الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة محمد بوضياف - المسيلة –

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

نيابة العمادة لما بعد التدرج والبحث العلمي والعلاقات الخارجية

Université de Mohamed BOUDIAF M'sila
Faculté des sciences économiques, commerciales et science de gestion
Vice-doyen en charge de la post-Graduationet de la Recherche Scientifique et des Relations Extérieures

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

الرقم:21/ 2024

المسيلة في:2024/01/28

مستخرج فردي من محضر المجلس العلمي

بناء على اجتماع المجلس العلمي للكلية المنعقد بتاريخ 2024/01/28، بقاعة الاجتماعات بالكلية

وبناءا على تقارير الخبراء الايجابية للسادة الأساتذة :

جاب الله مصطفى	جامعة المسيلة
روازقي محمد	جامعة المسيلة
حديدي ادم	جامعة الجلفة

تم اعتماد مطبوعة العائد للأستاذ (ة): عبد الحكيم بيصار

الموسوم(ة) بـ: محاضرات في الاحصاء 3

رئيس المجلس العلمي

جامعة محمد بوضياف – المسيلة

كلية : العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم : العلوم المالية والمحاسبة

مطبوعة دروس مقدمة إلى طلبة

السنة الثانية شعبة العلوم المالية والمحاسبة

بعنوان :

محاضرات في الإحصاء 03

من إعداد :

د.بيصار عبد الحكيم

السنة الجامعية :2024/2023

قال تعالى : { يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَات} [المجادلة : 11]

ويقول تعالى : { وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ۖ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ } [التوبة : 105]

يقول العماد الأصفهاني : " إني رأيت أنه لا يكتب أحدا كتابا في يومه إلا قال في غده ...لو غير هذا لكان أحسن... ولو زيد هذا لكان يستحسن.... ولو قدم هذا لكان أفضل....ولو ترك هذا لكان أجمل.... وهذا من أعظم العبر.... وهو دليل على استيلاء النقص على جملة البشر".

فهرس المحتويات

مقدمة :

ترجع بدايات نظرية الاحتمال إلى أوائل القرن السابع عشر كنتيجة لدراسة بعض ألعاب الحظ المختلفة ومنذ ذلك الوقت اشترك في أبحاث نظرية الاحتمال الكثير من الرياضيين والعلماء والرواد، وعلى الرغم من أن تاريخ نظرية الاحتمال قديم وكبير فإن نظرية الاحتمال لم توضع لها مسلمات إلا في العشرينات والثلاثينات من هذا القرن، وهذا التطور النظري الحديث في المواضيع الخاصة بالاحتمالات ومبادئها ساعد في إعطاء مفاهيم الاحتمال قيمة أكثر بين أساسيات الرياضيات.

ولقد كبرت أهمية الاحتمال بكثرة في السنوات الأخيرة، وتدخل الآن أفكار الاحتمال والإحصاء وهو توأم الاحتمال في أغلب التخصصات والاتجاهات البحثية مثل الطبيعة والكيمياء والبيولوجيا والطب والفسيولوجيا وعلم النفس وعلم الاجتماع والاقتصاد وإدارة الأعمال وبحوث العمليات والعلوم السياسية والتربية وكل فروع الهندسة والتكنولوجيا.

حساب الاحتمالات مرتبط ارتباطا وثيقا بدراسة ما يسمى بالظواهر أو المتغيرات العشوائية سواء كانت ظواهر طبيعية أو إقتصادية أو إجتماعية، التي تكون غير معلومة النواتج مسبقا، وإن عرفنا نواتجها في تجربة ما (بعد إجراء التجربة) فهذا لا يضمن تحقق النواتج نفسها في التجارب اللاحقة.

تم تصميم هذه المطبوعة الخاصة بالإحصاء 03 وهو أحد جوانب الإحصاء الرياضي، وهي عبارة عن سلسلة من المحاضرات الموجهة لطلبة السنة الثانية جذع مشترك علوم مالية ومحاسبة وكذا فروع شعب كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير الأخرى، ومصممة حسب برنامج المدونة الوزارية الجديدة الخاصة بميدان العلوم الاقتصادية، التسيير والعلوم التجارية، متضمنة مجموعة من الدروس المبسطة والمدعمة بأمثلة وتمارين محلولة بغية تسهيل وصول المعلومة إلى الطلبة وتحقيق مجموعة من الأهداف العلمية والبيداغوجية التي نذكر منها :

- الهدف الأساسي هو التمهيد التطبيقي للنماذج الاقتصادية النظرية وإعطائها صيغة رياضية.

- التعرف على أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة.

- اكساب الطالب القدرة على تطبيق التوزيعات الاحتمالية لمعالجة وحل المشكلات الاقتصادية والإدارية والاجتماعية.

- استيعاب المتغيرات العشوائية الثنائية المنفصلة والمتصلة وأهم خواصها.

- التعرف على التوزيعات ذات المتغيرين.

هذا وقد تم تقسيم المطبوعة إلى أربعة محاور أساسية وهي :

- **المحور الأول** : أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

- **المحور الثاني** : أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

- **المحور الثالث** : تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

- **المحور الرابع** : المتغيرات العشوائية الثنائية

المحور الأول

أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

تمهيد :

بعد تطرقنا في دراستنا السابقة للمتغير العشوائي المتقطع ودالة الكثافة الاحتمالية أو دالة التوزيع الاحتمالي والتوقع والتباين له بصورة عامة، سنتطرق في هذا المحور لبعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة، نظرا لأهميتها في الحياة العملية في تفسير كثير من الظواهر العشوائية التطبيقية، ومن التوزيعات التي سوف نتناولها في هذا المحور : توزيع برنولي، توزيع ثنائي الحدين، توزيع بواسون، التوزيع الهندسي، التوزيع فوق الهندسي.

أولا : توزيع برنولي

1- التعريف : وهو توزيع منفصل، يكون فيه المتغير العشوائي X يحتمل قيمتين فقط هما X=0 و X=1، أي أن مجموعة الأساس E تحتوي على حادثتين فقط وهي النجاح والذي نرمز له بالرمز p والخسارة أو الفشل والذي نرمز له بـ q=1- p، ونكتب $X \rightarrow B(1,p)$ ، ويكون التوزيع الاحتمالي بالشكل التالي :

X	0	1	$\sum$
$P(X=x_i)$	q	p	1

وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع كالتالي :

$$P(X=x)=p^x q^{1-x} \qquad x=0,1$$

قانون برنولي يعبر على تجربة عشوائية تتكرر مرة واحدة ونعبر بـ : X=1 على النتيجة التي تتوفر فقط الخاصية المدروسة و X=0 إذا لم تتحقق الصفة المدروسة .

2- الخصائص العددية لتوزيع برنولي :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\mu=\sum x_i p_i=0.q+1.p=p$$

ب- التباين :

$$V(X)=p(1-p)=p.q$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q}$$

مثال 01 : نرمي زهرة نرد مرة واحدة، نعرف النجاح بالحصول على العلامة 1 في حالة ظهور أي رقم زوجي.

1- حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يعبر عن النجاح في هذه التجربة العشوائية ؟

2- أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير؟

الحل : X : ظهور رقم زوجي، النجاح (ظهور رقم زوجي) : X=1 ، الفشل(ظهور رقم فردي) : X=0

1- تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

بما أن المتغير العشوائي X يحتمل قيمتين فقط (0،1) أو (نجاح وفشل) فهو يتبع توزيع برنولي أي : $X \rightarrow B(1{,}0.5)$ ويكون توزيعه الاحتمالي كالتالي :

X	0	1	$\sum$
$P(X=x_i)$	0.5	0.5	1

2- حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير:

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \mu = p = 0.5$$

ب- التباين :

$$V(X) = p(1-p) = p.q = 0.5 * 0.5 = 0.25$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q} = \sqrt{0.25} = 0.25$$

ثانيا : توزيع ثنائي الحدين

1- التعريف : يستند هذا التوزيع على تجربة برنولي إذا تكررت n مرة، أي إذا كان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة (النجاح) هو p، واحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة (الفشل) هو q، فإن احتمال ظهور الحدث (x) مرة من بين الـ n مرة يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$f(x_i) = P(X = x_i) = C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$X = 0,1,2,\dots,n \quad p > 0 \ , q < 1 \ , p + q = 1$$

ونكتب : $X \rightarrow B(n,p)$

حيث :

n : عدد مرات إجراء التجربة (عدد المحاولات)

p : احتمال وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال النجاح)

q : احتمال عدم وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال الفشل)

x : عدد مرات وقوع الحدث (عدد مرات النجاح) وهو متغير يأخذ القيم 0,1,2,...,n

وحتى يكون هذا التوزيع احتمالياً، لابد أن يكون :

$$\sum P(x) = \sum C_x^n p^x q^{n-x} = 1$$

ويلاحظ أن هذا التوزيع، هو توزيع منفصل، يستخدم في حالة الأحداث المستقلة، ويتوقف على قيمة الاحتمال، مع الشروط الأربعة التالية :

1. عدد الاختبارات محدود
2. لكل اختبار نتيجتين فقط : نجاح أو فشل
3. احتمال النجاح يبقى ثابت في كل الاختبارات
4. الاختبارات مستقلة عن بعضها البعض.

2- الخصائص العددية لتوزيع ثنائي الحدين :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \mu = \sum x_i p_i = n \, . p$$

ب- التباين :

$$V(X) = n \, . p . (1 - p) = n . p . q$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q}$$

وهذه الخصائص يمكن إيجادها مباشرة من المسألة، حتى قبل حساب التوزيع الاحتمالي، كما يستعمل في حالة تقارب النجاح والفشل أي : $p \cong q$ و $n \leq 30$

مثال 02 : رميت قطعة نقد متزنة 3 مرات، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد مرات ظهور الصورة، فأوجد دالة التوزيع الاحتمالي والتوقع والتباين للمتغير العشوائي X :

1- باستخدام نقاط فراغ العينة.

2- باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين.

3- قارن بين الحلين.

الحل :

1- باستخدام نقاط فراغ العينة : عند رمي قطعة نقدية ثلاث مرات نجد أن فراغ العينة هو:

$$E = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \Rightarrow |E| = 8$$

القيم الممكنة للمتغير العشوائي X (عدد مرات ظهور الصورة) هي : x=0,1,2,3 وبالتالي فإن الاحتمالات الممكنة لقيم المتغير العشوائي تكون كالتالي :

$$P(X = 0) = P(TTT) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P(HTT) + P(THT) + P(TTH) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P(HHH) = \frac{1}{8}$$

ومنه التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو :

X	0	1	2	3	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

ويحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري كما يلي :

X	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$x_i.P(X=x_i)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$
${x_i}^2.P(X=x_i)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8}$

أ- حساب التوقع الرياضي :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i.P(X=x_i)=\frac{3}{2}$$

ب - حساب التباين :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2.P(X=x_i)-\mu^2=\frac{24}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}=0.75$$

جـ - حساب الانحراف المعياري :

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.75}=0.86$$

2- باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين :

- بما أن احتمال النجاح ثابت في كل المحاولات $P=P(H)=1/2$، $q=1-P=1/2$، وبما أنه كذلك عدد المحاولات معلوم : $n=3$، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين $X\rightarrow B(3,0.5)$ الذي دالته الاحتمالية :

$$P(X=x)=C_3^x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}\quad X=0,1,2,3$$

$$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{3-0}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{3-3}=\frac{1}{8}$$

ومنه التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو :

X	0	1	2	3	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

ويحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري كما يلي :

أ- توقع التوزيع (الوسط الحسابي) :

$$E(X) = n.p = 3.\frac{1}{2} =.\frac{3}{2}$$

ب- التباين :

$$V(X) = n.p.q = 3.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0.75$$

جـ- الانحراف المعياري :

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.75} = 0.86$$

وهي نفس النتائج السابقة .

3- المقارنة بين الحلين :

بالمقارنة بين الحلين (1) و (2) نجد أن الحسابات باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية أسهل ولا تحتاج لتحديد نقاط فضاء العينة وخاصة عندما يكون فضاء العينة كبير جدا فلو كانت التجربة العشوائية هي رمي عملة متزنة 10 مرات فإن عدد نقاط العينة في هذه الحالة هو $2^{10} = 1024$ نقطة وتصبح الحسابات باستخدام نقاط فضاء العينة شبه مستحيلة وعرضة للأخطاء بينما طريقة استخدام دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين يتطلب التعويض مباشرة في صيغة رياضية بسيطة وكذلك الحال في حساب التوقع والتباين.

مثال 03 : ألقي حجر نرد 7 مرات، نفرض أن النجاح هو الحصول على الرقم 5 أو 6 في أي رمية، أحسب :

1- احتمال الحصول على 5 أو 6 ثلاث مرات بالضبط ؟

2- احتمال عدم الحصول على 5 أو 6 في أي مرة ؟

3- احتمال الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة على الأقل ؟

4- أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري ؟

الحل :

- بما أن احتمال النجاح ثابت في كل المحاولات p = p(5,6) = 1/3، q=1-p=2/3، وبما أنه كذلك عدد المحاولات معلوم : n=7، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$P(X=x)=C_7^x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{7-x} \quad X=0,1,2,3,4,5,6,7$$

1- احتمال الحصول على 5 أو 6 ثلاث مرات بالضبط :

$$P(X=3)=C_7^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{7-3}=35\times 0.037\times 0.197=0.256$$

2- احتمال عدم الحصول على 5 أو 6 في أي مرة :

$$P(X=0)=C_7^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{7-0}=\left(\frac{2}{3}\right)^7=(q)^7=0.0585$$

3- احتمال الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة على الأقل :

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=7)=1-P(X=0)=1-C_7^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{7-0}$$

$$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^7=1-(q)^7=1-0.0585=0.9414$$

4- حساب :

أ- توقه التوزيع (الوسط الحسابي) :

$$E(X)=n.p=7.\frac{1}{3}=2.33$$

ب- التباين :

$$V(X)=n.p.q=7.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=1.55$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1.55}=1.24$$

ثالثا : توزيع بواسون

1- التعريف : هو توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ويهتم بالحوادث النادرة، وكذا الأحداث التي تحدث في فترة زمنية أو مكانية محددة، مثل : الحرائق في إحدى المدن، الزلازل، الحوادث على إحدى الطرق، الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب، ... الخ . ويعطينا احتمال عدد مرات ظهور هذه الحوادث النادرة .

فإذا كانت (X) ترمز لعدد مرات ظهور حادثة نادرة، فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع تكون:

$$P(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \quad x=0,1,2,.......,\infty$$

متوسط التوزيع : $\mu=\lambda$ ‏ e = 2.718 (مقدار ثابت) : ونكتب اختصارا $X \rightarrow P(\lambda)$

ويتحدد هذا التوزيع بمعرفة المتوسط λ. وحتى يكون هذا التوزيع احتماليا ، لابد أن يكون :

$$\sum P(x)=\sum\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=1$$

2- الخصائص العددية لتوزيع بواسون :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\mu=\lambda$$

ب- التباين :

$$V(X)=\lambda$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda}$$

مثال 04 : إذا كان معدل حالات الطوارئ في إحدى المستشفيات هو 5 كل يوم، فما احتمال حدوث حالتي طوارئ في أحد الأيام ؟

الحل :

بما أن حالات الطوارئ هو حدث نادر ومرتبط بفترة زمنية معينة، فإن المتغير العشوائي لحالات الطوارئ يتبع توزيع بواسون حيث : $\lambda=5$ وتكون دالته الاحتمالية كما يلي :

$$P(X=x_i)=\frac{e^{-5}(5)^{x_i}}{x_i!}$$

- احتمال حدوث حالتي طوارئ في أحد الأيام :

$$P(X=2)=\frac{e^{-5}(5)^{2}}{2!}=0.084$$

ملاحظة : تجدر الاشارة إلى أن توزيع ذو الحدين يمكن أن يقرب لتوزيع بواسون بحيث تكون $\lambda = np$ وذلك عندما تكون nكبيرة، ويكون p قريب من الصفر (أي أن q=1-p قريب من 1)،بينما [n>30,np<5 or n(1-p)<5] ، وعليه فإننا نعتبر هذا الحدث نادرا، ويكون التوزيع الثنائي قريبا جدا من التوزيع البواسوني الذي يمكن استخدامه كتقريب ممتاز للتوزيع الثنائي.

مثال 05 : إذا كان 2 من بين كل 100 مصباح في إنتاج أحد المصانع معيب، في عينة من 500 مصباح تم إنتاجها بالمصنع خلال أحد الأيام أوجد :

1- احتمال وجود ولا مصباح معيب في العينة؟

2- احتمال وجود مصباح معيب في العينة ؟

3- احتمال وجود مصباحين معيبين في العينة على الأقل ؟

4- القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل :

بما أن احتمال وجود مصباح معيب هو حدث نادر يحدث في فترة زمنية أو مكانية معينة، واحتمال وقوعه ضعيف جدا $p = \frac{2}{100} = 0.02 \leq 0.05$ ، و n كبيرة $(n \geq 30)$ فسوف نستعمل تقريب بواسون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda = np = 500.\frac{2}{100} = 10$. وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!} = \frac{e^{-10}(10)^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,3,\dots,500$$

1- حساب احتمال وجود ولا مصباح معيب في العينة :

$$P(X = 0) = \frac{e^{-10}(10)^0}{0!} = e^{-10} = 0.0000454$$

2- حساب احتمال وجود مصباح معيب في العينة :

$$P(X = 1) = \frac{e^{-10}(10)^1}{1!} = 10.e^{-10} = 0.000454$$

3- حساب احتمال وجود مصباحين على الأقل معيبين :

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \dots + P(X = 500) = 1 - P(X < 2)$$
$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - (0.0000454 + 0.000454) = 0.9995$$

4- حساب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لهذا التوزيع :

أ- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي) :

$$E(X) = \lambda = 10$$

ب- التباين :

$$V(X) = \lambda = 10$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10} = 3.16$$

رابعا : التوزيع الهندسي

1- التعريف : التوزيع الهندسي شبيه بالتوزيع الثنائي من حيث الشروط ، حيث يخص الحوادث الخاضعة لتوزيع برنولي مكررة n مرة ، إلا أننا لا نهتم بعدد حالات تكرار النجاح أو الفشل في التجربة، بل يتعلق الأمر بأول مرة يتحقق فيها نجاح التجربة بعد عدد من المحاولات.

لنأخذ المثال التالي للتوضيح : نرمي قطعة نقدية إلى أن نحصل على صورة. احتمال أن يتطلب ذلك 5 رميات مثلا هو:

P(X= 5) = P(PPPPF)

نعود من جديد إلى تجربة برنولي وهذه المرة نكرر التجربة إلى غاية الحصول على النتيجة أو الحدث المطلوب (نجاح مرة واحدة). المتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد مرات تكرار التجربة (بما فيها المرة التي حصل فيها النجاح) تتبع التوزيع الهندسي. ونكتب اختصارا $X \rightarrow G(\mathrm{p.q})$.

إذا رمزنا لاحتمال النجاح بـ p ولاحتمال الفشل بـ q فإن احتمال أي قيمة لـ X في حالة التوزيع الهندسي يعبر عنها بدالة الاحتمال كما يلي :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{p.q}^{x-1} \qquad x = 1,2,3, \dots, \infty$$

2- الخصائص العددية للتوزيع الهندسي :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \mu = \frac{1}{P}$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{q}{P^2}$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{q}{P^2}}$$

مثال 06 :

نرمي زهرة نرد متوازنة إلى غاية الحصول على رقم يقبل القسمة على 2، أحسب احتمال أن يتطلب ذلك 05 رميات ؟ ثم أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل :

بما أن التجربة تتكرر عدة مرات و X متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات للحصول على رقم يقبل القسمة على 2، وبما أن عدد المحاولات غير معلوم، واحتمال النجاح ثابت P = 0.5 (أي أن احتمال الفشل كذلك ثابت q= 0.5)، فإن X يتبع التوزيع الهندسي، وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X = x) = p.q^{x-1} = (0.5)(0.5)^{x-1} \qquad x = 1,2,3, \dots, \infty$$

1- حساب احتمال أن يتطلب الحصول على رقم يقبل القسمة على 2 خمس رميات :

$$P(X = 5) = (0.5)(0.5)^{5-1} = 0.059049$$

2- حساب :

أ- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي) :

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.5} = 2$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0.5}{(0.5)^2} = 2$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2} = 1.41$$

مثال 07 : يحتوي صندوق على 3 كرات خضراء و 5 كرات حمراء، نقوم بسحب كرة واحدة مع الإعادة من هذا الصندوق فإذا عرفنا المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المحاولات لسحب كرة خضراء.

المطلوب:

1- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟

2- أحسب احتمال أن يتطلب الحصول على كرة خضراء :

أ – خمس محاولات ؟ ب – سبع محاولات ؟

3- إنطلاقا من تحديد قانون التوزيع الخاص بهذا المتغير، أوجد كل من التوقع الرياضي و التباين والانحراف المعياري ؟

الحل:

1- تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

من شروط التجربة هو سحب كرة واحدة مع تسجيل إن كانت خضراء أم حمراء، وهذه التجربة تشبه تجربة بيرنولي، وبما أن التجربة تتكرر عدة مرات و X متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات لسحب كرة خضراء (هنا عدد المحاولات غير معلوم واحتمال نجاح التجربة ثابت أي احتمال الحصول على كرة خضراء $P(V) = \frac{3}{8}$ بينما احتمال الفشل هو احتمال الحصول على كرة حمراء $P(R) = \frac{5}{8}$ وعليه فإن X يتوزع وفق التوزيع الهندسي، حيث تكون دالته الاحتمالية على النحو التالي :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{p.q}^{x-1} = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^{x-1} \qquad x = 1,2,3, \dots, \infty$$

2- حساب احتمال أن يتطلب الحصول على كرة خضراء :

أ- خمس محاولات :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 5) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^{5-1} = 0.05722$$

ب- سبع محاولات :

$$P(X=5)=\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^{7-1}=0.02235$$

3- حساب :

أ- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي) :

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)}=2.666$$

ب- التباين :

$$V(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{\left(\frac{5}{8}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)^2}=4.444$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{4.44}=2.108$$

خامسا : التوزيع فوق الهندسي

1- التعريف : عند دراستنا للتوزيع الثنائي يتضح لنا أن عمليات السحب لتكوين العينة كانت تتم مع إعادة العنصر المسحوب إلى المجتمع، وهذا يترتب عنه أمران، يعتبران بمثابة شرطي تطبيق التوزيع الثنائي، هما :

- أن جميع السحبات (أو التجارب) مستقلة عن بعضها البعض.

- أن احتمال النجاح في تجربة واحدة p ثابت.

لكن هناك بعض الحالات لا يمكن أن يتم فيها السحب مع الإعادة (كإجراء فحص حول الإصابة بمرض معين) وهنا يختل شرطا تطبيق التوزيع الثنائي (استقلال التجارب، وثبات p) فنلجأ إلى تطبيق قانون آخر يسمى قانون فوق الهندسي.

وعليه فإن احتمال عدد ما X من النجاحات من بين n تجربة برنولية غير مستقلة يحسب وفق قانون التوزيع الاحتمالي الذي يعرف بفوق الهندسي التالي :

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \quad X=0,1,2,3,\dots,n \qquad n=1,2,3,\dots$$

ونكتب اختصارا : $X \to H(N,N_1,n)$

حيث :

x : يمثل عدد مرات النجاح

N: حجم المجتمع

N_1: حجم المجتمع الذي تتوفر فيه الخاصية المدروسة

N_2: حجم المجتمع الذي لا تتوفر فيه الخاصية المدروسة

n : عدد التجارب (حجم العينة).

وبالتالي فإن شروط استخدام قانون توزيع فوق الهندسي هي :

أ- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات n؛

ب – السحب يكون دون إرجاع ودفعة واحدة؛

جـ- احتمال النجاح في التجربة غير ثابت (تجارب غير مستقلة).

2- الخصائص العددية للتوزيع فوق الهندسي :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \mu = n.\frac{N_1}{N} = n.p$$

ب- التباين :

$$V(X) = n.p.q(\frac{N-n}{N-1})$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})}$$

مثال 08 : ليكن لدينا صندوق يحتوي على 5 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء، نسحب بدون ارجاع كرية واحدة 3 مرات

1- ما هو احتمال أن تكون كل الكريات الثلاثة المسحوبة بيضاء باستعمال قانون الاحتمالات المركبة وباستعمال قانون التوزيع الاحتمالي ؟

2- ما هو احتمال الحصول على كرية واحدة بيضاء من بين الكريات الثلاثة المسحوبة ؟

3- ما هو احتمال الحصول على كريتين بيضاء على الأقل من الكريات الثلاثة المسحوبة ؟

4- أحسب التوقع والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل :

الملاحظ في هذا المثال هو أن السحب بدون إرجاع.

1- حساب احتمال أن تكون كل الكريات الثلاثة المسحوبة بيضاء :

<u>- نستعمل الطريقة الأولى : (الاحتمالات المركبة)</u>

إذا اعتبرنا أن : A_1 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الأول ، A_2 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الثاني، A_3 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الثالث.

فالإجابة عن السؤال هو حساب احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية والثالثة كذلك بيضاء، ونستعمل قانون الاحتمالات المركبة :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) * P(A_2/A_1) * P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{5}{8} * \frac{4}{7} * \frac{3}{6} = \frac{60}{336} = \frac{5}{28}$$

<u>- نستعمل الطريقة الأولى : (الاحتمالات المركبة)</u>

بما أن التجربة برنولية (مكررة 3 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت السحب بدون ارجاع (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X (عدد الكريات البيضاء المسحوبة) يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات : $X \to H(8,5,3)$

وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x} . C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_5^x . C_3^{3-x}}{C_8^3} \qquad X = 0,1,2,3 \qquad n = 3$$

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3 . C_3^{3-3}}{C_8^3} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

وهي نفس نتيجة الطريقة الأولى .

2- حساب احتمال الحصول على كرية واحدة بيضاء من بين الكريات الثلاثة المسحوبة :

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 . C_3^{3-1}}{C_8^3} = \frac{15}{56}$$

3- حسب احتمال الحصول على كريتين بيضاء على الأقل من الكريات الثلاثة المسحوبة :

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{C_5^2 . C_3^{3-2}}{C_8^3} + \frac{C_5^3 . C_3^{3-3}}{C_8^3} = \frac{30}{56} + \frac{10}{56} = \frac{40}{56} = \frac{5}{7}$$

4- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \mu = n.\frac{N_1}{N} = n.p = 3.\frac{5}{8} = \frac{15}{8} = 1.875$$

ب- التباين :

$$V(X) = n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3.\frac{5}{8}.\frac{3}{8}\left(\frac{8-3}{8-1}\right) = \frac{225}{448} = 0.5022$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})} = \sqrt{0.5022} = 0.7086$$

مثال 09 : تتكون لجنة التنظيم في أحد المسابقات الوطنية الجامعية لاختيار أحسن مؤسسة ناشئة من 4 ذكور و7 إناث، سحبنا بصورة عشوائية لجنة مؤلفة من أربعة أشخاص لاختيار أحسن مشروع في النهائيات، نفرض أن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن اختيار الذكور.

المطلوب : 1- أكتب قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي ؟

2- أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري ؟

الحل :

1- كتابة قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي :

بما أن التجربة برنولية (مكررة 4 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X (عدد الذكور في اللجنة) يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات : $X \to H(11,4,4)$ وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_4^x.C_7^{4-x}}{C_{11}^4} \qquad X = 0,1,2,3,4 \qquad n = 4$$

$$P(X = 0) = \frac{C_4^0.C_7^{4-0}}{C_{11}^4} = 0.106 \quad ,P(X = 1) = \frac{C_4^1.C_7^{4-1}}{C_{11}^4} = 0.424 \quad ,P(X = 2) = \frac{C_4^2.C_7^{4-2}}{C_{11}^4} = 0.38$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3.C_7^{4-3}}{C_{11}^4} = 0.0848 \qquad ,P(X = 4) = \frac{C_4^4.C_7^{4-4}}{C_{11}^4} = 0.003$$

ويمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول التالي :

X	0	1	2	3	4	∑
P(x)	0.106	0.424	0.38	0.0848	0.03	1

2- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\mu=n.\frac{N_1}{N}=n.p=4.\frac{4}{11}=\frac{16}{11}=1.45$$

ب- التباين :

$$V(X)=n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=4.\frac{4}{11}.\frac{7}{11}\left(\frac{11-4}{11-1}\right)=0.64$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})}=\sqrt{0.64}=0.8$$

مثال 10 : (مهم لكيفية التمييز بين التوزيعات الاحتمالية)

حدد طبيعة قانون التوزيع الاحتمالي الموافق للحالات المدروسة التالية، مع التعليل :

1- في مصنع لإنتاج الأجهزة الكهرومنزلية من نوع كوندور، يتم مراقبة الأجهزة الغير صالحة للإنتاج اليومي والمقدر بـ 500 وحدة من أجهزة التلفاز.

2- إجابة طالب (ة) على أسئلة ورقة الامتحان في مقياس الإحصاء 03 .

3- إذا كان 10 % من الطلبة في إحدى الكليات أعسريين (أيسريين)، وطلب من أحد الممولين بالكراسي بأن يضع في كل قاعة دراسية كراسي خاصة بالأعسريين، وكان تعداد الطلبة بالقاعة 02 هو 20 طالب.

4- إجابة طالب (ة) على السؤال الشفوي للأستاذ أثناء المحاضرة.

5- يتلقى مستقبل المكالمات بقسم الطوارئ بمستشفى الزهراوي بولاية المسيلة 5 مكالمات في المتوسط خلال ساعة ما.

6- في مسابقة جهوية للنجاح للحصول على منحة التكوين الإقامي بالخارج يخفق 2 طلبة من بين 100، تقدم للمشاركة في المسابقة هذا العام 500 طالب.

7- في محاولة للحصول على التأشيرة الأوروبية تمكن أحد طالبي التأشيرة من الحصول عليها لأول مرة سنة 2020 بعد 5 محاولات.

8- نرمي زهرة نرد ونبحث عن عدد المحاولات للحصول على الرقم 6.

9- سجل في مركز التعليم المكثف للغات بجامعة المسيلة لهذا العام 500 طالب، من بينهم 350 طالبة و150 طالب، علما أن المركز يستطيع قبول 200 طالب فقط لهذا العام.

10- فوج من الطلبة مكون من 20 طالب و15 طالبة، تم اختيار لجنة من 4 طلبة بشكل عشوائي ودفعة واحدة لتمثيل الفوج في مجلس الإدارة، ونريد معرفة عدد الذكور في اللجنة.

الحل :

يتم تحديد طبيعة قانون التوزيع الاحتمالي الموافق للحالات المشار إليها في هذا التمرين على النحو المبين في الجدول التالي :

الرقم	الحالات المدروسة	نوع التوزيع	التعليل
01	في مصنع لإنتاج الأجهزة الكهرومنزلية من نوع كوندور، يتم مراقبة الأجهزة الغير صالحة للإنتاج اليومي والمقدر بـ 500 وحدة من أجهزة التلفاز.	توزيع ثنائي الحدين $X \to B(n,p)$	- تجربة متكررة عدة مرات (التلفزيونات) - لكل اختبار نتيجتين فقط (التلفاز صالح أو غير صالح) - احتمال التحقق ثابت من عملية إلى أخرى (احتمال أن يكون المصباح غير صالح) - النتائج مستقلة (مراقبة التلفاز الأول مستقل عن الثاني وهكذا)
02	إجابة طالب (ة) على أسئلة ورقة الامتحان في مقياس الإحصاء 03 .	توزيع ثنائي الحدين $X \to B(n,p)$	- تجربة متكررة عدة مرات (تعدد الاسئلة) - لكل اختبار نتيجتين فقط (إجابة صحيحة أو خاطئة) - احتمال الإجابة الصحيحة ثابت في كل سؤال - النتائج مستقلة (الإجابة عن السؤال الأول مستقل عن الثاني وهكذا)

03	إذا كان 10 % من الطلبة في إحدى الكليات أعسريين (أيسريين)، وطلب من أحد الممولين بالكراسي بأن يضع في كل قاعة دراسية كراسي خاصة بالأعسريين، وكان تعداد الطلبة بالقاعة 02 هو 20 طالب.	ثوزيع ثنائي الحدين $X \to B(n,p)$	- تجربة متكررة عدة مرات (عدد الطلبة) - لكل اختبار نتيجتين فقط (طالب أعسر أو غير أعسر) - احتمال النجاح ثابت من عملية إلى أخرى (احتمال أن يكون الطالب أعسر) - النتائج مستقلة (كل طالب مستقل عن الآخر)
04	إجابة طالب (ة) على السؤال الشفوي للأستاذ أثناء المحاضرة.	توزيع بيرنولي $X \to B(1,p)$	- التجربة متكررة مرة واحدة فقط (سؤال واحد) - النتيجة ثنائية، إما صحيحة أو خاطئة.
05	يتلقى مستقبل المكالمات بقسم الطوارئ بمستشفى الزهراوي بولاية المسيلة 5 مكالمات في المتوسط خلال ساعة ما.	توزيع بواسون $X \to P(\lambda)$	- إعتبار الحدث نادر وارتباطه بعنصر الزمن : متوسط عدد المكالمات في الساعة الواحدة.
06	في مسابقة جهوية للنجاح للحصول على منحة التكوين الإقامي بالخارج يخفق 2 طلبة من بين 100، تقدم للمشاركة في المسابقة هذا العام 500 طالب.	توزيع بواسون كتقريب للتوزيع الثنائي $X \to P(\lambda)$ $\lambda = \mathrm{n.p}$	- تجربة متكررة بعدد كبير جدا (500 طالب) - النتيجة ثنائية، إما أن يخفق الطالب أو أن ينجح في المسابقة. - إحتمال النجاح ثابت. - النتائج مستقلة (كل طالب مستقل عن الآخر). - بما أن n كبيرة و P صغيرة، فإننا نستخدم توزيع بواسون كتقريب للتوزيع الثنائي.
07	في محاولة للحصول على التأشيرة الأوروبية تمكن أحد طالبي التأشيرة من الحصول عليها لأول مرة سنة 2020 بعد 5 محاولات.	التوزيع الهندسي $X \to G(\mathrm{p.q})$	- تعدد المحاولات. - إستقلالية التجارب. - الاهتمام بتحقق الحدث لأول مرة.
08	نرمي زهرة نرد ونبحث عن عدد المحاولات للحصول على الرقم 6.	التوزيع الهندسي $X \to G(\mathrm{p.q})$	- تعدد المحاولات. - إستقلالية التجارب. - الاهتمام بتحقق الحدث لأول مرة.
09	سجل في مركز التعليم المكثف للغات بجامعة المسيلة لهذا العام 500 طالب، من بينهم 350 طالبة و150 طالب، علما أن المركز يستطيع قبول 200 طالب فقط لهذا العام.	التوزيع فوق الهندسي $X \to H(N,N_1,n)$	- تجربة مكررة عدد محدد من المرات n. - السحب يكون دون إرجاع ودفعة واحدة (تجارب غير مستقلة).

10	فوج من الطلبة مكون من 20 طالب و15 طالبة، تم اختيار لجنة من 4 طلبة بشكل عشوائي دفعة واحدة لتمثيل الفوج في مجلس الإدارة، ونريد معرفة عدد الذكور في اللجنة.	التوزيع فوق الهندسي $X \to H(N, N_1, n)$	- تجربة مكررة عدد محدد من المرات n. - السحب يكون دون إرجاع ودفعة واحدة (تجارب غير مستقلة).

سادسا : ملخص أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

اسم ورمز القانون	طبيعة المتغير X	صيغة القانون	التوقع E(X)	التباين V(X)
برنولي $X \to B(1,p)$	X متغير عشوائي منفصل يعكس نتائج تجربة برنولي ويأخذ القيمتين 0 أو 1 (1 يعني أن نتيجة التجربة هي النتيجة التي تهمنا أي نجاح، و0 يعني أن النتيجة لا تهمنا أي فشل)	$P(X = x) = p^x q^{1-x}$ X= 0,1	P	p.q
ثنائي الحدين $X \to B(n,p)$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال تكرار تجربة برنولي n مرة مستقلة عن بعضها البعض (السحب مع الإرجاع)	$P(X = x) = C_n^x (p)^x (q)^{n-x}$ $X = 0,1,2,3,4$	n.p	n.p.q
بواسون $X \to P(\lambda)$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات تحقق حدث معين خلال فترة زمنية أو مكانية معينة.	$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!}$ $x = 0,1,2,3, \dots, \infty$	λ	λ
الهندسي $X \to G(p,q)$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد المحاولات لتحقق الحدث (النجاح) أول مرة.	$P(X = x) = p.q^{x-1}$ $x = 1,2,3, \dots, \infty$	$\frac{1}{P}$	$\frac{q}{P^2}$
فوق الهندسي $X \to H(N, N_1, n)$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال تكرار تجربة برنولي n مرة	$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^x . C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$ $x = 0,1,2,3, \dots, n$	$n.\frac{N_1}{N} = n.p$	$n.p.q(\frac{N-n}{N-1})$

	غير مستقلة عن بعضها البعض (السحب دون الإرجاع)			

سابعا : سلاسل التمارين الخاصة بالمحور

حل السلسلة الأولى

(بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة – توزيع برنولي – توزيع ثنائي الحدين)

حل التمرين الأول:

التمرين : إذا كانت نسبة النجاح لطلبة السنة الأولى في مقياس الإحصاء 02 للسنة الماضية هو 40 %، نختار طالبا عشوائيا من طلبة العام الماضي، وليكن X يمثل عدد الطلبة الناجحين.

1- ما هو نوع هذا المتغير؟

2- حدد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير ؟

3- أحسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لهذا المتغير ؟

الحل :

1. نوع المتغير : عدد الطلبة الناجحين x **متغير عشوائي منفصل**، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو :

$X = \{x = 0,1\}$

2- تحديد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير :

بما أن المتغير العشوائي X يحتمل قيمتين فقط (0،1) أو (نجاح وفشل) فهو يتبع توزيع برنولي أي : $X \rightarrow B(1,0.4)$ وتكون دالته الاحتمالية هي :

$$P(X = x) = (p)^x (q)^{1-x} = (0.4)^x (0.6)^{1-x} \qquad X = 0,1$$

و توزيعه الاحتمالي كالتالي :

X	0	1	∑
$P(X=x_i)$	0.6	0.4	1

2- حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \mu = p = 0.4$$

ب- التباين :

$$V(X) = p(1-p) = p.q = 0.4 * 0.6 = 0.24$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q} = \sqrt{0.24} = 0.48$$

حل التمرين الثاني:

التمرين : احتمال أن يكسب الفريق A في أي مباراة يلعبها هو $\left(\frac{2}{3}\right)$، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد مرات الفوز، و لعب الفريق A أربع مباريات :

1- ما هو نوع المتغير؟

2- أكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير ؟

3- أحسب الاحتمالات التالية : أ- أن يكسب الفريق مبارتين بالضبط؟

ب – أن يكسب مبارتين على الأكثر ؟ جـ - أن يكسب مباراة واحدة على الأقل ؟ د – أن يكسب أكثر من نصف المباريات ؟

4 – أحسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الفوز؟

الحل :

1. **نوع المتغير :** عدد مرات الفوز **متغير عشوائي منفصل**، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو : $X = \{x = 0,1,2,3,4\}$

2. شكل دالة التوزيع:

بما أن احتمال النجاح ثابت في كل المحاولات p= 2/3 ، q=1-p =1/3، وبما أن عدد المحاولات معلوم : n=4، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين $X \to B(4,\frac{2}{3})$ الذي دالته الاحتمالية :

$$P(X = x) = C_n^x(p)^x(q)^{n-x} = C_4^x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x} \quad X = 0,1,2,3,4$$

3. حساب الاحتمالات التالية :

أ- أن يكسب الفريق مبارتين بالضبط :

$$P(X = 2) = C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{4-2} = 6 \times 0.444 \times 0.111 = 0.2962$$

ب- أن يكسب مبارتين على الأكثر:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = C_4^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{4-0} + C_4^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{4-1} + 0.2962$$
$$= 0.0123 + 0.0987 + 0.2962 = 0.4072$$

ج- أن يكسب مباراة واحدة على الأقل :

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1 - P(X=0)$$
$$= 1 - C_4^0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^{4-0} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 1 - (q)^4 = 1 - 0.0123 = 0.9877$$

د– أن يكسب أكثر من نصف المباريات :

$$P(X > 2) = P(X=3) + P(X=4) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.4072 = 0.5928$$

4. حساب :

أ- توقع التوزيع (الوسط الحسابي) : $E(X) = n.p = 4.\frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2.66$

ب- التباين : $V(X) = n.p.q = 4.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{8}{9} = 0.88$

ج- الانحراف المعياري : $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.88} = 0.93$

<u>حل التمرين الثالث :</u>

التمرين : إذا كان الامتحان يتكون من 10 أسئلة، وكان احتمال أن يجيب الطالب على أي سؤال عشوائي هو 0.2 ، أوجد الاحتمالات التالية :

1- ألا يجيب الطالب على أي سؤال ؟

2- أن يجيب على كل الأسئلة ؟

3- أن يجيب على سؤال أو أكثر ؟

4- أن يجيب على 3 أسئلة فقط ؟

5- ما هي القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الإجابات ؟

الحل :

- عدد مرات الإجابة على الأسئلة **متغير عشوائي منفصل**، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو :

$$X = \{x = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

-شكل دالة التوزيع:

بما أن احتمال النجاح ثابت في كل المحاولات p= 0.2 ، q=1-p =0.8، وبما أن عدد المحاولات معلوم : n = 10، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين $X \rightarrow B(10,0.2)$ الذي دالته الاحتمالية :

$$P(X = x) = C_n^x (p)^x (q)^{n-x} = C_{10}^x (0.2)^x (0.8)^{10-x} \quad X = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$$

1- حساب أحتمال ألا يجيب الطالب على أي سؤال :

$$P(X = 0) = C_{10}^0 (0.2)^0 (0.8)^{10-0} = (0.8)^{10} = (q)^{10} = 0.1073$$

2- حساب احتمال أن يجيب على كل الأسئلة :

$$P(X=10)=C_{10}^{10}(0.2)^{10}(0.8)^{10-10}=(0.2)^{10}=(p)^{10}=0.0000001024$$

3- حساب احتمال أن يجيب على سؤال أو أكثر :

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=10)=1-P(X=0)=1-0.1073=0.8927$$

4- حساب احتمال أن يجيب على 3 أسئلة فقط :

$$P(X=3)=C_{10}^{3}(0.2)^{3}(0.8)^{10-3}=120(0.2)^{3}(0.8)^{7}=0.2013$$

5. حساب :

أ- القيمة المتوقعة لعدد الإجابات (الوسط الحسابي) : $E(X)=n.p=10\times 0.2=2$

ب- التباين : $V(X)=n.p.q=10\times 0.2\times 0.8=1.6$

ج- الانحراف المعياري لعدد الإجابات : $\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1.6}=1.26$

حل التمرين الرابع :

التمرين : احتمال أن يصيب الرجل الهدف هو $\left(\frac{1}{4}\right)$ في احدى مسابقات الرماية، إذا أطلق الرجل 7 مرات :

1- ما هو احتمال أن يصيب الرجل الهدف على الأقل مرتين ؟

2- كم مرة يجب أن يطلق على الهدف لكي يكون احتمال أن يصيب الهدف على الأقل مرة واحدة أكبر من $\left(\frac{2}{3}\right)$ ؟

الحل :

- عدد مرات إصابة الهدف **متغير عشوائي منفصل**، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو :

$$X=\{x=0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

- **شكل دالة التوزيع :**

بما أن احتمال النجاح ثابت في كل المحاولات $p=\left(\frac{1}{4}\right)$ ، $q=1-p=\left(\frac{3}{4}\right)$، وبما أن عدد المحاولات معلوم : $n=7$، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين $X\to B\left(7,\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ الذي دالته الاحتمالية :

$$P(X=x)=C_n^x(p)^x(q)^{n-x}=C_7^x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{7-x}\qquad X=0,1,2,3,4,5,6,7$$

1- حساب احتمال أن يصيب الرجل الهدف على الأقل مرتين :

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=7)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

$$=1-\left[C_7^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{7-0}+C_7^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{7-1}\right]=1-(0.1334+0.3114)=0.5552$$

2- حساب كم مرة يجب أن يطلق على الهدف لكي يكون احتمال أن يصيب الهدف على الأقل مرة واحدة أكبر من $\left(\frac{2}{3}\right)$:

- احتمال عدم إصابة الهدف هو $(q)^n$ ، ولذلك يجب أن نبحث عن أصغر عدد n بحيث تكون $(q)^n$ أقل من $1-\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)$

حيث $q=1-p=\left(\frac{3}{4}\right)$ ، ولذلك سوف نبحث عن القوى المتتالية للعدد q (أو أصغر n) حتى يكون : $q^n<\frac{1}{3}$

$$q^1=\frac{3}{4}>\frac{1}{3}\ ,\quad q^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}>\frac{1}{3}\ ,\quad q^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}>\frac{1}{3}\ ,\quad q^4=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}<\frac{1}{3}$$

ولذلك يجب أن يطلق 4 مرات على الهدف لكي يكون احتمال أن يصيب الهدف على الأقل مرة واحدة أكبر من $\left(\frac{2}{3}\right)$.

حل السلسلة الثانية

(بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة – توزيع بواسون – التوزيع الهندسي - التوزيع فوق الهندسي)

حل التمرين الأول:

التمرين: تشير الخبرة السابقة أنه في المتوسط يتوقف 6 عملاء كل ساعة للتزود بالبنزين عند محطات البنزين " البركة "، ما هو احتمال :

1- توقف 3 عملاء في ساعة ما ؟

2- توقف 3 عملاء أو أقل في ساعة ما ؟

3- توقف 4 عملاء على الأقل في ساعة ما ؟

4- ما هي القيمة المتوقعة أو الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل :

بما أن احتمال توقف السيارات للتزود بالوقود هو متغير عشوائي منفصل، وبما أنه حدث نادر يحدث في فترة زمنية ومكانية معينة، فإن " X : المتغير العشوائي الذي يعبر عن توقف السيارات للتزود بالوقود" يتبع توزيع بواسون بالمتوسط $\lambda=6$ ، وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!}=\frac{e^{-6}(6)^x}{x!} \qquad x=0,1,2,3,\dots,\infty$$

1- حساب احتمال توقف 3 عملاء في ساعة ما :

$$P(X=3)=\frac{e^{-6}(6)^3}{3!}=\frac{(0.00248)(216)}{6}=0.08928$$

2 - حساب احتمال توقف 3 عملاء أو أقل في ساعة ما :

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\frac{e^{-6}(6)^0}{0!}+\frac{e^{-6}(6)^1}{1!}+\frac{e^{-6}(6)^2}{2!}+0.08928$$
$$=0.00248+0.01488+0.04464+0.08928=0.15128$$

3- حساب احتمال توقف 4 عملاء على الأقل في ساعة ما :

$$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)+\cdots+P(X=\infty)=1-P(X<4)$$
$$=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]=1-0.15128=0.84872$$

4- حساب القيمة المتوقعة أو الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع :

أ- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي) :

$$E(X)=\lambda=6$$

ب- التباين :

$$V(X) = \lambda = 6$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{6} = 2.44$$

حل التمرين الثاني :

التمرين :

لنفرض أن عدد حالات الهجرة الغير شرعية هي حالتان في العام في مدينة بها 50000 مواطن. في مدينة أخرى بها 100000 مواطن :

1- أوجد احتمال أن تكون عدد حالات الهجرة الغير شرعية في عام معين :

أ- صفر ب – حالة واحدة ج- حالتين د- حالتين على الأقل .

2- أوجد احتمال أن تكون عدد حالات الهجرة الغير شرعية عن طريق توزيع ثنائي الحدين :

أ- صفر ب- حالة واحدة ج- ماذا تستنتج ؟

الحل :

بما أن احتمال وقوع الهجرة الغير شرعية هو متغير عشوائي منفصل، وبما أنه حدث نادر يحدث في فترة زمنية أو مكانية معينة واحتمال وقوعه ضعيف جدا $p = \frac{2}{50000} = 0.00004 \leq 0.05$ ، و n كبيرة ($n \geq 30$) فسوف نستعمل تقريب بواسون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda = np = 100000.\frac{2}{50000} = 4$ وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!} = \frac{e^{-4}(4)^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,3, \dots ,100000$$

1- إيجاد احتمال أن تكون عدد حالات الهجرة الغير شرعية في عام معين :

أ – صفر:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-4}(4)^0}{0!} = e^{-4} = 0.0183$$

ب– حالة واحدة :

$$P(X = 1) = \frac{e^{-4}(4)^1}{1!} = 4.e^{-4} = 0.0732$$

ج – حالتين:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-4}(4)^2}{2!} = 8.e^{-4} = 0.1465$$

د– حالتين على الأقل :

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots + P(X = 100000) = 1 - P(X < 2)$$
$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - (0.0183 + 0.0732) = 0.9085$$

2- ايجاد احتمال أن تكون عدد حالات الهجرة الغير شرعية عن طريق توزيع ثنائي الحدين :

أ- صفر:

بما أن عدد المحاولات معلوم (n=100000) ، واحتمال النجاح ثابت في كل تجربة $(p = \frac{2}{50000} = 0.00004)$ (التجارب مستقلة) فإنه يمكننا استخدام توزيع ثنائي الحدين لحساب الاحتمالات المطلوبة، وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{x}(\mathrm{p})^{x}(\mathrm{q})^{\mathrm{n}-x} = \mathrm{C}_{100000}^{x}(0.00004)^{x}(0.99996)^{100000-x} \qquad x = 0,1,2,3,..,100000$$

$$P(X = 0) = \mathrm{C}_{100000}^{0}(0.00004)^{0}(0.99996)^{100000-0} = 0.0183$$

ب – حالة واحدة :

$$P(X = 1) = \mathrm{C}_{100000}^{1}(0.00004)^{1}(0.99996)^{100000-1} = 0.0732$$

ج - الاستنتاج : نلاحظ أن هناك نفس النتائج في حالة الحساب بتوزيع بواسون أو توزيع ثنائي الحدين، وعليه يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين من توزيع بواسون، وذلك عندما تكون p صغيرة و n كبيرة، وعموما نقوم بالتقريب إذا تحقق : $p \leq 0,05$ و $n \geq 30$.

<u>حل التمرين الثالث :</u>

<u>التمرين :</u>

إذا علمت أن احتمال نجاح شخص معين في مسابقة الدكتوراه هو 10 بالمائة، فإذا اجتاز شخص معين المسابقة عدة مرات، وعرف المتغير العشوائي X بأنه يمثل عدد المحاولات للنجاح في مسابقة الدكتوراه.

1- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟

2- ما هو احتمال أن ينجح في :

أ- المرة الثالثة ؟ ب – المرة الرابعة ؟ ج- المرة الخامسة ؟

3- أوجد التوقع والانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي ؟

الحل :

1- تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

بما أن التجربة تتكرر عدة مرات و X متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات للنجاح في مسابقة الدكتوراه، وبما أن عدد المحاولات غير معلوم، واحتمال النجاح ثابت P = 0.1 (أي أن احتمال الفشل كذلك ثابت q= 0.9)، فإن X يتبع التوزيع الهندسي، وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X = x) = p.q^{x-1} = (0.1)(0.9)^{x-1} \qquad x = 1,2,3,\dots,\infty$$

2- حساب احتمال أن ينجح في :

أ – المرة الثالثة :

$$P(X = 3) = (0.1)(0.9)^{3-1} = 0.081$$

ب – المرة الرابعة :

$$P(X = 4) = (0.1)(0.9)^{4-1} = 0.0729$$

ج – المرة الخامسة :

$$P(X = 5) = (0.1)(0.9)^{5-1} = 0.06561$$

3- حساب :

أ- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي) :

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0.9}{(0.1)^2} = 90$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{90} = 9.48$$

حل التمرين الرابع :

التمرين :

يضم فوج في السنة أولى جدع مشترك بكلية العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير 30 طالب منهم 10 طلاب حاصلين على بكالوريا شعبة علوم، فإذا قرر أستاذ مقياس المحاسبة 01، إختيار ثلاثة (3) طلاب بطريقة عشوائية من الفوج لتكليفهم بتحضير حل تمرين معين من السلسلة للحصة المقبلة، والمطلوب :

1- أوجد قيم الاحتمالات التالية ؛

أ . احتمال أن يكون أحد الطلاب حاصل على بكالوريا شعبة علوم؟ ب. احتمال أن يكون طالب على الأقل حاصل على بكالوريا شعبة علوم؟ جـ . احتمال أن يكون ولا طالب حاصل على بكالوريا شعبة علوم؟ د. احتمال أن يكون الطلاب المختارين حاصلين على بكالوريا شعبة علوم؟

2. أحسب التوقع الرياضي والإنحراف المعياري لإختيار طلاب حاصلين على بكالوريا شعبة علوم ؟

3. بفرض أن مجموع الطلاب الحاصلين على بكالوريا علوم في الدفعة هو 60 طالب من أصل 800 طالب لهذه السنة، فما احتمال إختيار ثلاثة طلاب بطريقة عشوائية لإستجوابهم عن صعوبات المقياس (إختيار في آن واحد)؟

الحل :

بما أن التجربة برنولية (مكررة 3 مرات)، وعملية اختيار الطلبة تتم في آن واحد، فهذا يعني أن التجارب غير مستقلة، وبالتالي فإن المتغير العشوائي X (عدد الطلبة الحاصلين على بكالوريا شعبة علوم) يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات : $X \rightarrow H(30,10,3)$ وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$P(X=x)=f(x)=\frac{C_{N_1}^{x}.\,C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

حيث : $N=30,\quad N_1=10,\quad N_2=20,\quad n=3,\quad x=0,1,2,3$

أي أن القانون الاحتمالي لهذا التوزيع يعرف كما يلي :

$$P(X=x)=f(x)=\frac{C_{10}^{x}.\,C_{20}^{3-x}}{C_{30}^{3}}$$

1- أيجاد قيم الاحتمالات التالية :

أ . احتمال أن يكون أحد الطلاب حاصل على بكالوريا شعبة علوم :

$$P(X=1)=\frac{C_{10}^{1}.C_{20}^{3-1}}{C_{30}^{3}}=\frac{10.190}{4060}=0.468$$

ب. احتمال أن يكون طالب على الأقل حاصل على بكالوريا شعبة علوم :

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{C_{10}^{1}.C_{20}^{3-1}}{C_{30}^{3}}+\frac{C_{10}^{2}.C_{20}^{3-2}}{C_{30}^{3}}+\frac{C_{10}^{3}.C_{20}^{3-3}}{C_{30}^{3}}$$
$$=\frac{1900+900+120}{4060}=0.7192$$

* وباستخدام الاحتمال المتمم، نحصل على النتيجة التالية :

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\frac{C_{10}^{0}.C_{20}^{3-0}}{C_{30}^{3}}=1-\frac{1140}{4060}=0.7192$$

ج. احتمال أن يكون ولا طالب حاصل على بكالوريا شعبة علوم :

$$P(X=0)=\frac{C_{10}^{0}.C_{20}^{3-0}}{C_{30}^{3}}=\frac{1140}{4060}=0.2807$$

د. احتمال أن يكون الطلاب المختارين حاصلين على بكالوريا شعبة علوم :

$$P(X=3)=\frac{C_{10}^{3}.C_{20}^{3-3}}{C_{30}^{3}}=\frac{120}{4060}=0.0295$$

2- حساب التوقع والانحراف المعياري لإختيار طلاب حاصلين على بكالوريا شعبة علوم:

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\mu=n.\frac{N_1}{N}=n.p=3.\frac{10}{30}=1$$

ب- التباين :

$$V(X)=n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=3.\frac{10}{30}.\frac{20}{30}\left(\frac{30-3}{30-1}\right)=0.62$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})}=\sqrt{0.62}=0.78$$

بما أن التجربة برنولية (مكررة 3 مرات)، وعملية اختيار الطلبة تتم في آن واحد، فهذا يعني أن التجارب غير مستقلة، بحيث أن احتمال إختيار طالب يؤثر على احتمال إختيار الطالب الذي بعده، وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي المناسب لهذا المتغير العشوائي X هو التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات : $X \to H(800,60,3)$ وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$P(X = x) = f(x) = \frac{C_{N_1}^{x} . C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

حيث : $N = 800, \quad N_1 = 60, \quad N_2 = 740, \quad n = 3, \quad x = 0,1,2,3$

أي أن القانون الاحتمالي لهذا التوزيع يعرف كما يلي :

$$P(X = x) = f(x) = \frac{C_{60}^{x} . C_{740}^{3-x}}{C_{800}^{3}}$$

ويأخذ قانون الاحتمال الشكل التالي :

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X = x_i)$	0.7912	0.193	0.0154	0.0004	1

المحور الثاني

أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

تمهيد :

كما لاحظنا في المحور الأول، أن هناك توزيعات خاصة للمتغيرات العشوائية المتقطعة، فإننا سوف نستعرض في هذا المحور بعض التوزيعات الخاصة للمتغير العشوائي المتصل، والتي لها أهمية كبيرة في التطبيقات الإحصائية التي ستدرس في مراحل متقدمة.

وسنحاول إعطاء بعض الأمثلة التوضيحية لكل توزيع ليكون الطالب على دراية في طريقة التوصل إلى بعض الاشتقاقات المهمة، وليكون فكرة جيدة عن خصائص كل توزيع.

فيما يلي بعض التوزيعات للمتغير العشوائي المستمر، مع أهم الخصائص المتعلقة بكل توزيع :

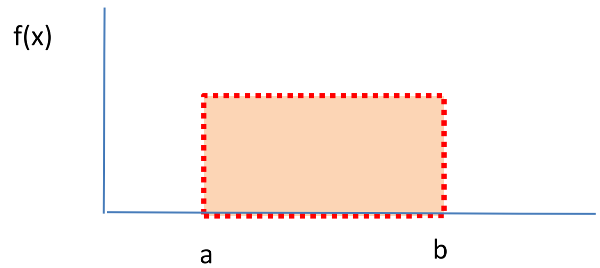
أولا : التوزيع المنتظم (Uniform distribution)

1- التعريف :

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم، فإذا كان المتغير العشوائي المستمر X له توزيع منتظم، ويأخذ مجالا معينا من مجموعة الأعداد الحقيقية، بحيث $x \in [a; b] \quad (a < b)$ ، فإن دالة كثافة احتماله هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ x \in [a; b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ومن معالم التوزيع فإنه توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (a, b) ولذا يكتب رمز هذا التوزيع بالصورة $X \backsim \mathbb{U}(a; b)$، ويسمى أحيانا بالتوزيع المستطيل، لأن يمثل بيانيا على شكل مستطيل كما يلي :



أما دالة التوزيع الاحتمالية F(x) (التراكمية) فتكتب بالصورة التالية :

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \le x \le b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

2- الخصائص العددية للتوزيع المنتظم (المستمر) :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

مثال 01 : يتبع المتغير العشوائي X التوزيع المنتظم بالمعلمات $X \sim \mathbb{U}(0;6)$ أوجد :

1- دالة كثافة الاحتمال f(x) ثم دالة التوزيع التراكمي F(x) لهذا المتغير ؟

2- $P(2 \le X \le 5)$ ، $P(X \le 4)$ ، $P(X > 3)$ ؟

3- التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير ؟

الحل :

1- أ إيجاد دالة كثافة الاحتمال f(x) لهذا المتغير:

X متغير عشوائي مستمر يأخذ المجال $[0;6]$ ويتبع التوزيع المنتظم، فتكون دالة كثافة احتماله على النحو التالي :

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{6-0} = \frac{1}{6} \qquad x \in [0;6]$$

1- ب دالة التوزيع التراكمي F(x) لهذا المتغير:

تعطى هذه الدالة وفق الصياغة التالية :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

وبتعويض المدى الخاص بالمتغير العشوائي X، تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{6} & si \quad 0 \leq x \leq 6 \\ 1 & si \quad x > 12 \end{cases}$$

2- حساب :

$$* P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2) = \tfrac{5}{6} - \tfrac{2}{6} = \tfrac{3}{6} = 0.5$$

$$* P(X \leq 4) = F(4) - F(0) = \tfrac{4}{6} - \tfrac{0}{6} = \tfrac{4}{6} = 0.66$$

$$* P(X > 3) = F(6) - F(3) = \tfrac{6}{6} - \tfrac{3}{6} = \tfrac{3}{6} = 0.5$$

3- حساب :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{6+0}{2} = 3$$

ب- التباين :

$$V(X) = \tfrac{(b-a)^2}{12} = \tfrac{(6-0)^2}{12} = 6$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{6} = 2.44$$

مثال 2 : قطار يصل إلى المحطة الساعة الحادية عشر صباحا، فإذا كان وقت وصول القطار يتبع التوزيع المنتظم وكان النتغير العشوائي X الذي يعبر عن وقت وصول القطار يأخذ قيما بين 10:50 و 11:10 ، والمطلوب :

1- أوجد دالة كثافة الاحتمال f(x) ثم دالة التوزيع التراكمي F(x) لهذا المتغير ؟

2- أحسب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة بعد 3 دقائق على الأكثر من الوقت المحدد له ؟

3- أحسب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة قبل 5 دقائق على الأقل من الوقت المحدد له ؟

الحل :

1- أ إيجاد دالة كثافة الاحتمال f(x) لهذا المتغير:

X متغير عشوائي مستمر يأخذ المجال $[10.50; 11.10]$ ويتبع التوزيع المنتظم، فتكون دالة كثافة احتماله على النحو التالي:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{11.10 - 10.50} = \frac{1}{20} \qquad x \in [10.50; 11.10]$$

1- ب دالة التوزيع التراكمي F(x) لهذا المتغير:

تعطى هذه الدالة وفق الصياغة التالية :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

وبتعويض المدى الخاص بالمتغير العشوائي X، تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 10.50 \\ \dfrac{x-10.50}{20} & si \quad 10.50 \leq x \leq 11.10 \\ 1 & si \quad x > 11.10 \end{cases}$$

2- حساب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة بعد 3 دقائق على الأكثر من الوقت المحدد له :

بعد 3 دقائق من الوقت المحدد معناه 11.03 أي أن الاحتمال المطلوب هو :

$$P(X \leq 11.03) = F(11.03) - F(10.50) = \frac{11.03-10.50}{20} - \frac{10.50-10.50}{20} = \frac{13}{20} = 0.65$$

3- حساب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة قبل 5 دقائق على الأقل من الوقت المحدد له :

قبل 5 دقائق من الوقت المحدد معناه 10.55 أي أن الاحتمال المطلوب هو :

$$P(X \geq 10.55) = F(11.10) - F(10.55) = \frac{11.10-10.50}{20} - \frac{10.55-10.50}{20} = \frac{20}{20} - \frac{5}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0.75$$

ثانيا : التوزيع الطبيعي (Normal distribution)

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استعمالا على الإطلاق، بل إنه يحتل موضع الصدارة في الاحتمالات والإحصاء، وقد اشتق اسمه من أن كثيرا من التوزيعات " الطبيعية " تأخذ شكلا قريبا منه، كذلك فإن معظم التوزيعات البيومترية (كتوزيعات الطول والوزن) وتوزيعات أخطاء المشاهدات (الفروق بين القيم الحقيقية والقيم المشاهدة) تأخذ شكلا قريبا منه، ويستخدم هذا التوزيع في كثير من التجارب الصناعية واختبارات الجودة وله استخدامات واسعة في اختبارات الفروض والعينات الكبيرة وتوزيعات المعاينة وغيرها .

نميز في هذا التوزيع بين قانونين، قانون التوزيع الطبيعي العام وقانون التوزيع الطبيعي المعياري.

1- القانون الطبيعي العام : $X \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$

التعريف : هو توزيع مستمر يأخذ شكل منحنى متماثل ذو قمة واحدة، ويمتد طرفاه إلى ∞ ، وقد وجد أن معظم التوزيعات مثل الأوزان – الأطوال – الأعمار ...الخ. تأخذ شكلاً قريبا من المنحنى الطبيعي.

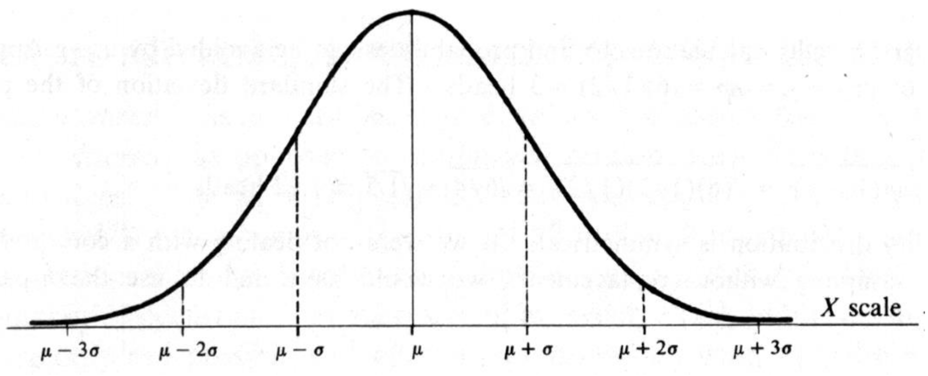
إذا كان X متغير عشوائي مستمر (متصل) دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

حيث : **e :** constant=2.718 ، **π:** constant=3.14 ، $\mu \in R$ ، $\sigma > 0$

يقال إن X يتبع توزيع طبيعي عادي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ ويكتب باختصار $X \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$

- التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي العام هو منحنى متناظر ، غير مفرطح وغير مدبب، كما يلي:



- دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ هي كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

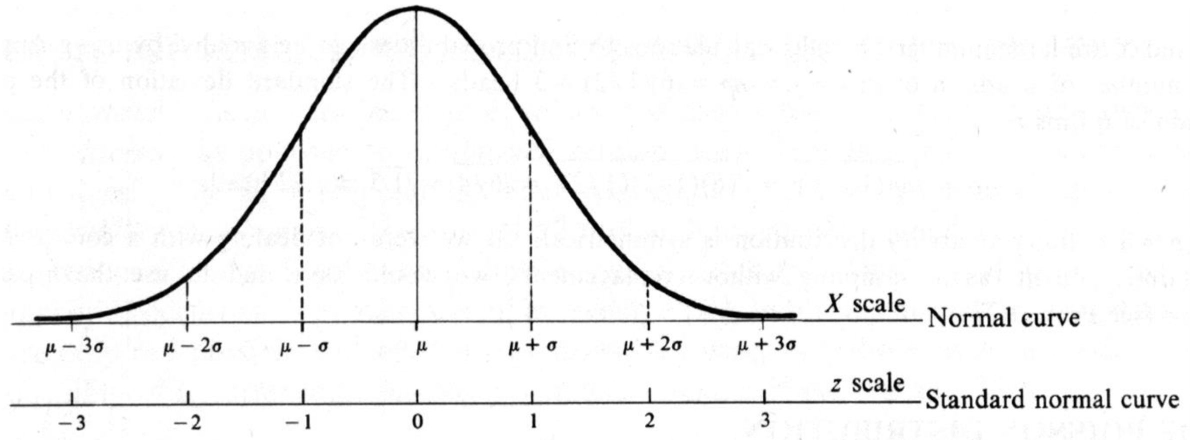
بحيث $f(x)$ تأخذ الصيغة السابقة، إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ $P(X \leq x)$، إلا أن الحساب عمليا لا يتم كذلك نظرا للشكل المعقد لدالة الكثافة الاحتمالية، أين يصعب حساب الدالة الأصلية لها، فنلجأ إلى تحويل رياضي لتبسيط صيغة دالة الكثافة الاحتمالية.

- **ملاحظة:** من خلال ما سبق نلاحظ أن للقانون الطبيعي نفس خواص أي متغير عشوائي متصل، إلا أنه من الناحية التطبيقية وبالخصوص حساب الاحتمالات لا يمكن التطبيق المباشر لقواعد حساب المساحات، لأن صيغة دالة الكثافة الاحتمالية معقدة ويصعب مكاملتها، وعليه نلجأ إلى تبسيطها فنحصل على قانون آخر يدعى : القانون الطبيعي المعياري.

2- القانون الطبيعي المعياري (القياسي): $\mathbb{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$

التعريف : بوضع $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ في دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي العادي (أي في صورته العامة)، نجد أنه يتحول إلى توزيع طبيعي معياري، متوسطه $\mu = 0$ ، انحرافه المعياري $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1}$ ، ويكتب $Z \backsim \mathbb{N}(0,1)$.

وتصبح دالة كثافته الاحتمالية: $-\infty \leq z \leq \infty$ $\quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$



وقد وضعت جداول توضح المساحة أسفل المنحنى (الاحتمال) وهذه الجداول [جدول (z)] تستخدم بشرط أن تكون المسألة في صورة توزيع طبيعي عادي X أي: $\mu \neq 0 \;\;,\;\; \sigma \neq 1$ ونحولها إلى توزيع طبيعي معياري Z أي: $\mu = 0 \;\;,\;\; \sigma = 1$ بالتحويلة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

مثال 02 :

من خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي أوجد الاحتمالات التالية :

1- $P(0 < z < 2)$ 2- $P(0 < z < 1.55)$ 3- $P(-3.31 < z < 0)$ 4- $P(z < 2)$ 5- $P(z < 2.58)$

6- $P(z > 2)$ 7- $P(z > -1.53)$ 8- $P(z > -3.14)$ 9- $P(-2 < z < 2)$ 10- $P(-1.66 < z < 3.25)$

11- $P(1.5 < z < 2.65)$ 12- $P(-2.4 < z < -1.49)$ 13- $P(|z-2| \leq 0.82)$

الحل:

1- $P(0 < z < 2) = 0.4772$

2- $P(0 < z < 1.55) = 0.4394$

3- $P(-3.31 < z < 0) = 0.4995$

4- $P(z < 2) = 0.5 + P(0 < z < 2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$

5- $P(z < 2.58) = 0.5 + P(0 < z < 2.58) = 0.5 + 0.4951 = 09951$

6- $P(z > 2) = 0.5 - P(0 < z < 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

7- $P(z > -1.53) = 0.5 + P(-1.53 < z < 0) = 0.5 + 0.4394 = 0.9394$

8- $P(z > -3.14) = 0.5 + P(-3.14 < z < 0) = 0.5 + 0.4992 = 0.9992$

9- $P(-2 < z < 2) = P(-2 < z < 0) + P(0 < z < 2) = 0.4772 + 0.4772 = 0.9544$

10- $P(-1.66 < z < 3.25) = P(-1.66 < z < 0) + P(0 < z < 3.25) = 0.4515 + 0.4994 = 0.9509$

11- $P(1.5 < z < 2.65) = P(0 < z < 2.65) - P(0 < z < 1.5) = 0.4960 - 0.4332 = 0.0628$

12- $P(-2.4 < z < -1.49) = P(-2.4 < z < 0) - P(0 < z < -1.49) = 0.4918 - 0.4319 = 0.0599$

13- $P(|z-2| \leq 0.82) = P(-0.82 \leq z-2 \leq 0.82) = P(2-0.82 \leq z \leq 2+0.82)$

$= P(1.18 \leq z \leq 2.82) = P(0 \leq z \leq 2.82) - P(0 \leq z \leq 1.18) = 0.4980 - 0.3810 = 0.117$

مثال 03 : إذا كان العمر الافتراضي لأحد الأنواع من البطاريات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 1500 ساعة وانحراف معياري يقدر بـ 100 ساعة، أوجد :

1- دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع ؟

2- احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أكبر من 1650 ساعة ؟

3- احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أقل من 1600 ساعة ؟

4- احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات على الأقل 1300 ساعة ؟

5- احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1550 ساعة و 1650 ساعة ؟

6- احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1450 ساعة و 1700 ساعة ؟

7- قيمة العمر الافتراضي للربيع الثالث Q_3 والعشير الرابع P_4 ؟

الحل :

1- كتابة دالة الاحتمال لهذا التوزيع :

X متغير عشوائي مستمر، يتبع توزيع طبيعي عادي بمتوسط(ساعة $\mu = 1500$)، وانحرافه المعياري ($\sigma =$ ساعة 100). ونكتب $X \sim \mathbb{N}(1500,1000)$ وعليه تكون دالة كثافته الاحتمالية على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1500}{100}\right)^2} \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

ولأجل حساب أي احتمال نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي Z بالتحويلة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-1500}{100}$

2- حساب احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أكبر من 1650 ساعة :

$$P(X > 1650) = P\left(Z > \frac{1650-1500}{100}\right) = P(Z > 1.5) = 0.5 - P(0 < Z < 1.5)$$
$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

3- حساب احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أقل من 1600 ساعة :

$$P(X < 1600) = P\left(Z < \frac{1600-1500}{100}\right) = P(Z < 1) = 0.5 + P(0 < Z < 1)$$
$$= 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

4- حساب احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات على الأقل 1300 ساعة :

$$P(X \geq 1300) = P\left(Z \geq \frac{1300-1500}{100}\right) = P(Z \geq -2) = 0.5 + P(-2 < Z < 0)$$
$$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

5- حساب احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1550 ساعة و1650 ساعة :

$$P(1550 < X < 1650) = P\left(\frac{1550-1500}{100} < Z < \frac{1650-1500}{100}\right)$$
$$= P(0.5 < Z < 1.5) = P(0 < Z < 1.5) - P(0 < Z < 0.5)$$
$$= 0.3432 - 0.1915 = 0.1517$$

6- حساب احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1450 ساعة و1700 ساعة :

$$P(1450 < X < 1700) = P\left(\frac{1450 - 1500}{100} < Z < \frac{1700 - 1500}{100}\right)$$
$$= P(-0.5 < Z < 2) = P(-0.5 < Z < 0) + P(0 < Z < 2)$$
$$= 0.1915 + 0.4772 = 0.6687$$

7- ايجاد قيمة العمر الافتراضي للربيع الثالث Q_3 والعشير الرابع D_4:

أ- Q_3 هو العمر الافتراضي للبطاريات الذي يقل عنه أو يساويه 75 % من الأعمار الافتراضية ويقابل معياريا القيمة a والتي تحقق :

$$P(Z < a) = 75\% = 0.75$$

ومنه a التي تحقق العلاقة $P(Z < a) = 75\% = 0.75$ هي نفس a التي تحقق العلاقة :

$$P(0 < Z < a) = 0.25$$

وعليه فإن قيمة a القريبة والتي تحق هذه المعادلة هي : a=0.67 وبناءا عليه نجد قيمة الربيع الثالث كالتالي :

$$a = 0.67 = \frac{Q_3 - 1500}{100} \Rightarrow Q_3 = 100 \times 0.67 + 1500 \Rightarrow Q_3 = 1567 \text{ ساعة}$$

ب- D_4 هو العمر الافتراضي للبطاريات الذي يقل عنه أو يساويه 40 % من الأعمار الافتراضية ويقابل معياريا القيمة b والتي تحقق :

$$P(Z < b) = 40\% = 0.4$$

ومنه b التي تحقق العلاقة $P(Z < b) = 40\% = 0.4$ هي نفس b التي تحقق العلاقة :

$$P(b < Z < 0) = 0.1$$

وعليه فإن قيمة b القريبة والتي تحق هذه المعادلة هي : b= -0.25 وبناءا عليه نجد قيمة العشير العاشر كالتالي :

$$b = -0.25 = \frac{D_4 - 1500}{100} \Rightarrow D_4 = 100 \times -0.25 + 1500 \Rightarrow D_4 = 1475 \text{ ساعة}$$

مثال 04 : وجد أن الفترة الزمنية الضرورية لإنجاز اختبار للذكاء لطلبة إحدى الكليات يتوزع احتماليا وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 70 دقيقة وتباين يساوي 144 دقيقة.

1- أكتب دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع الاحتمالي ؟

2- ما هو احتمال أن يفوق زمن الاختبار 85 دقيقة ؟

3- ما هو احتمال أن يقل زمن الاختبار عن 60 دقيقة ؟

4- ما هو احتمال أن يتراوح زمن الاختبار بين 50 و 65 دقيقة ؟

5- كم يجب أن نحدد زمنا للاختبار إن أردنا إتاحة وقت كاف لـ 90 % من الطلاب لإتمام الاختبار ؟

الحل :

1- كتابة دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع الاحتمالي :

X متغير عشوائي مستمر، يتبع توزيع طبيعي عادي بمتوسط(دقيقة$\mu = 70$)، وانحرافه المعياري (دقيقة $\sigma = \sqrt{144} = 12$). ونكتب $\boldsymbol{X \sim \mathbb{N}(70, 144)}$ وعليه تكون دالة كثافته الاحتمالية على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = f(x) = \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-70}{12}\right)^2} \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

ولأجل حساب أي احتمال نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي Z بالتحويلة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-70}{12}$

2- حساب احتمال أن يفوق زمن الاختبار 85 دقيقة :

$$P(X > 85) = P\left(Z > \frac{85-70}{12}\right) = P(Z > 1.25) = 0.5 - P(0 < Z < 1.25)$$
$$= 0.5 - 0.3944 = 0.1056$$

3- حساب احتمال أن يقل زمن الاختبار عن 60 دقيقة :

$$P(X < 60) = P\left(Z < \frac{60-70}{12}\right) = P(Z < -0.83) = 0.5 - P(-0.83 < Z < 0)$$
$$= 0.5 - 0.2967 = 0.2033$$

4- حساب احتمال أن يتراوح زمن الاختبار بين 50 و 65 دقيقة :

$$P(50 < X < 65) = P\left(\frac{50-70}{12} < Z < \frac{65-70}{12}\right) = P(-1.66 < Z < -0.41)$$
$$= P(-1.66 < Z < 0) - P(-0.41 < Z < 0) = 0.4515 - 0.1591$$
$$= 0.2924$$

5- حساب الزمن المحدد للاختبار إن أردنا إتاحة وقت كاف لـ 90 % من الطلاب لإتمام الاختبار:

لإيجاد الزمن الأدنى للاختبار والذي يعطي الوقت الكافي لـ 90 % من الطلاب لإتمام الاختبار ولنفرضه a فيكون :

$$P(Z \leq a) = 0.9$$

وقيمة a التي تحقق العلاقة السابقة هي نفس قيمة a التي تحقق العلاقة :

$$0.5 + P(0 \leq Z \leq a) = 0.9 \Rightarrow P(0 \leq Z \leq a) = 0.4$$

الآن نبحث في جدول التوزيع الطبيعي القياسي عن المساحة (0.4000) فلا نجدها، لذلك نأخذ أقرب قيمة لها وهي (0.3997) وبالتالي فإن قيمة a المقابلة لهذه القيمة هي : a=1.28 وهي أدنى زمن يمكن اتاحته للاختبار حتي يعطي وقتا كافيا لـ 90 % من الطلاب لإتمام الاختبار ، ولتحويلها إلى علامة طبيعية نستخدم العلاقة التالية :

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-70}{12} = 1.28 \Rightarrow x = (12 \times 1.28) + 70 \Rightarrow x = 85.36 \text{ دقيقة}$$

ثالثا : التوزيع الأسي Exponentielle Distribution

1- التعريف : من التوزيعات الاحتمالية المهمة جدا والتي تصف كثير من الظواهر العشوائية المتعلقة بالزمن، أين المتغير العشوائي قيمته عبارة عن لحظة معينة (مفاجئة) على محور الزمن، مثل : الزمن الذي تستغرقه آلة لكي تتعطل، مدة البقاء لبعض الأجزاء الالكترونية، الزمن بين وصول زبون وآخر في سوق مركزي، مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، الزمن اللازم للانتهاء من تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة...

ويسمى هذا التوزيع الأسي ويسمى أيضا التوزيع الأسي السالب لعلاقته بتوزيع بواسون. فإذا كان وقوع أحداث معينة يتبع توزيع بواسون، فإن المدة الفاصلة بين وقوع حدثين من هذه الأحداث تتبع التوزيع الأسي، فمثلا إذا كان وصول الزبائن إلى أحد شبابيك خدمة ما يتبع توزيع بواسون، فإن المدة الفاصلة بين وصول كل زبونين إلى الشباك تخضع للتوزيع الأسي.

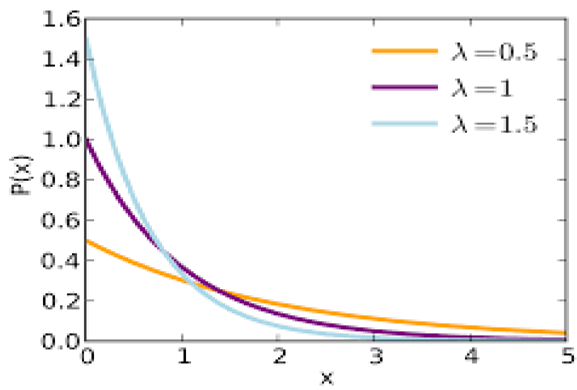
وغالبا ما يعبر عن التوزيع الأسي، اختصارا بـ: $\boldsymbol{X \sim Exp(\lambda)}$ وهذا يعني بأن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الأسي بالمعلمة λ.

وهو توزيع احتمالي لمتغير عشوائي مستمر X يأخذ قيم ممكنة $X > 0$ وله دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda . x} & , x > 0 \;\; et \;\; \lambda > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

حيث: λ عدد حقيقي موجب وهو معلمة التوزيع وتمثل المعدل أو المتوسط الذي تحصل به الظاهرة العشوائية.

ويمثل هذا التوزيع بيانيا وفق الشكل التالي:

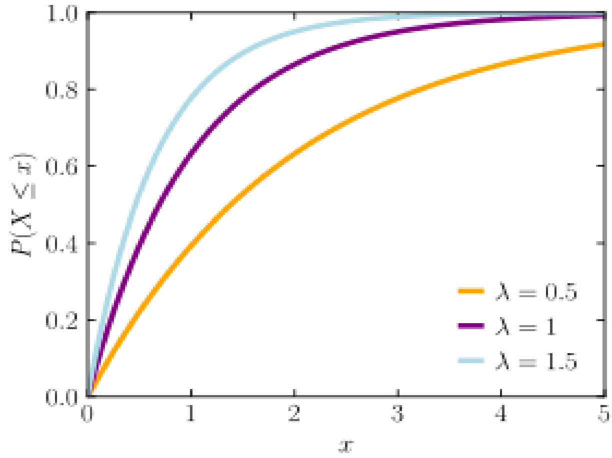


ملاحظة: يتغير شكل دالة الكثافة للتوزيع الأسي بتغير قيمة λ.

كما يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمية F(x) لهذا التوزيع بالصورة التالية:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda . x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وتمثل دالة التوزيع التراكمية بيانيا وفق الشكل التالي:



2- الخصائص العددية للتوزيع المنتظم (المستمر) :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

مثال 05 : إذا كانت المدة الزمنية لبقاء جزء الكتروني في جهاز الكمبيوتر تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 1000 ساعة، فأوجد ما يلي :

1- دالة كثافة الاحتمال التي تعبر عن الفترة الزمنية لبقاء الجزء الالكتروني في جهاز الكمبيوتر ؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير ؟

3- احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة 1100 ساعة على الأكثر ؟

4- احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة بين 800 و1200 ساعة ؟

5- متوسط الزمن لبقاء الجزء الالكتروني وانحرافه المعياري ؟

الحل :

1- كتابة دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لبقاء الجزء الالكتروني في جهاز الكمبيوتر :

بما أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لبقاء الجزء الالكتروني في جهاز الكمبيوتر يتبع التوزيع الأسي، بمتوسط 1000 ساعة، فإن : $0 < x < \infty$، و المتوسط $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$ ، ومن ثم فإن قيمة λ تصبح تقدر بـ: $\lambda = \frac{1}{1000}$ ، وتكتب دالة الكثافة لهذا المتغير بالصورة التالية :

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda . x} = \frac{1}{1000}\, e^{\frac{-x}{1000}} \qquad 0 < x < \infty$$

2- كتابة دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda . x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وبتعويض قيمة λ تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{\frac{-x}{1000}} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

3- حساب احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة 1100 ساعة على الأكثر:

$$P(X \leq 1100) = F(1100) = 1 - e^{\frac{-1100}{1000}} = 1 - 0.3328 = 0.6671$$

4- حساب احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة بين 800 و1200 ساعة :

$$P(800 \leq X \leq 1200) = P(X \leq 1200) - P(X \leq 800) = F(1200) - F(800)$$
$$= \left(1 - e^{\frac{-1200}{1000}}\right) - \left(1 - e^{\frac{-800}{1000}}\right) = 0.6988 - 0.5506 = 0.1482$$

5- حساب متوسط الزمن لبقاء الجزء الالكتروني و انحرافه المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 1000000$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = 1000$$

مثال 06 : إذا كان زمن تقديم الخدمة للزبون في أحد مراكز بريد الجزائر يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 8 دقائق، فأوجد :

1 - دالة كثافة الاحتمال التي تعبر عن الفترة الزمنية لتقديم الخدمة للزبون في هذا المركز لبريد الجزائر؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير ؟

3- احتمال أن يتم تقديم الخدمة خلال 5 دقائق أو أقل ؟

4- احتمال أن يتم تقديم الخدمة ما بين 6 و 9 دقائق ؟

5- متوسط الزمن اللازم لتقديم الخدمة للزبون وانحرافه المعياري ؟

الحل :

1- كتابة دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لتقديم الخدمة للزبون في هذا المركز لبريد الجزائر:

بما أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لتقديم الخدمة للزبون في هذا المركز لبريد الجزائر يتبع التوزيع الأسي، بمتوسط 8 دقائق، فإن : $0 < x < \infty$، و المتوسط $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 8$ ، ومن ثم فإن قيمة λ تصبح تقدر بـ: $\lambda = \frac{1}{8} = 0.125$ ، وتكتب دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير بالصورة التالية :

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda.x} = 0.125\, e^{-0.125\, x} \qquad 0 < x < \infty$$

2- كتابة دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda.x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وبتعويض قيمة λ تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.125\, x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

3- حساب احتمال أن يتم تقديم الخدمة خلال 5 دقائق أو أقل :

$$P(X \leq 5) = F(5) = 1 - e^{-0.125(5)} = 1 - 0.5352 = 0.4647$$

4- حساب احتمال أن يتم تقديم الخدمة ما بين 6 و 9 دقائق :

$$P(6 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 6) = F(9) - F(6)$$
$$= \left(1 - e^{-0.125(9)}\right) - \left(1 - e^{-0.125(6)}\right) = 0.6753 - 0.5276 = 0.1477$$

5- حساب متوسط الزمن اللازم لتقديم الخدمة للزبون و انحرافه المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 8$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 64$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = 8$$

رابعا : توزيع قاما Distribution Gamma

1- التعريف : يعد توزيع قاما من التوزيعات الشائعة الاستخدام التي تعتمد على عنصر الزمن أو التي تستعمل في قياس المهل الزمنية، خاصة عند تقدير دالة المعولية (الثبات) أو دالة البقاء، مثل : الفترة الزمنية لفحص مريض، الفترة الزمنية لبقاء إنسان على قيد الحياة مصاب بمرض عضال، أوقات الانتظار لدى المطاعم أو مكاتب الخدمات وحتى حجز قنوات الاتصال...إلخ، لهذا يشترط أن تكون القيم التي يأخذها المتغير العشوائي موجبة، ويعد هذا التوزيع الأساس النظري لتوليد بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة كالتوزيع الأسي، توزيع بيتا، توزيع كاي مربع، توزيع فيشر، توزيع ستودنت...إلخ.

فإذا كان لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن X مثلا، يتبع توزيع قاما، فإن دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل التالي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & , x > 0 \;\; et \;\;\; \alpha, \beta > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

ويعبر اختصارا عن توزيع قاما بـ : $\boldsymbol{X \sim G(\alpha, \beta)}$

حيث أن :

α، β تمثل معلمات توزيع قاما وتكونان موجبتان أي : $\alpha, \beta > 0$

$\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة قاما والتي تكون من الشكل التالي :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \;\; e^{-x} dx$$

وبصورة عامة، إذا كان لدينا العدد n عدد صحيح موجب، فإن دالة قاما تصبح :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

وفيما يلي بعض خصائص دالة قاما :

1) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \;\;\; ; \; \forall \;\; n > 0$

2) $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) \qquad ; \forall\, n > 0$

3) $\Gamma(n) = (n-1)! \qquad ; \forall\, n > 0$

4) $\Gamma(n) = \infty \Rightarrow n \leq 0$

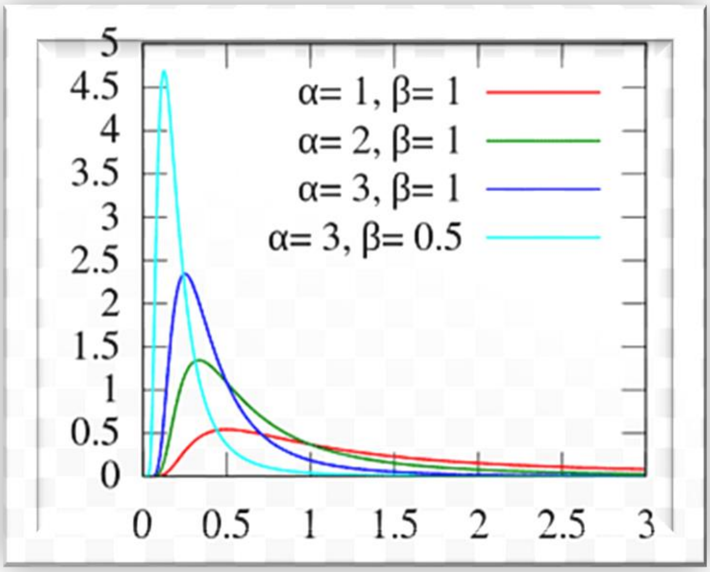
5) $\Gamma(1) = 0! = 1$

6) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

7) $\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(1-n)}{(-n)}$

8) $\Gamma(P)\Gamma(1-P) = \frac{\pi}{\sin(P.\pi)} \qquad ; 0 < P < 1$

ويمثل توزيع قاما بيانيا وفق الشكل التالي :



ملاحظة : يتغير شكل دالة الكثافة لتوزيع قاما بتغير قيمة α و β .

- دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع : يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع قاما بالشكل الآتي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

2- الخصائص العددية لتوزيع قاما :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \alpha.\beta$$

ب- التباين :

$$V(X) = \alpha.\beta^2$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\alpha.\beta^2}$$

- **ملاحظة :** للتوزيعين قاما وبيتا علاقة بعدد من التوزيعات المهمة كالتوزيع الأسي وتوزيع كاي تربيع :

- فالتوزيع الأسي مثلا هو حالة خاصة من توزيع قاما عندما $\alpha = 1$, $\beta = 1/\lambda$:

$$\alpha = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^{1-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^1 \Gamma(1)} = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} = \lambda\, e^{-\lambda.x}$$

- وعندما تكون المعلمتين ($\alpha = \frac{n}{2}$ ، $\beta = 2$) فإن توزيع قاما يتحول إلى وزيع كاي مربع بدرجة حرية (n)، والتي تعتبر حالة خاصة من توزيع قاما، والمعرفة بالمعادلة التالية :

$$\alpha = \frac{n}{2}\ et\ \beta = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

مثال 07 : أحسب ما يلي :

- $\Gamma(8)$ ، $\Gamma(6)$ ، $\Gamma(9)$ ، $\Gamma(13)$ ، $\Gamma(5.5)$ ، $\Gamma(3.5)$ ، $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$

- $\int_0^{\infty} x^3\ e^{-x} dx$ ، - $\int_0^{\infty} x^7\ e^{-x} dx$ ، $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ e^{-x} dx$

الحل :

- $\Gamma(8) = 7! = 5040$

- $\Gamma(6) = 5! = 120$

- $\Gamma(9) = 8! = 40320$

- $\Gamma(13) = 12! = 47900160$

- $\Gamma(5.5) = 4.5\Gamma(4.5) = (4.5)(3.5)\Gamma(3.5) = (4.5)(3.5)(2.5)\Gamma(2.5) =$
$(4.5)(3.5)(2.5)(1.5)\Gamma(1.5) = (4.5)(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 29.53125\sqrt{\pi}$

- $\Gamma(3.5) = (2.5)\Gamma(2.5) = (2.5)(1.5)\Gamma(1.5) = (2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 1.875\sqrt{\pi}$

- $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) =$
$\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{105}{16}\right)\sqrt{\pi}$

- $\int_0^{\infty} x^3\ e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^{4-1}\ e^{-x}dx = \Gamma(4) = 3! = 6$

- $\int_0^{\infty} x^7\ e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^{8-1}\ e^{-x}dx = \Gamma(8) = 7! = 5040$

- $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^{\frac{-1}{2}}\ e^{-x}dx = \int_0^{\infty} x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}\ e^{-x}dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

مثال 08 :

إذا كانت مدة اشتغال (بقاء) أحد الآلات في مصنع كبير تتبع توزيع قاما بالمعلمتين($\alpha = 2$ و $\beta = 3$)، فأوجد :

1- دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يعبر عن المدة الزمنية لاشتغال هذه الآلة؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير؟

3- احتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة 8 سنوات على الأكثر ؟

4- احتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة تفوق 10 سنوات ؟

5- أحتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة تتراوح ما بين 8 سنوات و12 سنة ؟

6- متوسط بقاء هذه الآلة في العمل وانحرافها المعياري ؟

الحل :

1- دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يعبرعن المدة الزمنية لاشتغال هذه الآلة :

بما أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن المدة الزمنية لاشتغال هذه الآلة يتبع توزيع قاما، بالمعلمات ($\alpha = 2$ و $\beta = 3$)، فإن دالة كثافته الاحتمالية تكتب بالصورة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & , x > 0 \;\; et \;\; \alpha, \beta > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

وبتعويض قيمة $\alpha = 2$ و $\beta = 3$ تصبح الدالة على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{x^{2-1}\, e^{-\frac{x}{3}}}{3^2\Gamma(2)} = \frac{x}{9}\, e^{-\frac{x}{3}} \qquad ; \;\; 0 < x < \infty$$

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{x}{9}\, e^{-\frac{x}{3}} dx$$

نلاحظ أن هذا التكامل يتكون من جداء دالتين u و v، ولهذا سوف نعتمد على قاعدة التكامل بالتجزئة وذلك وفق العلاقة التالية :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

وبوضع تجزئة الدالة الأصلية على النحو التالي :

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{9} & dv = e^{-\frac{x}{3}} \\ du = \dfrac{1}{9} & v = \dfrac{e^{-\frac{x}{3}}}{-\frac{1}{3}} = -3e^{-\frac{x}{3}} \end{cases}$$

وبتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة نحصل على :

$$F(x)=P(X\le x)=\int_0^x \frac{x}{9}\,e^{-\frac{x}{3}}dx=\left[\frac{x}{9}\left(-3e^{-\frac{x}{3}}\right)\right]_0^x-\int_0^x\frac{1}{9}\left(-3e^{-\frac{x}{3}}\right)$$
$$=\left[-\frac{x}{3}\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\right]_0^x-\left[\frac{1}{9}\left(-3(-3)e^{-\frac{x}{3}}\right)\right]_0^x=\left[-\frac{x}{3}\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\right]_0^x-\left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\right]_0^x$$
$$=\left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\left(\left(-\frac{x}{3}\right)-1\right)\right]_0^x$$

3-إيجاد احتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة 8 سنوات على الأكثر:

$$P(X\le 8)=F(8)=\left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\left(\left(-\frac{x}{3}\right)-1\right)\right]_0^8$$
$$=\left[\left(e^{-\frac{8}{3}}\right)\left(\left(-\frac{8}{3}\right)-1\right)\right]-\left[\left(e^{-\frac{0}{3}}\right)\left(\left(-\frac{0}{3}\right)-1\right)\right]=(-0.2544)-(-1)$$
$$=0.7455$$

4- إيجاد احتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة تفوق 10 سنوات :

$$P(X>10)=1-F(10)=1-\left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\left(\left(-\frac{x}{3}\right)-1\right)\right]_0^{10}$$
$$=1-\left(\left[\left(e^{-\frac{10}{3}}\right)\left(\left(-\frac{10}{3}\right)-1\right)\right]-\left[\left(e^{-\frac{0}{3}}\right)\left(\left(-\frac{0}{3}\right)-1\right)\right]\right)$$
$$=1-\left((-0.1545)-(-1)\right)=0.1545$$

5 -إيجاد احتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة تتراوح ما بين 8 سنوات و12 سنة :

$$P(8\le X\le 12)=P(X\le 12)-P(X\le 8)=F(12)-F(8)$$
$$=\left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\left(\left(-\frac{x}{3}\right)-1\right)\right]_0^{12}-\left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\left(\left(-\frac{x}{3}\right)-1\right)\right]_0^{8}$$
$$=\left(\left[\left(e^{-\frac{12}{3}}\right)\left(\left(-\frac{12}{3}\right)-1\right)\right]-\left[\left(e^{-\frac{0}{3}}\right)\left(\left(-\frac{0}{3}\right)-1\right)\right]\right)-(0.7455)$$
$$=(0.9084)-(0.7455)=0.1629$$

6- حساب متوسط بقاء هذه الآلة في العمل و انحرافها المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \alpha.\beta = 2.3 = 6$$

ب- التباين :

$$V(X) = \alpha.\beta^2 = 2.9 = 18$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{18} = 4.24$$

خامسا : توزيع بيتا Distribution bêta

1- التعريف : إن توزيع بيتا مشتق من دالة بيتا أو ما يسمى في بعض الأحيان بتكامل بيتا، وللتوزيع أهمية في تطبيقات الرقابة على جودة الإنتاج من خلال تكوين جداول عينات القبول والتي تستخدم في اتخاذ القرار بشأن قبول وحدات الإنتاج استنادا إلى نسب الوحدات المعيبة في العينة فضلا عن التطبيقات الأخرى.

ودالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع تعطى وفق الصياغة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \;\; et \;\; (\alpha,\beta) > 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

ويمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0 < x < 1 \;\; et \;\; (\alpha,\beta) > 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

ويعبر اختصارا عن توزيع بيتا بـ : $\boldsymbol{X \backsim \beta(\alpha,\beta)}$

حيث $\beta(\alpha,\beta)$ هي دالة بيتا والتي تحسب كالتالي :

$$\beta(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \qquad \alpha,\beta > 0$$

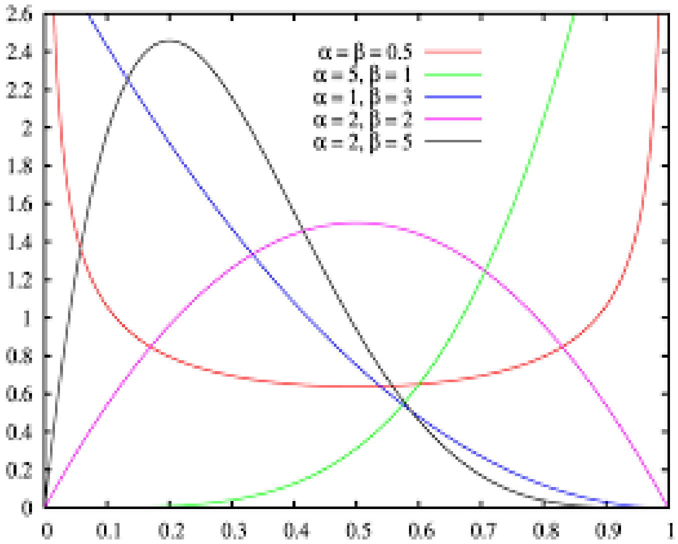
ولدالة بيتا علاقة بدالة قاما حيث نجد أن :

$$\beta(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ومن بين خواص هذه الدالة :

$$\beta(\alpha,\beta)=\beta(\beta,\alpha),\qquad \beta(1,1)=1\,,\qquad \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$$

ويمثل توزيع بيتا بيانيا وفق الشكل التالي :



ملاحظة : يتغير شكل دالة الكثافة لتوزيع بيتا بتغير قيمة α و β .

- **دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع :** يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع قاما بالشكل الآتي :

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_0^x f(x)dx=\begin{cases}0 & si\ x\leq 0\\ \dfrac{1}{\beta(\alpha,\beta)}\displaystyle\int_0^x x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}dx & si\ 0<x<1\\ 1 & si\ x\geq 1\end{cases}$$

2- الخصائص العددية لتوزيع بيتا :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}}$$

مثال 09 : أحسب ما يلي:

$$\beta(2{,}4), \quad \beta(3{,}4), \quad \beta(6{,}8), \quad \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad \beta(n,2), \quad \beta(1,n) \quad n \in N$$

$$\int_0^1 x^3(1-x)^5dx\ , \quad \int_0^1 x^2(1-x)^3dx\ , \int_0^1 (1-x)^3dx$$

الحل :

$$*\beta(1,n) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(n)}{\Gamma(1+n)} = \frac{(n-1)!}{n\Gamma(n)} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{n}$$

$$*\beta(n,2) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)} = \frac{(n-1)!}{\Gamma(n+1+1)} = \frac{(n-1)!}{(n+1)\Gamma(n+1)} = \frac{(n-1)!}{(n+1)n\Gamma(n)} = \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$*\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}}{\Gamma(1)} = \pi$$

$$*\beta(6{,}8) = \frac{\Gamma(6)\Gamma(8)}{\Gamma(6+8)} = \frac{5!7!}{13!} = \frac{120.5040}{6227020800} = 9.71.10^{-5}$$

$$*\beta(3{,}4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(3+4)} = \frac{2!3!}{6!} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

$$*\beta(2{,}4) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(4)}{\Gamma(2+4)} = \frac{1!3!}{5!} = \frac{1}{20} \quad Or\ \beta(2{,}4) = \frac{1}{4(4+1)} = \frac{1}{20}$$

$$*\int_0^1 (1-x)^3dx = \beta(1{,}4) = \frac{1}{4}$$

$$*\int_0^1 x^2(1-x)^3dx = \beta(3{,}4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(3+4)} = \frac{2!3!}{6!} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

$$*\int_0^1 x^3(1-x)^5dx = \beta(4{,}6) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(4+6)} = \frac{3!5!}{9!} = \frac{6}{3024} = \frac{1}{504}$$

مثال 10 : يريد أحد مديري الجودة في أحد المصانع الخاصة بإنتاج الأجهزة الكهرومنزلية تقدير جودة الإنتاج بناء على نسبة الوحدات المعيبة في العينة، فإذا علمت أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن نسبة الوحدات المعيبة في هذا المصنع يتبع توزيع بيتا بالمعلمات $(\alpha = 5, \beta = 2)$، فأجب على ما يلي :

1- أحسب القيم : $\Gamma(2)$ ، $\Gamma(5)$ ، $\Gamma(7)$ ؟

2- أوجد دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع ؟

3 - أوجد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع ؟

4 - أحسب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب لا تتجاوز 20 % ؟

5 - أحسب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب 15 % على الأقل ؟

6- أحسب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب تتراوح ما بين 12 % و 20 % ؟

7 - أحسب النسبة المتوقعة للإنتاج المعيب في مصنع الأجهزة الكهرومنزلية، ثم التباين والانحراف المعياري له ؟

الحل :

(X) المتغير العشوائي الذي يعبر عن نسبة الإنتاج المعيب في مصنع الأجهزة الكهرومنزلية والذي يتبع توزيع بيتا بالمعلمات $(\alpha = 5, \beta = 2)$، ويمكن التعبير عنه اختصارا بـ: $X \sim \beta(\alpha, \beta)$ أي $X \sim \beta(5,2)$

1- حساب القيم التالية لحالات دالة قاما التالية :

لدينا من الصيغة العامة لدالة قاما : $\Gamma(n) = (n-1)!$ وبالتالي فإن :

$$\Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$$

$$\Gamma(5) = (5-1)! = 4! = 24$$

$$\Gamma(7) = (7-1)! = 6! = 720$$

2- ايجاد دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع :

لدينا الصيغة العامة لتوزيع بيتا هي على النحو التالي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1\ \ et\ \ (\alpha,\beta)>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

وبتعويض قيمة المعلمتين $(\alpha=5,\beta=2)$ في دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا نجد :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(5+2)}{\Gamma(5)\Gamma(2)}x^{5-1}\,(1-x)^{2-1} & 0<x<1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

وبحساب قيم دالة قاما نجد :

$$f(x)=\begin{cases}30\,x^4\,(1-x) & 0<x<1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

3 - ايجاد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع :

يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع بيتا بالشكل الآتي :

$$F(x)=P(X\le x)$$
$$=\int_0^x f(x)dx=\begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^x x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}dx & si\ 0<x<1\\ 1 & si\ x\ge 1\end{cases}$$

أي أن :

$$F(x)=P(X\le x)=\int_0^x f(x)dx=\begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ 30\displaystyle\int_0^x x^4\,(1-x)dx & si\ 0<x<1\\ 1 & si\ x\ge 1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}F(x)&=P(X\le x)\\ &=30\int_0^x x^4\,(1-x)dx\\ &=30\int_0^x (x^4-x^5)dx=30\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right]_0^x=[6x^5-5x^6]_0^x\\ &=6x^5-5x^6\end{aligned}$$

ومنه فإن دالة التوزيع التراكمية لهذا التوزيع تكون بالصيغة التالية :

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_0^x f(x)dx=\begin{cases}0 & si\ x\leq 0\\ 6x^5-5x^6 & si\ 0<x<1\\ 1 & si\ x\geq 1\end{cases}$$

4 - حساب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب لا تتجاوز 20 % :

$$P(X\leq 0.20)=F(0.20)=6(0.20)^5-5(0.20)^6=0.0016$$

5 - حساب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب 15 % على الأقل :

$$P(X\geq 0.15)=1-P(X<0.15)=1-F(0.15)=1-(6(0.15)^5-5(0.15)^6)$$
$$=1-0.0039=0.9996$$

6 - حساب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب تتراوح ما بين 12 % و 20 % :

$$P(0.20\leq X\leq 0.12)=P(X\leq 0.20)-P(X\leq 0.12)=F(0.20)-F(0.12)$$
$$=0.0016-(6(0.12)^5-5(0.12)^6)=0.0014$$

7 - حساب النسبة المتوقعة للإنتاج المعيب في الأجهزة الكهرومنزلية، ثم التباين والانحراف المعياري له :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{5}{5+2}=\frac{5}{7}=0.71$$

$$V(X)=\frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}=\frac{5.2}{(5+2)^2.(5+2+1)}=\frac{10}{49\times 8}=\frac{10}{392}=0.025$$

جـ- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.025}=0.15$$

سادسا : توزيع ستيودنت (t)

1- التعريف : هو أحد التوزيعات الإحتمالية المتصلة، يشبه كثيرا التوزيع الطبيعي، تكمن تطبيقاته في نظرية العينات واختبار الفرضيات كبديل للتوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة صغيرا.

دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالعلاقة التالية :

$$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma(\frac{v}{2})}(1+\frac{x^2}{v})^{-\frac{(v+1)}{2}} \qquad ;-\infty<x<+\infty\ et\ v\in\mathbb{N}$$

ونكتب اختصارا : $X \sim t(v)$

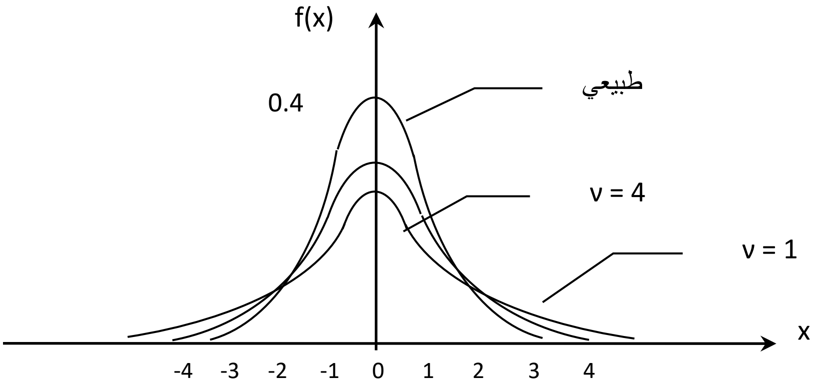
حيث :

π : ثابت $\pi=3.1416$

v : درجات الحرية[1] والتي تساوي حجم العينة ناقص 1 أي $v=n-1$

ونرمز لإحصائية ستيودنت عند درجة حرية v ومستوى معنوية α بالرمز $t_{(\alpha,v)}$

وتمثل دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع بيانيا وفق الشكل التالي :



يتشابه توزيع t مع التوزيع الطبيعي القياسي من حيث الشكل الجرسي إلا أنه أكثر انخفاضا منه (أكثر تفلطحا وانبساطا منه) وعندما تزداد درجات الحرية فإن توزيع t يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي، ويعتبر المنحنيان متطابقان تقريبا عندما $v\geq 30$.

2- الخصائص العددية لتوزيع ستيودنت:

أ- التوقع الرياضي :

[1] درجات الحرية تعرف بأنها العدد N من المشاهدات المستقلة في العينة ناقص العدد K لمعالم المجتمع (الوسط الحسابي والانحراف المعياري) أي أن : $v=n-K$ في حالة توزيع t فإن : $v=n-1$ على أساس أنه يجب معرفة المتوسط الحسابي لهذا التوزيع والذي يساوي الصفر، وبالتالي يكون عدد المعالم المقدرة هو 1.

$$E(X) = 0$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{v}{v-2} \quad ; v > 2$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{v}{v-2}}$$

ملاحظات :

- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد، والتوزيع متماثل (متناظر) حول الصفر.

- تحسب احتمالات توزيع t من خلال الجداول الخاصة بهذا التوزيع مثل التوزيع الطبيعي القياسي (أنظر الملاحق) إلا أن جداول توزيع t تختلف بعض الشيء حيث تعتمد على درجات الحرية، التي تسجل في العمود الأيسر، أما في الأعلى فتقرأ المساحة (الاحتمالية) وفي داخل الجدول تقرأ قيمة t المقابلة.

- من خلال خاصية التناظر لتوزيع t نجد ما يلي :

$$t_{(\alpha,v)} = -t_{(1-\alpha,v)}$$

$$P\left(T \geq t_{(v)}\right) = P\left(T \leq -t_{(v)}\right) = \alpha$$

$$P\left(T \leq t_{(v)}\right) = P\left(T \geq -t_{(v)}\right) = 1 - \alpha$$

مثال 11: باستخدام جدول توزيع t أوجد :

$$t_{(0.025,12)} \quad ; t_{(0.05,3)} \quad ; t_{(0.99,11)} \quad ; t_{(0.995,9)} \quad ; t_{(0.90,16)}$$

الحل :

* $t_{(0.025,12)}$: تعني القيمة التي يقع يمينها مساحة قدرها 0.025 ودرجة الحرية تساوي 12، أي أن القيمة ستكون موجبة ومن خلال الجدول نستطيع إيجادها مباشرة بحيث نختار من العمود الأيسر (عمود درجات

الحرية (v) القيمة 12، ونختار من الصف الأول (صف المساحات α) القيمة 0.025 وعند تقاطع العمود مع الصف نحصل على القيمة $t_{(0.025,12)}$ ونجدها تساوي 2.179 أي :

$$t_{(0.025,12)} = 2.179$$

* $t_{(0.05,3)}$: بنفس التحليل في الفقرة السابقة نجدها من خلال تقاطع المساحة $(\alpha = 0.05)$ مع درجة الحرية $(v = 3)$ نجدها تساوي 2.353 أي :

$$t_{(0.05,3)} = 2.353$$

* $t_{(0.99,11)}$: وتعني القيمة التي على يمينها مساحة مقدارها 0.99 ودرجة حرية 11، ولإيجاد القيمة $t_{(0.99,11)}$ نلاحظ أن جدول التوزيع لا يحتوي على القيم السالبة (أي المساحات التي أكبر من 0.5) لذلك نستعمل خاصية تماثل جدول التوزيع حول الصفر أي :

$$t_{(\alpha,v)} = -t_{(1-\alpha,v)}$$

أي : $t_{(0.99,11)} = -t_{(1-0.99,11)} = -t_{(0.01,11)} = -2.718$

* $t_{(0.995,9)}$: بنفس التحليل للفقرة السابقة وباستخدام خاصية التماثل نجد أن :

$$t_{(0.995,9)} = -t_{(1-0.995,9)} = -t_{(0.005,9)} = -3.250$$

* $t_{(0.90,16)}$: بنفس التحليل للفقرتين السابقتين وباستخدام خاصية التماثل نجد أن :

$$t_{(0.90,16)} = -t_{(1-0.90,16)} = -t_{(0.10,16)} = -1.337$$

مثال 12 : باستخدام جدول t أجب على ما يلي :

1- ما هي قيمة المساحة التي تقابل حجم العينة 11 و t=2.812 ؟

2- أوجد المساحة الواقعة على يسار t=-2.13 وعند درجة حرية 15 ؟

3- أوجد درجة الحرية لقيمة t= 4.032 والتي تقع على يمينها المساحة 0.005 ؟

الحل :

1- لدينا $v = n - 1$، أي أن $v = 10$ و $\mathrm{t} = 2.812$ وبالتالي ومن خلال جدول t فإن المساحة المقابلة هي 0.95.

2- بما أن قيمة t سالبة فإننا نستخدم خاصية التناظر (لأنه لا توجد قيم سالبة في جدول t) أي:

$$t(\alpha, 15) = -t(1-\alpha, 15)$$

إن قيمة t=-2.13 تقابلها t=2.13 ومساحتها 0.975 وحيث أن المساحة المطلوبة هي على يسار -2.13 ،فيكون : $1-\alpha = 0.975$ من الجدول، ومنه $\alpha = 1 - 0.975 = 0.025$، أي المساحة الواقعة على اليسار وعند درجة حرية 15هي 0.025 .

3- لدينا من خلال المعطيات : $t(0.005, v) = 4.032$ وبالتالي ومن خلال جدول t نجد أن درجة الحرية التي تحقق $t(0.005, v) = 4.032$ هي 5 أي أن : $v = 5$

سابعا : توزيع كاي مربع χ^2 (Khi deux)

1-التعريف : هو توزيع احتمالي متصل ، له استعمالات متعددة خاصة مجال التقدير وفي اختبار الفرضيات واختبارات الارتباط والاستقلال والتوفيق، وهو معرف بالمتغير العشوائي χ^2. دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالعلاقة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\left(\frac{v}{2}\right)}\Gamma(\frac{v}{2})} x^{\left(\frac{v}{2}-1\right)} e^{-\frac{x}{2}} & , x > 0 \ \ et \ \ v \in \mathbb{N} \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

ونكتب اختصارا : $X \sim \chi^2{}_{(v)}$

حيث :

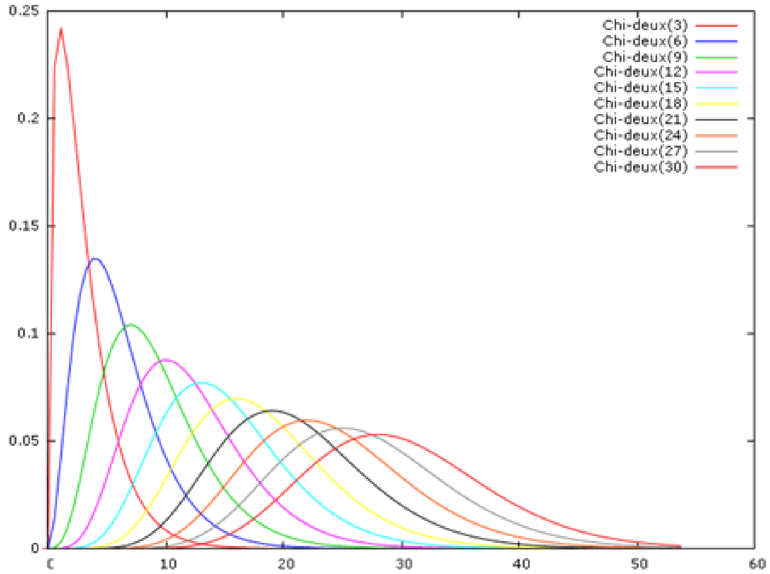
e : ثابت ويقدر بالتقريب $e = 2.7182$

v : درجات الحرية والتي تساوي حجم العينة ناقص 1 أي $v = n - 1$

Γ : دالة قاما .

ونرمز لإحصائية كاي مربع عند درجة حرية v ومستوى معنوية α بالرمز $\chi^2{}_{(\alpha,v)}$

وتمثل دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع بيانيا وفق الشكل التالي :



منحنى كاي مربع يكون في الجانب الموجب فقط وهو غير متماثل، بل هو ملتو التواء موجب أي من جهة اليمين، ويأخذ أشكالا مختلفة حسب قيمة v، حيث يقترب من التوزيع الطبيعي كلما كبرت v كما هو مبين في الشكل أعلاه.

2- الخصائص العددية لتوزيع كاي مربع:

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = v$$

ب- التباين :

$$V(X) = 2v$$

ج- الانحراف المعياري :

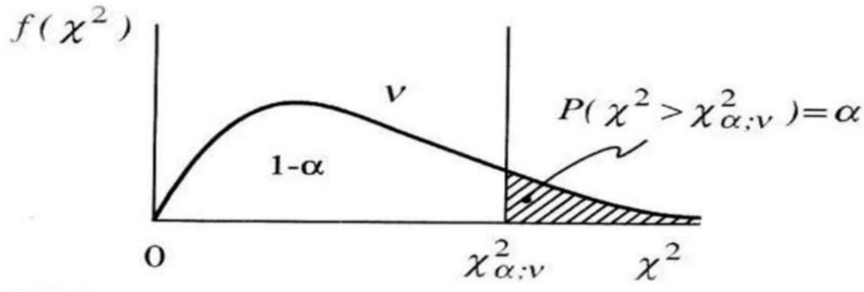
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2v}$$

ملاحظات :

- هذا التوزيع يعتبر حالة خاصة من توزيع قاما لما : $(\beta = 2 \text{ ،} \alpha = \frac{v}{2})$

- لإيجاد احتمالات الـχ^2، فإننا نستخدم الجدول الخاص بهذا التوزيع، حيث نجد أفقيا المساحة المقابلة وعموديا درجات الحرية وفي داخل الجدول تقرأ قيم الـχ^2 المقابلة .

- تحسب جداول كاي تربيع احتمال أن يكون المتغير العشوائي أكبر من الإحصائية $\chi^2{}_{(\alpha,v)}$ هو α ونكتب : $P(X \geq \chi^2{}_{(\alpha,v)}) = \alpha$ كما يمكن أن تحسب العكس (أصغر) لكن نستبدل α بـ $(1-\alpha)$ والذي يدعى عادة بمجال الثقة أي : $P(X \leq \chi^2{}_{(\alpha,v)}) = 1-\alpha$ ، ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي :



مثال 13 :

إذا كان المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع كاي تربيع على درجات حرية 10، فأوجد :

1- قيمة x^2 التي يكون على يسارها 0.99 من المساحة ؟

2- قيمة x^2التي يكون إلى يمينها 0.01 من المساحة ؟

3- قيمة x^2 التي يكون إلى يسارها 0.975 و القيمة التي يكون إلى يسارها 0.025 من المساحة ؟

الحل :

1- قيمة x^2 التي يكون على يسارها 0.99 من المساحة :

المساحة على اليسار 0.99 تعني أن $1-\alpha = 0.99$ أي أن : $\alpha = 0.01$ وبالتالي فإن قيمة x^2 التي نبحث عنها نجدها من الجدول مباشرة وهي : $\chi^2{}_{(0.01,10)} = 23.209$

2- قيمة χ^2 التي يكون على يمينها 0.01 من المساحة :

نلاحظ أن المساحة التي تقع على يمين χ^2 هي $\alpha = 0.01$ وهي المساحة التي تقع على يسارها $1-\alpha =$ 0.99 وبذلك فإن قيمة χ^2 هي : $\chi^2{}_{(0.01,10)} = 23.209$

3- قيمة χ^2 التي يكون إلى يسارها 0.975 و القيمة التي يكون إلى يسارها 0.025 من المساحة :

من الجدول نجد أن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها المساحة $\alpha = 0.975$ هي نفسها التي تقع على يسارها المساحة $1-\alpha = 0.025$ وبذلك فإن قيمة χ^2 هي : $\chi^2{}_{(0.975,10)} = 3.247$

مثال 14 :

إذا كان المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية v = 15 أوجد احتمال أن تكون قيمته :

1- أقل من أو تساوي 6.262 ؟

2- أكبر من أو تساوي 22.307 ؟

3- محصورة بين 7.261 و 27.488 ؟

الحل :

X يخضع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية v = 15 ونكتب اختصارا : $X \sim \chi^2{}_{(15)}$

1- حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أقل من أو تساوي 6.262 :

$$P(X \leq 6.262) = 1 - P(X \geq 6.262) = 1 - 0.975 = 0.025$$

2 – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أكبر من أو تساوي 22.307 :

$$P(X \geq 22.307) = 0.1$$

3 – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير محصورة بين 7.261 و 27.488 :

$$P(7.261 \leq X \leq 27.488) = P(X \leq 27.488) - P(X \leq 7.261)$$
$$= [1 - P(X \geq 27.488)] - [1 - P(X \geq 7.261)]$$
$$= (1 - 0.025) - (1 - 0.95) = 0.925$$

ويمكن حسابها بطريقة ثانية كما يلي :

$$P(7.261 \leq X \leq 27.488) = P(X \geq 7.261) - P(X \geq 27.488) = 0.95 - 0.025 = 0.925$$

ثامنا : توزيع فيشر F(فيشر، سنيديكور، Fischer، Snedecor):

1- التعريف : أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة، والمستخدمة في الإحصاء الاستدلالي، لإجراء اختبار الفرضيات وفي تحليل التباين وتصميم التجارب وإختبار معنوية معادلة الانحدار، وغيرها من الاختبارات، ويعرف هذا التوزيع العشوائي بالدالة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{v_1+v_2}{2})}{\Gamma(\frac{v_1}{2})\Gamma(\frac{v_2}{2})}\left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} \dfrac{x^{\left(\frac{v_1}{2}-1\right)}}{\left(1+\frac{v_1}{v_2}x\right)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}} & ,x > 0 \;\; et \;\; v \in \mathbb{N} \\ 0 & ,x \leq 0 \end{cases}$$

ونكتب اختصارا : $\boldsymbol{X \sim F(v_1; v_2)}$

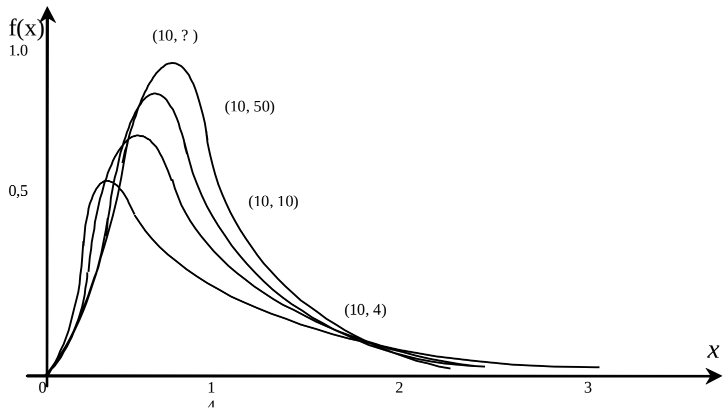
حيث :

v_1 و v_1 : درجات الحرية لتوزيع فيشر F .

Γ : دالة قاما .

ونرمز لإحصائية فيشر عند درجتي حرية v_1 و v_2 ومستوى معنوية α بالرمز $F(v_1; v_2)$ أو $F(\alpha; v_1; v_2)$

وتمثل دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع بيانيا وفق الشكل التالي :



ومن خواص منحنى توزيع F أنه أحادي المنوال ملتو قليلا إلى اليمين، وكلما زادت درجات الحرية v_1 و v_2 يقترب منحنى توزيع F من منحنى التوزيع الطبيعي وهو موجب لجميع قيم F بين الصفر واللانهاية.

2 - الخصائص العددية لتوزيع فيشر:

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{v_2}{v_2 - 2} \qquad ; v_2 > 2$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{2(v_2)^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 4)(v_2 - 2)^2} \qquad ; \ v_2 > 4$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2(v_2)^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 4)(v_2 - 2)^2}}$$

ملاحظات :

- تحسب جداول فيشر احتمال أن يكون المتغير العشوائي أكبر من الإحصائية $F(\alpha; v_1; v_2)$ هو α ونكتب : $P(X \geq F(\alpha; v_1; v_2)) = \alpha$ كما يمكن أن تحسب العكس (أصغر) لكن نستبدل α بـ $(1-\alpha)$ والذي يدعى عادة بمجال الثقة أي : $P(X \leq F(\alpha; v_1; v_2)) = 1 - \alpha$.

- هناك بعض المساحات الكبيرة لا توجد في جداول توزيع F، ولإيجاد هذه المساحة فإنه يمكن استعمال القاعدة التالية:

$$F(\alpha; v_1; v_2) = \frac{1}{F(1-\alpha; v_2; v_1)}$$

مثال 15: أوجد ما يلي :

- $F(0.01; 6; 10)$
- $F(0.025; 12; 8)$
- $F(0.99; 8; 12)$
- $F(0.95; 14; 10)$

الحل :

- $F(0.01; 6; 10) = 5.39$
- $F(0.025; 12; 8) = 4.2$
- $F(0.99; 8; 12) = \frac{1}{F(0.01;12;8)} = \frac{1}{5.67} = 0.1763$
- $F(0.95; 14; 10) = \frac{1}{F(0.05;10;14)} = \frac{1}{2.6} = 0.3846$

مثال 16 : إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $(v_1 = 7; v_2 = 12)$، فأحسب :

1- احتمال $P(X \geq 2.91)$ ؟

2- احتمال $P(X \geq 3.61)$ ؟

3- احتمال $P(X < 4.64)$ ؟

4- المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري ؟

الحل :

لحساب الاحتمالات المطلوبة نطبق القاعدة التالية : $P(X \geq F(\alpha; v_1; v_2)) = \alpha$

1- حساب احتمال $P(X \geq 2.91)$:

حساب الاحتمال المطلوب يتم عن طريق البحث عن قيمة α التي تحقق $F(\alpha; 7; 12) = 2.91$ في جداول فيشر ذات الاحتمالات المختلفة فنجد أن قيمة α التي تحقق ذلك هي : $\alpha = 0.05$ وبالتالي فإن :

$$* P(X \geq 2.91) = 0.05 \ \Rightarrow F(0.05; 7; 12) = 2.91$$

2- حساب احتمال $P(X \geq 3.61)$:

بنفس طريقة حساب الحالة الأولى نجد أن قيمة α هي : $\alpha = 0.025$ وبالتالي فإن :

$$* P(X \geq 3.61) = 0.025 \ \Rightarrow F(0.025; 7; 12) = 3.61$$

3- حساب احتمال $P(X < 4.64)$:

لدينا من خاصية الاحتمال المتمم فإن : $P(X < 4.64) = 1 - P(X \geq 4.64)$

وباتباع نفس الخطوات للحالة الأولى والثانية نجد أن قيمة α التي تحقق $F(\alpha; 7; 12) = 4.64$ هي : $\alpha = 0.01$ وبالتالي فإن :

$$*P(X < 4.64) = 1 - P(X \geq 4.64) = 1 - 0.01 = 0.99$$

4 – حساب :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{v_2}{v_2 - 2} = \frac{12}{12 - 2} = 1.2$$

ب- التباين :

$$V(X)=\frac{2(v_2)^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}=\frac{2(12)^2(7+12-2)}{7(12-4)(12-2)^2}=\frac{4896}{560}=8.74$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{8.74}=2.95$$

تاسعا : ملخص أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

اسم ورمز القانون	دالة الكثافة الاحتمالية	خصائص التوزيع
التوزيع المنتظم $X \backsim \mathbb{U}(a;b)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & si\ x\in[a;b]\\ 0 & sinon\end{cases}$	$E(X)=\frac{b+a}{2}$ $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
التوزيع الطبيعي : **التوزيع الطبيعي العام** $X \backsim \mathbb{N}(\mu,\sigma^2)$	**التوزيع الطبيعي العام :** $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty\le x\le\infty$	$\mu\in R$ و $\sigma>0$ ثابتان اختياريان
التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي) $Z \backsim \mathbb{N}(0,1)$	**التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي) :** $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty\le z\le\infty$	$\mu=0$ و $\sigma=1$
التوزيع الأسي $X \backsim Exp(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda\, e^{-\lambda.x} & ,x>0\ et\ \lambda>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$	$E(X)=\frac{1}{\lambda}$ $V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
توزيع قاما $X \backsim G(\alpha,\beta)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{\alpha-1}\,e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} & ,x>0\ et\ \alpha,\beta>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$ $\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة قاما والتي تكون من الشكل التالي : $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\ e^{-x}dx$ وبصورة عامة، إذا كان لدينا العدد n عدد صحيح موجب، فإن دالة قاما تصبح : $\Gamma(n)=(n-1)!$	$E(X)=\alpha.\beta$ $V(X)=\alpha.\beta^2$
توزيع بيتا $X \backsim \beta(\alpha,\beta)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1\ et\ (\alpha,\beta)>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$ حيث $\beta(\alpha,\beta)$ هي دالة بيتا والتي تحسب كالتالي :	$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ $V(X)=\frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}$

	$\beta(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \qquad \alpha,\beta>0$ ولدالة بيتا علاقة بدالة قاما حيث نجد أن : $\beta(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$	
توزيع ستيودنت $\boldsymbol{X \backsim t(v)}$	$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma(\frac{v}{2})}(1+\frac{x^2}{v})^{-\frac{(v+1)}{2}} \qquad ;-\infty<x<+\infty \quad et \quad v\in\mathbb{N}$	$E(X)=0$ $V(X)=\frac{v}{v-2} \quad ;v>2$ $t_{(\alpha,v)}=-t_{(1-\alpha,v)}$ $P(T\geq t_{(v)})=P(T\leq -t_{(v)})=\alpha$ $P(T\leq t_{(v)})=P(T\geq -t_{(v)})=1-\alpha$
توزيع كاي مربع $\boldsymbol{X \backsim \chi^2{}_{(v)}}$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{(\frac{v}{2})}\Gamma(\frac{v}{2})}x^{(\frac{v}{2}-1)}\,e^{-\frac{x}{2}} & ,x>0 \quad et \quad v\in\mathbb{N}\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$	$E(X)=v$ $V(X)=2v$ $P(X\geq \chi^2{}_{(\alpha,v)})=\alpha$ $P(X\leq \chi^2{}_{(\alpha,v)})=1-\alpha$
توزيع فيشر $\boldsymbol{X \backsim F(v_1;v_2)}$	$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}\frac{x^{\left(\frac{v_1}{2}-1\right)}}{\left(1+\frac{v_1}{v_2}x\right)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}} & ;\\ x>0 \quad et \quad v_1,v_2\in\mathbb{N} & \\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$	$E(X)=\frac{v_2}{v_2-2} \quad ;v_2>2$ $V(X)=\frac{2(v_2)^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}$ $;\ v_2>4$ $P(X\geq F(\alpha;v_1;v_2))=\alpha$ $P(X\leq F(\alpha;v_1;v_2))=1-\alpha$ $F(\alpha;v_1;v_2)=\frac{1}{F(1-\alpha;v_2;v_1)}$

عاشرا : سلاسل التمارين الخاصة بالمحور

حل السلسلة الثالثة

(بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة – التوزيع المنتظم – التوزيع الطبيعي)

حل التمرين الأول:

التمرين : استورد أحد المراكز التجارية الكبرى 240 طن من مادة القهوة، ووضعها في مخازنه، حيث يقوم باستخراج الكمية المخزنة وبيعها بكميات متساوية ومنتظمة على مدار أشهر السنة.

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية التي تعبر عن مدة البيع لهذه الكمية من القهوة ؟

2- عين دالة التوزيع التراكمية F(X) ؟ ثم مثلها بيانيا ؟

3- ما هو احتمال أن يبيع كل الكمية خلال الأشهر الثلاثة الأخيرة على الأقل ؟

4- ما هو احتمال أن يبيع كل الكمية خلال 7 أشهر على الأقل ؟ وما هي الكمية المتبقية في المخزن بعد مرور 7 أشهر من البيع ؟

5- أحسب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للفترة الزمنية لبيع القهوة ؟

الحل :

1- ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية التي تعبرعن مدة البيع لهذه الكمية من القهوة :

بما أن المتغير العشوائي X المعبر عن الفترة الزمنية لبيع هذه الكمية من القهوة هو متغير مستمر، و عملية البيع تتم خلال فترة زمنية منتظمة، فإن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المنتظم، وتكون دالة كثافة الاحتمال له من الشكل :

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{b-a} \qquad x \in [a;b]$$

بما أن المدة الزمنية لبيع القهوة في هذا المركب التجاري محددة بـ 12 شهر أي بالمجال : $[0;12]$ ، فإن دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير تصبح على النحو التالي :

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12} \qquad x \in [0;12]$$

ونكتب اختصارا : $X \backsim \mathbb{U}(0;12)$

2- أ- تعيين دالة التوزيع التراكمية F(X) :

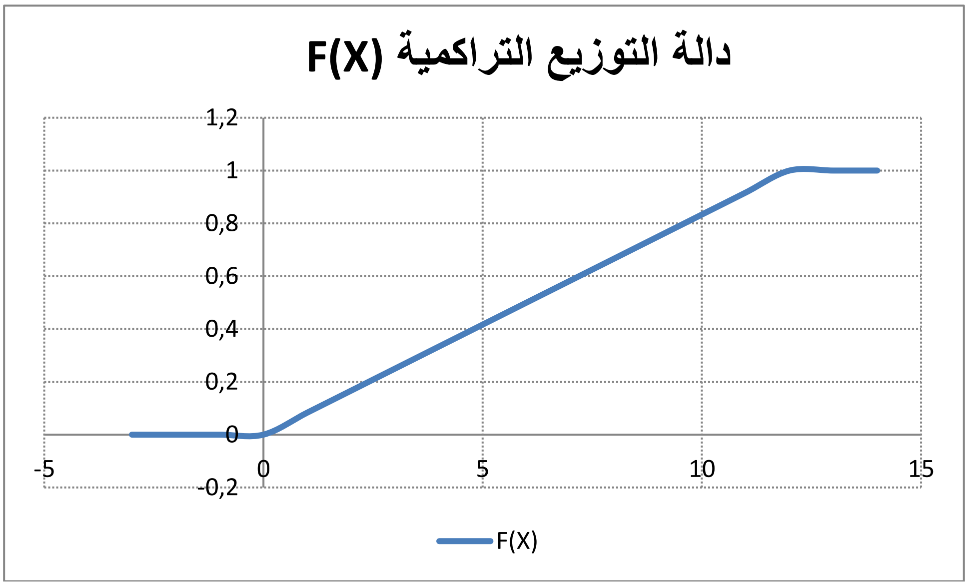
تعطى هذه الدالة وفق الصياغة التالية :

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

وبتعويض المدى الزمني لبيع القهوة في المركب التجاري، تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{12} & si \quad 0 \leq x \leq 12 \\ 1 & si \quad x > 12 \end{cases}$$

2- ب التمثيل البياني :



3- حساب احتمال أن يبيع كل الكمية خلال الأشهر الثلاثة الأخيرة على الأقل :

$$P(X > (12-3)) = P(X > 9) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - F(9) = 1 - \frac{9}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$$

4- أ حساب احتمال أن يبيع كل الكمية خلال 7 أشهر على الأقل :

$$P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F(7) = 1 - \frac{7}{12} = 0.4166$$

4- ب حساب الكمية المتبقية في المخزن بعد مرور 7 أشهر من البيع :

$$\mathrm{Q} \times \mathrm{P}(\mathrm{X} > 7) = 240 \times 0.4166 = 99.984 \text{ طن}$$

5- حساب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للفترة الزمنية لبيع القهوة :

أ- القيمة المتوقعة :

$$E(X)=\frac{b+a}{2}=\frac{12+0}{2}=6$$

ب- التباين :

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(12-0)^2}{12}=12$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\sqrt{12}=3.4641$$

<u>حل التمرين الثاني</u>:

<u>التمرين :</u> في دراسة حول أطوال 1000 طالب بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، وجد أن هذه الأطوال تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط (160 سم) وانحراف معياري مقدر بـ (10 سم).

انطلاقا من هذه المعطيات أوجد :

1- احتمال أن تزيد أطوال الطلبة عن 170 سم ؟

2- احتمال أن تقل أطوال الطلبة عن 170 سم ؟

3- النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180 سم ؟

4- النسبة المئوية للطلبة الذين تتراوح أطوالهم بين 165 سم و 175 سم ؟

5- عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 سم ؟

<u>الحل :</u>

X متغير عشوائي مستمر، يتبع توزيع طبيعي عادي بمتوسط $\mu=160\ cm$، وانحراف معياري $\sigma=10\ cm$. أي $\boldsymbol{X}\backsim\mathbb{N}(\mathbf{160},\mathbf{100})$ نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي Z $\boldsymbol{Z}\backsim\mathbb{N}(\mathbf{0},\mathbf{1})$ بالتحويلة : $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{x-160}{10}$

1- حساب احتمال أن تزيد أطوال الطلبة عن 170 سم :

$$P(X\geq 170)=P\left(Z\geq\frac{170-160}{10}\right)=P(Z\geq 1)=0.5-P(0\leq Z\leq 1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

2- حساب احتمال أن تقل أطوال الطلبة عن 170 سم :

$$P(X \le 170) = P\left(Z \le \frac{170-160}{10}\right) = P(Z \le 1) = 0.5 + P(0 \le Z \le 1)$$
$$= 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

3- حساب النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180 سم :

$$P(X \ge 180) = P\left(Z \ge \frac{180-160}{10}\right) = P(Z \ge 2) = 0.5 - P(0 \le Z \le 2)$$
$$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

إذا فالنسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180 سم هي : 0.0228 * 100 = 2.28 %

4 - حساب النسبة المئوية للطلبة الذين تتراوح أطوالهم بين 165 سم و175 سم :

$$P(165 \le X \le 175) = P\left(\frac{165-160}{10} \le Z \le \frac{175-160}{10}\right) = P(0.5 \le Z \le 1.5)$$
$$= P(0 \le Z \le 1.5) - P(0 \le Z \le 0.5) = 0.4332 - 0.1915 = 0.2417$$

إذا فالنسبة المئوية للطلبة الذين تتراوح أطوالهم بين 165 سم و 175 سم هي : 0.2417 * 100 = 24.17 %

5- حساب عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 سم :

لايجاد عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 سم، نجد الاحتمال ونضربه في عدد الطلبة الكلي، أي أن عدد الطلبة المطلوب = احتمال أن تزيد أطوال الطلبة عن 175 سم × عدد الطلبة الكلي .

- حساب احتمال أن تزيد أطوال الطلبة عن 175 سم :

$$P(X \ge 175) = P\left(Z \ge \frac{175-160}{10}\right) = P(Z \ge 1.5) = 0.5 - P(0 \le Z \le 1.5)$$
$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

إذا فعدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 سم يساوي : 0.0668 × 1000 = 66.8≈ 67

<u>حل التمرين الثالث :</u>

التمرين : درجات امتحان نصف السنة في مقياس الاحصاء لفصل كبير موزعة طبيعيا بوسط حسابي 12 وانحراف معياري 3، فإذا كان بهذا الفصل 500 طالب، فأوجد :

1- احتمال أن تقل علامات الطلبة عن 10 ؟

2- احتمال أن تزيد علامات الطلبة عن 15 ؟

3- احتمال أن تتراوح علامات الطلبة بين 14 و 16 ؟

5- عدد الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 8 و 11 ؟

6- يريد الأستاذ أن يعطي تقدير A لنسبة 10 % من الطلاب، ما هو الحد الأدنى للدرجات الذي يعطي تقدير A في امتحان الاحصاء ؟

الحل :

X متغير عشوائي مستمر، يتبع توزيع طبيعي عادي بمتوسط $\mu = 12$، وانحراف معياري $\sigma = 3$. أي $\boldsymbol{X} \backsim \mathbb{N}(\mathbf{12}, \mathbf{9})$ نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي Z $\boldsymbol{Z} \backsim \mathbb{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ بالتحويلة : $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-12}{3}$

1- حساب احتمال أن تقل علامات الطلبة عن 10 :

$$P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-12}{3}\right) = P(Z \leq -0.66) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.66)$$
$$= 0.5 - 0.2454 = 0.2546$$

2 – حساب احتمال أن تزيد علامات الطلبة عن 15 :

$$P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-12}{3}\right) = P(Z \leq -0.66) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.66)$$
$$= 0.5 - 0.2454 = 0.2546$$

3 - حساب احتمال أن تتراوح علامات الطلبة بين 14 و 16 :

$$P(14 \leq X \leq 16) = P\left(\frac{14-12}{3} \leq Z \leq \frac{16-12}{3}\right) = P(0.66 \leq Z \leq 1.33)$$
$$= P(0 \leq Z \leq 1.33) - P(0 \leq Z \leq 0.66) = 0.4082 - 0.2454$$
$$= 0.1628$$

4 - حساب عدد الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 8 و 11 :

لايجاد عدد الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 8 و 11، نجد الاحتمال ونضربه في عدد الطلبة الكلي، أي أن عدد الطلبة المطلوب = احتمال أن تتراوح علامات الطلبة بين 8 و 11 × عدد الطلبة الكلي .

- حساب احتمال أن تتراوح علامات الطلبة بين 8 و 11 :

$$P(8 \leq X \leq 11) = P\left(\frac{8-12}{3} \leq Z \leq \frac{11-12}{3}\right) = P(-1.33 \leq Z \leq -0.33)$$
$$= P(0 \leq Z \leq 1.33) - P(0 \leq Z \leq 0.33) = 0.4082 - 0.1293$$
$$= 0.2789$$

إذا فعدد الطلبة الذين تتراوح علامات الطلبة بين 8 و 11 يساوي : طالب $139 \approx 139.45 = 500 \times 0.2789$

5- حساب الحد الأدنى للدرجات الذي يعطي تقدير A في امتحان الاحصاء :

لإيجاد أدنى درجة والتي تعطي تقدير A في امتحان الاحصاء ولنفرضها a فيكون :

$$P(Z \geq a) = 0.1$$

وقيمة a التي تحقق العلاقة السابقة هي نفس قيمة a التي تحقق العلاقة :

$$P(0 \leq Z \leq a) = 0.4$$

الآن نبحث في جدول التوزيع الطبيعي القياسي عن المساحة (0.4000) فلا نجدها، لذلك نأخذ أقرب قيمة لها وهي (0.3997) وبالتالي فإن قيمة a المقابلة لهذه القيمة هي : a=1.28 وهي أدنى درجة معيارية لتحقيق التقدير A، ولتحويلها إلى علامة طبيعية نستخدم العلاقة التالية :

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-12}{3} = 1.28 \Rightarrow x = (3 \times 1.28) + 12 \Rightarrow x = 15.84$$

حل التمرين الرابع:

التمرين : نسبة الكمية المنتجة المحصورة بين 100 و 110 وحدة منتجة هي: 47.72% ومتوسط التوزيع الطبيعي للكمية المنتجة هو الحد الأدنى للحصر السابق.

- ما هو احتمال :

1- أن تزيد الكمية المنتجة عن 105 وحدة ؟

2- أن تقل الكمية المنتجة عن 95 وحدة ؟

3- أن تتراوح بين 105 و 110 وحدة ؟

4 - أن تتراوح بين 95 و 90 وحدة ؟

<u>ملاحظة</u> : المتراجحتان التاليتان <u>كافيتان</u> عن استخدام جدول التوزيع الطبيعي:

$$P(-1 \le Z \le 1) = 0{,}6826 \qquad P(-2 \le Z \le 2) = 0{,}9544$$

<u>**الحل :**</u>

(x) متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع طبيعي عادي متوسطه $\mu = 100$ ، غير أن الانحراف المعياري غير موجود ، من الحصر السابق و من المتراجحة نحدد الانحراف المعياري :

لدينا : $P(100 < X < 110) = 0{,}4772$

ومنه: $P(\frac{100-100}{\sigma} < Z < \frac{110-100}{\sigma}) = 0{,}4772$ أي : $P(0 < Z < \frac{10}{\sigma}) = 0{,}4772$

من المتراجحة : $P(-2 \le Z \le 2) = 0{,}9544$ نجد أن : $P(0 \le Z \le 2) = \frac{0{,}9544}{2} = 0{,}4772$

ومنه $P(0 < Z < \frac{10}{\sigma}) = P(0 < Z < 2) = 0{,}4772$ أي أن $\frac{10}{\sigma} = 2 \Leftarrow \sigma = \frac{10}{2} \Leftarrow 5 = \sigma$

إذن لدينا : $\sigma = 5$ و $\mu = 5$

أ. حساب احتمال:

1- أن تزيد الكمية المنتجة عن 105 وحدة :

$$P(X > 105) = P(Z > \frac{105-100}{5}) = P(Z > 1)$$

من المتراجحة : $P(-1 \le Z \le 1) = 0{,}6826$ نجد أن : $P(0 \le Z \le 1) = \frac{0{,}6826}{2} = 0{,}3413$

ومنه : $P(X > 105) = P(Z > 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$

2- أن تقل الكمية المنتجة عن 95 وحدة :

$$P(X < 95) = P(Z > \frac{95-100}{5}) = P(Z > -1)$$

من المتراجحة : $P(-1 \le Z \le 1) = 0,6826$ نجد أن : $P(-1 \le Z \le 0) = \frac{0,6826}{2} = 0,3413$

ومنه : $P(X < 95) = P(Z < -1) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$

3- أن تتراوح بين 105 و 110 وحدة :

$$P(105 < X < 110) = P(\frac{105-100}{5} < Z < \frac{110-100}{5}) = P(1 < Z < 2)$$

من المتراجحة : $P(-1 \le Z \le 1) = 0,6826$ نجد أن : $P(0 \le Z \le 1) = \frac{0,6826}{2} = 0,3413$

من المتراجحة : $P(-2 \le Z \le 2) = 0,9544$ نجد أن : $P(0 \le Z \le 2) = \frac{0,9544}{2} = 0,4772$

ومنه : $P(105 < X < 110) = P(1 < Z < 2) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359$

4 - أن تتراوح بين 95 و 90 وحدة :

$$P(90 < X < 95) = P(\frac{90-100}{5} < Z < \frac{95-100}{5}) = P(-2 < Z < -1)$$

من المتراجحة : $P(-1 \le Z \le 1) = 0,6826$ نجد أن : $P(-1 \le Z \le 0) = \frac{0,6826}{2} = 0,3413$

من المتراجحة : $P(-2 \le Z \le 2) = 0,9544$ نجد أن : $P(-2 \le Z \le 0) = \frac{0,9544}{2} = 0,4772$

ومنه:

$$P(90 < X < 95) = P(\frac{90-100}{5} < Z < \frac{95-100}{5}) = P(-2 < Z < -1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359$$

حل السلسلة الرابعة

(بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة – التوزيع الأسي – توزيع قاما - توزيع بيتا)

حل التمرين الأول:

التمرين: في وقت الظهيرة يتلقى مركز شرطة في المتوسط 5 مكالمات في الساعة، فإذا حددنا انطلاق الزمن في لحظة معينة X_i ، فأوجد :

1- التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن تلقي المكالمات انطلاقا من لحظة زمنية معينة ؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير ؟

3- احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة خلال 15 دقيقة أو أقل ؟

4- احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة خلال النصف ساعة القادمة ؟

5- احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة ما بين النصف ساعة و45 دقيقة ؟

6- متوسط زمن تلقي المكالمات وانحرافه المعياري ؟

الحل :

1- ايجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبرعن تلقي المكالمات انطلاقا من لحظة زمنية معينة :

بما أن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن تلقي المكالمات انطلاقا من لحظة زمنية معينة، أي مرتبط بعنصر الزمن، فإن هذا المتغير يتبع التوزيع الأسي بالمعلمة $\lambda = \frac{1}{5} = 0.2$ لأن المتوسط $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$ ، ونكتب $X \sim Exp(0.2)$ وتكون دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير على النحو التالي :

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda.x} = 0.2\, e^{-0.2\,x} \qquad 0 < x < \infty$$

2- ايجاد دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda.x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وبتعويض قيمة λ تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.2\,x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

3- حساب احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة خلال 15 دقيقة أو أقل :

تلقي مكالمة خلال 15 دقيقة أو أقل يعني وصولها سيكون أقل من أو يساوي ربع ساعة ومنه الاحتمال يحسب كما يلي :

$$P\left(X \leq \frac{15}{60}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{4}\right) = P(X \leq 0.25) = F(0.25) = 1 - e^{-0.2(0.25)}$$
$$= 1 - 0.9512 = 0.0487$$

4- حساب احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة خلال النصف ساعة القادمة :

تلقي مكالمة خلال النصف ساعة القادمة يعني وصولها سيكون أقل من أو يساوي نصف ساعة ومنه الاحتمال يحسب كما يلي :

$$P\left(X \leq \frac{30}{60}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = P(X \leq 0.5) = F(0.5) = 1 - e^{-0.2(0.5)} = 1 - 0.9048$$
$$= 0.0951$$

5- حساب احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة ما بين النصف ساعة و45 دقيقة :

$$P\left(\frac{30}{60} \leq X \leq \frac{45}{60}\right) = P\left(X \leq \frac{3}{4}\right) - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = P(X \leq 0.75) - P(X \leq 0.5)$$
$$= F(0.75) - F(0.5) = \left(1 - e^{-0.2(0.75)}\right) - \left(1 - e^{-0.2(0.5)}\right)$$
$$= 0.1392 - 0.0951 = 0.0441$$

6- حساب متوسط زمن تلقي المكالمات و انحرافه المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 25$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = 5$$

حل التمرين الثاني:

التمرين : إذا كانت مدة إصلاح الهواتف النقالة في أحد مراكز صيانة الأجهزة الكهربائية هي 20 دقيقة في المتوسط لكل هاتف، فإذا كانت مدة الانتهاء من الإصلاح تحدد إنطلاقا من لحظة زمنية معينة X_i عشوائية فأوجد :

1- التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن المدة الزمنية اللازمة لإصلاح الهواتف النقالة ؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير ؟

3- احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز خلال 10 دقائق أو أقل ؟

4- احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز خلال نصف ساعة القادمة ؟

5- احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز ما بين 12 و 22 دقيقة ؟

6- متوسط زمن إصلاح الهاتف في هذا المركز وانحرافه المعياري ؟

الحل :

- ايجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن مدة الانتهاء من إصلاح الهواتف النقالة انطلاقا من لحظة زمنية معينة :

بما أن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن مدة الانتهاء من إصلاح الهواتف النقالة انطلاقا من لحظة زمنية معينة، أي مرتبط بعنصر الزمن، فإن هذا المتغير يتبع التوزيع الأسي بالمعلمة $\lambda = \frac{1}{20} = 0.05$ لأن المتوسط $(X) = \frac{1}{\lambda} = 20$ ، ونكتب $X \sim Exp(0.05)$ وتكون دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير على النحو التالي :

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda . x} = 0.05\, e^{-0.05\, x} \qquad 0 < x < \infty$$

2- ايجاد دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda . x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وبتعويض قيمة λ تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.05\, x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

3- حساب احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز خلال 10 دقائق أو أقل :

$$P(X \leq 10) = F(10) = 1 - e^{-0.05(10)} = 1 - 0.6065 = 0.3934$$

4- حساب احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز خلال نصف ساعة القادمة :

إصلاح هاتف خلال النصف ساعة القادمة يعني إصلاحه سيكون أقل من أو يساوي نصف ساعة ومنه الاحتمال يحسب كما يلي :

$$P(X \leq 30) = F(30) = 1 - e^{-0.05(30)} = 1 - 0.2231 = 0.7768$$

5- حساب احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز ما بين 12 و 22 دقيقة :

$$P(12 \leq X \leq 22) = P(X \leq 22) - P(X \leq 12) = F(22) - F(12)$$
$$= \left(1 - e^{-0.05(22)}\right) - \left(1 - e^{-0.05(12)}\right) = 0.6671 - 0.4511 = 0.216$$

6- حساب متوسط زمن إصلاح الهاتف في هذا المركز و انحرافه المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 20$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 400$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = 20$$

حل السلسلة الخامسة

(بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة – توزيع ستيودنت – توزيع كاي مربع – توزيع فيشر)

حل التمرين الأول:

التمرين : باستخدام جدول t أجب على ما يلي :

1- ما هي قيمة الإحصائية t للحالات التالية :

$t_{(0.20,11)}$; $t_{(0.01,5)}$; $t_{(0.80,12)}$; $t_{(0.75,10)}$; $t_{(0.95,20)}$

2- أوجد المساحة الواقعة على يسار t=-2.508 وعند درجة حرية 22 ؟

3- أوجد درجة الحرية لقيمة t= 2.518 والتي تقع على يمينها المساحة 0.01؟

4- ما هي قيمة المساحة التي تقابل حجم العينة 18 و t=3.646 ؟

5- إذا كان لدينا المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية 12، فأوجد احتمال أن تكون قيمته :

أ- أقل من 1.356 ؟

ب - أكبر من أو تساوي 3.930 ؟

ج - محصورة بين 1.083 و 2.179 ؟

الحل :

1- باستخدام جدول t وخاصية التناظر $t_{(\alpha,v)} = -t_{(1-\alpha,v)}$ نجد أن قيم الإحصائية t للحالات المطلوبة هي كالتالي :

$$*t_{(0.20,11)} = 0.876$$

$$*t_{(0.01,5)} = 3.365$$

$$*t_{(0.80,12)} = -t_{(1-0.80,12)} = -t_{(0.20,12)} = -0.873$$

$$*t_{(0.75,10)} = -t_{(1-0.75,10)} = -t_{(0.25,10)} = -0.700$$

$$*t_{(0.95,20)} = -t_{(1-0.95,20)} = -t_{(0.05,20)} = -1.725$$

2- بما أن قيمة t سالبة فإننا نستخدم خاصية التناظر (لأنه لا توجد قيم سالبة في جدول t) أي:

$$t_{(\alpha,15)} = -t_{(1-\alpha,22)}$$

إن قيمة t=-2.508 تقابلها t=2.508 ومساحتها 0.99 وحيث أن المساحة المطلوبة هي على يسار 2.508- ،فيكون : $1-\alpha = 0.99$ من الجدول، ومنه $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$ ، أي المساحة الواقعة على اليسار وعند درجة حرية 22هي 0.01 .

3- لدينا من خلال المعطيات : $t(0.01, v) = 2.518$ وبالتالي ومن خلال جدول t نجد أن درجة الحرية التي تحقق $t(0.01, v) = 2.518$ هي 21 أي أن : $v = 21$

4- لدينا $v = n - 1$ ، أي أن $v = 17$ و $\mathrm{t} = 3.646$ وبالتالي ومن خلال جدول t فإن المساحة المقابلة هي 0.001 أي أن :

$$t_{(0.001,17)} = 3.646$$

5- حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير :

أ- أقل من 1.356:

$$P(X < 1.356) = 1 - P(X \geq 1.356) = 1 - 0.1 = 0.90$$

ب - أكبر من أو تساوي 3.930 :

$$P(X \geq 3.930) = 0.001$$

جـ - محصورة بين 1.083 و 2.179 :

$$\begin{aligned} P(1.083 \leq X \leq 2.179) &= P(X \leq 2.179) - P(X \leq 1.083) \\ &= [1 - P(X > 2.179)] - [1 - P(X > 1.083)] \\ &= (1 - 0.025) - (1 - 0.15) = 0.125 \end{aligned}$$

ويمكن حسابها بطريقة ثانية كما يلي :

$$P(1.083 \leq X \leq 2.179) = P(X \geq 1.083) - P(X \geq 2.179) = 0.15 - 0.025 = 0.125$$

<u>حل التمرين الثاني:</u>

<u>التمرين :</u> باستخدام جدول χ^2 أجب على ما يلي :

1- ما هي قيمة الإحصائية χ^2 للحالات التالية :

$\chi^2{}_{(0.05,10)}$; $\chi^2{}_{(0.25,16)}$; $\chi^2{}_{(0.90,6)}$; $\chi^2{}_{(0.995,18)}$

2- إذا كانت لدينا القيمة $\chi^2 = 8.23$ عند درجة حرية 18، فما مقدار المساحة الواقعة على يسارها ؟

3- أوجد درجة الحرية لقيمة $\chi^2 = 5.90$ و $\chi^2 = 12.79$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.75 ؟

4- إذا كان حجم العينة هو 21 للمتغير X الذي يتبع توزيع كاي مربع، فأوجد احتمال أن تكون قيمته :

أ – أقل من 34.17 ؟

ب – أقل من 28.41 ؟

ج- أكبر من أو تساوي 19.34 ؟

د – محصورة بين 19.34 و 34.17 ؟

5 – أحسب المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي في السؤال الرابع ؟

الحل:

1- قيمة الإحصائية χ^2 للحالات التالية :

* $\chi^2{}_{(0.05,10)} = 18.31$

* $\chi^2{}_{(0.25,16)} = 19.37$

* $\chi^2{}_{(0.90,6)} = 2.20$

* $\chi^2{}_{(0.995,18)} = 6.26$

2- مقدار المساحة الواقعة على يسار القيمة $\chi^2 = 8.23$ عند درجة حرية 18:

نلاحظ أن المساحة التي تقع على يمين $\chi^2 = 8.23$. عند درجة حرية 18 هي $\alpha = 0.975$ وبالتالي فإن المساحة التي تقع على يسارها هي : $1 - \alpha = 1 - 0.975 = 0.025$.

3- إيجاد درجة الحرية لقيمة $\chi^2 = 5.90$ و $\chi^2 = 12.79$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.75 :

لدينا من خلال المعطيات : $\chi^2{}_{(0.75,v)} = 5.90$ وبالتالي ومن خلال جدول كاي مربع نجد أن درجة الحرية التي تحقق $\chi^2{}_{(0.75,v)} = 5.90$ هي 9 أي أن : $v = 9$.

و لدينا كذلك من خلال المعطيات : $\chi^2{}_{(0.75,v)} = 12.79$ وبالتالي ومن خلال جدول كاي مربع نجد أن درجة الحرية التي تحقق $\chi^2{}_{(0.75,v)} = 12.79$ هي 17 أي أن : $v = 17$.

4- حساب الاحتمالات :

X يخضع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية $v = n - 1 = 21 - 1 = 20$ ونكتب اختصارا : $X \sim \chi^2_{(20)}$

أ - حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أقل من 34.17 :

$$P(X < 34.17) = 1 - P(X \geq 34.17) = 1 - 0.025 = 0.975$$

أ - حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أقل من 28.41 :

$$P(X < 28.41) = 1 - P(X \geq 28.41) = 1 - 0.10 = 0.90$$

ج – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أكبر من أو تساوي 19.34 :

$$P(X \geq 19.34) = 0.5$$

د – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير محصورة بين 19.34 و 34.17 :

$$\begin{aligned} P(19.34 \leq X \leq 34.17) &= P(X \leq 34.17) - P(X \leq 19.34) \\ &= [1 - P(X > 34.17)] - [1 - P(X > 19.34)] \\ &= (1 - 0.025) - (1 - 0.50) = 0.475 \end{aligned}$$

ويمكن حسابها بطريقة ثانية كما يلي :

$$P(19.34 \leq X \leq 34.17) = P(X \geq 19.34) - P(X \geq 34.17) = 0.50 - 0.025 = 0.475$$

5 – حساب المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لمعطيات السؤال الرابع :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = v = 20$$

ب- التباين :

$$V(X) = 2v = 40$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{40} = 6.32$$

حل التمرين الثاني:

التمرين : باستخدام جدول فيشر أجب على ما يلي :

1- ما هي قيمة الإحصائية F للحالات التالية :

$$F(0.05; 8; 14); \quad F(0.025; 5; 15); \quad F(0.95; 7; 10); \quad F(0.9; 6; 11)$$

2- أوجد درجات الحرية لقيمة $F = 6.62$ و $F = 3.51$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.01 ؟

3- إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $v_1 = 8; v_2 = 14$، فأوجد احتمال أن تكون قيمته :

أ- أقل من 4.14 ؟

ب -أقل من 2.7 ؟

ج- أكبر من أو تساوي 3.29 ؟

د - محصورة بين 2.15 و 3.29 ؟

4 – أحسب المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي في السؤال الثالث ؟

الحل :

1- باستخدام جدول F والقاعدة $F(\alpha; v_1; v_2) = \frac{1}{F(1-\alpha; v_2; v_1)}$ نجد أن قيم الإحصائية F للحالات المطلوبة هي كالتالي :

$* F(0.05\,; 8\,; 14) = 2.70$

$* F(0.025\,; 5\,; 15) = 3.29$

$* F(0.95\,; 7\,; 10) = \frac{1}{F(1-0.95\,; 10\,; 7)} = \frac{1}{F(0.05\,; 10\,; 7)} = \frac{1}{3.64} = 0.274$

$$*F(0.9;6;12)=\frac{1}{F(1-0.9;12;6)}=\frac{1}{F(0.1;12;6)}=\frac{1}{2.9}=0.344$$

2- أوجد درجات الحرية لقيمة $F=6.62$ و $F=3.51$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.01 :

لدينا من خلال المعطيات : $F(0.01\,;v_1;v_2)=6.62$ وبالتالي ومن خلال جدول فيشر نجد أن درجتي الحرية التي تحقق $F(0.01\,;v_1;v_2)=6.62$ هي : $v_1=10;v_2=7$.

ولدينا من خلال المعطيات أيضا : $F(0.01\,;v_1;v_2)=3.51$ وبالتالي ومن خلال جدول فيشر نجد أن درجتي الحرية التي تحقق $F(0.01\,;v_1;v_2)=3.51$ هي : $v_1=8;v_2=21$

3- حساب الاحتمالات :

X يخضع لتوزيع فيشر بدرجتي حرية $v_1=8;v_2=14$ ونكتب اختصارا : $X \sim F(8;14)$

أ - حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أقل من 4.14 :

$$P(X<4.14)=1-P(X\geq 4.14)=1-0.01=0.99$$

ب - حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أقل من 2.7 :

$$P(X<2.7)=1-P(X\geq 2.7)=1-0.05=0.95$$

جـ – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أكبر من أو تساوي 3.29 :

$$P(X\geq 3.29)=0.025$$

د – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير محصورة بين 2.15 و 3.29 :

$$\begin{aligned}P(2.15\leq X\leq 3.29)&=P(X\leq 3.29)-P(X\leq 2.15)\\&=[1-P(X>3.29)]-[1-P(X>2.15)]\\&=(1-0.025)-(1-0.10)=0.075\end{aligned}$$

ويمكن حسابها بطريقة ثانية كما يلي :

$$P(2.15\leq X\leq 3.29)=P(X\geq 2.15)-P(X\geq 3.29)=0.10-0.025=0.075$$

4 – حساب المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لمعطيات السؤال الثالث :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\frac{v_2}{v_2-2}=\frac{14}{12-2}=1.166$$

ب- التباين :

$$V(X)=\frac{2(v_2)^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}=\frac{2(14)^2(8+14-2)}{8(14-4)(14-2)^2}=\frac{7840}{13824}=0.56$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.56}=0.74$$

المحور الأول

تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

تمهيد :

بعد تطرقنا في المحور الأول إلى أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة وأهم القوانين المتعلقة بها، وكذلك أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة في المحور الثاني، سنحاول في هذا المحور التطرق إلى موضوع التقارب بين بعض التوزيعات، حيث سنتناول التقارب بين بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، ومن ثم التقارب بين بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة والتوزيع الطبيعي.

أولا : التقارب بين توزيع بواسون وتوزيع ثنائي الحدين

يعتبر توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ذو الحدين، وعليه تجدر الاشارة إلى أن توزيع ذو الحدين يمكن أن يقرب لتوزيع بواسون بحيث تكون $\lambda = np$ وذلك عندما تكون n كبيرة، ويكون p قريب من الصفر (أي أن q=1-p قريب من 1)،بينما [n>30,np<5 or n(1-p)>5] ، ويكون التوزيع الثنائي قريبا جدا من التوزيع البواسوني الذي يمكن استخدامه كتقريب ممتاز للتوزيع الثنائي.

مثال 01:

نفرض أن هناك 300 خطأ مطبعيا موزعة على صفحات كتاب به 500 صفحة،

1- أوجد الاحتمالات التالية : أ – أن لا تحتوي صفحة معينة على أية خطأ ؟

ب- أن تحتوي صفحة معينة على خطأ بالضبط ؟ جـ - أن تحتوي صفحة معينة على خطأين أو أكثر ؟

2- أحسب المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع؟

الحل :

سوف ننظر إلى عدد الأخطاء في الصفحة على أنه عدد مرات النجاح في متتابعة من تجارب برنولي، في هذا المثال n=300 حيث أنه يوجد 300 خطأ مطبعي و $p = \frac{1}{500}$ هو احتمال أن يظهر خطأ في الصفحة المعينة، حيث أن p صغيرة فسوف نستعمل تقريب بواسون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda = np = 300.\frac{1}{500} = 0.6$.وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-0.6}0.6^{x}}{x!}$$

1- حساب الاحتمالات التالية :

أ – أن لا تحتوي أية صفحة معينة على خطأ :

$$P(X=0)=\frac{e^{-0.6}0.6^0}{0!}=0.549$$

ب- أن تحتوي صفحة معينة على خطأ بالضبط :

$$P(X=1)=\frac{e^{-0.6}0.6^1}{1!}=0.329$$

ج- أن تحتوي صفحة معينة على خطأين أو أكثر :

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-[0.549+0.329]=0.122$$

2- حساب المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\lambda=0.6$$

ب- التباين :

$$V(X)=\lambda=0.6$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda}=\sqrt{0.6}=0.77$$

مثال 02:

توضح الخبرة الماضية أن **1%** من مصابيح الكهرباء المنتجة في مصنع ما هي مصابيح معيبة . في عينة من **30** مصباح ، أوجد احتمال وجود أكثر من مصباح معيب باستخدام (أ) توزيع ذو الحدين (ب) توزيع بواسون كتقريب لذو الحدين .

الحل :

1- أ- حساب احتمال وجود أكثر من مصباح معيب باستخدام توزيع ذو الحدين :

بما أن عدد المحاولات معلوم (n=30) ، واحتمال النجاح ثابت في كل تجربة (p=0.01) (التجارب مستقلة) فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\mathrm{C}_{30}^{\mathrm{x}}(0.01)^{\mathrm{x}}(0.99)^{30-\mathrm{x}} \qquad \mathrm{X}=0,1,2,3,..,30$$

$$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=30)$$

$$P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

$$P(X>1)=1-\left[\mathrm{C}_{30}^{0}(0.01)^{0}(0.99)^{30-0}+\mathrm{C}_{30}^{1}(0.01)^{1}(0.99)^{30-1}\right]$$
$$=1-(0.7397+0.2241)=0.0361$$

1-ب- حساب احتمال وجود أكثر من مصباح معيب باستخدام توزيع بواسون :

بما أن p صغيرة فيمكن أن نستعمل تقريب بواسون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda=\mathrm{np}=30*0.01=0.3$ وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-0.3}0.3^{x}}{x!}$$

$$P(X=1)=\frac{e^{-0.3}0.3^{1}}{1!}=(2.3)(0.74082)=0.222246$$

$$P(X=0)=\frac{e^{-0.3}0.3^{0}}{0!}=e^{-0.3}=0.74082$$

$$P(X\leq 1)=P(X=1)+P(X=0)=0.222246+0.74082=0.963066$$

$$P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-0.963066=0.036934,\text{ or } 3.69\%$$

2- الاستنتاج: يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين من توزيع بواسون، وذلك عندما تكون p صغيرة و n كبيرة، وعموما نقوم بالتقرب إذا تحقق: $p\leq 0{,}05$ و $n\geq 30$.

ثانيا : تقريب التوزيع فوق الهندسي من توزيع ثنائي الحدين

إذا كان حجم العينة n صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع N، فإن معامل الشمولية $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ يؤول إلى الواحد، وتصبح قيمة التباين لهذا التوزيع تساوي قيمة التباين التي توصلنا إليها من قانون ثنائي الحدين، وبالتالي كقاعدة عامة، إذا كان $\left(\frac{n}{N} \leq 0.05\right)$ فإننا نقرب توزيع فوق الهندسي من التوزيع ثنائي الحدين، أي نستخدم قانون ثنائي الحدين لحساب الاحتمالات بدل قانون فوق الهندسي، أي :

$$X \to H(N, N_1, n) \longrightarrow X \to B(n, p)$$

مثال 03 : صندوق به 100 كرية منها 60 بيضاء و40 حمراء، نسحب بدون إرجاع 3 كريات، أحسب احتمال الحصول على :

1- كريتين بيضاوين ؟
2- ولا كرة بيضاء ؟
3- كريتين بيضاوين على الأقل ؟
4- كريتين بيضاوين على الأكثر ؟

الحل :

القانون الأصلي هو قانون فوق الهندسي، $X \to H(100,60,3)$

لكن لدينا : $\left(\frac{n}{N} = \frac{3}{100} = 0.03 \leq 0.05\right)$ وبالتالي نقرب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين أي :

$X \to B(3,0.6)$ أي : $X \to B(4,0.7)$ وتصبح دالة الكثافة الاحتمالية على النحو التالي :

$$P(X = x) = C_3^x (0.6)^x (0.4)^{3-x} \qquad x = 0,1,2,3$$

1- حساب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين :

$$\mathrm{P(X = 2) = C_3^2 (0.6)^2 (0.4)^1 = 0.432}$$

2- حساب احتمال عدم الحصول على أية كرة بيضاء :

$$\mathrm{P(X = 0) = C_3^0 (0.6)^0 (0.4)^3 = (0.4)^3 = 0.064}$$

3- حساب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين على الأقل :

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0.432 + C_3^3(0.6)^3(0.4)^0 = 0.432 + 0.216 = 0.648$$

4 - حساب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر :

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0.064 + C_3^1(0.6)^1(0.4)^2 + 0.432 = 0.064 + 0.0768 + 0.432 = 0.5728$$

ثالثا : التقريب الطبيعي لتوزيع ثنائي الحدين

يستخدم التوزيع الطبيعي (وهو توزيع مستمر) لتقريب توزيع ثنائي الحدين (وهو توزيع متقطع)، وذلك عندما يكون عدد المحاولات n كبير $n \geq 30$ ، ولم تكن كل من p أو q قريبة من الصفر أي $P \approx 0.5$ ، أو عندما تكون $n.p > 5$ و $n.q > 5$ وذلك لسهولة إيجاد قيم الاحتمالات باستخدام الجداول وصعوبة حساب صيغ C_n^x لقيم $n \geq 30$، ونكتب :

$$B(n,P) \sim N(\mu = np, \sigma^2 = n.p.q)$$

ويكون :

$$P(X=x) \approx P\left(\frac{x-n.p-0.5}{\sqrt{n.p.q}} \leq Z \leq \frac{x-n.p+0.5}{\sqrt{n.p.q}}\right) \approx P\left(\frac{x-\mu-0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu+0.5}{\sigma}\right)$$

$$P(X < x) \approx P\left(Z < \frac{x-n.p-0.5}{\sqrt{n.p.q}}\right)$$

$$P(X \leq x) \approx P\left(Z < \frac{x-n.p+0.5}{\sqrt{n.p.q}}\right)$$

حيث : $Z \sim N(0,1)$

مثال 04 :

ألقيت قطعة نقدية 12 مرة، أحسب احتمال أن نحصل على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و 7 بما في ذلك 4 و 7 باستخدام :

1 – التوزيع ثنائي الحدين ؟

2 – التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي ؟

الحل :

1- حساب احتمال الحصول على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و 7 باستخدام توزيع ثنائي الحدين :

بما أن عدد المحاولات معلوم، واحتمال النجاح ثابت في كل المحاولات، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ثنائي الحدين حيث $n = 12$ و $p = 0.5$ و $q = 0.5$ ونكتب اختصارا $X \sim B(12,0.5)$ وتكون دالته الاحتمالية على النحو التالي :

$$P(X = x) = C_{12}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-x} \quad x = 0,1,2,3, \dots ,12$$

$$P(4 \leq X \leq 7) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

$$P(X = 4) = C_{12}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-4} = \frac{495}{4096}$$

$$P(X = 5) = C_{12}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-5} = \frac{792}{4096}$$

$$P(X = 6) = C_{12}^{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-6} = \frac{924}{4096}$$

$$P(X = 7) = C_{12}^{7} \left(\frac{1}{2}\right)^{7} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-7} = \frac{792}{4096}$$

ومنه نجد الاحتمال المطلوب :

$$P(4 \leq X \leq 7) = \frac{495}{4096} + \frac{792}{4096} + \frac{924}{4096} + \frac{792}{4096} = \frac{3003}{4096} = 0.7332$$

2- حساب احتمال الحصول على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و 7 باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي :

في هذا المثال لدينا : $\mu = 12.\frac{1}{2} = 6$ وأيضا $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{12.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 1.73$ وباستخدام علاقة التقريب بين التوزيع الطبيعي وتوزيع ثنائي الحدين $P\left(\frac{x-\mu-0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu+0.5}{\sigma}\right)$ نجد :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(4 \leq \mathrm{X} \leq 7) &\approx P\left(\frac{4-6-0.5}{1.73} \leq Z \leq \frac{7-6+0.5}{1.73}\right) = P(-1.445 \leq Z \leq 0.867) \\ &= P(-1.445 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.867) = 0.4251 + 0.3078 \\ &= 0.7329 \end{aligned}$$

مثال 05 :

ألقي حجر نرد 180 مرة، أحسب احتمال أن يظهر الرقم 6 :

1- من 29 إلى 32 مرة بما في ذلك 29 و 32 ؟

2- من 31 إلى 35 مرة بما في ذلك 31 و 35 ؟

الحل :

1 – حساب احتمال أن يظهر الرقم 6 من 29 إلى 32 مرة بما في ذلك 29 و 32 :

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية المكررة تتبع قانون ثنائي الحدين، لكن عند استخدامه فإن القيام بالعمليات الحسابية يكون صعبا جدا، لذلك يتم استخدام قانون التوزيع الطبيعي كتقريب لقانون ثنائي الحد، لأن شروط التقريب متوفرة، حيث :

$n.p > 5$ و $n.q > 5$ و $n > 30$.

في هذا المثال لدينا : $\mu = 180.\frac{1}{6} = 30$ وأيضا $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{180.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}} = 5$ وباستخدام علاقة التقريب بين التوزيع الطبيعي وتوزيع ثنائي الحدين $P\left(\frac{x-\mu-0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu+0.5}{\sigma}\right)$ نجد :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(29 \leq \mathrm{X} \leq 32) &\approx P\left(\frac{29-30-0.5}{5} \leq Z \leq \frac{32-30+0.5}{5}\right) \\ &= P(-0.3 \leq Z \leq 0.5) = P(-0.3 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.1179 + 0.1915 = 0.3094 \end{aligned}$$

2– حساب احتمال أن يظهر الرقم 6 من 31 إلى 35 مرة بما في ذلك 31 و 35 :

$$P(31 \leq X \leq 35) \approx P\left(\frac{31-30-0.5}{5} \leq Z \leq \frac{35-30+0.5}{5}\right) = P(0.1 \leq Z \leq 1.1)$$
$$= P(0 \leq Z \leq 1.1) - P(0 \leq Z \leq 0.1) = 0.3643 - 0.0398 = 0.3245$$

رابعا : تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي

بما أنه توجد علاقة تربط توزيع بواسون بتوزيع ثنائي الحدين، وتوجد علاقة تربط توزيع ثنائي الحدين بالتوزيع الطبيعي فإنه من المنطقي أن نقول توجد علاقة تربط توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي، ويتحقق ذلك عندما تكون λ كبيرة أي : $\lambda \to \infty$ ويمكن التقريب وفق الصيغة التالية :

$$P(\lambda) \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

$$\lambda \to \infty$$

والقاعدة العملية للتقارب هي عندما تتجاوز المعلمة λ للمقدار 15 أي $\lambda \geq 15$ فيما يعتمد بعض الاحصائيين كشرط للتقرب $\lambda \geq 10$.

ويكون التقريب وفق معامل التصحيح وحسب الحالات التالية :

$$P(X = x) \approx P\left(\frac{x-\lambda-0.5}{\sqrt{\lambda}} \leq Z \leq \frac{x-\lambda+0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$P(X < x) \approx P\left(Z < \frac{x-\lambda-0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$P(X \leq x) \approx P\left(Z < \frac{x-\lambda+0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

مثال 07 :

يستقبل مركز الاستعجالات الطبية بأحد المستشفيات الكبرى في المتوسط 16 حالة كل ساعتين، فما احتمال أن يستقبل بين الساعة العاشرة صباحا والثانية عشر صباحا :

1 - 10 حالات ؟

2- أقل من 11 حالة ؟

3- 11 حالة على الأكثر ؟

4- أكثر من 14 حالة ؟

5- أكثر من 5 حالات وأقل أو يساوي 17 حالة ؟

الحل :

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع بواسون، حيث: $\lambda = 16$ ، لكن حسب صيغة الأسئلة فإن استخدام هذا التوزيع يتطلب عمليات حسابية طويلة وصعبة، لذلك سيتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، لأن شروط التقريب متوفرة، لأن $\lambda = 16 \geq 15$:، حيث يكون:

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 16$$

1- حساب احتمال استقبال 10 حالات :

$$\begin{aligned} P(X = 10) &\approx P\left(\frac{x - \lambda - 0.5}{\sqrt{\lambda}} \leq Z \leq \frac{x - \lambda + 0.5}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ &= P\left(\frac{10 - 16 - 0.5}{\sqrt{16}} \leq Z \leq \frac{10 - 16 + 0.5}{\sqrt{16}}\right) \\ &= P(-1.625 \leq Z \leq -1.375) \\ &= P(-1.625 \leq Z \leq 0) - P(-1.375 \leq Z \leq 0) = 0.4484 - 0.4162 \\ &= 0.0322 \end{aligned}$$

2- حساب احتمال استقبال أقل من 11 حالة :

$$\begin{aligned} P(X < 11) &\approx P\left(Z < \frac{11 - 16 - 0.5}{\sqrt{16}}\right) = P(Z < -1.375) \\ &= 0.5 - P(-1.375 \leq Z \leq 0) = 0.5 - 0.4162 = 0.0838 \end{aligned}$$

3- حساب احتمال استقبال 11 حالة على الأكثر:

$$\begin{aligned} P(X \leq 11) &\approx P\left(Z \leq \frac{11 - 16 + 0.5}{\sqrt{16}}\right) = P(Z \leq -1.25) \\ &= 0.5 - P(-1.25 \leq Z \leq 0) = 0.5 - 0.3944 = 0.1056 \end{aligned}$$

4- حساب احتمال استقبال أكثر من 14 حالة :

$$P(X>14)\approx P\left(Z>\frac{14-16+0.5}{\sqrt{16}}\right)=P(Z>-0.375)$$
$$=0.5+P(-0.375\le Z\le 0)=0.5+0.1480=0.6480$$

4- حساب احتمال استقبال أكثر من 5 حالات و أقل أو يساوي 17 حالة :

$$P(5<X\le 17)\approx P\left(\frac{5-16+0.5}{\sqrt{16}}<Z\le\frac{17-16+0.5}{\sqrt{16}}\right)$$
$$=P(-2.625<Z\le 0.375)$$
$$=P(-2.625\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.375)=0.4957+0.1480$$
$$=0.6437$$

خامسا – سلاسل التمارين الخاصة بالمحور

<u>حل السلسلة السادسة</u>

(تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية)

<u>حل التمرين الأول</u>:

<u>التمرين</u> : نفرض أن 2 % من وحدات الإنتاج في احدى المصانع معيبة، إذا تم إنتاج عينة من 100 وحدة من هذه الوحدات.

1- أوجد الاحتمالات التالية : أ – أن لا تحتوي العينة على أية وحدة معيبة ؟

ب- أن تحتوي العينة على ثلاث وحدات معيبة ؟ ج- أن تحتوي العينة على وحدتين معيبتين أو أكثر ؟

2- أحسب المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع؟

الحل :

سوف ننظر إلى عدد الوحدات المعيبة في العينة على أنه عدد مرات النجاح في متتابعة من تجارب برنولي، في هذا المثال n=100

و $p=0.02$ هو احتمال أن تظهر وحدة معيبة في العينة، حيث أن p صغيرة و n كبيرة أي [n>30,np<5] فسوف نستعمل تقريب بواسون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda=np=100\times0.02=2$. وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-2}2^{x}}{x!}$$

1- حساب الاحتمالات التالية :

أ – أن لا تحتوي العينة على أية وحدة معيبة :

$$P(X=0)=\frac{e^{-2}2^{0}}{0!}=0.1353$$

ب- أن تحتوي العينة على ثلاث وحدات معيبة :

$$P(X=3)=\frac{e^{-2}2^{3}}{3!}=0.329$$

ج- أن تحتوي العينة على وحدتين معيبتين أو أكثر:

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$
$$=1-\left[0.1353+\frac{e^{-2}2^{1}}{1!}\right]=1-[0.1353+0.2706]=0.5941$$

2- حساب المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\lambda=2$$

ب- التباين :

$$V(X)=\lambda=2$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda}=\sqrt{2}=1.41$$

<u>حل التمرين الثاني</u>:

<u>التمرين</u>: يوجد في محل لبيع أجهزة التلفاز 100 تلفاز ، من بينها 70 من نوع كوندور، و الباقي من نوع ايريس، بيعت منها 4 وحدات خلال أحد الأيام، فأحسب الاحتمالات التالية ((أ) باستخدام التوزيع فوق الهندسي (ب) باستخدام توزيع ثنائي الحدين كتقريب للتوزيع فوق الهندسي) :

1- احتمال أن تكون وحدتين مباعتين من نوعية كوندور ؟

2 - احتمال أن لا تكون أي وحدة مباعة من نوعية كوندور ؟

3 – احتمال أن تكون ثلاث وحدات مباعة على الأقل من نوع كوندور ؟

الحل :

أ – حساب الاحتمالات باستخدام التوزيع فوق الهندسي :

بما أن التجربة برنولية (مكررة 4 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X (عدد الوحدات المباعة من أجهزة التلفاز من هذا المحل ذات النوعية كوندور) يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات : $X\rightarrow H(100,70,4)$ وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{C_{70}^{x}.C_{30}^{4-x}}{C_{100}^{4}}\qquad x=0,1,2,3,4\qquad n=4$$

1- حساب احتمال أن تكون وحدتين مباعتين من نوعية كوندور:

$$P(X=2)=\frac{C_{70}^{2}.C_{30}^{4-2}}{C_{100}^{4}}=\frac{2415.435}{3921225}=0.2679$$

2- حساب احتمال أن لا تكون أي وحدة مباعة من نوعية كوندور:

$$P(X=0)=\frac{C_{70}^{0}.C_{30}^{4-0}}{C_{100}^{4}}=\frac{27405}{3921225}=0.0069$$

3- حساب احتمال أن تكون ثلاث وحدات مباعة على الأقل من نوع كوندور:

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)=\frac{C_{70}^{3}.C_{30}^{4-3}}{C_{100}^{4}}+\frac{C_{70}^{4}.C_{30}^{4-4}}{C_{100}^{4}}$$
$$=\frac{(54740.30)+(916895.1)}{3921225}=0.6526$$

ب - حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ثنائي الحدين كتقريب للتوزيع فوق الهندسي :

القانون الأصلي هو قانون فوق الهندسي، $X\rightarrow H(100{,}70{,}4)$

لكن لدينا : $\left(\frac{n}{N}=\frac{4}{100}=0.04\leq 0.05\right)$ وبالتالي نقرب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين أي : $X\rightarrow B(4{,}0.7)$ وتصبح دالة الكثافة الاحتمالية على النحو التالي :

$$P(X=x)=C_{4}^{x}(0.7)^{x}(0.3)^{4-x}\qquad x=0,1,2,3,4$$

1- حساب احتمال أن تكون وحدتين مباعتين من نوعية كوندور:

$$P(X=2)=C_{4}^{2}(0.7)^{2}(0.3)^{4-2}=0.2646$$

2- حساب احتمال أن لا تكون أي وحدة مباعة من نوعية كوندور:

$$P(X=0)=C_{4}^{0}(0.7)^{0}(0.3)^{4-0}=0.0081$$

3- حساب احتمال أن تكون ثلاث وحدات مباعة على الأقل من نوع كوندور:

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)=C_{4}^{3}(0.7)^{3}(0.3)^{4-3}+C_{4}^{4}(0.7)^{4}(0.3)^{4-4}$$
$$=0.4116+0.2401=0.6517$$

حل التمرين الثالث:

التمرين : في دراسة لمستوى الطلبة في مقياس الإحصاء 03 وجد أن نسبة 50% من الطلبة يستوعبون محتوى المقياس، فإذا كان عدد الطلبة الذين يدرسون المقياس في السنة الثانية علوم مالية ومحاسبة هو 200 طالب، فأوجد الاحتمالات التالية :

1- أن يكون عدد الطلبة الذين يستوعبون المقياس هم 100 طالب ؟

2 – أن يتراوح عدد الطلبة الذين يستوعبون المقياس ما بين 80 و100 طالب ؟

3 – أن يكون عدد الطلبة الذين يستوعبون المقياس على الأكثر 120 طالب ؟

الحل :

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية المكررة تتبع قانون ثنائي الحدين، لكن عند استخدامه فإن القيام بالعمليات الحسابية يكون صعبا جدا، لذلك يتم استخدام قانون التوزيع الطبيعي كتقريب لقانون ثنائي الحد، لأن شروط التقريب متوفرة، حيث :

$n.p > 5$ و $n.q > 5$ و$n > 30$.

في هذا المثال لدينا : $\mu = 200.\frac{1}{2} = 100$ وأيضا $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{200.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 7.07$ ونستخدم علاقة التقريب بين التوزيع الطبيعي وتوزيع ثنائي الحدين $P\left(\frac{x-\mu-0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu+0.5}{\sigma}\right)$ لحساب الاحتمالات.

1- حساب احتمال أن يكون عدد الطلبة الذين يستوعبون المقياس هم 100 طالب :

$$
\begin{aligned}
P(X = 100) &\approx P\left(\frac{x-\mu-0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu+0.5}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{100-100-0.5}{7.07} \leq Z \leq \frac{100-100+0.5}{7.07}\right) \\
&= P(-0.07 \leq Z \leq 0.07) = 2 \times 0.0279 = 0.0558
\end{aligned}
$$

2- حساب احتمال أن يتراوح عدد الطلبة الذين يستوعبون المقياس ما بين 80 و100 طالب :

$$P(80 \le X \le 100) \approx P\left(\frac{80-100-0.5}{7.07} \le Z \le \frac{100-100+0.5}{7.07}\right)$$
$$= P(-2.89 \le Z \le 0.07) = P\,(-2.89 \le Z \le 0) + \,P(0 \le Z \le 0.07)$$
$$= 0.4981 + 0.0279 = 0.526$$

3- حساب احتمال أن يكون عدد الطلبة الذين يستوعبون المقياس على الأكثر 120 طالب :

$$P(X \le 120) \approx P\left(Z \le \frac{120-100+0.5}{7.07}\right) = P(Z \le 2.89)$$
$$= 0.5 + \,P(0 \le Z \le 2.89) = 0.5 + 0.4981 = 0.4981$$

<u>حل التمرين الرابع</u>:

<u>**التمرين**</u> : تشير الخبرة السابقة أنه في المتوسط ينجح 20 مترشح في مسابقة الحصول على الإجازة في علوم القرآن بأحد المدارس القرآنية، خلال مدة التكوين المقدرة بسنتين، فما هو احتمال :

1- أن ينجح 15 مترشح ؟

2- أن ينجح 14 مترشح على الأكثر ؟

3- أن ينجح أقل من 18 مترشح ؟

4- أن ينجح ما بين 18 و 22 مترشح ؟

الحل :

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع بواسون، حيث: $\lambda = 20$ ، لكن حسب صيغة الأسئلة فإن استخدام هذا التوزيع يتطلب عمليات حسابية طويلة وصعبة، لذلك سيتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، لأن شروط التقريب متوفرة، لأن $\lambda = 20 \ge 15$، حيث يكون:

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 20$$

1- حساب احتمال أن ينجح 15 مترشح :

$$P(X=15)\approx P\left(\frac{x-\lambda-0.5}{\sqrt{\lambda}}\leq Z\leq\frac{x-\lambda+0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$
$$=P\left(\frac{15-20-0.5}{\sqrt{20}}\leq Z\leq\frac{15-20+0.5}{\sqrt{20}}\right)=P(-1.23\leq Z\leq -1)$$
$$=P(-1.23\leq Z\leq 0)-P(-1\leq Z\leq 0)=0.3907-0.3413$$
$$=0.0494$$

2- حساب أن ينجح 14 مترشح على الأكثر :

$$P(X\leq 14)\approx P\left(Z\leq\frac{14-20+0.5}{\sqrt{20}}\right)=P(Z\leq -1.23)$$
$$=0.5-P(-1.23\leq Z\leq 0)=0.5-0.3907=0.1093$$

3- حساب احتمال أن ينجح أقل من 18 مترشح :

$$P(X<18)\approx P\left(Z<\frac{18-20-0.5}{\sqrt{20}}\right)=P(Z<-0.55)$$
$$=0.5-P(-0.55\leq Z\leq 0)=0.5-0.2088=0.2912$$

4- حساب احتمال أن ينجح ما بين 18 و 22 مترشح :

$$P(18\leq X\leq 22)\approx P\left(\frac{18-20-0.5}{\sqrt{20}}\leq Z\leq\frac{22-20+0.5}{\sqrt{20}}\right)$$
$$=P(-0.55\leq Z\leq 0.55)=2.P(0\leq Z\leq 0.55)=2\times 0.2088$$
$$=0.4176$$

المحور الرابع

المتغيرات العشوائية الثنائية

تمهيد :

لقد درسنا لغاية المحور الثالث التوزيعات الاحتمالية ذات البعد الواحد، ولكن في بعض التجارب يوجد متغيرات عشوائية كثيرة، فإذا اختيرت عينة من عدة أشخاص وأخذت الأطوال والأوزان لهؤلاء الأشخاص فنكون بصدد دراسة متغيرات عشوائية ذات بعدين.

ولهذا سنحاول التعرف في هذا المحور على المتغيرات العشوائية الثنائية بنوعيها المنفصلة والمتصلة، وكيفية الحصول على توزيعاتها الاحتمالية المشتركة، وكذا دوالها الاحتمالية والهامشية (الحدية)، بالإضافة إلى معرفة أهم خصائصها.

أولا : المتغيرات العشوائية الثنائية

تعريف : ليكن S هو الفضاء العيني لتجربة ما، ولكل عدد حقيقي$(x \in s)$ لنعرف $X = X(x)$ و $Y = Y(y)$ كمتغيرات عشوائية، فنقول للزوج المرتب (X, Y) متغير عشوائي ذي بعدين، ويمكن تعميم هذا التعريف على المتغير العشوائي ذي البعد n .

فإذا كان المتغير العشوائي ذي البعدين (X, Y) له قيم صحيحة قابلة للعد في اللانهاية فنقول عن المتغير العشوائي (X, Y) بأنه متغير عشوائي منفصل ذا بعدين.

وإذا كان المتغير العشوائي(X, Y) يشكل مجموعة غير منتهية فإن المتغير العشوائي (X, Y) متغير متصل.

ثانيا : التوزيعات الاحتمالية الثنائية ودوالها

1- التوزيعات الاحتمالية المنفصلة ودوالها المشتركة والهامشية (الحدية) :

1– 1 تعريف : نفرض أن X و Y متغيران عشوائيان منفصلان معرفان على نفس فضاء العينة S

حيث: $X(S)=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ و $X(Y)=\{y_1, y_2, ... y_m\}$

فلكل زوج مرتب (x_i, y_j) يوجد احتمال يعرف بـ $P(X = x_i, Y = y_j)$ ونكتبه $h(x_i, y_j)$ ، وتسمى الدالة h بالتوزيع المشترك أو بدالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X و Y، وتعطى عادة في صورة الجدول التالي :

Y / X	y_1	y_2	....	y_m	المجموع
x_1 x_2 ... ... x_n	$h(x_1, y_1)$ $h(x_2, y_1)$ ... ... $h(x_n, y_1)$	$h(x_1, y_2)$ $h(x_2, y_2)$ ... ... $h(x_n, y_2)$	....	$h(x_1, y_m)$ $h(x_2, Y_m)$ ... ... $h(x_n, y_m)$	$f(x_1)$ $f(x_2)$ ... ... $f(x_n)$
المجموع	$g(y_1)$	$g(y_2)$	....	$g(y_m)$	

ويحقق التوزيع المشترك h الشروط التالية :

1) $h(x_i, y_j) \geq 0$

2) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j) = 1$

1- 2 الدوال الهامشية (الحدية) : تعرف الدوال f و g السابق ذكرها بالدوال الهامشية (الحدية) للمتغيرين العشوائيين المنفصلين X و Y وتعطى بالصيغة التالية :

$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j)$ الكثافة الهامشية للمتغير X

أما $g(y_j) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i, y_j)$ فهو اقتران الكثافة الهامشية لـ Y

أي أن $f(x_i)$ هو مجموع مكونات الصف رقم i و $g(y_j)$ هو مجموع مكونات العمود رقم j، وتسمى هذه التوزيعات بالتوزيعات الهامشية، وهي في الواقع التوزيع الخاص بكل من X و Y على التوالي.

3-1 الكثافة الشرطية :

الكثافة الشرطية للمتغير x إذا علم y هي:

$$h(x/y) = \frac{h(x, y)}{f_Y(y)}$$

والعكس، الكثافة الشرطية للمتغير y إذا علم x هي :

$$h(y/x) = \frac{h(x,y)}{f_x(x)}$$

4-1 المتغيرات العشوائية المنفصلة المستقلة :

يقال أن عددا منتهيا من المتغيرات العشوائية X,Y,... ,Z المعرفة على فضاء العينة S مستقلة إذا كان :

$$P(X = x_i, Y = y_j, \dots, Z = z_k) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \dots P(Z = z_k)$$

لجميع قيم x_i ، y_j ، ...، z_k وبصفة خاصة فإن X و Y مستقلان إذا كان :

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

وإذا كان توزيع X و Y على التوالي هو f و g والتوزيع المشترك هو h فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها على الصورة :

$$h(x_i, y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

أي أن X و Y مستقلان إذا كان كل حد $h(x_i, y_j)$ هو حاصل ضرب الحدين الهامشيين له.

2- التوزيعات الاحتمالية المتصلة ودوالها المشتركة والهامشية (الحدية) :

1-1 تعريف : إذا كان المتغير العشوائي المتصل (X,Y) معرف على منطقة التعريف R فالدالة $h(x, y)$ التي تحقق الشروط التالية :

1) $h(x, y) \geq 0 \quad if \ (x, y) \in R$
2) $\iint h(x, y)dx\, dy = 1$

تسمى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع (دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة)، فإذا كانت B منطقة تعريف (x, y) فإن :

$$P(B) = \iint h(x, y)dx\, dy$$

2-1 الدوال الهامشية (الحدية) : لتكن الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين المتصلين X و Y معرفة على النحو $h(x, y)$ فإننا نسمي العلاقتين التاليتين :

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, dy$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, dx$$

بأنهما الدوال الاحتمالية الهامشية (الحدية) لكل من المتغيرين المتصلين X و Y على التوالي.

3- دالة التوزيع التراكمية :

1-3 دالة التوزيع التراكمية المشتركة :

إذا كان (X,Y) متغير عشوائي منفصل و $h(x_i, y_j)$ هي الدالة الاحتمالية المشتركة، فالدالة المعرفة على النحو التالي :

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{n\leq x}\sum_{m\leq y} h(n,m)$$

تسمى بدالة التوزيع التراكمية (التجميعية) المشتركة.

أما إذا كان (X,Y) متغير عشوائي متصل فإنه يقال للدالة المعرفة على النحو :

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} h(t,z)dtdz$$

بدالة التوزيع التراكمية (التجميعية) المشتركة.

وإذا كان X و Y متصلين فمن العلاقة السابقة نجد :

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = h(x,y) \ , \ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{x} h(x,t)\,dt \ , \ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{y} h(t,y)\,dt$$

وسواء كان المتغير العشوائي متصلا أو منفصلا فإنه يتمتع بالخواص التالية :

أ) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

ب) $F(-\infty, \infty) = 1$

ج) يستخدم $F(x,y)$ لإيجاد الاحتمالات التالية :

$$P(x_1 < X \leq x_2; Y < y) = F(x_2,y) - F(x_1,y)$$

$$P(X \leq x; y_1 < Y \leq y_2) = F(x,y_2) - F(x,y_1)$$

$$P(x_1 < X \le x_2; y_1 < Y \le y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

2-3 دوال التوزيع التراكمية الحدية :

لتكن $F(x, y)$ دالة التوزيع المشتركة للمتغيرين العشوائيين (المتصلين أو المنفصلين) فإن دوال التوزيع الحدية للمتغيرين العشوائيين X و Y يمكن تعريفهما بالعلاقات التالية :

$$F_x(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < \infty) = \lim_{y\to\infty} F(x, y) = F(x, +\infty)$$

$$F_y(y) = P(Y \le y) = P(X < \infty, Y \le y\,) = \lim_{x\to\infty} F(x, y) = F(+\infty, y)$$

ثالثا – خصائص التوزيعات الاحتمالية المشتركة

أ – التوقع :

لتكن الدالة $h(x_i, y_j)$ هي دالة المتغيرين العشوائيين X و Y ولتكن القيمة المتوقعة لهذه الدالة هي $E(XY)$:

- فإذا كان المتغيران العشوائيان X و Y منفصلان فإن :

$$E(X) = \mu_x = \sum_x \sum_y x_i \,.\, h(x_i, y_j)$$

$$E(Y) = \mu_y = \sum_y \sum_x y_j \,.\, h(x_i, y_j)$$

ويكون $E(XY)$ وفق العلاقة التالية :

$$E(XY) = \sum x_i\, y_j \,.\, h(x_i, y_j)$$

- أما إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y منفصلان فإن :

$$E(X) = \mu_x = \int \int x \,.\, h(x, y) dxdy$$

$$E(Y) = \mu_y = \int \int y \,.\, h(x, y) dxdy$$

ويكون $E(XY)$ وفق العلاقة التالية :

$$E(XY) = \iint x\, y \,.\, h(x, y) dxdy$$

ب – التباين :

- حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة :

$$V(X) = \sigma^2(X) = \sum\nolimits_x \sum\nolimits_y (x_i - E(X))^2 . h(x_i, y_j)$$

$$V(Y) = \sigma^2(Y) = \sum\nolimits_x \sum\nolimits_y (y_j - E(Y))^2 . h(x_i, y_j)$$

- حالة المتغيرات العشوائية المتصلة :

$$\boldsymbol{V}(X) = \sigma^2(X) = \iint (x - E(X))^2 . h(x, y) dxdy$$

$$V(Y) = \sigma^2(Y) = \iint (y - E(X))^2 . h(x, y) dxdy$$

ج- التباين المشترك (التغاير) :

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المشترك $h(x_i, y_j)$ وكان توقع كل منهما على التوالي μ_x و μ_y فإن التغاير بين X و Y ويرمز له بالرمز $Cov(X, Y)$ يعرف كما يلي :

- حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة :

$$Cov(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) . h(x_i, y_j) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

أو بطريقة مكافئة كما يلي :

$$Cov(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i\, y_j) . h(x_i, y_j) - \mu_x\, \mu_y = E(XY) - \mu_x\, \mu_y$$

- حالة المتغيرات العشوائية المتصلة :

$$Cov(X, Y) = \iint (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) . h(x_i, y_j) dxdy$$

د- معامل الارتباط :

يعرف معامل الارتباط بين X و Y ويرمز له بالرمز $\rho(X, Y)$ كما يلي :

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

ويعتبر الارتباط نسبة بلا تمييز وله الخواص التالية :

1) $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$ 2) $\rho(X,X)=1$ 3) $\rho(X,-X)=-1$

4) $-1\leq\rho\leq1$ 5) $\rho(aX+b,cY+d)=\rho(Y,X)\ ;\ if a,c\neq0$

مثال 01 :

نفرض أن X و Y لهما التوزيع المشترك التالي :

Y / X	-3	2	4	المجموع
1	0.1	0.2	0.2	0.5
3	0.3	0.1	0.1	0.5
المجموع	0.4	0.3	0.3	1

المطلوب :

1- أوجد توزيع كل من X و Y ؟

2- أوجد $Cov(X,Y)$ أي تشتت X و Y ؟

3- أوجد $\rho(X,Y)$ أي الارتباط بين X و Y ؟

4- هل يعتبر X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين ؟

الحل :

1- التوزيع الهامشي الموجود يسار الجدول هو توزيع X (أي الدالة الحدية له) والتوزيع الهامشي الموجود أسفل الجدول هو توزيع Y (أي الدالة الحدية له) وهما مبينان في الجدولين التاليين :

x_i	1	3
$f(x_i)$	0.5	0.5

توزيع X

y_i	-3	2	4
$g(y_i)$	0.4	0.3	0.3

توزيع Y

-2 حساب $Cov(X,Y)$ أي تشتت X و Y :

- نحسب أولا μ_x و μ_y :

$$\mu_x = \sum x_i . f(x_i) = 1(0.5) + 3(0.5) = 2$$

$$\mu_y = \sum y_i . g(y_i) = -3(0.4) + 2(0.3) + 4(0.3) = 0.6$$

- ثم نحسب بعد ذلك $E(XY)$:

$$E(XY) = \sum x_i\, y_j\ .h(x_i, y_j)$$
$$= (1)(-3)(0.1) + (1)(2)(0.2) + (1)(4)(0.2) + (3)(-3)(0.3)$$
$$+ (3)(2)(0.1) + (3)(4)(0.1) = 0$$

ومنه نجد $Cov(X,Y)$ كما يلي :

$$Cov(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i\, y_j) . h(x_i, y_j) - \mu_x\, \mu_y = E(XY) - \mu_x\, \mu_y = 0 - (2)(0.6)$$
$$= -1.2$$

3 – حساب $\rho(X,Y)$ أي الارتباط بين X و Y :

- نحسب أولا σ_x و σ_y :

$$E(X^2) = \sum {x_i}^2 f(x_i) = 1(0.5) + 9(0.5) = 5$$

$${\sigma_x}^2 = V(X) = E(X^2) - {\mu_x}^2 = 5 - 2^2 = 1$$

$$\sigma_x = \sqrt{1} = 1$$

وأيضا :

$$E(Y^2) = \sum {y_i}^2 g(y_i) = 9(0.4) + 4(0.3) + 16(0.3) = 9.6$$

$${\sigma_y}^2 = V(Y) = E(Y^2) - {\mu_y}^2 = 9.6 - (0.6)^2 = 9.24$$

$$\sigma_y = \sqrt{9.24} = 3.03$$

وبالتالي يكون :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-1.2}{(1)(3.03)} = -0.4$$

4- هل يعتبر X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين :

X و Y غير مستقلين حيث أن $P(X=1, Y=-3) \neq P(X=1)P(Y=3)$ أي أن الحد $h(1,-3)$ لا يساوي $f(1)g(-3) = (0.5)(0.4) = 0.2$ وهو حاصل جداء الحدود الهامشية المكونة له.

مثال 02 :

نفرض أن X و Y متغيران عشوائيان مستقلان ولهما التوزيعان التاليان :

x_i	1	2
$f(x_i)$	0.6	0.4

توزيع X

y_i	5	10	15
$g(y_i)$	0.4	0.3	0.3

توزيع Y

- أوجد التوزيع المشترك h للمتغيرين X و Y ؟

الحل :

بما أن X و Y مستقلان فإن التوزيع المشترك h يمكن الحصول عليه من التوزيعين الهامشين f و g .

نكون أولا جدول التوزيع المشترك ونكتب التوزيعين الهامشين فقط كما هو مبين في الجدول التالي :

Y / X	5	10	15	المجموع
1				0.6
2				0.4
المجموع	0.2	0.5	0.3	1

ثم نضرب الحدود الهامشية للحصول على الحدود المكونة للجدول أي أننا نضع $h(x_i, y_j) = f(x_i)g(y_j)$

Y / X	5	10	15	المجموع
1	0 .12	0.30	0.18	0.6
2	0.08	0.20	0.12	0.4
المجموع	0.2	0.5	0.3	1

مثال 03 :

اعتبر أن X متغير عشوائي وأن له التوزيع التالي المبين في الجدول، واعتبر أن Y متغير عشوائي توزيعه هو :

$Y = X^2$

x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

أوجد :

1- التوزيع g للمتغير Y ؟

2- التوزيع المشترك h للمتغيرين X و Y ؟

3- التباين المشترك (التغاير) $Cov(X, Y)$ وأيضا معامل الارتباط $\rho(X, Y)$ ؟

الحل :

1- إيجاد التوزيع g للمتغير Y :

بما أن $Y = X^2$ فإن المتغير العشوائي Y يمكن أن يأخذ فقط القيم 1 و 4 ويكون :

$$g(4) = P(Y = 4) = P(X = 2\ or\ X = -2) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

وبنفس الطريقة $g(1) = \frac{1}{2}$ وبذلك يكون التوزيع g للمتغير Y كما يلي :

y_i	1	4
$g(y_i)$	0.5	0.5

2- إيجاد التوزيع المشترك h للمتغيرين X و Y :

نلاحظ أنه إذا كانت X=-2 فإن Y=4 ، إذا $h(-2,1) = 0$ و $h(-2,4) = f(-2) = \frac{1}{4}$ ، ويمكن إيجاد بقية الحدود بطريقة مماثلة، ومنه فإن التوزيع المشترك h للمتغيرين X و Y يكون وفق الجدول التالي :

X \ Y	1	4	المجموع
-2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
المجموع	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

3- إيجاد التباين المشترك (التغاير) $Cov(X,Y)$ و أيضا معامل الارتباط $\rho(X,Y)$:

- نحسب أولا μ_x و μ_y :

$$\mu_x = \sum x_i.f(x_i) = -2\left(\frac{1}{4}\right) - 1\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\mu_y = \sum y_i.g(y_i) = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

- ثم نحسب بعد ذلك $E(XY)$:

$$E(XY) = \sum x_i\, y_j\ .h(x_i, y_j)$$
$$= (-2)(1)(0) + (-2)(4)\left(\frac{1}{4}\right) + (-1)(1)\left(\frac{1}{4}\right) + (-1)(4)(0)$$
$$+ (1)(1)\left(\frac{1}{4}\right) + (1)(4)(0) + (2)(1)(0) + (2)(4)\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

ومنه نجد $Cov(X,Y)$ كما يلي :

$$Cov(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i\, y_j).h(x_i, y_j) - \mu_x\, \mu_y = E(XY) - \mu_x\, \mu_y = 0 - (0)\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

إذا يكون معامل الارتباط معدوما أي :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0}{\sigma_x \sigma_y} = 0$$

ملاحظة : يبين هذا المثال أنه على الرغم من أن Y دالة في X فإنه مازال ممكنا للارتباط والتشتت أن يساويا 0 كما هو الحال عندما يكون X و Y مستقلان، ونلاحظ أيضا أن X و Y في هذا المثال غير مستقلين.

مثال 04 : إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين المنفصلين العشوائيين معطاة بالعلاقة التالية:

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2}}{x!\, y!} & , x = 0,1,2, \dots \dots\ ;\ y = 0,1,2, \dots . \\ 0 & \text{لقيم } x, y \text{ الاخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد الدوال الاحتمالية الحدية لكل من المتغيرين المنفصلين x,y ؟

الحل :

الدالة الحدية للمتغير X هي :

$$P_x(x) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-2}}{x!\, y!} = \frac{e^{-2}}{x!} \sum_{y=0}^{+\infty} \frac{1}{y!}$$

وعلى اعتبار أن $\frac{e^{-2}}{x!}$ هو كمية ثابتة بالنسبة للمجموع وأن $\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{1}{y!}=e^{1}$ ينتج أن الدالة الاحتمالية الحدية :

$$P_x(x)=\frac{e^{-2}}{x!}e^{1}=\frac{e^{-1}}{x\,!}$$

ويمكن كتابة الدالة على الصورة :

$$P_x(x)=\begin{cases}\frac{e^{-2}}{x!} & , \quad x=0,1,2,\dots\dots.\\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى}\end{cases}$$

وبالمثل نجد الدالة الاحتمالية للمتغير y

$$P_y(y)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-2}}{x!\,y!}=\frac{e^{-2}}{y!}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}=\frac{e^{-2}}{y!}.e^{1}$$

$$P_y(y)=\begin{cases}\frac{e^{-1}}{y!} & ,y=0,1,2,\dots\\ 0 & \text{لقيم } y \text{ الأخرى}\end{cases}$$

مثال 05 : إذا كانت دالة التوزيع المشترك للمتغير العشوائي معطات بالعلاقة التالية:

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & ,0<x \quad ,y<0\\ \frac{x^2y^2}{4} & ,0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 1\\ 1 & ,X\ge 2 \quad , \quad y\ge 1\end{cases}$$

- أوجد دوال التوزيع الحدية للمتغيرين العشوائيين ؟

الحل:

دالة التوزيع الحدية للمتغير العشوائي X هي :

$$F_x(x) = \lim_{y\to 1} \frac{x^2y^2}{4} = \frac{x^2}{4}$$

وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع الحدية للمتغير العشوائي بالصورة التالية:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & ,0 \le x \le 2 \\ 1 & , x \ge 2 \end{cases}$$

أما بالنسبة لدالة التوزيع الحدية للمتغير العشوائي Y فإن :

$$F_y(y) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2y^2}{4} = \frac{4y^2}{4} = y^2$$

وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع الحدية للمتغير العشوائي Yعلى النحو .

$$F_y(y) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ y^2 & ,0 \le y \le 2 \\ 1 & , y \ge 1 \end{cases}$$

مثال 06 : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير المتصل معطاة بالعلاقة التالية:

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ e^{-x} & , x < 0\ \ , -x < y < x \\ 0 & \text{لقيم } x,y \text{ الأخرى} \end{cases}$$

- أوجد دوال الكثافة الحدية لكل من المتغيرين المتصلين X ,Y ؟

الحل :

نجد أولا دالة الكثافة الحدية للمتغير العشوائي المتصل X :

$$f_x(x) = \int_{-x}^{x} \frac{1}{2}.e^{-x} dy$$

في هذه الحالة نعتبر $\frac{1}{2}.e^{-x}$ قيمة ثابتة تخرج خارج إشارة التكامل ونأخذ التكامل بالنسبة للمتغير Yوعليه:

$$f_x(x) = \frac{1}{2}.e^{-x}\int_{-x}^{x} dy = \frac{1}{2}.e^{-x}(y)]_{-x}^{x}$$

$$= \frac{1}{2}.e^{-x}(x-(-x))$$

$$= \frac{1}{2}2x.e^{-x} = x.e^{-x}$$

وعليه يمكن كتابة الكثافة الحدية للمتغير العشوائي المتصل X على النحو التالي :

$$f_x(x) = \begin{cases} x\,.\,e^{-x} & ,x > 0 \\ 0 & ,x \leq 0 \end{cases}$$

أما بالنسبة لدالة الكثافة الحدية للمتغير العشوائي Y نستطيع كتابة الفترة $-x < y < x$ على الصورة $|y| \leq x$ وعليه فان:

$$f_Y(y) = \int_{|y|}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}dx$$

وهنا نأخذ التكامل بالنسبة للمتغير X :

$$f_Y(y) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\Big]_{|y|}^{\infty} = \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\Big]_{|y|}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^{|y|}}\right] = \frac{1}{2e^{|y|}} = \frac{1}{2}.e^{|y|}$$

وعليه فإن:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$$

مثال 07 : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين المتصلين معرفا بالقاعدة.

$$h(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 2 & ,0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{لقيم } x,y \text{ الاخرى} \end{cases}$$

-أوجد معامل الارتباط (X,Y) ؟

الحل:

لو وضعنا صيغة العلاقة:

$$\rho(x,y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

نلاحظ أنه لابد من حساب المكونات للعلاقة ونعوض عنها في العلاقة اعلاه لحساب معامل الارتباط

نجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين ونبدأ بالمتغير X :

$$f_x(x) = \int_x^1 2dy = 2y]_x^1 = 2(1-x)$$

وعليه فإن الدالة تصبح :

$$f_x(x) = \begin{cases} 2(1-x) & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,\text{لقيم } x \text{الاخرى} \end{cases}$$

وبالمثل لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Y :

$$f_y(y) = \int_0^y 2dx = 2x]_0^y = 2y$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 2y & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,\text{لقيم } x \text{الاخرى} \end{cases}$$

وعليه نحسب الآن توقع المتغير X :

$$E(X) = \int_0^1 x.f_x(x) = \int_0^1 x2(1-x)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^1$$

$$E(X) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0\right) = 2\left(\frac{3-2}{6}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

والآن نحسب $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2.2(1-x)dx$$

$$E(X^2) = 2\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$E(X^2) = 2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = 2.\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

نحسب تباين المتغير العشوائي المتصل X من العلاقة :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3-2}{18} = \frac{1}{18}$$

وبالمثل نحسب هذه القيم للمتغير Y :

$$E(Y) = \int_0^1 y^2.2ydy = 2\int_0^1 y^2dy = 2\frac{y^3}{3}\Big]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^3.2ydy = 2\int_0^1 y^3dy = 2\frac{y^4}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y^2)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9}$$

$$V(Y) = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^y XY.2dxdy=\int_0^1 \frac{2x^2}{2}\Big]_0^y ydy$$

$$E(XY)=\int_0^1 y^2dy=\frac{y^4}{4}\Big]_0^1=\frac{1}{4}$$

نجد معامل الارتباط من العلاقة:

$$\rho(X,Y)=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{18}}}=\frac{\frac{9-8}{36}}{\frac{1}{18}}=\frac{18}{36}=0.5$$

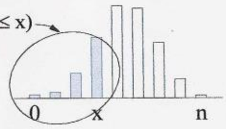
الملاحق

الجداول الإحصائية

الملحق رقم 01 : جدول قيم احتمال ثنائي الحدين

Table de la variable aléatoire Binomiale

Fournit la probabilité P(X≤x)
pour X ~ Bi(n,p)



p	x	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=5	0	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,0778	0,0312	0,0102	0,0024	0,0010	0,0003	0,0000
	1	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,3370	0,1875	0,0870	0,0308	0,0156	0,0067	0,0005
	2	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,6826	0,5000	0,3174	0,1631	0,1035	0,0579	0,0086
	3	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9130	0,8125	0,6630	0,4718	0,3672	0,2627	0,0815
	4	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9898	0,9688	0,9222	0,8319	0,7627	0,6723	0,4095
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=10	0	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	
	1	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0464	0,0107	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	
	2	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,1673	0,0547	0,0123	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000
	3	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,3823	0,1719	0,0548	0,0106	0,0035	0,0009	0,0000
	4	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,6331	0,3770	0,1662	0,0473	0,0197	0,0064	0,0001
	5	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,8338	0,6230	0,3669	0,1503	0,0781	0,0328	0,0016
	6	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9452	0,8281	0,6177	0,3504	0,2241	0,1209	0,0128
	7	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9877	0,9453	0,8327	0,6172	0,4744	0,3222	0,0702
	8		1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893	0,9536	0,8507	0,7560	0,6242	0,2639
	9		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9940	0,9718	0,9437	0,8926	0,6513
	10				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=15	0	0,2059	0,0352	0,0134	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000				
	1	0,5490	0,1671	0,0802	0,0353	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000			
	2	0,8159	0,3980	0,2361	0,1268	0,0271	0,0037	0,0003	0,0000	0,0000		
	3	0,9444	0,6482	0,4613	0,2969	0,0905	0,0176	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	
	4	0,9873	0,8358	0,6865	0,5155	0,2173	0,0592	0,0093	0,0007	0,0001	0,0000	
	5	0,9978	0,9389	0,8516	0,7216	0,4032	0,1509	0,0338	0,0037	0,0008	0,0001	
	6	0,9997	0,9819	0,9434	0,8689	0,6098	0,3036	0,0950	0,0152	0,0042	0,0008	0,0000
	7	1,0000	0,9958	0,9827	0,9500	0,7869	0,5000	0,2131	0,0500	0,0173	0,0042	0,0000
	8	1,0000	0,9992	0,9958	0,9848	0,9050	0,6964	0,3902	0,1311	0,0566	0,0181	0,0003
	9		0,9999	0,9992	0,9963	0,9662	0,8491	0,5968	0,2784	0,1484	0,0611	0,0022
	10		1,0000	0,9999	0,9993	0,9907	0,9408	0,7827	0,4845	0,3135	0,1642	0,0127
	11		1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824	0,9095	0,7031	0,5387	0,3518	0,0556
	12			1,0000	1,0000	0,9997	0,9963	0,9729	0,8732	0,7639	0,6020	0,1841
	13				1,0000	1,0000	0,9995	0,9948	0,9647	0,9198	0,8329	0,4510
	14					1,0000	1,0000	0,9995	0,9953	0,9866	0,9648	0,7941
	15						1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

p	x	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=20	0	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	0,0000					
	1	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0005	0,0000					
	2	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000				
	3	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000				
	4	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000			
	5	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000		
	6	0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000	
	7	0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0002	0,0000	
	8	0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0009	0,0001	
	9	1,0000	0,9974	0,9861	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0039	0,0006	0,0000
	10	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0139	0,0026	0,0000
	11		0,9999	0,9991	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0409	0,0100	0,0001
	12		1,0000	0,9998	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,1018	0,0321	0,0004
	13		1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,2142	0,0867	0,0024
	14			1,0000	1,0000	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,3828	0,1958	0,0113
	15				1,0000	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,5852	0,3704	0,0432
	16					1,0000	0,9987	0,9840	0,8929	0,7748	0,5886	0,1330
	17					1,0000	0,9998	0,9964	0,9645	0,9087	0,7939	0,3231
	18						1,0000	0,9995	0,9924	0,9757	0,9308	0,6083
	19						1,0000	1,0000	0,9992	0,9968	0,9885	0,8784
	20							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=25	0	0,0718	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000						
	1	0,2712	0,0274	0,0070	0,0016	0,0001	0,0000					
	2	0,5371	0,0982	0,0321	0,0090	0,0004	0,0000					
	3	0,7636	0,2340	0,0962	0,0332	0,0024	0,0001	0,0000				
	4	0,9020	0,4207	0,2137	0,0905	0,0095	0,0005	0,0000				
	5	0,9666	0,6167	0,3783	0,1935	0,0294	0,0020	0,0001				
	6	0,9905	0,7800	0,5611	0,3407	0,0736	0,0073	0,0003	0,0000			
	7	0,9977	0,8909	0,7265	0,5118	0,1536	0,0216	0,0012	0,0000			
	8	0,9995	0,9532	0,8506	0,6769	0,2735	0,0539	0,0043	0,0001	0,0000		
	9	0,9999	0,9827	0,9287	0,8106	0,4246	0,1148	0,0132	0,0005	0,0000	0,0000	
	10	1,0000	0,9944	0,9703	0,9022	0,5858	0,2122	0,0344	0,0018	0,0002	0,0000	
	11	1,0000	0,9985	0,9893	0,9558	0,7323	0,3450	0,0778	0,0060	0,0009	0,0001	
	12		0,9996	0,9966	0,9825	0,8462	0,5000	0,1538	0,0175	0,0034	0,0004	
	13		0,9999	0,9991	0,9940	0,9222	0,6550	0,2677	0,0442	0,0107	0,0015	0,0000
	14		1,0000	0,9998	0,9982	0,9656	0,7878	0,4142	0,0978	0,0297	0,0056	0,0000
	15		1,0000	1,0000	0,9995	0,9868	0,8852	0,5754	0,1894	0,0713	0,0173	0,0001
	16			1,0000	0,9999	0,9957	0,9461	0,7265	0,3231	0,1494	0,0468	0,0005
	17				1,0000	0,9988	0,9784	0,8464	0,4882	0,2735	0,1091	0,0023
	18				1,0000	0,9997	0,9927	0,9264	0,6593	0,4389	0,2200	0,0095
	19					0,9999	0,9980	0,9706	0,8065	0,6217	0,3833	0,0334
	20					1,0000	0,9995	0,9905	0,9095	0,7863	0,5793	0,0980
	21					1,0000	0,9999	0,9976	0,9668	0,9038	0,7660	0,2364
	22						1,0000	0,9996	0,9910	0,9679	0,9018	0,4629
	23						1,0000	0,9999	0,9984	0,9930	0,9726	0,7288
	24							1,0000	0,9999	0,9992	0,9962	0,9282
	25							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

الملحق رقم 02 : جدول قانون بواسون

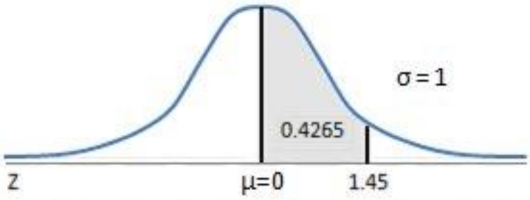
Table de la loi de poisson

	λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
r	0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
	2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
	3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
	4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
	5			0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
	6					0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
	7							0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	8										0,0000
	λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
r	0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
	1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
	2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
	3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
	4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
	5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
	6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
	7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
	9			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
	10						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	11									0,0000	0,0000
	λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
r	0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
	1	0,1083	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
	2	0,0053	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
	3	0,0000	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
	4	0,0000	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
	5	0,0000	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
	6	0,0000	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
	7	0,0000	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
	8	0,0000	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
	9			0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
	10						0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
	11						0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
	12						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	13									0,0000	0,0000
	λ	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6	7	8	9
r	0	0,0821	0,0498	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
	1	0,2052	0,1494	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
	2	0,2565	0,2240	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
	3	0,2138	0,2240	0,1954	0,1687	0,1404	0,1133	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
	4	0,1336	0,1680	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
	5	0,0668	0,1008	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
	6	0,0278	0,0504	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
	7	0,0099	0,0216	0,0595	0,0824	0,1044	0,1234	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
	8	0,0031	0,0081	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
	9	0,0009	0,0027	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
	10	0,0002	0,0008	0,0053	0,0104	0,0181	0,0285	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
	11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
	12		0,0001	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728
	13		0,0000	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504

الملحق رقم 03 : جدول التوزيع الطبيعي القياسي

Areas Under the One-Tailed Standard Normal Curve

This table provides the area between the mean and some Z score.
For example, when Z score = 1.45 the area = 0.4265.



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

الملحق رقم 04 : جدول القيم الإحصائية لتوزيع ستودنت

Table entry for p and C is the critical value t^* with probability p lying to its right and probability C lying between $-t^*$ and t^*.

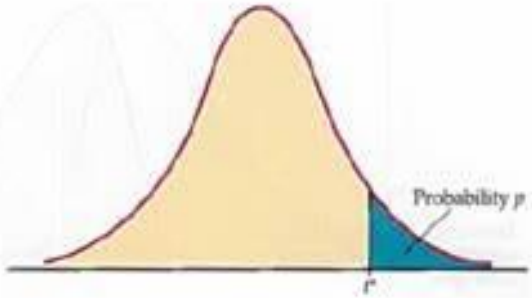
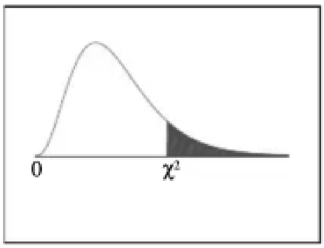


TABLE D t distribution critical values

	Upper-tail probability p											
df	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
z^*	0.674	0.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
	50%	60%	70%	80%	90%	95%	96%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
	Confidence level C											

الملحق رقم 06 : جدول القيم الإحصائية لتوزيع كاي مربع

Chi-Square Distribution Table



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

الملحق رقم 07 : جدول القيم الإحصائية لتوزيع فيشر

Table entry for p is the critical value F^* with probability p lying to its right.

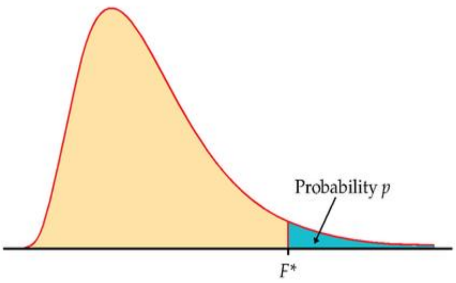


TABLE E

F critical values

Degrees of freedom in the denominator	p	Degrees of freedom in the numerator: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
	.025	647.79	799.50	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28
	.010	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5
	.001	405284	500000	540379	562500	576405	585937	592873	598144	602284
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39
	.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
	.001	998.50	999.00	999.17	999.25	999.30	999.33	999.36	999.37	999.39
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
	.001	167.03	148.50	141.11	137.10	134.58	132.85	131.58	130.62	129.86
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
	.001	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
	.001	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.001	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.001	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33

قائمة المراجع

قائمة المراجع :

أولا : الكتب

- أمحمد معتوق : **الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015.

- جبار عبد مضحي : مقدمة في نظرية الاحتمالات، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان – الأردن، الطبعة الأولى، 2011.

- خالد زهدي خواجة : **أساسيات الاحتمالات**، المعهد العربي للتدريب والبحوث الإحصائية، عمان – الأردن.

- دومينيك سالفاتور : **سلسلة ملخصات شوم في الإحصاء والاقتصاد القياسي**، نشر وترجمة الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة – مصر، الطبعة الثالثة، 2012.

- سيمور ليبشتز : ملخصات شوم نظريات ومسائل في الاحتمالات، ترجمة سامح داود، نشر وترجمة الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة – مصر، الطبعة الثالثة، 1990.

- صبري عزام : **الإحصاء الرياضي**، دار صفا للنشر والتوزيع، عمان الأردن، 2010.

- صلاح العيادي صالحين : **مسائل وحلول في الإحصاء والاحتمالات**، دار ابن كثير للنشر والتوزيع، طرابلس – ليبيا، بدون تاريخ نشر.

- كامل فليفل، فتحي حمدان : **الإحصاء**، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان – الأردن، الطبعة الأولى، 2006.

- مصطفى عبد الحفيظ : **نظرية الاحتمالات مبادئ وتطبيقات**، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008.

ثانيا : المطبوعات البيداغوجية

- بوعافية سمير، رحالي بلقاسم : **محاضرات في الاحصاء 02 مدعمة بسلاسل تمارين الأعمال الموجهة**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة برج بوعريريج.

- بوعبد الله صالح : **محاضرات في الاحصاء الرياضي**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة محمد بوضياف – المسيلة، 2005-2006.

- سليمة أوشيش : **مطبوعة في مقياس الإحصاء 2**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة الجزائر 03، 2019-2020.

- عاشور بدار : **محاضرات في الاحصاء الرياضي**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة محمد بوضياف – المسيلة، 2010.

- عاشور حيدوشي : **محاضرات في مقياس الاحصاء 02**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة البويرة، 2019-2020.

- عبد الحليم الحمزة : **محاضرات في الاحصاء 02 أمثلة وتمارين محلولة**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة تبسة، 2022-2023.

- عبد الحميد قطوش : **الإحصاء 02 - مدعم بتمارين وإمتحانات محلولة -**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة محمد بوضياف – المسيلة، 2018-2019.

- عدنان ماجد، محمود محمد : **مبادئ الإحصاء والاحتمالات مع حل الأمثلة باستخدام ميكروسوفت إكسل**، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية.

- مصطفى طويطي : **محاضرات في الاحصاء 02 دروس وتمارين محلولة**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية، 2017 -2018.

- هاشمي عبابسة : **محاضرات في مقياس الاحصاء الرياضي**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة محمد خيضر - بسكرة.