



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Fondamentales et Appliquées

Par

Hadjira ELGOUIZI

Sujet

**L'application de la Méthode des Différences Finies au
modèle de Barré de Saint-Venant**

Dirigé par :

Pr.B.BOUDERAH

Promotion: 2011/2012

Remerciements

Ma première pensée va vers mes parents qui ont su m'encourager et me supporter dans les moments de doute.

Je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance à Mr. B. BOUDERAH, professeur à l'université de M'sila qui m'a proposé de faire cette thèse et m'a aidé à la réaliser.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mademoiselle N.BOUNAB maître-assistant à l'université de M'sila pour ces conseils précieux et pour ces encouragements, ainsi que pour la confiance et l'aide qui m'a accordé pour mener ce travail à terme.

Enfin je tiens aussi à remercier mes camarades et mes amis qui m'ont soutenu moralement et à toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Au-delà de tous, une pensée particulière va à ma famille qui m'a soutenu durant ces années à qui je dédie ce travail.

Table des matières

0.1	Introduction	5
1	Introduction de la mécanique des fluides et l'écoulement à surface libre	7
1.1	Introduction	7
1.2	Généralités	7
1.2.1	Quelques notions	7
1.2.2	Propriétés des fluides	8
1.3	Description du mouvement	10
1.3.1	Description Lagrangienne	10
1.3.2	Description Eulerienne	10
1.3.3	Lignes fluides	11
1.4	Conservation de la masse	13
1.4.1	L'équation de continuité	13
1.4.2	Débit	16
1.5	Écoulement à une surface libre	17
1.5.1	Le ressaut hydraulique	17
1.5.2	Type d'écoulement	17
1.6	Dynamique des fluides parfaits	21
1.6.1	Équation d'Euler :	21
1.6.2	Théorème de Bernoulli	22
1.6.3	Équations de Navier- Stokes (1821-1822) :	24

2	La description du modèle : saint-venant due d'un écoulement dans un canal prismatique rectangulaire	25
2.1	Introduction	25
2.2	L' équations générales de Barré de Saint-Venant unidimensionnel	26
2.2.1	La géométrie des canaux	26
2.2.2	Les équations de Barré de Saint-Venant	27
2.3	Divers modèles de Barré de Saint-Venant	34
2.4	Propriétés mathématique des équatoins de Barré de Saint-Venant	35
2.4.1	La matrice jacobéenne	35
2.4.2	Systèmes d'équation hyperbolique	36
2.5	Solution analytique des équation de Saint-Venant	37
3	La rèsolution de modèle Barré Saint-Venant par la méthode différences finies	41
3.1	Introduction	41
3.2	Présentation de la méthode de différences finies	42
3.3	Schémas sous forme conservative	46
3.4	Propriétés des schémas	48
3.4.1	Consistance	48
3.4.2	stabilité	49
3.4.3	Condition CFL	50
3.5	Le problème de Riemann associé au système de BSV	51
3.5.1	Les solveurs de Riemann	53
	Conclusion	57
	Bibliographie.	58

LISTE DES FIGURE

Figure 1 : Trajectoire une particule de fluide	page 12
Figure 2 : Lignes de courant	pare 12
Figure 3 : Lignes d'émission	page 12
Figure 4 : Représentation des masses de fluide entrent et sortent par les six faces	page 16
Figure 5 : Représentation de surface libre	page 20
Figure 6 : Le ressaut hydraulique	page 20
Figure 7 : Ecoulement permanent et non permanent	page 20
Figure 8 : Représentation écoulement unidimensionnels	page 20
figure 9 : les différents paramètres d'un écoulement dans une section	page 31
Figure 10 : Le volume de controle	page 31
Figure 11 : Condition initiales	page 40
Figure 12 : Caractéristiques hydrauliques	page 40
Figure 13 : Grille espace temps	page 45
Figure 14 : Schéma explicite	page 45
Figure 15 : Schéma implicite	page 45
Figure 16 : Représentation du problème Riemann	page 56

NOTATIONS

A : Section mouillée

B : Largeur du canal au miroir

BSV : Barré de Saint Venant

c : Célérité d'une onde de propagation

C_p : la chaleur spécifique

d : densité

D_h : Profondeur hydraulique

$F(U)$: Vecteur flux

g : Constante de gravitation ($\approx 9,81N/K_g$)

$G(U)$: Vecteur source

h : Hauteur d'eau

h_c : Hauteur critique

I_1 : Pression hydrostatique

I_2 : Pression due a la variation de la largeur du canal

J : Matrice jacobienne

\tilde{J} : Matrice jacobienne approchée

m :Masse de fluide

q_m :Débit masse

q_v :Débit volume

Q :Débit moyen dans une section

R_h :Rayon hydraulique

S_0 :Pente du canal

S_f :Pente énergétique

u : Vitesse moyenne de l'écoulement dans une section

U : Vecteur écoulement

V : Volume de fluide

ρ :Masse volumique

0.1 Introduction

La mécanique des fluides est un domaine plus vaste , nécessaire pour la nouvelle technologie, qui basée essentiellement sur deux grands axes,(statistique et dynamique) tel que :

1-La statistique des fluides ou hydrostatique étudie les fluides sans application, des efforts extérieurs, tel que l'analyse des (le débit, la masse volumique,...).

2-dans la dynamique des fluide en va déterminer les équations d'Euler et ainsi les équations de Bernoulli et Navier-Stokes.

Dans ce modeste travail on s'intéresse par les écoulements à surface libre qui sont de la plupart des cas les écoulements dans les canaux naturel(rivière) et artificiels(irrigation, assainissement) aussi on va chercher la résolution l'équation de Barée Saint-Venant qui représente un modèle mathématique d'une externe important qui permet de prévoir le comportement de l'écoulement dans les réseaux hydrauliques naturels ou artificiel, cet equation a nombreuses applications comme le domaine maritime, les avalanches de neige, la climatologie, la météologie. . .

Pour la résolution des problèmes physique il ya trois aspects doivent être pris en considération :

- a) Le problème physique pratique à résoudre et le modèle physique associée.
- b) Le modèle mathématique qui représente le problème à travers le système d'équations aux dérivées partielles.
- c) La méthode numérique pour résoudre les équations aux dérivées partielles

Ce mémoire contient trois chapitres :

Le premier chapitre est une introduction pour les deux autre chapitre (2 et 3) il présente les notions essentielles qui permettant la connaissance de la mécanique des fluides et ses principes généraux comme la description du mouvement et Conservation de la masse, ainsi dans ce chapitre il ya un rappel de vocabulaire utilisé dans le domaine hydraulique à surface libre en définissant physiquement les notions de surface libre, régime fluvial et torrential, le réssaut hydraulique, l'écoulement permanent, . . . etc, et on concentre dans

ce chapitre aux mouvements de fluide parfait c'est-à-dire sans frottement et sans change de chaleur. Nous étudierons tout particulièrement le cas de fluide incompressible à la fin de ce chapitre fait un rappel sur les équations de Navier-Stokes.

Le deuxième chapitre est le coeur de ce mémoire telle que nous allons présenter les équations de Barré Saint-Venant (1871) qui sont les plus utilisées pour la modélisation des écoulements à surface libre en eau peu profonde à l'aide de certaines hypothèses simplifiés. Ils sont écrites sous forme vectorielle conservative. ces équations (BSV) non linéaires et hyperboliques, on va définir les caractéristiques géométriques des canaux et on fait un rappel sur ses propriétés puis on donne la solution analytique de l'équations Barré Saint-Venant dans un canal prismatique à section rectangulaire.

Le troisième chapitre, on expose la méthode des différences finies du premier ordre en temps et en espace pour la résolution des équations de Barré Saint-Venant unidimensionnel. en analyse numérique cette méthode est une technique courante de recherche des solutions approchées des équations aux dérivées partielles. la méthode différence finies sont tout basées sur le développement de Taylor des fonctions continues et dérivables, lorsque le pas de temps et d'espace est petit . Nous nous intéressons du schéma sous forme conservative qui est basé sur la méthode des volumes finies, et on détaille également les aspects mathématiques comme la consistance et la stabilité de la méthode de différence finies.

Chapitre 1

Introduction de la mécanique des fluides et l'écoulement à surface libre

1.1 Introduction

Mécanique des fluides est une branche de la physique traitant l'équilibre et le mouvement des fluides (déplacement, déformation, changement d'état physique).

Dans ce chapitre on présente les notions et les principes généraux de la mécanique des fluides.

1.2 Généralités

1.2.1 Quelques notions

Définition 1.1.(*Fluide*) Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

Définition 1.2. (*Les liquides*) Les molécules sont liées en distance ce qui en limite le désordre. Ils occupent un volume défini et sont susceptibles de s'organiser en gouttes. Leur densité est telle qu'on définit d'ordinaire (assez mal) les liquides par le fait qu'en situation de repos, ils présentent une surface libre discernable et perpendiculaire au champ de gravité local.

Définition 1.3. (*La viscosité*) La viscosité est une mesure de la résistance qu'oppose le fluide à l'écoulement, en raison de son frottement interne. On mesure la viscosité de deux façons : dynamique (absolue) et cinématique.

Définition 1.4. (*Les fluides newtoniens*) Les fluides newtoniens ont une viscosité dynamique constante, indépendante du gradient de vitesse. comme l'eau, l'air, huile .

Définition 1.5. (Fluide incompressible) Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

1.2.2 Propriétés des fluides

La résolution d'un problème de dynamique des fluides demande normalement de calculer diverses propriétés des fluides comme la vitesse, la pression et la densité en tant que fonctions de l'espace et du temps.

Définition 1.6. (*La masse volumique*) La masse volumique d'un corps est le rapport entre la masse et le volume occupé. Notée ρ , elle s'exprime en kg/m^3 . Pour un fluide incompressible, elle est constante. Elle est fonction de la température.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \rho_{eau} = 1000 kg/m^3 (\text{à température ordinaire})$$

Définition 1.7. (*Densité*) C'est le rapport entre la masse d'un certain volume du corps

et la masse du même volume d'un corps de référence :

$$d = \frac{m}{m_0} = \frac{\frac{m}{V}}{\frac{m_0}{V}} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Définition 1.8. (*Poids volumique*) Le poids volumique est notée

$$\varkappa = g \cdot \rho$$

g désigne l'accélération de la pesanteur et vaut $9.81 m/s^2$

Définition 1.9. (*Pression*) La pression est définie comme la force exercée par un fluide par unité de surface :

$$P = \frac{F}{S} \quad \text{Unité : } N/m^2 \text{ où } kg \cdot m^{-1} s^{-2}$$

La pression peut aussi s'exprimer en :

a) Pascal (Pa) : $1 Pa = 1 N/m^2$

b) Bar (Bar) : $1 Bar = 10^5 N/m^2$

Il ya deux type de pression :

1-La pression absolue est la pression mesurée par rapport au vide absolu (c'est-à-dire l'absence totale de matière). Elle est toujours positive.

2-La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure : cette pression peut donc prendre une valeur positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou une valeur négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique.

Définition 1.10. (*Chaleur spécifique*) La chaleur spécifique (appelée encore capacité calorimétrique) relie variations de chaleur et de température

$$C_p = \frac{\delta Q}{\delta T}$$

δQ : variation énergie de chaleur de fluide

1.3 Description du mouvement

1.3.1 Description Lagrangienne

Le point de vue de Lagrange consiste à considérer une particule bien définie comme un point matériel et à caractériser le mouvement par ses positions successives. Ceci nécessite donc que l'on identifie la particule qui est considérée. Le déplacement est exprimé en fonction des variables matérielles par :

$$\overrightarrow{OM} = x(t, x_0, y_0, z_0) \vec{i} + y(t, x_0, y_0, z_0) \vec{j} + z(t, x_0, y_0, z_0) \vec{k}$$

(x_0, y_0, z_0) sont les coordonnées d'un point représentant la position du point matériel à l'instant $t = t_0$. Le vecteur vitesse est défini comme le taux de variation du vecteur déplacement :

$$\vec{v} = \frac{\partial x}{\partial t}(t, x_0, y_0, z_0) \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t}(t, x_0, y_0, z_0) \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t}(t, x_0, y_0, z_0) \vec{k}$$

et le vecteur accélération par :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \vec{k}$$

1.3.2 Description Eulerienne

Les variables (x, y, z) sont les coordonnées d'un point représentant la position du point matériel à l'instant t . Avec cette description, on peut étudier l'état actuel du milieu sans s'intéresser à une particule matérielle déterminée.

La différence entre les deux descriptions est donc, que du point de vue de Lagrange,

on décrit les variations de la vitesse, de l'accélération, de la température, . . . d'un point matériel particulier, alors que selon le point de vue d'Euler, on décrit ces mêmes quantités dans une région spatiale donnée sans individualiser les particules matérielles. C'est cette dernière description qui est la plus utilisée en mécanique des fluides.

1.3.3 Lignes fluides

Définition 1.11. (*Trajectoires*) On appelle trajectoire la courbe orientée décrite par une particule au cours de son mouvement, c'est-à-dire l'ensemble de ses positions occupées successivement entre deux instants (Figure 1). Les trajectoires s'obtiennent en intégrant le système différentiel suivant au cours du temps :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt$$

Les trajectoires permettent de visualiser le champ de vitesse en mode de Lagrange.

Définition 1.12. (*Lignes de courant*) Une ligne de courant à l'instant t est une courbe tangente à l'instant t au vecteur vitesse en chacun de ses points (Figure 2). Dans le cas général, les lignes de courant sont différentes des trajectoires. Les lignes de courant sont donc les intégrales du système différentiel

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)}$$

Définition 1.13. (*Lignes d'émission*) Une ligne d'émission relative à un point M , est l'ensemble des positions à l'instant t des particules qui sont passées ou qui passeront par le point M (Figure 3).

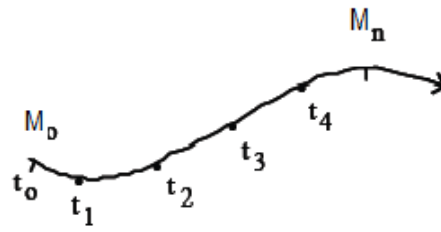


Figure 1 :Trajectoire une particule de fluide

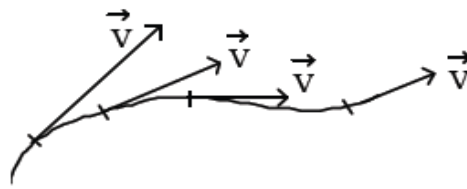


Figure 2 : Lignes de courant

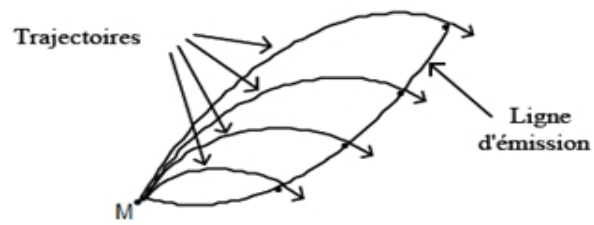


Figure 3 :Lignes d'émission

1.4 Conservation de la masse

1.4.1 L'équation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse : la variation de masse pendant un temps dt d'un élément de volume fluide doit être égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle du fluide sortant.

On considère un élément de volume fixe de fluide :

$$dV = dx dy dz$$

Sa masse peut s'exprimer comme :

$$\rho dV$$

La variation de cette masse pendant dt s'écrit :

$$dm = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt$$

Cette variation doit alors être égale à la somme des masses de fluide qui entrent et sortent par les six faces de l'élément de volume dV (Figure 4).

Suivant l'axe y , le fluide entre avec la vitesse v_y et sort avec la vitesse $v_y + dy$. Par conséquent, la masse entrant pendant le temps dt s'exprime par $(\rho v dx dz dt)_y$ et la masse sortant par $(\rho v dx dz dt)_{y+dy}$.

Le bilan sur l'axe y donne :

$$\left[(\rho v)_y - (\rho v)_{y+dy} \right] dx dz dt$$

Un développement au premier ordre permet d'écrire

$$(\rho v)_{y+dy} = (\rho v)_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy$$

Il reste alors : $-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dx dz dt$ suivant l'axe y .

Par analogie sur les deux autres axes, on trouve :

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$$

suivant l'axe x , et

$$-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dx dy dt$$

suivant l'axe z .

Au total, à travers les six faces on a, puisque $dx dy dz = dV$:

$$-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dV dt$$

La conservation de la masse du volume dV s'écrit donc :

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dV dt$$

Soit l'équation de continuité qui traduit le principe de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{v})$$

L'équation de continuité peut également s'établir à partir d'un bilan global. Lorsqu'on effectue un bilan non plus sur un volume élémentaire mais sur un volume fini de fluide, les quantités étudiées apparaissent sous forme d'intégrales de volume. On parle de bilan global. Ainsi, par exemple, la masse d'un volume de fluide contenue dans le volume V s'écrit :

$$m = \iiint_V \rho(M, t) dV$$

Calculons les masses entrantes pendant dt à travers la surface S limitant le volume V :

$$dm_e = - \left(\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \right) dt$$

et écrivons la conservation de la masse :

la variation de masse du volume V par unité de temps $\frac{dm}{dt}$ est égale aux masses entrantes dans V (à travers S) par unité de temps $\frac{dm_e}{dt}$, soit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV$$

Ou, puisque le volume de contrôle V est fixe :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0$$

Donc l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Fluide incompressible

Un écoulement est incompressible si le volume de toute particule de fluide reste constant au cours de son mouvement. Les particules de fluide ayant une masse constante par construction, leur masse volumique est donc constante au cours de leur écoulement.

$\rho = \text{cte}$ lorsque l'on suit une particule dans son mouvement $\implies \operatorname{div} \vec{v} = 0$

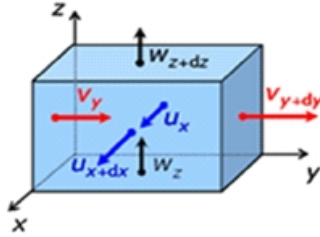


Figure 4: Représentation des masse de fluide qui entrent et sortent par les six faces

1.4.2 Débit

Définition 1.14. (*Le débit*) Le débit est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

Définition 1.15. (*Débit-masse*) Si Δm est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt , par définition le débit-masse est :

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad \text{unité : kg/s}$$

où bien

$$q_m = \iint_s \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Les débits sont généralement comptés positivement dans le sens de l'écoulement :

\vec{n} : est donc orienté dans le sens de l'écoulement.

Définition 1.16. (*Débit-volume*) Si ΔV est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt , par définition le débit-volume est :

$$q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \text{unité : m}^3/\text{s}$$

où bien

$$q_V = \iint_s \vec{V} \vec{n} dS$$

1.5 Écoulement à une surface libre

Définition 1.17. (*surface libre*) Les écoulements à surface libre sont caractérisés par une interface eau-air. Le paramètre hydraulique permettant d'évaluer cette interface est le tirant d'eau c'est-à-dire la variation de la hauteur entre le fond du canal et l'interface (Figure 5).

1.5.1 Le ressaut hydraulique

Définition 1.18. (*le ressaut hydraulique*) Le ressaut hydraulique se caractérise par une variation importante et croissante de la hauteur d'eau de l'amont vers l'aval du phénomène sur une courte distance. Le ressaut se produit lors du passage du régime torrentiel au régime fluvial. Dans la plupart des cas, une agitation importante de la surface libre permet rapidement de localiser le phénomène, comme par exemple dans le cas d'un ressaut fort (Figure 6).

1.5.2 Type d'écoulement

Définition 1.19. (*l'écoulement*) On peut définir les écoulements suivants la variabilité des caractéristiques hydrauliques tels que le tirant d'eau et la vitesse en fonction du temps et de l'espace.

Le régime fluvial-torrentiel

Définition 1.20. (*Le régime fluvial-torrentiel*) Soit u la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section et c la célérité de propagation d'une onde. Dans le cas où la vitesse du fluide est supérieure à la vitesse de l'onde c , l'amont n'est pas influencé par les conditions hydrauliques à l'aval (régime torrentiel); alors que, dans le cas contraire, on a une remontée de l'onde qui va perturber l'amont (régime fluvial), ce phénomène est appelé influence aval.

Soit Le nombre de Froude est défini par :

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gD_h}}$$

Si $Fr = 1$, on peut définir la hauteur critique par :

$$Fr = 1 = \frac{u}{\sqrt{gD_h(h = h_c)}}$$

Limites :

- Ecoulement fluvial :

$$Fr < 1 \leftrightarrow h > h_c$$

- Ecoulement critique :

$$Fr = 1 \leftrightarrow h = h_c$$

- Ecoulement torrentiel :

$$Fr > 1 \leftrightarrow h < h_c$$

Ecoulement permanent

Définition 1.21. (*Ecoulement permanent*) Un écoulement est dit permanent (ou stationnaire) lorsque toutes les grandeurs caractéristiques du mouvement sont invariables dans le temps (vitesse, masse volumique, pression, température, etc.) (Figure 7), ce qui se

traduit symboliquement par :

$$\text{Mouvement permanent} \iff \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Dans un écoulement permanent, les lignes de courant sont fixes et confondues avec les trajectoires et la ligne d'émission.

Écoulements isovolumes

Définition 1.22. (*Écoulements isovolumes (incompressible)*) Nous avons vu qu'une évolution isovolume s'identifie avec la notion de fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$). Le champ de vitesse de l'écoulement est à divergence nulle :

$$\text{div } \vec{v}(M, t) = 0 \quad \forall M, \forall t$$

La condition traduit la conservation du volume d'une particule fluide au cours de son déplacement. En d'autres termes, translation, rotation et déformation de la particule s'effectuent sans compression ni expansion de son volume élémentaire.

Écoulements unidimensionnels

Définition 1.23. (*Écoulements unidimensionnels*) Dans un écoulement unidimensionnel, toutes les variables ne dépendent que d'une seule coordonnée d'espace.

En régime permanent, l'équation de conservation de la masse appliquée à un tube de courant entre les sections droites fixes 1 et 2 se traduit par la conservation du débit massique (Figure 8) :

$$\int_{S_1} \rho v dS = \int_{S_2} \rho v dS$$
$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = q_m.$$

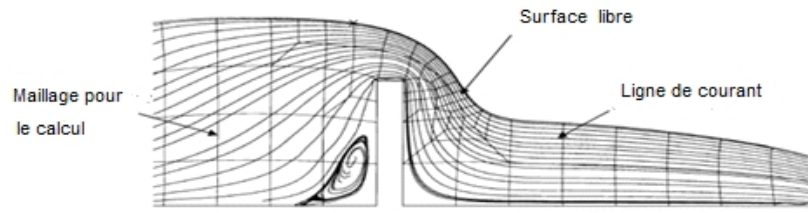


Figure 5 : Représentation de surface libre

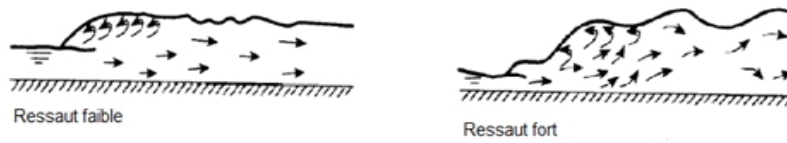


Figure 6 : Le ressaut hydraulique

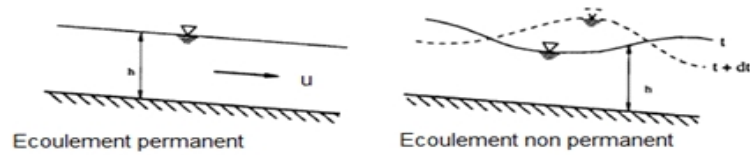


Figure 7 : Ecoulement permanent et non permanent



Figure 8: Ecoulements unidimensionnels

1.6 Dynamique des fluides parfaits

Définition 1.24. (*Les fluides parfaits*) Les fluides parfaits sont des fluides pour lesquels il n'y a pas de dissipation d'énergie par frottement. Dans ce cas, les seules forces qui interviennent sur une particule fluide sont les forces de pression et les forces de volume (en particulier le poids). c'est-à-dire sans frottement (fluides non visqueux).

1.6.1 Equation d'Euler :

Considérons un volume matériel fini de fluide $V(t)$ regroupant un ensemble donné de particules fluides d'un écoulement quelconque, de frontière $S(t)$ et de normale extérieure unitaire \vec{n}

La résultante des quantités de mouvement du volume V est :

$$\iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV$$

où \vec{v} est la vitesse d'un point matériel (particule fluide) par rapport au référentiel fixe.

Sa variation dans le temps vaut :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{V(t)} \rho \vec{v} dV \right) = \iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$$

Dans le recensement des forces exercées sur V , il faut distinguer :

- les forces de volume s'exerçant à distance en tout point M du volume : la densité des forces par unité de volume exercées par le champ de gravité est $\vec{g}\rho$; la résultante sur V , c'est-à-dire « le poids », vaut :

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV$$

- les forces de surface qui sont transmises par le fluide extérieur au domaine en tout

point P de la surface de contact S limitant ce domaine : la densité des forces par unité de surface est $-p\vec{n}$ sa résultante, la « force de pression », vaut :

$$\iint_S -p\vec{n} dS$$

La variation dans le temps de la quantité de mouvement s'exprime alors par :

$$\iiint_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iint_S -p\vec{n} dS + \iiint_V \rho \vec{g} dV$$

ou bien encore, en appliquant le théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_{V(t)} \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \overrightarrow{\text{grad}p} - \rho \vec{g} \right) dV = 0$$

Alors l'intégrand est identiquement nul, et il vient l'expression locale du bilan de quantité de mouvement, nommée équation d'Euler :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}p} + \rho \vec{g}$$

1.6.2 Théorème de Bernoulli

Hypothèses

1. Le fluide est parfait (c'est-à-dire non visqueux).
2. La densité volumique des forces extérieures dérive d'un potentiel ; c'est le cas des forces de gravité $\rho \vec{g}$ qui peuvent s'écrire : $-\rho g \vec{k} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}}(gz)$. k étant le vecteur vertical unitaire ascendant.
3. Le fluide est incompressible ($\text{div} \vec{v} = 0$.)
4. L'écoulement est stationnaire

donc l'équation est :

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz = cte$$

Preuve. Repartons de l'équation de la dynamique pour un fluide parfait :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{grad}p + p\vec{g} = 0$$

et tenons compte des hypothèses 2 et 3, à savoir :

$$\rho \vec{g} = -\overrightarrow{grad}(\rho gz)$$

Après division par $\rho = cte$, il vient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{grad}\frac{p}{\rho} - \overrightarrow{grad}gz$$

Multiplions scalairement l'accélération par \vec{v} sachant que $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\frac{p}{\rho} - \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}gz$$

Or, d'après l'expression de la dérivée particulaire vue en début de chapitre, on a :

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\bullet = \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\bullet \quad \text{puisque, l'écoulement étant stationnaire (hypothèse 4) } \frac{\partial\bullet}{\partial t} = 0$$

Finalement, on obtient

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$$

c'est-à-dire la quantité entre parenthèses est constante sur chaque ligne de courant (ou trajectoire)

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz = cte \quad \blacksquare$$

1.6.3 Equations de Navier- Stokes (1821-1822) :

Définition 1.25. (*Equations de Navier- Stokes*) En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui sont censées décrire le mouvement des fluides « newtoniens » (liquide et gaz visqueux ordinaires) dans l'approximation des milieux continus.

Elles sont nommées d'après deux scientifiques du *XIX^e* siècle, le mathématicien et ingénieur des Ponts, Claude Navier et le physicien George Stokes, le choix oubliant le rôle intermédiaire du physicien Adhémar Barré de Saint-Venant.

Les équations de Navier-Stokes sont réduites à l'équation de continuité et de la quantité de mouvement

Pour un fluide newtonien incompressible l'équations de Navier- Stokes s'écrit sous la forme suivant :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot u &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(\vec{\nabla} \cdot u)u &= -\vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 u + \rho g\end{aligned}$$

où u est la vitesse, p la pression, ρ la masse volumique et μ viscosité dynamique..

Chapitre 2

La description du modèle : saint-venant due d'un écoulement dans un canal prismatique réctangulaire

2.1 Introduction

En hydraulique, les écoulements dans les canaux à surface libre sont généralement décrits par les équations de Saint-Venant qui sont des équations aux dérivées partielles. Le système d'équations aux dérivées partielles qui nous intéresse dans ce travail a été introduit en 1871 dans un Compte Rendu à l'Académie des Sciences rédigé par l'ingénieur des Ponts et Chaussées Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant. Dans sa version initiale, le système d'équation décrivait l'écoulement dans un canal rectangulaire à fond horizontal en une dimension d'espace. Ces des équations découlent de l'application des lois de conservation sur un élément fluide sous l'hypothèse d'eau peu profonde. Cependant, on souligne que ces EDP peuvent être trouvées par l'adaptation des équations de Navier-Stokes en les moyennant suivant la direction verticale. D'ailleurs ces deux EDP

ont été étroitement liées depuis le début. D'après certaines sources, Saint-Venant aurait été le premier (deux années avant Stokes) à donner la forme correcte des équations que Navier avait introduites en 1823.

2.2 L' équations générales de Barré de Saint-Venant unidimensionnel

2.2.1 La géométrie des canaux

Dans ce paragraphe nous allons définir les grandeurs géométriques les plus utilisées permettant de caractériser l'écoulement (Figure 9).

- La surface mouillée A est la portion de la section occupée par le fluide dans la section du canal.
- La largeur superficielle ou largeur au miroir B est la largeur du canal au niveau de la surface libre

$$B = \frac{dA}{dh}$$

- Le périmètre mouillé P est formé par la longueur de la ligne de contact entre la surface mouillée et les parois de la section (la largeur de la surface libre n'entre pas en compte).
- Le rayon hydraulique est défini comme étant le rapport de la surface mouillée par le périmètre mouillé

$$R_h = \frac{A}{P}$$

- La profondeur hydraulique est donnée par le rapport de la surface mouillée par la largeur au miroir

$$D_h = \frac{A}{B}$$

- Le débit $Q(m^3/s)$ dans une section est défini comme étant le volume du liquide écoulé à travers cette section pendant une unité de temps.

2.2.2 Les équations de Barré de Saint-Venant

Les équations de Barré de Saint-Venant sont composées par l'équation de continuité ou l'équation de conservation de la masse et l'équation fondamentale de la dynamique connue en mécanique sous le vocable de seconde loi de Newton.

Les équations de Barré de Saint-Venant unidimensionnelles sont écrites sous certaines hypothèses qui sont les suivantes :

- La distribution des pressions est considérée comme hydrostatique dans une section. Cette hypothèse de pression hydrostatique impose des accélérations verticales faibles devant la pesanteur.
- Le liquide est incompressible, sa masse volumique est donc constante.
- La pente de la surface libre est faible. Soit z , S_0 et α , la cote, la pente et l'angle du fond du canal respectivement. Pour un angle α petit, on a :

$$\sin \alpha \cong \tan \alpha = S_0 = -\frac{dz}{dx}$$

- La vitesse est supposée constante dans une section.
- En utilisant les mêmes lois empiriques qui régissent l'écoulement uniforme, les forces de frottement et de turbulence peuvent être représentées par un seul paramètre S_f .

L'équation de continuité

Cette équation exprime le principe de conservation de la masse. Cela revient à dire que la variation de masse de fluide d'un élément de volume dV pendant un temps dt est égale à la masse de fluide entrant dans ce volume déduite de la masse de fluide sortante.

Considérons un volume de contrôle Ω , (Figure10), situé entre deux sections du canal situées aux abscisses x et $x + dx$. Le taux d'écoulement de la masse est, ρuA .

Soit q_1 le débit latéral dans le volume de contrôle Ω .

D'après la loi de conservation de la masse dans l'intervalle $[t, t + dt]$, l'équation de conti-

nuité s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{t+dt} \rho [(Q)_{x+dx} - (Q)_x] dt + \int_x^{x+dx} \rho [(A)_{t+dt} - (A)_t] dx \\
 = & \int_t^{t+dt} \rho [(q_1 x)_{x+dx} - (q_1 x)_x] dt
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

L'équation de la dynamique

Cette équation se déduit de la deuxième loi de Newton : le taux de variation de la quantité de mouvement d'une particule de masse m est égal à la somme des forces extérieures agissant sur cette particule. Les forces extérieures agissant sur le volume de contrôle sont les forces de pression hydrostatique, celles de pression due au changement de la largeur, et celles de gravité et de frottements.

► La force de pression hydrostatique F_{ph} est définie par :

$$F_{ph} = \rho g \int_0^{h(x,t)} (h - \eta) B(x, \eta) d\eta \tag{2.2}$$

Où η est une variable d'intégration qui désigne la profondeur. Le taux de variation de la force de pression hydrostatique dans le volume de contrôle Ω pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ est donné par :

$$\int_t^{t+dt} [F_{ph}]_x^{x+dx} dt = \int_t^{t+dt} \rho ((F_{ph})_{x+dx} - (F_{ph})_x) dt = g \int_t^{t+dt} [(\rho I_1)_{x+dx} - (\rho I_1)_x] dt \tag{2.3}$$

Avec I_1 définie par :

$$I_1 = \int_0^{h(x,t)} (h - \eta) B(x, \eta) d\eta \tag{2.4}$$

► La force de pression due au changement de la largeur est donnée par :

$$F_{pI} = \rho \int_x^{x+dx} g \int_0^{h(x)} (h - \eta) \frac{\partial B}{\partial x} d\eta dx \quad (2.5)$$

Le taux de variation de la force de pression due au changement de la largeur dans le volume de contrôle Ω pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ est :

$$\begin{aligned} \int_0^{h(x,t)} [F_{pI}]_x^{x+dx} dt &= \int_t^{t+dt} ((F_{pI})_{x+dx} - (F_{pI})_x) dt \\ &= g \int_t^{t+dt} [(\rho I_2)_{x+dx} - (\rho I_2)_x] dt = g \int_t^{t+dt} \int_x^{x+dx} \rho I_2 dx dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

Avec I_2 définie par :

$$I_2 = \int_0^{h(x)} (h - \eta) \frac{\partial B}{\partial x} d\eta \quad (2.7)$$

► La force engendrée par l'accélération de la pesanteur (F_g) agissant sur Ω est donnée par :

$$F_g = \int_{\Omega} \rho g \sin(\alpha) d\varpi = \rho g A S_0(x) dx \quad (2.8)$$

Avec, $S_0(x) \approx \sin \alpha$ pour une pente faible.

Le taux de variation de la force de gravité dans le volume de contrôle Ω pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ est donné par :

$$\int_t^{t+dt} [F_g]_x^{x+dx} dt = \int_t^{t+dt} ((gAS_0)_{x+dx} - (gAS_0)_x) dt = \int_t^{t+dt} \int_x^{x+dx} \rho g AS_0 dx dt \quad (2.9)$$

► La force de frottement F_f est due à une contrainte de cisaillement et agit sur le périmètre mouillé. Cette force est exprimée en fonction de la pente de frottement S_f . La force de cisaillement est définie par gAS_f . Le taux de variation de la force de frottement

dans le volume de contrôle Ω pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ est donné par :

$$\int_t^{t+dt} F_f dt = \int_t^{t+dt} ([\rho g A S_f]_{x+dx} - [\rho g A S_f]_x) dt = \int_t^{t+dt} \int_x^{x+dx} \rho g A S_f dx dt \quad (2.10)$$

► La quantité de mouvement est donnée par :

$$m \frac{d}{dt} [u(x, t)] = \rho A dx \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (2.11)$$

Le taux de variation ΔM de la quantité de mouvement dans le volume de contrôle Ω pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ est

$$\Delta M = \int_x^{x+dx} [(\rho A u)_{t+dt} - (\rho A u)_t] dx + \int_t^{t+dt} [(\rho A u^2)_{x+dx} - (\rho A u^2)_x] dt \quad (2.12)$$

Par conséquent, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement sous forme intégrale :

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+dx} [(A u)_{t+dt} - (A u)_t] dx + \int_t^{t+dt} [(A u^2)_{x+dx} - (A u^2)_x] dt \\ &= -g \int_t^{t+dt} [(I_1)_{x+dx} - (I_1)_x] + g \int_t^{t+dt} \int_x^{x+dx} I_2 dx dt + g \int_t^{t+dt} \int_x^{x+dx} A (S_0 - S_f) \end{aligned} \quad (2.13)$$

En remplaçant $A u$ par Q , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+dx} [(Q)_{t+dt} - (Q)_t] dx + \int_t^{t+dt} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{x+dx} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_x \right] dt \\ &= -g \int_t^{t+dt} [(I_1)_{x+dx} - (I_1)_x] + g \int_t^{t+dt} \int_x^{x+dx} I_2 dx dt + g \int_t^{t+dt} \int_x^{x+dx} A (S_0 - S_f) \end{aligned} \quad (2.14)$$

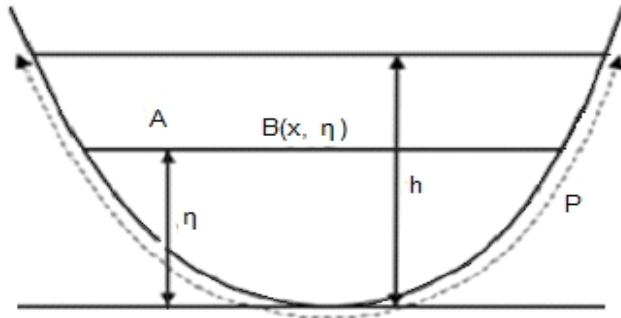


Figure 9: Les différents paramètres d'un écoulement dans une section

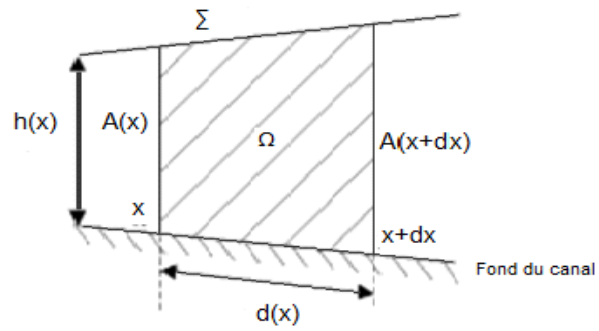


Figure 10: Le volume de controle

La forme différentielle et conservative des équations de Barré de Saint-Venant

En supposant que les variables d'écoulement A et Q sont continues, différentiables, et que dx et dt sont des grandeurs infinitésimales, en écrivant le développement en série de Taylor de A et Q au voisinage de t et de x à l'ordre 1, et après quelques simplifications algébriques, nous obtenons le système d'équations de Barré de Saint Venant sous forme différentielle

- Appliqué le développement en série de Taylor de A et Q :

$$\begin{aligned}(A)_{t+dt} &= (A)_t + \frac{\partial(A)}{\partial t} dt \\ (Q)_{x+dx} &= (Q)_x + \frac{\partial(Q)}{\partial x} dx\end{aligned}\tag{2.15}$$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{t+dt \rightarrow t} \int_x^{x+dx} [(A)_{t+dt} - (A)_t] dx &= \int_x^{x+dx} \int_t^{t+dt} \frac{\partial(A)}{\partial t} dt dx \\ \lim_{x+dx \rightarrow x} \int_t^{t+dt} [(Q)_{x+dx} - (Q)_x] dx &= \int_x^{x+dx} \int_t^{t+dt} \frac{\partial(Q)}{\partial x} dt dx\end{aligned}\tag{2.16}$$

Donc l'équation de continuité s'écrit sous la forme suivant :

$$\int_x^{x+dx} \int_t^{t+dt} \left[\frac{\partial(A)}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} \right] dt dx = 0\tag{2.17}$$

- Appliqué le développement en série de Taylor de $\frac{Q^2}{A}$ et I_1 :

$$\begin{aligned}\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{x+dx} &= \left(\frac{Q^2}{A}\right)_x + \frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x} dx \\ (I_1)_{x+dx} &= (I_1)_x + \frac{\partial I_1}{\partial x} dx\end{aligned}\tag{2.18}$$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x+dx \rightarrow x} \int_t^{t+dt} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{x+dx} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_x \right] dt &= \int_x^{x+dx} \int_t^{t+dt} \frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x} dt dx \\ \lim_{x+dx \rightarrow x} \int_t^{t+dt} \left[(I_1)_{x+dx} - (I_1)_x \right] dt &= \int_x^{x+dx} \int_t^{t+dt} \frac{\partial I_1}{\partial x} dt dx \end{aligned} \quad (2.19)$$

Donc l'équation de continuité s'écrit sous la forme suivant :

$$\int_x^{x+dx} \int_t^{t+dt} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x} \right] dt dx = -g \int_x^{x+dx} \int_t^{t+dt} \left[\frac{\partial I_1}{\partial x} - I_2 - A(S_0 - S_f) \right] dt dx \quad (2.20)$$

La forme finale d'équation de barré saint-venant :

$$\begin{cases} \frac{\partial(A)}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{cases} \quad (2.21)$$

Le système de BSV peut s'écrire sous la forme conservative suivante :

$$U_t + F(U)_x = G(U) \quad (2.22)$$

Avec :

$$U = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} \quad F(U) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix} \quad G(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{pmatrix}$$

U est appelé vecteur écoulement, $F(U)$ vecteur flux et $G(U)$ vecteur source.

Il ya une autre méthode représente équation barrée qui est basée à la même théorie mais représenter à groupes différents variables dépendants. Plusieurs cours il designé l'équation des canaux ouverts prismatique à section rectangulaire (Figure 11) peut être écrit sous

la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial(h)}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + g \frac{h^2}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Telle que $A = h$, $I_1 = \frac{A^2}{2B} = \frac{h^2}{2}$ et nul terme source.

Le système d'équations hyperboliques le plus classiquement utilisé dans la plupart des logiciels de simulation dans le cadre de l'hydrologie urbaine le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial(A)}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gA (S_0 - S_f) \end{cases} \quad (2.24)$$

2.3 Divers modèles de Barré de Saint-Venant

De nombreux modèles existent pour représenter le fonctionnement hydraulique des canaux, collecteurs et rivières. Ils sont tous issus des équation (2.24) avec l'ajout éventuel de termes permettant de prendre en compte un déversement latéral ou un changement de section mais encore de l'effet du vent ou de la rotation de la terre. En fait, ces termes supplémentaires qui sont en général des termes de dissipation visent à tenir compte d'un environnement particulier dans lequel se produit l'écoulement.

Les modèles qui ont été mis au point peuvent être regroupés en deux grandes familles :

- Les modèles conceptuels :
 - ▶ Modèle de Stock
 - ▶ Muskingum-Cunge
 - ▶ Hydrogramme unitaire conçu par Sherman
- Les modèles mécanistes :
 - ▶ Onde quasi-permanente,
 - ▶ Onde,
 - ▶ Onde cinématique,
 - ▶ Onde simple ou onde de gravité.

2.4 Propriétés mathématique des équations de Barré de Saint-Venant

Pour l'étude des propriétés mathématiques du système de Saint-Venant, ce dernier peut s'écrire sous la forme suivante :

$$U_t + F(U)_x = G(U)$$

2.4.1 La matrice jacobéenne

Définition 2.1. (*matrice jacobéenne*) La jacobéenne est une généralisation de la dérivée et du gradient pour les fonctions de plusieurs variables et la matrice jacobienne est une matrice associée à une fonction vectorielle en un point donné. Le déterminant de cette matrice, appelé jacobien, joue un rôle important dans la résolution de problèmes non linéaires.

La matrice jacobienne de la fonction flux $F(U)$ est la matrice :

$$J(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial u_1 & \cdots & \partial f_1 / \partial u_m \\ \partial f_2 / \partial u_1 & \cdots & \partial f_2 / \partial u_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial f_m / \partial u_1 & \cdots & \partial f_m / \partial u_m \end{pmatrix}$$

L'équation de conservation devient :

$$U_t + J(U)U_x = 0$$

Telle que

$$J = \frac{\partial F(U)}{\partial U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial A} & \frac{\partial Q}{\partial Q} \\ \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) & \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) \end{pmatrix}$$

Les détails des calculs des éléments de la matrice dans le cas du canal prismatique suivant :

- $\frac{\partial Q}{\partial A} = 0$ Car Q et A sont des variables indépendantes
- $\frac{\partial Q}{\partial Q} = 1$
- $\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = -\frac{Q^2}{A^2} + g \frac{\partial}{\partial A} \left\{ \int_0^{h(x,t)} (h - \eta) B(x, \eta) d\eta \right\}$
 $= -\frac{Q^2}{A^2} + g \left\{ \int_0^{h(x,t)} B(x, \eta) d\eta \right\} \frac{\partial h}{\partial A}$
 $= -\frac{Q^2}{A^2} + gA \frac{\partial h}{\partial A}$
 $= -u^2 + g \frac{A}{B}$ car $\frac{\partial h}{\partial A} = \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)^{-1}$ puisque l'on est dans le cas d'un

canal prismatique A n'est fonction que de h

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = -\frac{2Q}{A} + g \frac{\partial I_1}{\partial Q} = 2u + g \frac{\partial}{\partial Q} \left\{ \int_0^{h(x,t)} (h - \eta) B(x, \eta) d\eta \right\} = 2u$$

Au final, la matrice jacobienne pour l'équation (2.21) est donner par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g \frac{A}{B} - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad \text{avec } u = \frac{Q}{A}$$

La matrice jacobienne pour l'équation (2.23) est donner par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

2.4.2 Systèmes d'équation hyperbolique

Définition 2.2. (*Système hyperbolique*) Le système est dit hyperbolique si J est diagonalisable et a des valeurs propres réelles, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible

$T \in R^{p \times p}$ telle que

$$J = T\Lambda T^{-1}$$

et où $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p]$ est la matrice diagonale des valeurs propres réelles de J

Le système est dit strictement hyperbolique s'il est hyperbolique et que ses valeurs propres sont distinctes.

Définition 2.3. (*Valeurs propres*) On dit que $\lambda \in C$ est une valeur propre de J s'il existe un vecteur non nul $x \in C^n$ tel que $Jx = \lambda x$. Le vecteur x est le vecteur propre associé à la valeur propre λ

Physiquement, les valeurs propres représentent les vitesses de propagation de l'information. Ces vitesses seront mesurées positives dans les directions des x croissants et négatives dans le sens contraire.

- Le calcul des valeurs propres de la jacobienne donne :

$$\lambda_{1,2} = u \pm c \text{ avec } c = \begin{cases} \sqrt{\frac{gA}{B}} & \text{pour la matrice de l'équation (2.21)} \\ \sqrt{gh} & \text{pour la matrice de l'équation (2.23)} \end{cases}$$

- Le calcul des vecteurs propres donne :

$$v^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \pm c \end{pmatrix}$$

Donc le problème de Saint-Venant est non linéaire et strictement hyperbolique.

2.5 Solution analytique des équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant ne peuvent pas être résolues analytiquement surtout en présence du terme source correspondant au frottement du lit. Les équations de Saint-Venant présentent, dans le cas monodimensionnel d'un canal prismatique rectangulaire,

une solution analytique connue sous le nom de la solution de Ritter.

Cette solution analytique de Stocker (1957) concerne l'écoulement transitoire dans un canal prismatique à section rectangulaire. Nous considérons un canal horizontal de largeur, $B = 10m$ et de longueur $L = 2Km$. Le lit du canal est lisse, donc il n'y a pas d'effet de frottement sur l'écoulement. La vanne se trouve au milieu du canal et à l'instant $t = 0$, la vanne est totalement enlevée et l'eau se relâche sous forme de deux vagues, l'une se dirige vers l'amont et l'autre vers l'aval (Figure 11)

Les conditions initiales de l'écoulement sont formées d'un débit partout nul dans le canal, et d'une hauteur d'eau discontinue au niveau de la vanne. La hauteur à l'amont du seuil est fixée à $h_{amont} = 20m$, et la hauteur à l'aval varie pour changer la nature de l'écoulement (fluvial/torrentiel).

Lors de l'ouverture brutale de la vanne, nous observons une onde de raréfaction se propageant vers l'amont de la vanne et une onde de chocs de vitesse S se propageant vers l'aval. La vitesse S est solution de l'équation non linéaire suivante :

$$S - \frac{c_{aval}^2}{4s} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8s^2}{c_{aval}^2}} \right) + 4S \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8s^2}{c_{aval}^2}} \right)^{\frac{1}{2}} - 2c_{amont} = 0$$

où $c_{aval} = \sqrt{gh_{aval}}$ est la célérité de l'onde se trouvant à l'aval de la vanne, et $c_{amont} = \sqrt{gh_{amont}}$ est celle se trouvant à l'amont.

Soit u la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section du canal et h la hauteur d'eau correspondante. La solution de ce problème est divisée en 4 parties (Figure12). Les zones (0) et (1) sont les zones d'eau morte. Dans la zone (3), une vague relie les parties stationnaires (1) et (2). Dans la zone(2), l'eau qui était en mouvement devient de nouveau stagnant et la vitesse moyenne de l'écoulement et la hauteur de l'écoulement sont constantes. Les variables u et h de l'écoulement dans chaque zone sont :

- La zone (0) si

$$\frac{L}{2} + St \prec x \prec L$$

La hauteur d'eau

$$h = h_{aval}$$

Et La vitesse

$$u = 0$$

- La zone (1) si

$$0 < x < \frac{L}{2} - c_{amont}t$$

La hauteur d'eau

$$h = h_{amont}$$

Et La vitesse

$$u = 0$$

- La zone (2) si

$$\frac{L}{2} + (u_2 - c_2)t < x < \frac{L}{2} + St$$

La hauteur d'eau

$$h = \frac{c_2}{g} \text{ avec } c_2 = 2S \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8s^2}{c_{aval}^2}} \right)^{-1/2}$$

Et La vitesse

$$u = u_2 = S - \frac{c_{aval}^2}{4S} \left(\sqrt{1 + \frac{8s^2}{c_{aval}^2}} \right)$$

- La zone (3) si

$$\frac{L}{2} - c_{amont}t < x < \frac{L}{2} + (u_2 - c_2)t$$

La hauteur d'eau

$$h = \frac{1}{9g} \left(2c_{amont} - \frac{x - \frac{L}{2}}{t} \right)^2$$

Et La vitesse

$$u = \frac{2}{3} \left(2c_{amont} + \frac{x}{t} \right)$$

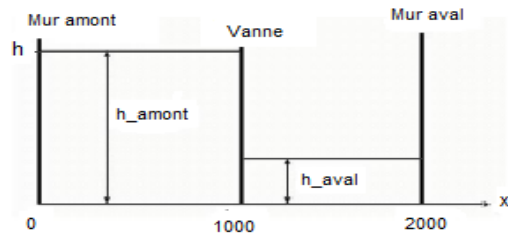


Figure 11: Conditions initiales

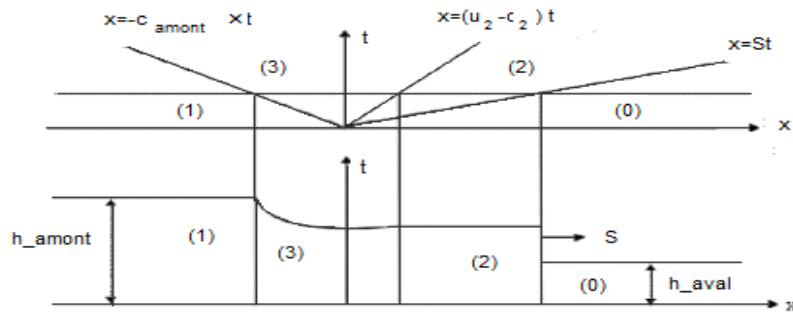


Figure 12: Caractéristiques hydrauliques

Chapitre 3

La résolution de modèle Barré Saint-Venant par la méthode différences finies

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier la méthode des différences finies pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles de Barré Saint Venant suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } U(x, t) : R \times R^+ \rightarrow R \text{ tel que} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad x \in R, t \succ 0, \\ U(x, 0) = U^0(x), x \in R, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Telle que

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix},$$

On propose de discrétiser le problème hyperbolique (3.1) par différence finie en espace-temps sans cotraintes des conditon limites et initiales c'est à dire $\{(x, t) : -\infty \prec x \prec +\infty, t \succ 0\}$

est discrétisé en choisissant un pas d'espace Δx , un pas de temps Δt et des points de grille (x_j, t^n) définies par :

$$x_j = j\Delta x \quad j \in Z, \quad t^n = n\Delta t \quad , n \in N$$

On s'intresse à des schémas explicites à un pas de temps et à trois pas d'espace qui s'écrivent

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \tag{3.2}$$

où H est une fonction régulière.

3.2 Présentation de la méthode de différences finies

La méthode de différences finies permet de calculer une approximation de la solution d'une EDP en des points qui sont distribués sur une grille. L'objectif est alors de construire des approximations des dérivées des fonctions intervenant dans l'EDP à l'aide de valeurs discrètes de celle-ci, par le biais de formules de Taylor.

Nous nous plaçons, sauf mention contraire, dans le cadre d'une discrétisation par différences finies en une dimension d'espace. Ceci implique que nous discrétisons le continuum spatio-temporel par une grille régulière de pas Δt en temps et Δx en espace tel que les coordonnées discrètes soient :

$$(x_j, t^n) = (j\Delta x, n\Delta t)$$

La solution discrète sera calculée en ces points (Figure 13). Le principe des différences finies est donc de remplacer les dérivées en ces points par des différences finies en utilisant des formules de Taylor dont on néglige les restes.

- $u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \frac{\Delta x}{1} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O(\Delta x^2)$ développements de Taylor par rapport à x .

- $u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\Delta t}{1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + O(\Delta t^2)$ développements de Taylor par rapport à t

Pour obtenir un problème discret on remplace les dérivées partielles par des différences finies telle que Ces approximations sont obtenus grâce a la formule de Taylor.

- $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$, différence finie progressive (explicite en espace)
- $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$, différence finie rétrograde (implicite)
- $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$, différence finie centrée

On fait de même pour les dérivées partielles par rapport à t :

- $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$, différence finie progressive (explicite en temps)
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$, différence finie rétrograde (implicite)
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_j^{n-1} - u_j^{n+1}}{2\Delta t}$, différence finie centrée

Selon l'utilisation des developpements limités, on obtient des expressions différentes des dérivées qui engendrent 3 types de schéma (centré, explicite, implicite)

1-Schéma explicite

Pour un schéma explicite, les variables à un nouveau pas de temps sont évaluées à chaque point du maillage par des calculs directs à partir des valeurs déjà connues (Figure14). L'inconvénient principal des schémas explicites, se situe dans la restriction du pas de temps qui est imposée par la condition de Courant-Friedrich-Lewy (CFL), qui assure la stabilité de ces schémas.

2-Schéma implicite

Pour les méthodes implicites, les variables sont calculées simultanément à un nouveau pas de temps, par la résolution d'un système avec autant d'inconnues que de noeuds du grille (Figure 15). La stabilité de ces schémas n'est pas conditionnée par la condition CFL, mais par la nature de la solution.

Pour une équation aux dérivées partielles donnée, l'idée est donc de construire une équation discrète où les opérateurs différentiels sont remplacés par des opérateurs d'approximation. La solution continue n'a a priori pas de raison d'être solution de cette équation discrète.

la solution de l'équation discrète obtenue approche de la solution du problème continu et d'autre part quand il y a convergence, de quantifier la vitesse de convergence.

Cette analyse se fait toujours en deux étapes fondamentales qui seront donc le dénominateur commun de chaque étude de schéma de cet ouvrage :

- **La consistance** qui correspond à l'erreur d'approximation liées lorsqu'on remplace l'EDP par des différences finies. Il est fondamental de comprendre que, bien que très intuitive en tant que condition nécessaire, la consistance d'une méthode ne suffit pas à obtenir la convergence.
- **La stabilité** qui assure que l'opérateur discret est bien inversible et la norme de son inverse est bornée indépendamment du pas de discrétisation.

On montrera alors que dès qu'un schéma est consistant et stable alors il est convergent.

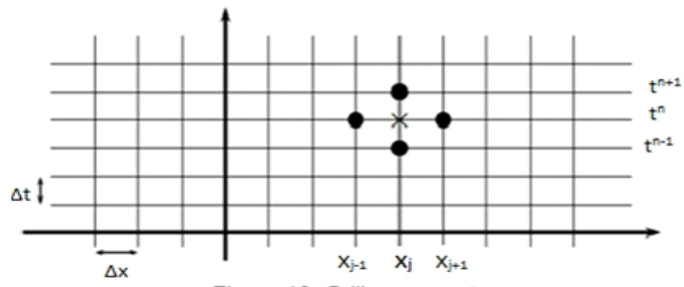


Figure 13: Grille espace temps

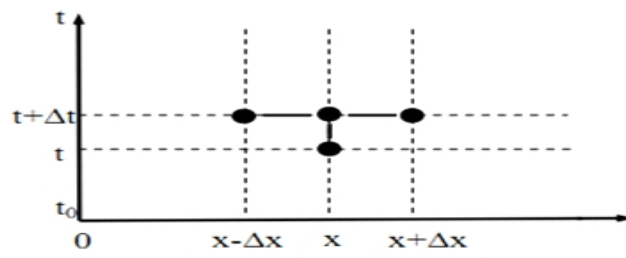


Figure 14: Schéma explicite

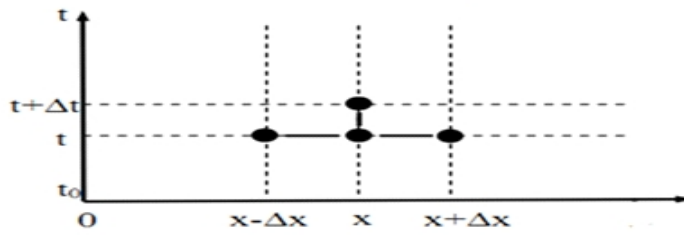


Figure 15: Schéma implicite

3.3 Schémas sous forme conservative

Les lois de conservation sont des équations aux dérivées partielles issues de la physique qui peuvent être écrites sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad (3.3)$$

De même, on trouve également les systèmes de lois de conservation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0 \quad (3.4)$$

et la forme non conservative :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + F'(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Lois de conservation ne sont équivalentes que pour les solutions u régulières du problème et que la notion de solution faible repose sur la forme conservative de l'équation. Le principe pour le calcul numérique d'une solution faible, on utilisera un schéma « sous forme conservative ».

Le principe de base des schémas conservatifs est la méthode des volumes finis qui vise

à trouver une approximation de $u_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t) dx$ à tous les temps $t = t^n$ où $x_{j\pm\frac{1}{2}} = x_j \pm \frac{\Delta x}{2}$. on intègre l'équation (3.3) entre $x_{j-\frac{1}{2}}$ et $x_{j+\frac{1}{2}}$ et on divise par Δx

$$\frac{d}{dt} u_j(t) + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} f(u) dx = 0$$

On obtient :

$$\frac{d}{dt} u_j(t) + \frac{f\left(u\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t\right)\right) - f\left(u\left(x_{j-\frac{1}{2}}, t\right)\right)}{\Delta x} = 0 \quad (3.5)$$

Le schéma numérique conservatif est une approximation de l'équation (3.5) : on approche la quantité $f\left(u\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t\right)\right) \approx f\left(u_j(t), u_{j+1}(t)\right)$ et $f\left(u\left(x_{j-\frac{1}{2}}, t\right)\right) \approx f\left(u_{j-1}(t), u_j(t)\right)$ et discrétisation en temps explicite, on obtient

Définition 3.1. (*Schéma conservatif*) On dit que le schéma (3.2) peut se mettre sous forme conservative s'il existe une fonction f régulière telle que l'on ait :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ f\left(u_j^n, u_{j+1}^n\right) - f\left(u_{j-1}^n, u_j^n\right) \right\} \quad (3.6)$$

On utilisera souvent la notation abrégée suivante

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad \text{où} \quad f_{j+\frac{1}{2}}^n = f\left(u_j^n, u_{j+1}^n\right)$$

Donc le problème (3.4) s'écrit :

$$U\left(x_j, t^{n+1}\right) = U\left(x_j, t^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ F\left(U\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n\right)\right) - F\left(U\left(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n\right)\right) \right\} \quad (3.7)$$

Le problème de (3.1) s'écrit par schéma sous forme conservative

$$\begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \left(x_j, t^{n+1}\right) = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \left(x_j, t^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \left(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n\right) - \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \left(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n\right) \right\}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} h_j^{n+1} \\ (hu)_j^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_j^n \\ (hu)_j^n \end{pmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} (hu)_{j+\frac{1}{2}}^n \\ (hu^2)_{j+\frac{1}{2}}^n + g\frac{h_{j+\frac{1}{2}}^{2n}}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (hu)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (hu^2)_{j-\frac{1}{2}}^n + g\frac{h_{j-\frac{1}{2}}^{2n}}{2} \end{pmatrix} \right\} \quad (3.8)$$

3.4 Propriétés des schémas

3.4.1 Consistance

Lemme 3.2. (*Condition de consistance*) Un schéma mis sous la forme conservative (3.6) est consistant avec l'équation (3.3) si et seulement si :

$$f(u, u) = f(u) + cte \quad \forall u \in R. \quad \text{telle que } u = U \quad \text{et } f = F \quad (3.9)$$

Il est alors d'ordre 1 au moins.

Preuve.

Soit un schéma de la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

L'erreur de troncature local d'un schéma numérique est le résidu obtenu quand on injecte la solution exacte dans le schéma.

On définit l'erreur de troncature du schéma (3.6) en (x_j, t^n) par :

$$\varepsilon_j^n = \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{1}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

où :

$$\begin{cases} u_j^n = u(x_j, t^n) \\ f_{j+\frac{1}{2}}^n = f(u_j^n, u_{j+1}^n) \end{cases}$$

et u est la solution régulière de l'équation (3.3).

où l'on a utilisé les notations définies précédemment. Or on a :

$$\begin{cases} u_j^{n+1} - u_j^n = \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O(\Delta t^2) \\ u_{j+m}^n - u_j^n = m \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O(\Delta x^2) \quad \text{avec } m = \pm 1 \end{cases}$$

D'où, si $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$ désignent les 2 dérivées partielles de f :

$$\begin{cases} f(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_j^n, u_j^n) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_j^n, u_j^n) \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O(\Delta x^2) \\ f(u_{j-1}^n, u_j^n) = f(u_j^n, u_j^n) - \frac{\partial f}{\partial u}(u_j^n, u_j^n) \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O(\Delta x^2) \end{cases}$$

On en déduit enfin, pour $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ fixé :

$$\varepsilon_j^n = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \left\{ \frac{\partial f}{\partial v}(u_j^n, u_j^n) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_j^n, u_j^n) \right\} \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O(\Delta x)$$

Le schéma est donc consistant (et au moins d'ordre 1) si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, u) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, u) = f'(u) \quad \forall u \in R$$

Donc

$$f(u, u) = f(u) + cts$$

d'où l'égalité (3.9). ■

3.4.2 stabilité

Définition 3.3. On dit qu'une méthode numérique appliquée à un problème hyperbolique linéaire ou non linéaire stable si tout couple de données initiales (u^0, v^0) , le couple de solutions (u^n, v^n) vérifie

$$\forall n \in N, \quad \|u^n - v^n\| \leq C \|u^0 - v^0\| \quad \text{telle que} \quad U = u \text{ et } V = v$$

où la constante C est indépendante de $u^0, v^0, n, \Delta t$ et Δx .

Un schéma est stable si l'erreur entre la solution exacte du problème et la solution discrétisée reste bornée dans le temps et/ou dans l'espace. La plupart des schémas numériques de type explicite sont stables sous la condition CFL (Courant-Friedrich-Lewy).

Courant, Friedrichs - Lewy (CFL) ont montré que, pour qu'un schéma explicite de la

forme (3.6) soit stable, il est nécessaire que les pas de discrétisation en espace et en temps vérifient

$$\left| V_{\max}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \text{ telle que}$$

V_{\max}^n : La vitesse de l'onde la plus rapide dans le domaine de calcul au pas de temps n .

3.4.3 Condition CFL

Pour montré un schéma explicite de la forme (3.6) soit stable, il faut vérifier est nécessaire que les pas de discrétisation en espace et en temps

$$\left| V_{\max}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \text{ telle que}$$

V_{\max}^n : La vitesse de l'onde la plus rapide dans le domaine de calcul au pas de temps n . Cette inégalité est connue sous le nom de condition de Courant, Friedrichs - Lewy du nom des mathématiciens qui l'ont énoncée pour la première fois. Elle est souvent abrégée sous le nom de condition CFL. Il s'agit d'une condition nécessaire de convergence de la solution numérique vers la bonne solution. le nombre V_{\max}^n qui est une quantité sans dimension puisque V_{\max}^n est une vitesse, on définit le nombre de Courant maximum :

$$C_{cfl} = \frac{\Delta t V_{\max}^n}{\Delta x}$$

On appelle souvent C_{cfl} le coefficient CFL (Courant-Friedrich-Lewy) ou nombre de Courant. Le pas de temps est ainsi obtenu sous la forme :

$$\Delta t = \frac{C_{cfl} \Delta x}{V_{\max}^n}$$

Dans le cas de l'étude du système de Barré de Saint-Venant, le pas de temps sera donné par :

$$\Delta t = \frac{C_{cfl} \Delta x}{|u| + c}$$

où u représente la vitesse moyenne de l'écoulement et c la célérité de l'onde qui se propage.

3.5 Le problème de Riemann associé au système de BSV

Le problème de Riemann centré en (x_0, t_0) est un problème aux valeurs initiales discontinues, composé de deux états constants (Figure 16) . La structure de la solution de ce problème appliqué au système de BSV est composé de trois états constants séparés par deux ondes élémentaires : une onde de raréfaction se propageant vers la gauche, et une onde de choc se propageant vers la droite. Godunov a proposé à la fin des années (1950) un algorithme pour résoudre des systèmes d'équations hyperboliques linéaires en supposant que le problème est une série de problèmes de Riemann local.

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \\ U(x, t_0) = U_0(x) = \begin{cases} U_L & \text{si } x \prec x_0 \\ U_R & \text{si } x \succ x_0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.10)$$

La méthode de Godunov s'applique à toute équation hyperbolique, elle est en pratique très coûteuse en temps de calcul puisqu'à chaque itération et à chaque pas d'espace il faut résoudre un problème de Riemann.

Pour le système linéaires de n équation de la forme

$$U_t + A.U_x = 0$$

Le schéma de Godunov est définies par :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^+ W_{j-1/2}^i + \sum_{i=1}^n \lambda_i^- W_{j+1/2}^i \right) \quad (3.11)$$

avec W^i ondes de discontinuités sont définies par

$$W^i = \alpha^i v^i$$

avec v^i le $i^{\text{ième}}$ vecteur propre à droite de A associé à la valeur propre λ_i , α^i la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\alpha = R^{-1} \cdot (U_R - U_L) = L \cdot (U_R - U_L)$ où U_R et U_L sont les conditions initiales, R est la matrice dont les colonnes sont composées des vecteurs propres (L la matrice dont les lignes sont les vecteurs propres à gauche). On introduit les matrices

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^+ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^+ & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n^+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda^- = \begin{pmatrix} \lambda_1^- & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^- & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n^- \end{pmatrix}$$

où l'on a employé la notation

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda) \quad \text{et} \quad \lambda^- = \min(0, \lambda)$$

le schéma de Godunov () est

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^+ \alpha_{j-1/2}^i v^i + \sum_{i=1}^n \lambda_i^- \alpha_{j+1/2}^i v^i \right) \\ &= U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R \cdot \Lambda^+ \cdot \alpha_{j-1/2} + R \cdot \Lambda^- \cdot \alpha_{j+1/2}) \\ &= U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R \cdot \Lambda^+ \cdot R^{-1} \cdot (U_j^n - U_{j-1}^n) + R \cdot \Lambda^- \cdot R^{-1} \cdot (U_{j+1}^n - U_j^n)) \end{aligned}$$

Finalement on a

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \cdot \Delta U_{j-1/2}^n - A^- \cdot \Delta U_{j+1/2}^n) \quad (3.12)$$

avec

$$A^+ = R.\Lambda^+.R^- \quad \text{et} \quad A^- = R.\Lambda^+.R^+$$

3.5.1 Les solveurs de Riemann

Nous rappelons qu'un schéma explicite de type conservatif s'écrit sous la forme :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n)$$

Les flux aux interfaces $j + 1/2$ et $j - 1/2$ sont calculés numériquement selon chaque schéma. Il existe plusieurs solveurs permettant de calculer les flux aux interfaces. Ces schémas sont connus sous le nom de solveur de Riemann ou tout simplement schéma de Riemann. Les schémas de Riemann sont attractifs pour les ingénieurs hydrauliciens, puisque ces méthodes sont simples à implémenter, de hautes résolutions pouvant capturer les chocs, préservent la monotonie et vérifient la condition d'entropie.

Solveur de Roe

L'idée de Roe (1981) est de remplacer un problème non linéaire de la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0$$

en un problème linéarisé simplifié

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{J}(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

lorsqu'on résout un problème de Riemann, c'est-à-dire un problème aux valeurs initiales

$$U(x, 0) = U_L \quad \text{pour} \quad 0 < x < x_0 \quad \text{et} \quad U(x, 0) = U_R \quad \text{pour} \quad x_0 < x < \infty.$$

La fonction F est telle que la matrice jacobienne associée $J(U) = \nabla_U F(U)$ possède n valeurs propres distinctes et réelles notées λ_1 (problème strictement hyperbolique). La question est de savoir comment passer de la matrice jacobienne $J(U)$ à la matrice constante \tilde{J} (les composantes de cette matrice ne dépendent que des valeurs initiales U_L et U_R).

La matrice approchée doit vérifier un certain nombre de propriétés pour qu'une telle substitution soit possible :

- 1- la matrice doit être diagonalisable et posséder n valeurs propres réelles distinctes (pour que le problème soit toujours strictement hyperbolique) ;
- 2- une condition de consistance avec l'équation originale impose que pour tout vecteur U

$$\tilde{J}(U, U) = J(U)$$

3- pour tout couple (U_L, U_R) , on a

$$\tilde{J} \cdot (U_L - U_R) = F(U_L) - F(U_R)$$

La matrice jacobienne approchée de l'équation (3.10) est :

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g\bar{h} - \hat{u}^2 & 2\hat{u} \end{pmatrix}$$

avec

$$\hat{u} = \frac{\sqrt{h_l}u_l + \sqrt{h_r}u_r}{\sqrt{h_l} + \sqrt{h_r}} \quad \text{et} \quad \bar{h} = (h_l + h_r) / 2$$

Il est à partir de là possible de construire un schéma numérique approché en se servant de la méthode de Godunov. Pour cela, il faut calculer les valeurs propres, les vecteurs propres à droite, et les coefficients α^i . On a :

$$\lambda_1 = \hat{u} - \hat{c} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \hat{u} + \hat{c}$$

avec $\hat{c} = \sqrt{g\bar{h}}$. On a

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u} + \hat{c} \end{pmatrix}$$

Les coefficients α^i sont donnés par

$$\alpha = L \cdot (U_j^n - U_{j-1}^n) \quad \text{avec} \quad L = R^{-1} = \frac{1}{2\hat{c}} \begin{pmatrix} \hat{u} + \hat{c} & -1 \\ -\hat{u} + \hat{c} & 1 \end{pmatrix}$$

Le schéma de Godunov (3.12) est donc

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{i=1}^2 \lambda_i^+ \alpha_{j-1/2}^i v^i + \sum_{i=1}^2 \lambda_i^- \alpha_{j+1/2}^i v^i \right)$$

Solveur de Roe permet d'aboutir à un schéma numérique relativement simple pour calculer U_j^{n+1}

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\tilde{J}^+ \cdot (U_j^n - U_{j-1}^n) + \tilde{J}^- \cdot (U_{j+1}^n - U_j^n) \right)$$

avec toujours $\tilde{J}^+ = R \cdot \Lambda^+ \cdot R^{-1}$ et $\tilde{J}^- = R \cdot \Lambda^- \cdot R^{-1}$

Finalement on peut écrit le schéma suivant

$$\begin{pmatrix} h_j^{n+1} \\ Q_j^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_j^n \\ Q_j^n \end{pmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\tilde{J}^+ \cdot \begin{pmatrix} h_j^n - h_{j-1}^n \\ Q_j^n - Q_{j-1}^n \end{pmatrix} + \tilde{J}^- \cdot \begin{pmatrix} h_{j+1}^n - h_j^n \\ Q_{j+1}^n - Q_j^n \end{pmatrix} \right)$$

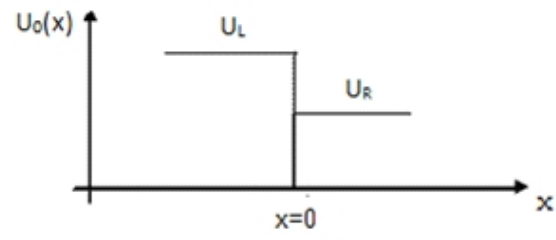


Figure 16: Représentation du problème Riemann

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté le modèle de Saint-Venant due d'un écoulement dans un canal prismatique rectangulaire. En essayant de résoudre ce modèle de Saint-venant à une dimension due des écoulements à surface libre (Modèle d'un canal prismatique rectangulaire), en utilisant la méthode des différences finies, où on a trouvé des résultats converge lentement .

Bibliographie

- [1] C. ANCEY. *Hydraulique à surface libre Phénomènes de propagation : ondes et ruptures de barrage*, laboratoire hydraulique environnementale (LHE), école Polytechnique Fédérale de Lausanne CH-1015 Lausanne, (2010), 124-140.
- [2] C. ANCEY. *Mécanique des fluides*, laboratoire hydraulique environnementale (LHE), école Polytechnique Fédérale de Lausanne CH-1015 Lausanne, (2012), 126-140.
- [3] A-S.BONNET-BENDHIA, S.FLISS, P. JOLY, P.MOIREAU. *Introduction aux équations aux dérivées partielles et à leur approximation numérique*,(2011) 105-124.
- [4] M.BUYER. *Transport de flus en réseau d'assainissement : Model 1D pour l'hydraulique des collecteurs et deversoirs avec prise en compte des discontinuités*, thèse doctorat, discipline Sciences de l'Ingénieur, l'université Louis Pasteur – Strasbourg, (2002), 7-18.
- [5] P.FICHOU. *Mécanique des fluides*, Promotion IGE,(2002), 7-8.
- [6] R. GHOSTINE : contribution à la résolution numérique des équations de Barré Saint Venant bidimensionnelles par une méthode de type éléments finis discontinus : application à la simulation des écoulements au sein des carrefours dans la ville, discipline Sciences de l'Ingénieur, l'université Louis Pasteur –Strasbourg, (2009), 48-50.
- [7] A. JANE CROSSLEY. *Accurate and efficient numerical solution for the Saint Venant equation of open channel flow*, B.Sc. M.Sc, (1999) 5-15.
- [8] G. KOEPFLER. *Equations aux dérivées partielles*, université de paris (2001), 67-85.

- [9] A. MAHER. *Sur les méthodes de discrétisation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires appliquées aux équations de Barré Saint-Venant pour la modélisation de l'hydraulique en réseau d'assainissement*. thèse de doctrat, discipline Sciences de l'Ingénieur, l'université Louis Pasteur – Strasbourg, (2005) 25-95.
- [10] C. MEURIS. *Mécanique des fluides*, 31-40.
- [11] A. QUARTERONI, F. SALERI AND R. SACCO. *Méthodes Numerique*, MOX – Dipartimento di Matematica Politecnico di Milano et Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, (2004), 455-473.
- [12] A.QUARTERONI, A. VALLI. *Numerical approximation of partial differential equations*. MOX, Politecnico di Milano 20133 Milan, Italy(2008), 471-480.
- [13] A. RIADH. *Développement de méthodes particulières pour la résolution des écoulements à surface libre*, école technologie supérieure, (2007), 11-20.
- [14] J.ROUSSEL. *Cours de Mécanique des fluides*,C.P.I.2 - Chem.I.St2 ,(2006), 21.
- [15] J-F. SCHEID. *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides*,(2012) 79-97.
- [16] J-F.SINI. *Mécanique des fluides*, cel-00356205, (2008), 15-36.
- [17] J. VASQUEZ :*Hydraulique a surface libre*, école nationale du genie de l'eau et de l'envirennement de trasbourg, (2009), 6-50.

ملخص:

في هذا البحث سنهتم بدراسة تدفق سائل غير قابل للانضغاط وغير لزج داخل قناة مضلعة وهذا بدراسة معادلة Barrée Saint - Venant وهي عبارة عن معادلات تفاضلية ذات بعد واحد غير خطية .

وفي الأخير نشير إلى إمكانية استعمال طريقة الفروق المنتهية لحل هذه المعادلة.

الكلمات المفتاحية: ميكانيك الموائع، قناة مضلعة، معادلة Barrée Saint-Venant ، معادلات قطع الزائد غير الخطية، طريقة الفروق المنتهية.

Résumé :

Dans ce recherche nous avons étudié l'écoulement du liquide est incompressible et non visqueux dans un canal prismatique rectangulaire et ça par l'étude Barrée Saint-Venant qui est d'équation différentielles unidimensionnel non linéaire.

A la fin nous concentrons à la possibilité de l'utilisation la méthode des différences finies pour résoudre cet 'équation.

Mots-clefs: mécanique des fluides, canal prismatique rectangulaire, équation Barrée Saint-Venant, équation hyperbolique non linéaire, différence finie.

Abstract :

In this project we will study the flow of not-viscous and incompressible liquid in rectangular prismatic channel by study the equation of Barrée Saint-Venant is a differential equation of one-dimensional non-linear and homogeneous.

Finally we refer to the possibility of use finite difference method to solve this equation.

Key-words: fluid mechanics, rectangular prismatic channel, equation non-linear hyperbolic, finite difference.