.

2) La vérification du 6 ème cas.

On a $(x \not\leq y, y \leq z \text{ et } x \not\leq z)$, alors par la définition de R

$[R(x, y) = E(x, y), R(y, z) = 1 \text{ et } R(x, z) = E(x, z)]$ alors,

$T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z) \Leftrightarrow E(x, y) \leq E(x, z)$.

Car \leq est un ordre linéaire on a,

$(x \not\leq y \text{ et } y \leq z \text{ et } x \not\leq z) \Rightarrow (y \leq z \leq x) \Rightarrow (E(y, x) \leq \min(E(y, z), E(z, x)))$

(Car E est compatible avec \leq). Alors

$(E(y, x) \leq \min(E(y, z), E(z, x))) \Rightarrow (E(x, y) \leq E(z, x))$ (Car E est symétrique)

Donc, l'inégalité $R(x, y) = T(R(x, y), 1) = T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$ est vérifiée

D'où, le 6 ème cas est vérifié.

3) La vérification du 8 ème cas.

On a $(x \not\leq y \text{ et } y \not\leq z \text{ et } x \not\leq z)$.

Alors $T(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z)$ car E est T -transitive. On a par définition de R ,

$T(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z) \Leftrightarrow T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$.

Donc, R est T -transitif.

D'où, R est un T - E -ordre

On va montrer que R est complètement fort, soient $x, y \in X$, on a \leq est un ordre linéaire alors,

$x \leq y \text{ ou } y \leq x \Rightarrow R(x, y) = 1 \text{ ou } R(y, x) = 1 \Rightarrow \max(R(y, x), R(x, y)) = 1$.

D'où, R est complètement fort.

(i) \Rightarrow (ii)

On sait d'après le théorème 4.1.3 que la relation définie sur $(*)$ est un ordre linéaire classique sur X tel que E est compatible avec \leq .

Si $x \leq y$ alors $R(x, y) = 1$.

Inversement

Si $x \not\leq y$ alors $y \leq x$ (car \leq est linéaire).

Donc, on obtient $E(x, y) \leq R(x, y) = T(R(x, y), 1) = T(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y)$.

Donc, $E(x, y) = R(x, y)$.

D'où, la représentation

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ E(x, y) & \text{si non} \end{cases} \quad (4.3)$$

est réalisées. ■

Le théorème 4.1.4 affirme que les ordres flous complètement forts sont uniquement caractérisés comme fuzzification des ordres linéaires classiques, où la composante floue peut être attribuée à une relation d'équivalence floue. On note que le théorème 4.1.4 ne sera pas généralement valable si la complétude forte n'est pas requise. L'exemple suivant montre que la construction (4.3) ne donne pas toujours un ordre flou si la linéarité de l'ordre classique n'est pas requise.

Exemple 4.1.5. Considérons l'ensemble $X = \{a, b, c, d\}$ avec les deux relations binaires suivantes :

\leq	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	1
d	0	0	0	1

E	a	b	c	d
a	1	0.5	0.5	0
b	0.5	1	0	0.5
c	0.5	0	1	0.5
d	0	0.5	0.5	1

La relation \leq est un ordre classique et E est une T_R -relation d'équivalence compatible avec \leq . Calculons R , d'après la représentation du théorème 4.1.4

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ E(x, y) & \text{si non.} \end{cases}$$

R	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	0.5	1	0	1
c	0.5	0	1	1
d	0	0.5	0.5	1

On remarque que R n'est pas T_L -transitive car si on prend le triplé (a, b, c) , on a $T_L(R(b, a), R(a, c)) \not\leq R(b, c)$.

En effet :

$$T_L(0.5, 1) = \max(0.5 + 1 - 1, 0) = 0.5 \not\leq 0$$

Donc, R n'est pas T_L -transitive.

On remarque que si \leq n'est pas linéaire alors R n'est pas nécessairement T - E -ordre.

Si les éléments de X sont incomparables la T -transitivité ne peut être acquise.

Théorème 4.1.6. [4] *On suppose que \leq est un ordre partiel sur un domaine X , et E une T -relation d'équivalence compatible avec \leq .*

Si $E(x, z) \geq \max(E(x, y), E(y, z))$ est satisfaite pour tout $x, y, z \in X$, tels que $x \not\leq z$, la relation floue,

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ E(x, y) & \text{si non} \end{cases}$$

définit un T - E -ordre.

Preuve.

La E -réflexivité et la T - E -antisymétrie sont évidentes.

Montrons la T -transitivité de R , soient $x, y, z \in X$, on veut montrer que,

$$T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z).$$

Cas N°	$x \leq y$	$y \leq z$	$x \leq z$	$T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$
1	1	1	1	1 (OK)
2	1	1	0	cas impossible
3	1	0	1	1 (OK)
4	1	0	0	1 ?
5	0	1	1	1 (OK)
6	0	1	0	1 ?
7	0	0	1	1 (OK)
8	0	0	0	1 ?

La vérification du 4 ème cas.

On a $x \leq y$ et $y \not\leq z$ et $x \not\leq z$

Si $z \leq x$, on a $z \leq x \leq y$ par la compatibilité de E on a,

$E(z, y) = E(y, z) \leq \min(E(z, x), E(x, y)) \Rightarrow E(y, z) \leq E(z, x) = E(x, z)$ (D'après la symétrie de E)

Donc, $T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$.

Si $x \not\leq z$, on a $E(x, z) \geq \max(E(x, y), E(y, z))$.

Donc, $E(x, z) \geq E(y, z)$.

D'où, $T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$.

La vérification du 6 ème cas.

On a $x \not\leq y$ et $y \leq z$ et $x \not\leq z$.

$T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z) \Leftrightarrow T(E(x, y), 1) \leq E(x, z) \Leftrightarrow E(x, y) \leq E(x, z)$

Si $z \leq x$ on a $y \leq z \leq x$ par la compatibilité de E on a,

$E(y, x) = E(x, y) \leq \min(E(x, z), E(z, y)) \Rightarrow E(x, y) \leq E(x, z) = E(z, x)$.

Donc, $T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$.

Si $x \not\leq z$, on a $E(x, z) \geq \max(E(x, y), E(y, z))$

Alors, $E(x, z) \geq E(x, y) \Leftrightarrow T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$.

La vérification du 8 ème cas.

On a $x \not\leq y$ et $y \not\leq z$ et $x \not\leq z$ par la T -transitivité de E on a $E(x, z) \geq T(E(x, y), E(y, z))$,

alors, $R(x, z) \geq T(R(x, y), R(y, z))$

D'où, R est T -transitive, en conséquence, R est un T - E -ordre. ■

Le théorème suivant exprime le rapport entre les pseudo-métriques et les relations d'équivalence floues, au sens d'une t -norme archimédienne continue. Ce résultat permet de construire un ordre flou à partir d'une pseudo-métrique.

Théorème 4.1.7 [6] *On considère une t -norme archimédienne continue T avec une fonction génératrice additive f .*

(1) *Pour toute pseudo-métrique d , l'application $E_d : X^2 \rightarrow [0, 1]$, définie comme suit :*

$$E_d(x, y) = f^{-1}(\min(d(x, y), f(0))) \quad (4.4)$$

est une T -relation d'équivalence.

(2) *Soit E une T -relation d'équivalence sur X , on peut définir une pseudo-métrique comme suit :*

$d_E : X^2 \rightarrow [0, \infty]$, *telle que*

$$d_E(x, y) = f(E(x, y)) \quad (4.5)$$

Preuve. (1)

(i) On montre que E_d est réflexive, soit $x \in X$, alors

$$E_d(x, x) = f^{-1}(\min(d(x, x), f(0))) = f^{-1}(\min(0, f(0))) = f^{-1}(0) = 1$$

(ii) Montrons que E_d est symétrique, soient $x, y \in X$, alors

$$E_d(x, y) = f^{-1}(\min(d(x, y), f(0))) = f^{-1}(\min(d(y, x), f(0))) = E_d(y, x).$$

(iii) La T -transitivité, soient $x, y, z \in X$, montrons que $E_d(x, z) \geq T(E_d(x, y), E_d(y, z))$,

$$\begin{aligned} T(E_d(x, y), E_d(y, z)) &= f^{-1}(\min(f(E_d(x, y)) + f(E_d(y, z)), f(0))) \\ &= f^{-1}(\min(f(f^{-1}(\min(d(x, y), f(0)))) + f(f^{-1}(\min(d(y, z), f(0))))), f(0))) \\ &= f^{-1}(\min(\min(d(x, y), f(0)) + \min(d(y, z), f(0)), f(0))). \end{aligned}$$

Si $d(x, y) \leq f(0)$ et $d(y, z) \leq f(0)$, on a :

$$\begin{aligned} T(E_d(x, y), E_d(y, z)) &= f^{-1}(\min(d(x, y) + d(y, z), f(0))) \\ &\leq f^{-1}(\min(d(x, z), f(0))) = E_d(x, z) \end{aligned}$$

(Car f est décroissante et $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$)

Si $d(x, y) \geq f(0)$ et $d(y, z) \geq f(0)$, on a :

$$T(E_d(x, y), E_d(y, z)) = f^{-1}(\min(f(0) + f(0), f(0))) = f^{-1}(f(0)) = 0 \leq E_d(x, z).$$

Si $d(x, y) \leq f(0)$ et $d(y, z) \geq f(0)$ c'est-à-dire :

$d(x, y) \leq f(0) \leq d(y, z)$ on a :

$$T(E_d(x, y), E_d(y, z)) = f^{-1}(\min(d(x, y) + f(0), f(0))) \leq f^{-1}(f(0)) = 0 \leq E_d(x, z).$$

Si $d(x, y) \geq f(0)$ et $d(y, z) \leq f(0)$.

Dans tous les cas on a, $E_d(x, z) \geq T(E_d(x, y), E_d(y, z))$ c'est-à-dire E_d est T -transitive.

D'où, E_d est une T -relation d'équivalence sur X .

(2)

Si $E : X^2 \longrightarrow [0, 1]$ est une T -relation d'équivalence, on montre que $d_E(x, y) = f(E(x, y))$ est un pseudo-métrique.

En effet :

(i) Soit $x \in X$, $d_E(x, x) = f(E(x, x)) = f(1) = 0$.

(ii) Soient $x, y \in X$, $d_E(x, y) = f(E(x, y)) = f(E(y, x)) = d_E(y, x)$.

(iii) Soient $x, y, z \in X$, on montrera que $d_E(x, z) \leq d_E(x, y) + d_E(y, z)$.

On sait que : $\forall x, y, z \in X$, $E(x, z) \geq T(E(x, y), E(y, z))$.

$$\begin{aligned} T(E(x, y), E(y, z)) &= f^{-1}(\min[f(E(x, y)) + f(E(y, z)), f(0)]) \\ &= f^{-1}(\min[E_d(x, y) + E_d(y, z), f(0)]) \leq E(x, z). \end{aligned}$$

Puisque f est décroissante, alors

$$f(f^{-1}(\min[E_d(x, y) + E_d(y, z), f(0)])) \geq f(E(x, z)) \text{ donc}$$

$$\min[E_d(x, y) + E_d(y, z), f(0)] \geq E_d(x, z);$$

Si $\min[E_d(x, y) + E_d(y, z), f(0)] = d_E(x, y) + d_E(y, z)$, alors

$$d_E(x, y) + d_E(y, z) \geq d_E(x, z).$$

Si $\min[E_d(x, y) + E_d(y, z), f(0)] = f(0)$, alors $d_E(x, y) + d_E(y, z) \geq f(0) \geq d_E(x, z)$.

Donc, $d_E(x, y) + d_E(y, z) \geq d_E(x, z)$.

On remarque que dans les deux cas, on a $d_E(x, y) + d_E(y, z) \geq d_E(x, z)$.

D'où, d_E est une Pseudo-métrie. ■

Maintenant nous utilisons la représentation fournie par théorème 4.1.4 avec la correspondance entre relations d'équivalence floues et pseudo-métriques (Cf. le théorème 4.1.7), dans le but de fournir une méthode pour construire des ordres flous fortement complets à partir d'une pseudo-métrie.

lemme 4.1.8. [4] *Soit T une t -norme archimédienne continue avec une fonction génératrice additive f , et soit \leq un ordre sur X .*

1) *Si une pseudo-métrie d sur X , satisfait l'inégalité suivante :*

$$d(x, z) \geq \max(d(x, y), d(y, z)), \quad (4.6)$$

pour tout $x, y, z \in X$, tel que $x \leq y \leq z$, alors E_d , définie comme suit :

$E_d(x, y) = f^{-1}(\min(d(x, y), f(0)))$ *est une T -relation d'équivalence compatible avec \leq .*

2) *Si E est une T -relation d'équivalence compatible avec \leq , alors la pseudo-métrie d_E , définie comme suit :*

$d_E(x, y) = f(E(x, y))$ *vérifie $d_E(x, z) \geq \max(d_E(x, y), d_E(y, z))$, pour tout $x \leq y \leq z$.*

Preuve.

1) D'après le théorème 4.1.7. E_d est une relation d'équivalence, donc il reste à montrer que E_d est compatible avec \leq , soient x, y, z tel que :

$$x \leq y \leq z \Rightarrow E_d(x, z) \leq \min(E_d(x, y), E_d(y, z))$$

Pour $x \leq y \leq z$ on a :

$$d(x, z) \geq \max(d(x, y), d(y, z)) \Rightarrow \begin{cases} d(x, z) \geq d(x, y) \\ \text{et} \\ d(x, z) \geq d(y, z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min(d(x, z), f(0)) \geq \min(d(x, y), f(0)) \\ \text{et} \\ \min(d(x, z), f(0)) \geq \min(d(y, z), f(0)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(\min(d(x, z), f(0))) \leq f^{-1}(\min(d(x, y), f(0))) \\ \text{et} \\ f^{-1}(\min(d(x, z), f(0))) \leq f^{-1}(\min(d(y, z), f(0))) \end{array} \right. \quad (\text{car } f^{-1} \text{ est décroissante}) \\ & \Rightarrow f^{-1}(\min(d(x, z), f(0))) \leq \min(f^{-1}(\min(d(x, y), f(0))), f^{-1}(\min(d(y, z), f(0)))) \\ & E_d(x, z) \leq \min(E_d(x, y), E_d(y, z)) \end{aligned}$$

D'où, E_d est compatible avec \leq .

D'après le théorème 4.1.7 d_E est une pseudo-métrie.

Il reste à montrer que : $d_E(x, z) \geq \max(d_E(x, y), d_E(y, z))$ pour tout $x \leq y \leq z$,

soient $x, y, z \in X$, tel que

$$\begin{aligned} x \leq y \leq z & \Rightarrow E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z)) \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E(x, z) \leq E(x, y) \\ \text{et} \\ E(x, z) \leq E(y, z) \end{array} \right. \quad (\text{Car } E \text{ est compatible avec } \leq) \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(E(x, z)) \geq f(E(x, y)) \\ \text{et} \\ f(E(x, z)) \geq f(E(y, z)) \end{array} \right. \quad (\text{Car } f \text{ est décroissante}) \\ & \Rightarrow f(E(x, z)) \geq \max(f(E(x, y)), f(E(y, z))) \\ & \Rightarrow d_E(x, z) \geq \max(d_E(x, y), d_E(y, z)). \text{ Ce qu'il faut démontrer. } \blacksquare \end{aligned}$$

De plus on constate que toutes les propriétés restent valables, même après la transformation avec des fonctions monotone. (qui ne sont pas nécessairement bijectives).

lemme 4.1.9. *On considère une pseudo-métrie $d : X^2 \longrightarrow [0, +\infty]$ compatible avec un ordre linéaire \leq , et une fonction non décroissante $\varphi : X \longrightarrow X$, alors l'application d_1 définie comme suit, $d_1(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y))$ est aussi une pseudo-métrie sur X , compatible avec \leq .*

Preuve.

On montre que d_1 est une pseudo-métrie.

1) Soit $x \in X$, on a $\varphi(x) = \varphi(x) \Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(x)) = 0 \Rightarrow d_1(x, x) = 0$.

2) Soient $x, y \in X$, $d_1(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(\varphi(y), \varphi(x)) = d_1(y, x)$.

3) Soient $x, y, z \in X$,

$$d_1(x, y) + d_1(y, z) = d(\varphi(x), \varphi(y)) + d(\varphi(y), \varphi(z)) \leq d(\varphi(x), \varphi(z)) = d_1(x, z).$$

Il reste à montrer que d_1 est compatible avec \leq .

Soient $x, y, z \in X$, tel que :

$$x \leq y \leq z \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) \leq \varphi(z)$$

$$\Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(z)) \geq \max(d(\varphi(x), \varphi(y)), d(\varphi(y), \varphi(z)))$$

$$\Rightarrow d_1(x, y) \geq \max(d_1(x, y), d_1(y, z)).$$

Donc d_1 est compatible avec \leq .

■

L'analyse de tous les résultats précédents, nous donne le théorème suivant :

Théorème 4.1.10. [4] *Etant donné un ordre linéaire classique \leq sur un espace X , une pseudo-métrique d compatible avec \leq au sens (4.6), une t -norme archimédien continue T avec une fonction génératrice additive f , et une fonction non décroissante $\varphi : X \rightarrow X$.*

Alors la relation

$$R_{\varphi, d}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ E_{\varphi, d}(x, y) & \text{si non.} \end{cases}$$

Définit un T - $E_{\varphi, d}$ -ordre complètement fort telle que :

$$E_{\varphi, d}(x, y) = f^{-1}(\min(d(\varphi(x), \varphi(y)), f(0))).$$

Preuve.

Montrons que $R_{\varphi, d}$ est un T - $E_{\varphi, d}$ -ordre complètement fort.

1) La $E_{\varphi, d}$ -réflexivité, soient $x, y \in X$, on a

$$\text{Si } x \leq y \Rightarrow R_{\varphi, d}(x, y) = 1 \geq E_{\varphi, d}(x, y). \text{ Si non } R_{\varphi, d}(x, y) = E_{\varphi, d}(x, y).$$

Donc, pour tout $x, y \in X$, $R_{\varphi, d}(x, y) \geq E_{\varphi, d}(x, y)$. D'où, $R_{\varphi, d}$ est $E_{\varphi, d}$ -réflexive.

2) La T - $E_{\varphi, d}$ -antisymétrie, soient $x, y \in X$, on veut montrer que,

$$T(R_{\varphi, d}(x, y), R_{\varphi, d}(y, x)) \leq E_{\varphi, d}(x, y)$$

On suppose que $x \leq y$, alors, $T(R_{\varphi, d}(x, y), R_{\varphi, d}(y, x)) = R_{\varphi, d}(y, x) = E_{\varphi, d}(x, y)$.

Si $x \not\leq y$ donc $y \leq x$, alors, $T(R_{\varphi, d}(x, y), R_{\varphi, d}(y, x)) = R_{\varphi, d}(x, y) = E_{\varphi, d}(x, y)$.

D'où, $R_{\varphi, d}$ est T - $E_{\varphi, d}$ -antisymétrique.

3) La T -transitivité, soient $x, y, z \in X$,

Cas N°	$x \leq y$	$y \leq z$	$x \leq z$	$T(R_{\varphi,d}(x,y), R_{\varphi,d}(y,z)) \leq R_{\varphi,d}(x,z)$
1	1	1	1	1 (OK)
2	1	1	0	cas impossible
3	1	0	1	1 (OK)
4	1	0	0	1 ?
5	0	1	1	1 (OK)
6	0	1	0	1 ?
7	0	0	1	1 (OK)
8	0	0	0	1 ?

La vérification du 4 ème cas.

On a $x \leq y$ et $y \not\leq z$ et $x \not\leq z$, d'après la linéarité de \leq on a $z \leq x \leq y$, alors,

$R_{\varphi,d}(x,z) = E_{\varphi,d}(x,z)$ et $R_{\varphi,d}(x,y) = 1$ et $R_{\varphi,d}(y,z) = E_{\varphi,d}(y,z)$ donc,

$R_{\varphi,d}(x,z) \geq T(R_{\varphi,d}(x,y), R_{\varphi,d}(y,z)) \Leftrightarrow E_{\varphi,d}(x,z) \geq E_{\varphi,d}(y,z)$.

D'après la compatibilité de $E_{\varphi,d}$ on a

$E_{\varphi,d}(z,y) \leq \min(E_{\varphi,d}(z,x), E_{\varphi,d}(x,y)) \Rightarrow E_{\varphi,d}(z,y) \leq E_{\varphi,d}(x,y)$

$\Rightarrow R_{\varphi,d}(x,z) \geq T(R_{\varphi,d}(x,y), R_{\varphi,d}(y,z))$

La vérification du 6 ème cas,

si $x \not\leq y$ et $y \leq z$ et $x \not\leq z$, on a $y \leq z \leq x$, alors, $E_{\varphi,d}(x,y) \leq \min(E_{\varphi,d}(z,y), E_{\varphi,d}(x,z))$,

et on a, $R_{\varphi,d}(x,z) = E_{\varphi,d}(x,z)$ et $R_{\varphi,d}(x,y) = E_{\varphi,d}(x,y)$ et $R_{\varphi,d}(y,z) = 1$ donc,

$E_{\varphi,d}(x,y) \leq \min(E_{\varphi,d}(z,y), E_{\varphi,d}(x,z)) \Leftrightarrow E_{\varphi,d}(x,z) \geq E_{\varphi,d}(x,y)$

$\Leftrightarrow R_{\varphi,d}(x,z) \geq T(R_{\varphi,d}(x,y), 1)$

$\Leftrightarrow R_{\varphi,d}(x,z) \geq T(R_{\varphi,d}(x,y), R_{\varphi,d}(y,z))$

La vérification du 8 ème cas, on a $x \not\leq y$ et $y \not\leq z$ et $x \not\leq z$

Alors $R_{\varphi,d}(x,z) = E_{\varphi,d}(x,z)$, $R_{\varphi,d}(x,y) = E_{\varphi,d}(x,y)$ et $R_{\varphi,d}(y,z) = E_{\varphi,d}(y,z)$.

On a, $E_{\varphi,d}(x,z) \geq T(E_{\varphi,d}(x,y), E_{\varphi,d}(y,z)) \Leftrightarrow R_{\varphi,d}(x,z) \geq T(R_{\varphi,d}(x,y), R_{\varphi,d}(y,z))$.

D'où, $R_{\varphi,d}$ est T -transitive est en conséquence, $R_{\varphi,d}$ est un T - $E_{\varphi,d}$ -ordre. ■

4.2 Ordres flous générés par des familles d'ensembles flous

Pour tout préordre, et T -relation d'équivalence au sens de la t -norme continue à gauche T , il existe deux théorèmes fondamentaux de représentation, qui montrent que les types de relations, peuvent être généralisés à partir des familles d'ensembles flous, au moyen des implications et biimplications résiduelles, respectivement. Dans la suite, on montre que l'utilisation de l'ordre flou est un outil fondamental dans les preuves de quelques résultats présentés ci-dessous. Dans cette section on suppose que T est une t -norme continue à gauche.

Théorème 4.2.1. [4] *R est une relation binaire sur un domaine X , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *R est un T -préordre.*

(ii) *Il existe une famille d'ensembles flous $(A_i)_{i \in I}$ sur X , telle que la représentation suivante est réalisée :*

$$R(x, y) = \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)). \quad (4.7)$$

Preuve.

(i) \Rightarrow (ii)

On prend $I = X$, et on définit pour tout $z \in I$, $A_z(x) = R(z, x)$, la représentation (4.7)

est bien réalisée directement d'après le **corollaire 3.3.7** on a : $R = R^R = R^g$, donc

$R(x, y) = R^g(x, y) = \inf_{z \in I} (R(z, x), R(z, y)) = \inf_{z \in I} (A_z(x), A_z(y))$, donc la représentation (4.7) est vérifiée.

(ii) \Rightarrow (i)

$(A_i)_{i \in I}$ est une famille telle que $R(x, y) = \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y))$. On va montrer que R est un T -préordre.

1) La réflexivité, soit $x \in X$, on sait que $\overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(x)) = 1, \forall i \in I$.

Donc, $\inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(x)) = 1$, alors $R(x, x) = 1$, donc R est réflexive.

2) La T -transitivité, soient $x, y, z \in X$,

On veut montrer que $R(x, z) \geq T(R(x, y) R(y, z))$.

$$\begin{aligned} T(R(x, y), R(y, z)) &= T(\inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(y), A_i(z))) \\ &= \inf_{i \in I} T(\overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \overrightarrow{T}(A_i(y), A_i(z))) \\ &\leq \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(z)) = R(x, z). \end{aligned}$$

Donc, R est T -transitive.

D'où, R est T -préordre. ■

Théorème 4.2.2. [4] *Soit E une relations binaire sur X , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est une T -relation d'équivalence.*

(ii) *Il existe une famille d'ensembles flous $(A_i)_{i \in I}$ sur X telle que la représentation suivante est vérifiée :*

$$E(x, y) = \inf_{i \in I} \overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(y)) \quad (4.8)$$

Preuve.

(i) \Rightarrow (ii)

E est T -équivalence, implique que E est T -préordre, donc, il existe une famille $(A_i)_{i \in I}$ telle que :

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)) = \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(y), A_i(x)), \text{ donc,} \\ E(x, y) &= \min(\inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(y), A_i(x))) \\ &= \inf_{i \in I} (\min(\overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \overrightarrow{T}(A_i(y), A_i(x)))) = \inf_{i \in I} (\overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(y))) \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i)

On va montrer que $E(x, y) = \inf_{i \in I} \overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(y))$, est une T -relation d'équivalence.

La réflexivité et la symétrie sont claires. Il reste à montrer que E est T -transitive,

soient $x, y, z \in X$,

$$T(E(x, y), E(y, z)) = T(\inf_{i \in I} \overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \inf_{i \in I} \overleftarrow{T}(A_i(y), A_i(z)))$$

$$\begin{aligned}
&= \inf_{i \in I} T(\overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \overleftarrow{T}(A_i(y), A_i(z))) \\
&\leq \inf_{i \in I} \overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(z)) = E(x, z).
\end{aligned}$$

D'où, E est une T -relation d'équivalence. ■

Théorème 4.2.3. [4] *On considère deux relations binaires floues E , R sur un domaine X , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est une T -relation d'équivalence et R est un T - E -ordre vérifiant la T_M - E -antisymétrie c'est-à-dire pour tout $x, y \in X$,*

$$\min(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y). \quad (4.9)$$

(ii) *Il existe une famille d'ensembles flous $(A_i)_{i \in I}$ sur X , telles que les représentations suivantes sont réalisées :*

$$R(x, y) = \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \quad (4.10)$$

$$E(x, y) = \inf_{i \in I} \overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(y)). \quad (4.11)$$

Preuve.

(i) \Rightarrow (ii)

Puisque E est une T -relation d'équivalence alors d'après le théorème (4.2, 2) on a :

$$E(x, y) = \inf_{i \in I} \overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(y)).$$

Puisque R est un T - E -ordre alors R est T -transitive, il reste à montrer que R est réflexif.

On a pour tout $x, y \in X$ $E(x, y) \leq R(x, y)$, alors pour $x = y$ on a,

$$1 = E(x, x) \leq R(x, x) \Rightarrow R(x, x) = 1, \text{ donc } R \text{ est réflexif.}$$

D'où, R est un T -préordre. D'après le théorème précédent il existe une famille $(B_j)_{j \in J}$

de sous ensembles flous telle que R est représentée comme suit :

$$R(x, y) = \inf_{j \in J} \overrightarrow{T}(B_j(x), B_j(y))$$

et on a
$$\left\{ \begin{array}{l} E(x, y) \leq R(x, y) \\ E(y, x) \leq R(y, x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Rightarrow E(x, y) \leq \min((R(x, y), R(y, x))) \leq E(x, y) \quad (\text{De la } E\text{-r\'eflexivit\'e et la } T_M\text{-}E\text{-antisym\'etricite de } R)$$
 on obtient,

$$E(x, y) = \min((R(x, y), R(y, x))). \quad (4.12)$$

Ceci justifie la repr\'esentation commune de E et R par la m\^eme famille d'ensembles flous.

D'o\`u, on a d'apr\`es le th\'eor\`eme 4.2.1 $R(x, y) = \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y))$.

(ii) \Rightarrow (i)

D'apr\`es les th\'eor\`emes 4.2.1 et 4.2.2, on a E est une T -relation d'\`equivalence et R est un T -pr\'eordre.

Il reste a montrer que R est un T - E -ordre et que R est un T_M - E -antisym\'etricite. montrons que R est E -r\'eflexive, soit $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \inf_{i \in I} \overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(y)) \\ &= \inf_{i \in I} T(\overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \overrightarrow{T}(A_i(y), A_i(x))) \\ &\leq \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)) = R(x, y). \end{aligned}$$

Donc, R est E -r\'eflexive.

On va montrer que R est T_M - E -antisym\'etricite, soient $x, y \in X$

$$\begin{aligned} T_M(R(x, y), R(y, x)) &= T_M(\inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(y), A_i(x))) \\ &= \inf_{i \in I} T_M(\overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \overrightarrow{T}(A_i(y), A_i(x))) \\ &\leq \inf_{i \in I} (\min(\overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \overrightarrow{T}(A_i(y), A_i(x)))) \\ &= \inf_{i \in I} \overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(y)) = E(x, y). \end{aligned}$$

Donc, R est une relation T_M - E -antisym\'etricite et d'apr\`es la dominance de T_M , alors R est une relation T - E -antisym\'etricite. ■

On note que la T_M - E -antisym\'etricite est essentielle pour que R et E puissent \^etre repr\'esent\'es par la m\^eme famille d'ensembles flous. En r\'ealit\'e, il est facile de voir de la preuve du th\'eor\`eme 4.2.3, que cette repr\'esentation commune soit r\'ealis\'ee si et seulement

si l'égalité (4.12) est satisfaite. Cependant, la T_M - E -antisymétrie n'est pas une exigence stricte comme elle parue dès la première vue. Elle est automatiquement satisfaite si $T = T_M$ ou si R est complètement fort. De plus, si la T -relation d'équivalence n'est pas fixée dès le début, il existe toujours une T -relation d'équivalence satisfaisant l'égalité (4.12) simplement pour $T = T_M$. Il reste d'adapter le théorème 4.2.3 pour les ordres flous complètement forts.

Théorème 4.2.4. [4] *Soit E et R deux relations binaires floues sur X , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est une T -relation d'équivalence, et R est un T - E -ordre complètement fort.*

(ii) *Il existe un ordre linéaire classique \leq et une famille d'ensembles flous $(A_i)_{i \in I}$ sur X , dont les éléments sont des fonctions non décroissantes au sens de \leq , telles que les représentations suivantes sont vérifiées :*

$$R(x, y) = \inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)), \quad (4.13)$$

$$E(x, y) = \inf_{i \in I} \overleftarrow{T}(A_i(x), A_i(y)). \quad (4.14)$$

Preuve.

(i) \Rightarrow (ii)

Puisque R est un T - E -ordre complètement fort, alors d'après le théorème 4.1.4, il existe un ordre linéaire classique \leq et puisque la complétude forte implique T_M - E -antisymétrie.

En effet : Si R est complètement fort, alors pour tout $x, y \in X$ on a :

$R(x, y) = 1$ ou $R(y, x) = 1$, et on a $T(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y)$. Alors

Si $R(x, y) = 1$, donc $R(y, x) = T(1, R(y, x)) = T(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y)$.

Si $R(y, x) = 1$, donc $R(x, y) \leq E(x, y)$ c'est-à-dire $\min(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y)$.

C'est-à-dire $\min(R(x, y), R(y, x)) \leq E(x, y)$. D'où, R est une relation T_M - E -antisymétrique.

Donc, d'après les théorèmes 4.2.1 et 4.2.2 il existe une famille $(A_i)_{i \in I}$, tels que, les représentations (4.13) et (4.14) sont satisfaites.

La relation \leq est une sous relation de R c'est-à-dire $R(x, y) = 1$ si $x \leq y$, la représentation (4.13) implique $\inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)) = 1$, donc, d'après le lemme 1.3.2, on a $A_i(x) \leq A_i(y)$ pour tout $i \in I$, ceci implique que tous les A_i sont des fonctions (additives) non décroissantes au sens de \leq .

(ii) \Rightarrow (i)

Le théorème 4.2.3. montre que si la représentation (4.14) définit une T -relation d'équivalence, et que R dans la représentation (4.13) définit un T - E -ordre. On suppose que \leq est un ordre linéaire classique sur X , tel que pour tout $i \in I$, A_i sont non-décroissantes, c'est-à-dire pour tout $x, y \in X$, si $x \leq y$ on a pour tout $i \in I$, $A_i(x) \leq A_i(y)$, on obtient $\overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)) = 1$, pour tout $i \in I$, donc, $\inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(x), A_i(y)) = 1$ alors $R(x, y) = 1$. D'une façon analogue on trouve que $\inf_{i \in I} \overrightarrow{T}(A_i(y), A_i(x)) = 1$ alors $R(y, x) = 1$. D'où, R est complètement fort. ■

4.3 Représentation d'un ordre basé sur inclusion

Cette section est consacrée à une "vue duale" sur les résultats antérieurs de représentations au moyen de familles d'ensembles flous. Pendant que les preuves techniques sont presque les mêmes, nous voulons, en premier lieu, démontrer que les deux relations floues $INCL_T$, SIM_T sont très fondamentales dans le sens que nous sommes capables d'inclure des T -préordres, T -équivalences, et T - E -Ordres dans l'ensemble des parties floues muni de $INCL_T$, SIM_T .

Théorème 4.3.1. [4] *Soit R une relation binaire floue sur X , alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *R est un T -préordre.*

(ii) *Il existe une application (Injection) $\varphi : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ telle que la représentation suivante est réalisée :*

$$R(x, y) = INCL_T(\varphi(x), \varphi(y)). \quad (4.15)$$

Preuve.

On suppose que R est un T -préordre, alors d'après le corollaire 3.3.7, on a

$$R(x, y) = \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(R(z, x), R(z, y)).$$

On définit $\varphi(x) = R(., x)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} INCR_T(\varphi(x), \varphi(y)) &= \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(\varphi(x)(z), \varphi(y)(z)) \\ &= \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(R(z, x), R(z, y)) = R(x, y). \end{aligned}$$

Qui prouve la représentation (4.15)

(ii) \Rightarrow (i)

Puisque $INCR_T$ est un T -préordre sur $\mathcal{F}(X)$, alors, R est un T -préordre. ■

Aussi, une correspondance analogue réalisée pour les relations d'équivalence floues.

Théorème 4.3.2. [4] *Etant donné une relation binaire floue E sur X , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est une T -relation d'équivalence.*

(ii) *Il existe une application (Injection) $\varphi : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ telle que la représentation suivante est réalisée :*

$$E(x, y) = SIM_T(\varphi(x), \varphi(y)). \quad (4.16)$$

Preuve.

(i) \Rightarrow (ii)

On suppose que E soit une T -relation d'équivalence, d'après le corollaire 3.3.7, on a :

$$E(x, y) = \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(z, x), E(z, y)).$$

On définit $\varphi(x) = E(., x)$, donc on obtient

$$\begin{aligned} SIM_T(\varphi(x), \varphi(y)) &= \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(\varphi(x)(z), \varphi(y)(z)) \\ &= \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(E(z, x), E(z, y)) = E(x, y). \end{aligned}$$

Ce qui démontre (4.16).

(ii) \Rightarrow (i)

Puisque SIM_T est une T -relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(X)$, alors E est une T -relation d'équivalence. ■

Le théorème suivant donne la réponse finale à la façon avec laquelle les théorèmes 4.3.1 et 4.3.2 conjointement permettent d'introduire l'ordre flou sur certain domaines X dans leur ensemble des parties floues $\mathcal{F}(X)$. Nous verrons que, dans une analogie parfaite à la section précédente, la T_M - E -antisymétrie est encore une exigence cruciale.

Théorème 4.3.3. [4] *Soient E et R deux relations binaires floues sur X , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est une T -relation d'équivalence et R est un T - E -ordre satisfaisant la condition : T_M - E -antisymétrique.*

(ii) *Il existe une application (Injection) $\varphi : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ telles que les représentations suivantes sont réalisées :*

$$R(x, y) = INCR_T(\varphi(x), \varphi(y)), \quad (4.17)$$

$$E(x, y) = SIM_T(\varphi(x), \varphi(y)). \quad (4.18)$$

Preuve.

(i) \Rightarrow (ii)

On suppose que E est une T -équivalence et R un T - E -ordre satisfait T_M - E -antisymétrie, on sait d'après le théorème 4.3.1 qu'il existe une application (Injection) $\varphi : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ tel que R peut être représenté par :

$E(x, y) = \min(R(x, y), R(y, x))$, donc

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \min(INCR_T(\varphi(x), \varphi(y)), INCR_T(\varphi(y), \varphi(x))) \\ &= \min(\inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(\varphi(x)(z), \varphi(y)(z)), \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(\varphi(y)(z), \varphi(x)(z))) \\ &= \inf_{z \in X} \min(\overrightarrow{T}(\varphi(x)(z), \varphi(y)(z)), \overrightarrow{T}(\varphi(y)(z), \varphi(x)(z))) \\ &= \inf_{z \in X} \overleftarrow{T}(\varphi(x)(z), \varphi(y)(z)) \\ &= SIM_T(\varphi(x), \varphi(y)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(x, y) &= \inf_{z \in X} (R(z, x), R(z, y)) \\
&= \inf_{z \in X} (\varphi(x)(z), \varphi(y)(z)) \\
&= INCR_T(\varphi(x), \varphi(y)).
\end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) Trivial car SIM_T est une T -équivalence et $INCR_T$ est un T - SIM_T -ordre sur $\mathcal{F}(X)$. ■

En fin, un unique théorème de représentation fait adapter pour l'ordre flou complètement fort réalisées par moyen de deux relations floues fondamentales $INCR_T$ et SIM_T .

Théorème 4.3.4 [4]. *Soient E et R deux relations binaires floues sur X , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est une complètement et R est un T - E -ordre complètement fort.*

(ii) *Il existe une application (Injection) $\varphi : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ tel que, pour tout paire $(x, y) \in X^2$ soit $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ ou $\varphi(y) \subseteq \varphi(x)$, tels que les deux représentations suivantes sont réalisées.*

$$R(x, y) = INCR_T(\varphi(x), \varphi(y)), \quad (4.19)$$

$$E(x, y) = SIM_T(\varphi(x), \varphi(y)). \quad (4.20)$$

Preuve.

(i) \Rightarrow (ii)

Puisque si R est complètement fort, alors R est T_M - E -antisymétrique, donc d'après (4.17) il existe $\varphi : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ telles que les deux représentations (4.19) et (4.20) sont valides et

Puisque R est complètement fort, alors pour tout $(x, y) \in X^2$, $R(x, y) = 1$ ou $R(y, x) = 1$.

Si $R(x, y) = 1$, alors $1 = R(x, y) = INCR_T(\varphi(x), \varphi(y)) = \inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(\varphi(x)(z), \varphi(y)(z))$.

Donc, $\forall z \in X, \overrightarrow{T}(\varphi(x)(z), \varphi(y)(z)) = 1$.

Alors $\varphi(x)(z) \leq \varphi(y)(z), \forall z \in X$.

D'où, $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$.

De la même façon on montre que $\varphi(y) \subseteq \varphi(x)$.

(ii) \Rightarrow (i)

Puisque SIM_T est une T -relation d'équivalence alors, E est une T -relation d'équivalence et puisque $INCR_T$ est un T - SIM_T -ordre, alors, R est un T - E -ordre.

Il reste à montrer que R est complètement fort.

On sait que pour tout $(x, y) \in X^2$, on a $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ ou $\varphi(y) \subseteq \varphi(x)$, c'est-à-dire :

$\forall z \in X, \varphi(x)(z) \leq \varphi(y)(z)$ ou $\varphi(y)(z) \leq \varphi(x)(z)$.

Alors $\forall z \in X, \overrightarrow{T}(\varphi(x)(z), \varphi(y)(z)) = 1$ ou $\overrightarrow{T}(\varphi(y)(z), \varphi(x)(z)) = 1$.

Donc, $\inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(\varphi(x)(z), \varphi(y)(z)) = 1$ ou $\inf_{z \in X} \overrightarrow{T}(\varphi(y)(z), \varphi(x)(z)) = 1$.

Alors $INCR_T(\varphi(x), \varphi(y)) = 1$ ou $INCR_T(\varphi(y), \varphi(x)) = 1$.

D'où, $R(x, y) = 1$ ou $R(y, x) = 1$. ■

Conclusion

Il est connu que la relation de couverture induite par un ordre, donne quelques propriétés locales de l'ordre, (Par exemple, être un parent dans l'arbre ordonné des ancêtres de quelqu'un). Les ordres flous ainsi que les relations de couvertures correspondantes sont plus reliées avec les applications, par conséquent, l'approche présentée ici donne un nouvel aperçu de cette partie importante du calcul relationnel flou, (Construction d'un ordre flou au moyen d'une relation abstraite qui puisse être la couverture correspondante).

Dans ce travail, nous avons étudié quelques propriétés des relations d'ordres flous en considérant un modèle basé sur similarité du point de vue représentations et constructions. On sait que U. Bodenhofer a démontré que cette approche correspond à la situation dans le cas classique. Dans une analogie directe au cas classique (Chapitre 4), on a présenté la construction des relations d'ordres au moyen d'intersections et produits cartésiens, on a traité également la question suivante : Comment les ordres flous peuvent être obtenus comme "Fuzzification directe" des ordres classiques ?

Bibliographie

- [1] W. Bandler, L. Kohout, *Fuzzy power sets and fuzzy implication operators*. Fuzzy Sets and Systems 4(1980)183-190.
- [2] U. Bodenhofer, *A Similarity-Based Generalization of Fuzzy Orderings*. Schriftenreihe der Johannes-Kepler-Universität Linz, Vol. C26, Universitätsverlag Rudolf Trauner, 1999.
- [3] U. Bodenhofer, *A similarity-based generalization of fuzzy orderings preserving the classical axioms*. Internat.J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems 8(5)(2000)593-610.
- [4] U. Bodenhofer, *Representation and constructions similarity based fuzzy ordering*. Fuzzy Sets and Systems 137(2003)113-136.
- [5] U. Bodenhofer, B. De Baets, J. Fodor, *A compendium of fuzzy weak orders : Representations and constructions*. Fuzzy Sets and Systems 158(2007)811-829.
- [6] B. De Baets, R. Mesiar, *Pseudo-metrics and T-equivalences*, J.Fuzzy Math. 5(2)(1997)471-481.
- [7] B. De Baets, R. Mesiar, *T-partitions*, *Fuzzy Sets and Systems* 97(1998)211-223.
- [8] M. Demirci, *A theory of vague treillis based on many-valued equivalence relations-I*. Fuzzy Sets and Systems 151(2005)437-472.
- [9] J. Fodor, M. Roubens, *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

- [10] U. Hohle, N. Blanchard, *Partial ordering in L-underdeterminate sets*, Inform. Sci. 35 (1985)133-144.
- [11] F. Klawonn, J. Gebhardt, R. Kruse, *Fuzzy control on the basis of equality relations, with an example from idlespeed control*. IEEE Trans. Fuzzy Systems 3(1995)336-356.
- [12] F. Klawonn, R. Kruse, *Equality relations as a basis for fuzzy control*. Fuzzy Sets and Systems 54(2)(1993)147-156.
- [13] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms, Trends in Logic*. Vol. 8. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [14] SV. Ovchinnikov, *Similarity relations, fuzzy partitions, and fuzzy orderings*. Fuzzy Sets and Systems 40(1)(1991) : 107-126A15.
- [15] SV. Ovchinnikov, *Well-graded spaces of valued sets*. Discrete Mathematics 245(2002) : 217–233.B.
- [16] B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [17] B. Šešelja, *Representing ordered structures by fuzzy sets, an overview*. Fuzzy Sets and Systems 136(2003) : 21-39.
- [18] B. Šešelja, *Fuzzy Covering Relation and Ordering : An Abstract Approach*. Computational Intelligence. In : Reusch, B. (ed) Theory and Applications, pp. 295-300. Springer, Heidelberg (2006).
- [19] B. Šešelja, A. Tepavčević. *Fuzzy Ordering Relation and Fuzzy Poset*. Pal (Eds.) : PReMI 2007, LNCS 4815, pp. 209-216.
- [20] L. Valverde, *On the structure of F-indistinguishability operators*. Fuzzy Sets and Systems 17(3)(1985)313-328.
- [21] X. Wang, B. De Baets, E.E. Kerre, *A comparative study of similarity measures*. Fuzzy Sets and Systems 73(1995)259-268.
- [22] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*. Inform. Control 8(1965)338-353.
- [23] L. A. Zadeh, *Similarity relations and fuzzy orderings*. Inform. Sci. 3(1971)177-200.

الخلاصة

في هذه المذكرة عرضنا الرابطة الموجودة بين علاقة الترتيب التقليدي و علاقة التغطية المرافقة لها، بدأنا بتذكرة حول العلاقة المعروفة بين علاقة الترتيب التقليدية و علاقة التغطية المرافقة ها على نفس المجموعة. و قدمنا بعض النتائج المتوصل إليها حديثا. هدفنا هو تعريف علاقة تغطية ضبابية بشكل مستقل ومن ثم تعريف علاقة الترتيب المرتبطة بها. هذه المساهمة تبعد الغموض حول علاقة الترتيب المؤسسة على علاقة التشابه وهو مفهوم معمم عن الترتيب الضبابي الذي لا مفر منه نظرا للارتباطات التقليدية بين علاقات ما قبل الترتيب، علاقات التكافؤ و علاقات الترتيب المأخوذة بعين الاعتبار، ركزنا في هذه المذكرة على نتائج التمثيل و الإنشاء التي برهنت مرة أخرى على أن المفهوم المقترح عمليا.

Abstract

It presents in this work the report between crisp ordering and the corresponding covering relation. Our aim is to define a fuzzy covering relation independently, and then to define the corresponding fuzzy ordering. This work advocates the dissemination of similarity-based fuzzy ordering a generalized concept of fuzzy ordering which appears to be unavoidable as soon as the classical correspondences between preordering, equivalence relation, and ordering are taken into account. This work is focused on representation and construction results which once more demonstrate the efficiency of the proposed concept.

Résumé

On présente dans ce mémoire le rapport entre la relation d'ordre classique et la relation de couverture correspondante. Notre objectif est de définir une relation floue de couverture d'une manière indépendante de l'ordre, puis définir l'ordre flou correspondant. On s'intéresse aussi au traitement des concepts alternatifs de l'ordre flou de point de vue représentation, construction et fuzzification d'un ordre classique. Cette approche généralise aussi le rapport important entre l'ordre flou et la similarité.