REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDPs et applications

Thème

Résolution de certaines équations différentielles fractionnaire par la fonction généralisée de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ et la transformée de Laplace

Présentée par :
HABOUCHE Zakaria

Devant le jury composé de :

Arioua Yasine	M.C.A	Université de M'sila	**Président.**
Merzougui Abdelkrim	Prof.	Université de M'sila	**Encadreur.**
Saadi Abderachid	M.C.A	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Au nom d'ALLAH le clément et le miséricordieux.

Ma gratitude doit d'abord étre exprimée envers le bon dieu ***ALLAH*** *le tout puissant,qui ma donné la sagesse, la patience, le courage et la volonté por qu'on puisse terminer ce travail.*

Je tiens vivement á remercie Monsieur **Merzougui Abdelkrim,** *prafesseur á lúniversité de M'sila, pour avoir proposéun sujet intéressant, et pour la confiiance et l'intérét qi'il m'a témoigné tout an long de la réalisation de ce travail.*

Je tiens á remercier chleureusement Monsieur **ARIOUA Yassine,** *Maitre de conférences HDRá l'universitéde M'sila, pour m'avoir l'honneur de présider le jury.*

Je tiens également á remercier Monsieur **SAADI Abderachid,** *Maitre de conférences HDRá l'universitéde M'sila, pour l'honneur qu'il me fait en particiipant au jury.*

Mes remerciements s'adressent également á tous mes enseignants tout long de ma formation á l'universite de M'sila .

Je tiens également á remercier yous ceux qui de prés de loin ont participé á l'élaboration de ce travail,en particulier **Houd Kheireddine**.

Je voudrais remercier tout particuliérement mes parents **Hamid** *et* **Zohra** *ainsi que mon frére et sours* **Youcef,Fatima** *et***Aya** *pour soutien et lours encouragements au long de mon cursus.*

Dédicaces

Au nom d'ALLAH le clément et le miséricordieux.

Je dédie ce modeste travaile á :

À mon cher père **Hamid** *pour ses sacritfices .*

À mon cher mère **Zohra** *avec tout mon affection .*

À mon trés frère et sours **Youcef,Fatima** *et***Aya** *, une particuliére affection pour toi .*

Àux jeunes enfants **Sami** *et* **Soujoud** *.*

À tout la famille **HABOUCHE** *.*

À tout ceux que m'ont offert tout ce qu'il y a de mieux dans ce bas mon .

ZAKARIA HABOUCHE

Table des matières

Notations

- — • $L^P([a,\ b])$ *L'espace des fonctions* $p^{\text{ème}}$ *intégrables sur* $[a,\ b]$.
- — • $L^1([a,\ b])$ *L'espace des fonctions intégrables sur* $[a,\ b]$.
- — • $C(X,\ Y)$ *L'espace des fonctions continues de* X *dans* Y.
- — • $C(I)$ *L'espace des fonctions continues de I dans* R.
- — • $\Gamma(.)$ *La fonction Gamma d'Euler*.
- — • $B(.,.)$ *La fonction Bêta.*
- — • $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ *La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.*
- — • $E_\alpha(.)$ *La fonction de Mittag Leffler à un seul paramètre.*
- — • $\mathcal{I}^n L'intégrale$ *itéré d'ordre entier*.
- — • $\mathcal{D}^n$ *La dérivation d'ordre entier*.
- — • $\mathcal{I}^\alpha_{a^+} L'intégrale$ *fractionnaire au sens de Rimann-Liouville d'ordre* α *à droite.*
- — • $\mathcal{I}^\alpha_{b^-} L'intégrale$ *fractionnaire au sens de Rimann-Liouville d'ordre* α *à gauche.*
- — • ${}^{RL}\mathcal{D}^\alpha_{a^+}$ *La dérivée fractionnaire au sens de Rimann-Liouville d'ordre* α *à droite.*
- — • ${}^{RL}\mathcal{D}^\alpha_{b^-}$ *La dérivée fractionnaire au sens de Rimann-Liouville d'ordre* α *à gauche.*
- — • ${}^{C}\mathcal{D}^\alpha_{a^+}$ *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre* α *à droite*
- — • ${}^{C}\mathcal{D}^\alpha_{b^-}$ *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre* α *à gauche*

Introduction générale

Le calcul d'ordre fractionnaire est le domine des mathématiques qui traite l'étude et l'application des intégrales et dérivées d'ordre arbitraire. Il est considéré comme un ancien concept. Les premières graines du calcul d'ordre fractionnaire ont été plantées il y a plusieurs décennies. De nombreux mathématiciens comme, N.H. Abel, M. Caputo, A.K. Grünwald, J. Hadamard, A.V. Letnikov, J. Liouville, B. Riemann, et M. Riesz ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé. Cependant, on peut considérer le calcul d'ordre fractionnaire comme un nouvel axe de recherche, puisque ce n'est que depuis un peu plus d'une trentaine d'années qu'il fait l'objet de beaucoup de travaux. Le premier livre dédié au calcul d'ordre fractionnaire a été publié en 1974, il revient à K.B. Oldham et J. Spanier, après un travail de collaboration entamé en 1968. Sur le plan mathématique, il faut citer l'ouvrage russe de Samko, Kilbas et Marichev paru en 1993, qui regroupe un ensemble de définitions et de théories importantes sur le calcul d'ordre fractionnaire. Aujourd'hui, l'intérêt du calcul d'ordre fractionnaire et ces applications ne cesse de grandir, dans plusieurs domaines.

Aujourd'hui il existe de nombreuses formes d'opérateurs intégraux fractionnaires, mais l'opérateur de Riemann-Liouville est toujours le plus fréquemment utilisé.

Les applications de la théorie du calcul fractionnaire aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénierie sont très diverses, ils apparaissent de plus en plus fréquemment dans les déférents domaines de recherches tel que : Electronique, Electrotechnique, Chimie, Automatique, mécanique de fluides $\cdots$ etc

Ce mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux notions de base et des résultats fondamentaux relatives au calcul fractionnaire, un rappel et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma , la fonction Bêta et les définitions de la dérivation et l'intégration fractionnaire au sens Riemann-Liouville et Caputo.

Dans **le second chapitre**, on développe l'application de la méthode des fonctions de Mittag-Leffler qui étendra l'application de la méthode aux équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. La solution est construite en forme de séries de puissance. Les dérivées fractionnaires sont décrites au sens de Caputo. Pour illustrer la fiabilité de la méthode, quelques exemples sont fournis. Les résultats révèlent que la technique introduite ici est très efficace et pratique pour résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire.

Dans **le troisème chapitre** chapitre on applique la transformée de Laplace pour résoudre certaines classes déquations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. Cette technique nous permet de transeformer des équations différentielles fractionnaires en équations algébriques, puis en résolvant ces équations algébriques, nous pouvons obtenir la fonction inconnue en utilisant la transformation de Laplace inverse. Des exemples illustratifs sont inclus pour démontrer la validité et l'applicabilité de la technique présentée.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et les résultats fondamentales du calcul fractionnaire, nous présentons d'abord deux fonctions importantes dans la théorie du calcul fractionnaire (la fonction Gamma, la fonction Bêta), on donne ensuite les définitions nécessaire sur la dérivation et l'intégration au sens de Riemann-Liouville et Caputo avec leur propriétés.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

En mathématique, la fonction Gamma est une fonction complexe elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe.

Définition 1.1.1. la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, (z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0). \tag{1.1.1}$$

Exemples 1.1.1.

1. Pour $z = 1$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. Soit $z = \frac{1}{2}$, pour calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$ on utilise le changement de variable $s = \sqrt{t}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \quad (d'aprés\ l'intégrale\ de\ Gauss) \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Lemme 1.1.1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0, n \in \mathbb{N}$*, on a*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n+1) = (n)!$.
3. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

preuve.

1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par partie

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\
&= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

2. Il suffit de poser dans le lemme (1.1.1 (1) $z = n$

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= (n)(n-1)\Gamma(n-2) \\
&= n(n-1)(n-2)\ldots\Gamma(1) \\
&= n!.
\end{aligned}$$

3. Nous allons démontré la propriété du lemme 1.1.1 (3) par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.

— Pour $n = 0$, on a

$$\Gamma(0 + \frac{1}{2}) = \frac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0 0!} = \sqrt{\pi}$$

.

— Supposons que la formule est vérifiée pou $(n-1)$.
c-à-d supposons que $\Gamma((n-1) + \frac{1}{2}) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}$ est vérifié, alors

$$\begin{aligned}\Gamma(n + \frac{1}{2}) &= (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) \\ &= (n - \frac{1}{2})\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\ &= \left(\frac{2n}{2n}\right)\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n(n)!}.\end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n

Remarque 1.1.1. *La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatives non entières par la formule* $\Gamma(z)$=$\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ *et La transition d'un intervalle à un autre* $]-1,0[,]-1,-2[,]-2,-3[,...$ *la fonction Gamma n'existe pa pour les valeurs négatives entières.*

Exemple 1.1.1.

1. $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$
2. $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.2. La fonction Bêta est une type d'intégrale d'Euler définie par

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,\ (p,q \in \mathbb{C}, Re(p) > 0,\ Re(q) > 0). \tag{1.1.2}$$

Proposition 1.1.1. *La fonction Beta est exprimée l'aide de la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1.1.3}$$

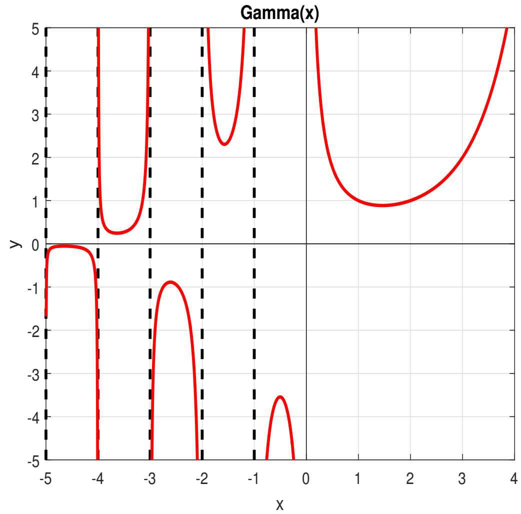

FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction Gamma

Preuve.

Soit $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, on a

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy\right)$$
$$= \int\int_D (x)^{p-1}(y)^{q-1}e^{-(x+y)}dx\, dy$$

En utilisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u$$

Le domaine correspondant à D dans les cordonnées u , v est

$$D' = \{(u,v)/u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int\int_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy &= \int\int_{D'}(uv)^{p-1}(u-uv)^{q-1}e^{-u}|-u|\,du\,dv \\
&= \int\int_{D'} u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}du\,dv \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}du\,dv \\
&= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\left(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right) \\
&= \Gamma(p+q)B(p,q)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Propriétés 1.1.1.

1. $B(p,q) = B(q,p)$, (symétrique).
2. $B(p,1) = \frac{1}{p}$.

1.2 L'intégrale fractionnaire

Définition 1.2.1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.

Notons par $(\mathcal{I}^1_{a^+}f)$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a,b]; (\mathcal{I}^1_{a^+}f)(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau.$$

L'itération de $(\mathcal{I}^1_{a^+})$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule aussi en a, de plus, d'après le thorème de Fubini,

$$(\mathcal{I}^1_{a^+}f)^2(t) = (\mathcal{I}^1_{a^+}f)\circ(\mathcal{I}^1_{a^+}f) = \int_a^t(\int_a^u f(\tau)d\tau)du = \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notant $(\mathcal{I}^1_{a^+}f)^n$ la $n^{\text{ième}}$ itération de $(\mathcal{I}^1_{a^+})$ une récurrence directe montre que

$$(\mathcal{I}^1_{a^+}f)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau.$$

Si on note $g = (\mathcal{I}^1_{a^+}f)^n$, Alor g est L'unique fonction vérifiant

$$\forall\ 0 \leq k \leq n-1,\ \ g^{(k)}(a) = 0,\ \ g^{(n)} = f$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante

Définition 1.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégral à gauche d'order n de f, que l'on note $(\mathcal{I}_{a^+}^n f)$ est défine par

$$(\mathcal{I}_{a^+}^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau.$$

Grace a la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment et la propriété $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition de la manière suivante

1.2.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2.3. L'intégral fractionnaire de Rieman-Liouville à gauche d'order $\alpha > 0$ de f est définie par :

$$\forall t \ \in [a,b],\ (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau. \tag{1.2.1}$$

De la même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Rieman-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f, par

$$\forall t \ \in [a,b];\ (\mathcal{I}_{b^-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau. \tag{1.2.2}$$

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$.

Il est naturel d'étendre la définition 1.2.1 et 1.2.2 aux axes. Notons ces opérateurs $(\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f)$ et $(\mathcal{I}_{+}^\alpha f)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+; (\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau. \tag{1.2.3}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}; (\mathcal{I}_{+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau. \tag{1.2.4}$$

Proposition 1.2.1. *Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ on a :*

1. $\mathcal{I}_{a^+}^\alpha \left(\mathcal{I}_{a^+}^\beta f(t)\right) = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t)$.
2. $\left(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}$.
3. $\left(I_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}$.

Preuve.

1. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)ds\right)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^{\tau}(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)ds\,d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}d\tau\,ds
\end{aligned}$$

On pose $\tau=(t-s)u+s \Rightarrow d\tau=(t-s)du$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\,B(\alpha,\beta)\,ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\,ds \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}f(t)
\end{aligned}$$

2. On a :

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-1}d\tau$$

On pose $\tau=s(t-a)+a \Rightarrow d\tau=(t-a)ds$.

Alors

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}\int_a^t s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

3. Même idée on démontre 1.2.1(3) (avec le changement de variable $b-\tau{=}s(b-t)$).

Théorème 1.2.1. *Si $f\in L^1([a,b])$, alors $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f$ existe pour tout $\alpha>0$ et $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\in L^1([a,b])$*

1.3 Dérivées fractionnaires

1.3.1 Dérivées fractionnaires de type Riemann-Liouville

Soit $\alpha > 0$ on note par α la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha] + 1$.
soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d^2}{dt^2} \circ \mathcal{I}_t^1$, on peut définir la dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ \mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ \mathcal{I}_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 1.3.1. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, La dérivée fractionnair de Rimann-Liouville à gauche d'order α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], D_{a^+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.3.1}$$

De plus on voit que la définition (1.3.1) d'intégrale à droite était associée à $-\dfrac{d}{dt}$. Le raisonnement précédent à la définition suivante :

Définition 1.3.2. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, La dérivée fractionnaire de Rimann-Liouville à droite d'order α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], D_{b^-}^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.3.2}$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Riemann-Liouville.

Définition 1.3.3. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, La dérivée fractionnair de Rimann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, D_{+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.3.3}$$

De plus on voit que la définition (1.3.3)d'intégrale à droite était associée à $-\frac{d}{dt}$. Le raisonnement précédent à la définition suivante :

Définition 1.3.4. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, La dérivée fractionnair de Rimann-Liouville adroite d'order α de f est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, D_{-}^{\alpha} f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n} \circ \mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{t}^{+\infty} (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.3.4}$$

Remarque 1.3.1.

1. Pour $\alpha = 0, n = 1, (\mathcal{D}_{a^{+}}^{0} f)(t) = \frac{d}{dt}(\mathcal{I}_{a^{+}}^{1} f(t)) = f(t)$.
2. Pour $\alpha = n, n \in \mathbb{N}^{*}$. L'opérateur $\mathcal{D}^{\alpha}$ donne le même résultat que la dérivée usuelle pour les ordres entiers :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{a^{+}}^{n} f(t) = f^{n}(t). \\ \\ \mathcal{D}_{b^{-}}^{0} f(t) = D_{-}^{n} f(t) = (-1)^{n} f^{n}(t) \end{cases}$$

Proposition 1.3.1. *Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a*

1. $\left(\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}$.

2. $\left(\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}$.

Démonstration. 1. Posons $f(t)$=$(t-a)^{\beta-1}$ d'apprés la définition 1.3.1 et la proposition 1.2.1 on a d'une part

$$\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} \circ \mathcal{I}_{a^{+}}^{n-\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(n-\alpha+\beta-1-(n-1))(t-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1)\Gamma(n-\alpha+\beta-1), \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\Gamma(n-\alpha+\beta-2) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

2. On procède de la même mananière que 1.3.1(1).

□

Remarque 1.3.1. *Pour* $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$ *on a*

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+}t^{\lambda}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)...(\lambda+1-\alpha)(t)^{\lambda-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha+\lambda))...(1-(\alpha-\lambda))(t)^{\lambda-\alpha} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(t)^{\lambda-\alpha}, & si \quad \alpha-\lambda \notin \{1,2,....,n\} \\ 0, & si \quad \alpha-\lambda \in \{1,2,....,n\} \end{cases}, \lambda > -1.
\end{aligned}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1,2,....,n\} \Rightarrow \alpha-\lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m, m \in \{1,2,...,n\}$ *c-à-d*

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+}t^{\alpha-m}\right)(t) = 0, m \in \{1,2,....,n\}.$$

Lemme 1.3.1. *Si* $f(t) \in L_p([a,b])$, $(1 \leq p \leq \infty)$*, alors*

1. $(\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}f)(t) = f(t), \quad (\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}f)(t) = f(t)$
2. *Si* $f \in L_1([a,b])$, $(\mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+}f)(t) \in AC^n([a,b])$*, alors*

$$(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+}f)^{n-k}(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(t-a)^{\alpha-k},$$

$$(\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}f)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(\mathcal{I}^{n-\alpha}_{b^-}f)^{n-k}(b)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(b-t)^{\alpha-k},$$

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$,

$$(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f)(t) = f(t),$$

$$(\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}f)(t) = f(t).$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires de type Caputo

Définition 1.3.5. Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha]+1$, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo à gauche d'ordre α d'une fonction f est définie par :

$$\forall t \in [a,b];\ ({}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f)(t) = \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau. \tag{1.3.5}$$

Définition 1.3.6. Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha]+1$, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo à droite d'ordre α d'une fonction f definie par :

$$\forall t \in [a,b];\ ({}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} f)(t) = \mathcal{I}^{n-\alpha}_{b^-} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau. \tag{1.3.6}$$

Remarque 1.3.2. *Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classique*

$$\forall n \in N^*, \begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{n}_{a^+} f(t) = f^{(n)} - f^{n}(a) \\ {}^{C}\mathcal{D}^{n}_{b^-} f(t) = (-1)^n \left(f^{(n)} - f^{(n)}(b)\right) \end{cases}$$

Proposition 1.3.2. *Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a*

1. $\left({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}$.
2. $\left({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}$.

Démonstration. 1. Posons $f(t)=(t-a)^{\beta-1}$ d'après la définition 1,3,1 et la proposition 1,2,1 on a

$${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(t) = \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{n}(\tau) d\tau.$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2)...(\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n} \\ &= (\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)(t-a)^{\beta-1-n} \end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(t) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n-1} d\tau,\ posons(\tau - a = s(t-a)) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_a^t (1-s)^{n-\alpha-1} (s)^{\beta-n-1} ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

2. De la même manière on démontre (2)

□

Remarque 1.3.3. *Pour* $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$ *on a*

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) = \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)...(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}(t)^{\lambda-\alpha}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(t)^{\lambda-\alpha}, & si \quad \alpha-\lambda \notin \{1,2,....,n\} \\ 0, & si \quad \alpha-\lambda \in \{1,2,....,n\} \end{cases}, \lambda > -1.$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1,2,....,n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m, m \in \{1,2,...,n-1\}$ *C-à-d*

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\alpha-m}\right)(t) = 0, m \in \{1,2,....,n-1\}.$$

Lemme 1.3.2. *Soit* $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$

1. *Si* $f(t) \in$, *alors*

$$({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f)(t) = f(t),$$

$$({}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha} f)(t) = f(t),$$

2. *Si* $f(t) \in C^n([a,b])$, *ou* $f(t) \in AC^n([a,b])$, *alors*

$$(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}({}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f))(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f)^k(a)}{k!}(t-a)^k,$$

$$(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}({}^{C}D_{b^-}^{\alpha} f))(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} f)^k(b)}{k!}(b-t)^k,$$

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$,

$$(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f))(t) = f(t),$$

$$(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}({}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f))(t) = f(t),$$

Théorème 1.3.1. *Soient* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *si* f *possède* $(n-1)$ *dérivées en a et* $(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f)$ *existe, Alors*

$$({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]$$

Corollaire 1.3.1. *Soient* $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$ *et* $(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f)(t)$, $({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f)(t)$ *existent.*

On suppose que $f^{(k)}(a) = 0$ *pour* $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ *Alors*

$$(D_{a^+}^{\alpha} f)(t) = ({}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f)(t)$$

CHAPITRE 2

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES PAR LA FONCTION DE MITTAG-LEFFLER $E_\alpha(z)$

Dans ce chapitre, Nous développons l'application de la méthode des fonctions de Mittag-Leffler qui étendra l'application de la méthode aux équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. La solution est construite en forme de séries de puissance. Les dérivées fractionnaires sont décrites au sens de Caputo. Pour illustrer la fiabilité de la méthode, quelques exemples sont fournis. Les résultats révèlent que la technique introduite ici est très efficace et pratique pour résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. Avant d'aborder ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés de la fonction de Mittag-Leffler et la fonction de Mittag-Leffter généralisée qui nous seront utils dans la suite de ce chapitre.

2.1 définitions et propriétés

La fonction Mittag-Leffler est nommée d'après le mathématicien suédois qui l'a défini en 1903. Cette fonction est considérée comme généralisation directe de la fonction exponentielle, e^x de par la présence de la fonction gamma. La fonction est entière car elle est définie en tout point sur le plan complexe et converge quelque soit z complexe, elle joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.
La représentation de la fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre est définie par

Définition 2.1.1. La fonction de Mittag-Leffter est définie par

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0, \tag{2.1.1}$$

et la fonction de Mittag-Leffter généralisée est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha, \beta > 0 \tag{2.1.2}$$

Exemple 2.1.1.

1. $E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$
2. $E_2(x) = E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh\sqrt{x}.$
3. $E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}(e^x - 1).$
4. $E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x).$

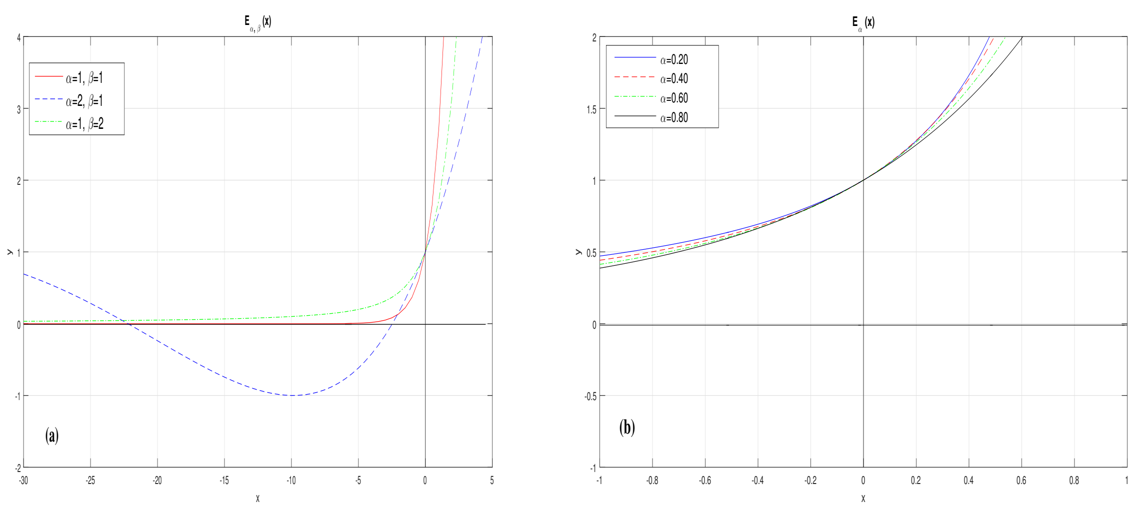

FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction $E_{\alpha,\beta}(x)$ et $E_\alpha(x)$

Théorème 2.1.1. *Pour* $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n E_n(\lambda x^n) = \lambda E_{(\lambda x^n)}.$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda x^n) = \lambda x^{\beta-n-1} E_{(\lambda x^n)}.$$

2.2 Analyse de la méthode

dans cette section on abordera la résolution des équations différentielles fractionnaires par la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ Les fonctions du Mittag-Leffler (1902-1905), $E_\alpha(z)$ et $E_{\alpha,\beta}(z)$ définies par les les équations 2.1.1 et 2.1.2 ont prouvé leur efficacité en tant que solutions d'équations différentielles et intégrales d'ordre fractionnaire et sont donc devenus des éléments importants de la théorie et des applications du calcul fractionnaire. Dans cette partie, nous expliquerons comment résoudre certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire par l'imposition de la fonction généralisée de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$. La méthode généralisée de Mittag-Leffler suggère que le terme linéaire $y(x)$ est décomposé en série infinie

Soit

$$y(x) = E_\alpha(ax^\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \tag{2.2.1}$$

Nous utilisons les définitions suivantes du calcul fractionnaire :

Proposition 2.2.1. *Soit $\alpha > 0$, alors les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre α et 2α sont données par :*

$$^C\mathcal{D}^\alpha y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} \tag{2.2.2}$$

$$^C\mathcal{D}^{2\alpha} y(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{(n-2)\alpha}}{\Gamma((n-2)\alpha+1)} \tag{2.2.3}$$

Démonstration. 1. On applique (1.3.5) à (2.2.1), puis on utilise Proposition(1.3.2) :

$$\begin{aligned}
^C\mathcal{D}^\alpha y(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^X (x-s)^{n-\alpha-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \frac{s^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \right)^{(n)} ds \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\Gamma(n\alpha+1)} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^X (x-s)^{n-\alpha-1} s^{n\alpha} ds \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\Gamma(n\alpha+1)} {}^C\mathcal{D}^\alpha x^{n\alpha} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\Gamma(n\alpha+1)} \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha-\alpha+1)} x^{n\alpha-\alpha} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

2. On applique (1.3.5) à (2.2.1), puis on utilise Proposition(1.3.2) :

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{2\alpha}y(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-2\alpha)}\int_0^X (x-s)^{n-2\alpha-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n\frac{s^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}\right)^{(n)} ds \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{\Gamma(n\alpha+1)}\frac{1}{\Gamma(n-2\alpha)}\int_0^X (x-s)^{n-2\alpha-1}s^{n\alpha}ds \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{\Gamma(n\alpha+1)}{}^{C}\mathcal{D}^{2\alpha}x^{n\alpha} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{\Gamma(n\alpha+1)}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha-2\alpha+1)}x^{n\alpha-2\alpha} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\alpha^n\frac{x^{(n-2)\alpha}}{\Gamma((n-2)\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

□

2.3 Applications et résultats

Dans cette section, nous considérons quelques exemples qui démontrent les performances et l'efficacité de la méthode de la fonction généralisée de Mittag-Leffler pour résoudre des équations différentielles linéaires avec des dérivées fractionnaires.

Exemple 2.3.1. *Soit l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y = Ay \tag{2.3.1}$$

En substituant 2.2.2 dans 2.3.1 , nous trouvons

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha^n\frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} = A\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n\frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}$$

En combinant les termes similaires et en remplaçant n par $n+1$ dans la première somme, on obtient la forme suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^{n+1}\frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} - A\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n\frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} = 0$$

ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha^{n+1}-A\alpha^n)\frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} = 0 \tag{2.3.2}$$

Avec les coefficients de $x^{n\alpha}$ égal à zéro, en identifiant les coefficients, on obtient la récurrence suivante.

$$\alpha^{n+1} - A\alpha^n = 0 \Rightarrow \alpha^{n+1} = A\alpha^n,$$

$$si \quad n = 0, \Rightarrow \quad \alpha^1 = A\alpha^0 = A,$$

$$si \quad n = 1, \Rightarrow \quad \alpha^2 = A\alpha^1 = A^2,$$

$$si \quad n = 2, \Rightarrow \quad \alpha^3 = A\alpha^2 = A^3,$$

En remplaçant dans 2.2.1 on obtient

$$y(x) = \alpha^0 + \alpha^1 \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \alpha^2 \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \alpha^3 \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

$$y(x) = 1 + A\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + A^2 \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + A^3 \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

Alors la solution générale est

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}$$

Nous pouvons écrire la solution générale sous la forme de la fonction de Mittag-Leffler comme suit

Pour $\alpha = 1$ on obtient la solution exact

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} \\ &= e^{Ax}, \end{aligned}$$

Exemple 2.3.2. *Soit l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$${}^C\mathcal{D}^{2\alpha} y - y = 0$$

D'après 2.2.1 et 2.2.2 on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{(n-2)\alpha}}{\Gamma((n-2)\alpha+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} = 0$$

on pose $n = n-2$ on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+2} \frac{x^{(n)\alpha}}{\Gamma((n-2)\alpha+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^{n+2} - \alpha^n) \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} = 0$$

Avec les coefficients de $x^{n\alpha}$ égal à zéro et en identifiant les coefficients, on obtient la récurrence suivante.

$$\alpha^{n+2} - \alpha^n = 0 \Rightarrow \alpha^{n+2} = \alpha^n,$$

$$si \quad n = 0 \;\Rightarrow\; \alpha^2 = \alpha^0 = 1,$$

$$si \quad n = 1 \Rightarrow \; \alpha^3 = \alpha^1,$$

$$si \quad n = 2, \Rightarrow \; \alpha^4 = \alpha^2,$$

En remplaçant dans 2.2.1 on obtient

$$y(x) = \alpha^0 + \alpha^1 \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \alpha^2 \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \alpha^3 \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

$$y(x) = 1 + \alpha \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \alpha \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

Pour $\alpha = 1$ on obtient la solution générale sous forms de la fonction de Metteg-Leffler

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha+1)} \\ &= E_\alpha(x^n), \end{aligned}$$

Exemple 2.3.3. *Soit l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$${}^C\mathcal{D}^{2\alpha} y + {}^C\mathcal{D}^\alpha y - 2y = 0$$

D'après 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3 on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{(n-2)\alpha}}{\Gamma((n-2)\alpha+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} + 0$$

on pose $n = n - 1$ on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+2} \frac{x^{(n)\alpha}}{\Gamma((n-2)\alpha+1)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} \frac{x^{(n)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^{n+2} + \alpha^{n+1} - 2\alpha^n) \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} = 0$$

Avec les coefficients de $x^{n\alpha}$ égal à zéro, en identifiant les coefficients, on obtient la récurrence suivante.

$$\alpha^{n+2} + \alpha^{n+1} - 2\alpha^n = 0 \Rightarrow \alpha^{n+2} = 2\alpha^n - \alpha^{n+1},$$

$$si \quad n = 0, \Rightarrow \; \alpha^2 = 2\alpha^0 - \alpha^1,$$

$$si \quad n = 1, \Rightarrow \quad \alpha^3 = 2\alpha^1 - \alpha^2 = \alpha - 2,$$

En remplaçant dans 2.2.1 on obtient

$$y(x) = \alpha^0 + \alpha^1 \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \alpha^2 \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \alpha^3 \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

$$y(x) = 1 + \alpha \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (2-\alpha) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + (\alpha-2) \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

Pour $\alpha = 1$ *on obtient la solution générale sous forme de la fonction de Metteg-Leffler*

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha+1)} \\ &= E_\alpha(x^n), \end{aligned}$$

Chapitre 3

Résolution des équations différentiélles fractionnaires par la trasformée de Laplace

Ce chapitre a pour but d'appliquer la transformée de Laplace pour résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. Cette technique nous permet de transeformer des équations différentielles fractionnaires en équations algébriques, puis en résolvant ces équations algébriques, nous pouvons obtenir la fonction inconnue en utilisant la transformation de Laplace inverse. Des exemples illustratifs sont inclus pour démontrer la validité et l'applicabilité de la technique présentée.

3.1 Transformation de Laplace

La transformée de Laplace est un outil puissant en mathématiques appliquées et en ingénierie. Pratiquement tous les cours d'équations différentielles du premier cycle universitaire introduisent cette technique de résolution des équations différentielles linéaires. La transformée de Laplace est indispensable dans certains domaines de la théorie du contrôle.

Définition 3.1.1. on dit que une fonction réelle $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est à croissance sous exponentielle si

$$\exists A > 0; \exists s_0 \in R; \exists t_0 > 0; \forall t > t_0; |f(t)| \leq e^{s_0 t}.$$

Définition 3.1.2. Si$f \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle, rappelons que sa transformée de Laplace est denie par

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx, \tag{3.1.1}$$

Proposition 3.1.1. 1. $\mathcal{L}[f(x) + g(x)] = F(s) + G(s)$

2. $\mathcal{L}[x^\beta] = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}, \beta > -1$

3. $\mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

4. $\mathcal{L}[\int_0^x f(t)dt] = \frac{F(s)}{s}$

Lemme 3.1.1. *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, $f \in \mathbb{C}^{n-1}(0, \infty)$ est à croissance sous-exponentielle, alors la transformée de laplace de $f^{(n)}$ est donnée par*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f(0)$$

Théorème 3.1.1. *Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervale $[0, T]$ est à croissance sous-exponentielle, alors la transformée de laplace de f convolution g $(f * g)$ est*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = F(s)G(s)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) &= \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \int_0^\infty g(u)e^{-su}du \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+u)} f(x)g(u)dxdu \\
&= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-u)g(u)dtdu, (t = x+u) \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-u)g(u)du\right] dt \\
&= \mathcal{L}(f * g).
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.2. *La transformée de Laplace de l'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville 1.2.1 d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par :*

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{I}^\alpha f(x)\right] = \frac{F(s)}{s^\alpha}.$$

Démonstration. La transformée de Laplace de l'opérateur intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\mathcal{I}^{\alpha} f(x)] &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-sx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right)dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-sx}(g*f)dx \\
&= G(s)F(s).
\end{aligned}$$

où $G(s) = \mathcal{L}[x^{\alpha-1}] = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}$ □

Lemme 3.1.3. *Pour $\alpha > 0$ et $n = [\alpha]+1$, $f \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^+)$ à croissance sous-exponentielle, Alors*

1. $\mathcal{L}[{}^{RL}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(x)] = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}(\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f)^{(k)}(a)$.
2. $\mathcal{L}[{}^{C}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(x)] = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}(f)^{(k)}(a)$.

Démonstration. 1. On applique 3.1.1 à $(I_a^{n-\alpha} f)$, puis on utilise le lemme(3.1.2) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}^{RL}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(x)] = \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f(x)\right](s) &= s^n\mathcal{L}[\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}(\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f)^{(k)}(a) \\
&= s^n s^{\alpha-n}\mathcal{L}[f(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}(\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f)^{(k)}(a) \\
&= s^{\alpha}\mathcal{L}[f(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}(\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f)^{(k)}(a) \\
&= s^{\alpha}F(x) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}(\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f)^{(k)}(a)
\end{aligned}$$

2. De même on applique le lemme (3.1.2) à $f^{(n)}$; puis on utilise (3.1.1) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}^{C}D_a^{\alpha} f(x)] = \mathcal{L}\left[\mathcal{I}_a^{\alpha}\frac{d^n}{dt^n} f(x)\right] &= s^{\alpha-n}\left[\mathcal{L}f^{(n)}\right](s) \\
&= s^{\alpha-n}\left[[s^n\mathcal{L}f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(a)\right] \\
&= s^{\alpha}\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(a).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.2. *Soit $\alpha, \beta > 0$, alors*

1. $\mathcal{L}[E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)] = \dfrac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}$.
2. $\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)] = \dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}$.

Démonstration. 1. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)] &= \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\right] = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \mathcal{L}[t^{\alpha k}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{s^{\alpha k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s^{\alpha k+1}} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s^\alpha}\right)^k \\
&= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s^\alpha}}\right) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha-\lambda}.
\end{aligned}$$

2. De même on applique le transformée de Laplace on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)] &= \mathcal{L}\left[t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\right] = \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1+\alpha k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \mathcal{L}[t^{\beta-1+\alpha k}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \frac{\Gamma(\beta+\alpha k)}{s^{\beta+\alpha k}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s^{\beta+\alpha k}} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s^\alpha}\right)^k \\
&= \frac{1}{s^\beta}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s^\alpha}}\right) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha-\lambda}.
\end{aligned}$$

□

3.2 Transformée de Laplace inverse

La fonction $f(x)$ est appelée la transformée de Laplace inverse de $F(s)$ et sera désignée par $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. En pratique, lorsqu'on utilise la transformée de Laplace pour, résoudre une équation différentielle fractionnaire, il faut à un moment donné inverser la transformée de Laplace en trouvant la fonction $f(x)$ qui correspond à une certaine $F(s)$.

Définition 3.2.1. La transformée de Laplace inverse de $F(s)$ est définie comme suit :

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} e^{sx} F(s) ds,$$

où σ est suffisamment grand pour que $F(s)$ soit défini pour la partie réelle de $s \geq \sigma$.

Lemme 3.2.1.
1. $\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)+G(s)\right) = f(x)+g(x)$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}\right) = x^{\beta}, \beta > -1$
3. $\mathcal{L}^{-1}F(s-a) = e^{ax}f(x)$
4. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \int_0^x f(x)dx$

Théorème 3.2.1. *Soit f, g deux fonctions continues sur l'intervale $[0,T]$ est à croissance sous-exponentielle, alors*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = \left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = f(x)g(x)$$

Proposition 3.2.1. *Pour $\alpha, \beta > 0, a$ dans$\mathbb{R}$ et $s^{\alpha} > |a|$, nous avons la formule de transformation de Laplace inverse suivante*

1. $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+a}] = E_{\alpha,1}(-ax^{\alpha})$.
2. $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+a}] = x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-ax^{\alpha})$.

Démonstration. 1. en utilisant le développement en série, $s^{\alpha-1}/(s^{\alpha}+a)$ peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned}\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+a} &= \frac{1}{s}\frac{1}{1+\dfrac{a}{s^{\alpha}}}\\ &= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-a}{s^{\alpha}}\right)^{n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^{n}}{s^{n\alpha+1}}.\end{aligned}$$

D'après le lemme (3.2.1) La transformée inverse de Laplace de la fonction ci-dessus est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^{n}}{s^{n\alpha+1}}\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^{n}x^{n\alpha+1-1}}{\Gamma(n\alpha+1)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ax^{\alpha})^{n}}{\Gamma(n\alpha+1)}\\ &= E_{\alpha,1}(-ax^{\alpha}).\end{aligned}$$

2. De même en utilisant le développement en série, $s^{\alpha-\beta}/(s^\alpha+a)$ peut Ãªtre réécrite comme suit

$$\begin{aligned}
\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+a} &= \frac{1}{s^\beta}\frac{1}{1+\frac{a}{s^\alpha}} \\
&= \frac{1}{s^\beta}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-a}{s^\alpha})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{s^{n\alpha+\beta}}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme (3.2.1) La transformée inverse de Laplace de la fonction ci-dessus est

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{s^{n\alpha+\beta}}] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n x^{n\alpha+\beta-1}}{\Gamma(n\alpha+1)} \\
&= x^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ax^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)} \\
&= x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-ax^\alpha)\ .
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.2. 1. *Pour $\alpha \geq \beta > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et $s^{\alpha-\beta} > |a|$ on obtient :*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^\alpha+as^\beta)^{n+1}}\right] = x^{\alpha(n+1)-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^k\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+(n+1)\alpha)}x^{k(\alpha-\beta)}.$$

2. *Pour $\alpha \geq \beta$, $\alpha > \gamma$,$a \in \mathbb{R}$,$s^{\alpha-\beta} > |a|$ et $s^\alpha + as^\beta > |b|$ on obtient*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^\gamma}{s^\alpha+as^\beta+b}\right] = x^{\alpha-\gamma-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-b)^n(-a)^k\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+(n+1)\alpha-\gamma)}x^{k(\alpha-\beta)+n\alpha}.$$

Démonstration. 1. le développement de la série $(1+x)^{-n-1}$ sécrir comme :

$$\frac{1}{(1+x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}(-x)^k.$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s^\alpha+as^\beta)^{n+1}} &= \frac{1}{(s^\alpha)^{n+1}}\frac{1}{(1+\frac{a}{s^{\alpha-\beta}})^{n+1}} \\
&= \frac{1}{(s^\alpha)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}\left(\frac{-a}{s^{\alpha-\beta}}\right)^k.
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^{\alpha}+as^{\beta})^{n+1}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^{\alpha})^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}\left(\frac{-a}{s^{\alpha-\beta}}\right)^{k}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}\frac{(-a)^{k}}{s^{k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)}}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^{k}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+(n+1)\alpha)}x^{k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)-1}$$

$$= x^{\alpha(n+1)-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^{k}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+(n+1)\alpha)}x^{k(\alpha-\beta)}.$$

2. De la méme maniére on démontre (2).

□

3.3 Exemples illustratifs

Dans cette section on applique la méthode présentée ci-dessu pour résoudre certaines équations différentielles fractionnaires linéaires, cette technique nous permet d'obtenir la solution exacte de ses équations.

Exemple 3.3.1. *Comme premier exemple, nous considérons le problème à valeur initiale suivant dans de l'équation non homogène de Bagley-Torvik .*

$$\begin{cases} y''(x) + ^{C}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}y(x) + y(x) = 1 + x \\ \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

En utilisant la transformée de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}\left(y''(x) + ^{C}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}y(x) + y(x) = 1 + x\right)$$

$$\mathcal{L}\left(y''(x)\right) + \mathcal{L}\left(^{C}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}y(x)\right) + \mathcal{L}\left(y(x)\right) = \mathcal{L}\left(1 + x\right)$$

$$s^{2}Y(s) - sy(0) - y'(0) + s^{\frac{3}{2}}Y(s) - s^{\frac{1}{2}}y(0) - s^{-\frac{1}{2}} + Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{2}},$$

$$s^2Y(s) - s - 1 + s^{\frac{3}{2}}Y(s) - s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}} + Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2},$$
$$Y(s)(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + s + s^{\frac{1}{2}} + s^{-\frac{1}{2}} + 1\ ,$$
$$Y(s)(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1) = (\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2})(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1)\ ,$$
$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on obtient

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$

Ce qui doone la solution exacte de ce problème

$$y(x) = 1 + x$$

Exemple 3.3.2. *Considérons le problème linéaire de valeur initiale suivant*

$$\begin{cases} {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}y(x) = y(x) + 1,\ 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On applique la transformée de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}\left({}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}y(x) = y(x) + 1\right)$$

$$\mathcal{L}\left({}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}y(x)\right) = \mathcal{L}\left(y(x)\right) + \mathcal{L}\left(1\right)$$

$$s^{\alpha}Y(s) = Y(s) + \frac{1}{s},$$

Donc

$$Y(s) = \frac{s^{-1}}{s^{\alpha} - 1}.$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{-1}}{s^{\alpha} - 1}\right)$$

D'après la Proposition (3.1.2), la solution exacte de ce problème peut être obtenue comme suit :

$$y(x) = x^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(x^{\alpha})$$

Exemple 3.3.3. *Soit l'équation linéaire non homogène*

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(x) + y(x) = \dfrac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \dfrac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + x^2 - x \qquad 0 < \alpha \leq 1. \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On applique la transformée de Laplace sur les deux membres de cette équation , on obtient :

$$\mathcal{L}\left({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(x) + y(x) = \frac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + x^2 - x\right)$$

$$\mathcal{L}\left({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(x)\right) + \mathcal{L}\left(y(x)\right) = \mathcal{L}\left(\frac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right) - \mathcal{L}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right) + \mathcal{L}\left(x^2 - x\right)$$

$$s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) = \frac{2}{s^{3-\alpha}} - \frac{1}{s^{2-\alpha}} - Y(s) + \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2},$$

$$Y(s)(s^{\alpha}+1) = 2\frac{s^{\alpha}+1}{s^3} - \frac{s^{\alpha}+1}{s^2},$$

Alors

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}.$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}\right)$$

Ce qui donne la solution exacte de ce problème $y(x) = x^2 - x$

Exemple 3.3.4. *Considérons le problème linéaire de valeur initiale suivant*

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(x) + y(x) = 0, \ 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) = 1 \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

On applique la transformée de Laplace sur l'équation , on obtient :

$$\mathcal{L}({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}Y(x) + y(x)) = \mathcal{L}\,(0)$$

$$\mathcal{L}({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}Y(x)) + \mathcal{L}(y(x)) = \mathcal{L}\,(0)$$

$$s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1}Y(0) + Y(s) = 0$$

Donc

$$Y(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}.$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on obtient : En utilisant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}\right)$$

D'après la Proposition (3.1.2), la solution exacte de ce problème peut être obtenue comme suit :

$$y(x) = E_{\alpha,1}(-x^{\alpha})$$

Chapitre 4

Conclusion générale

Une généralisation de la méthode de la fonction de Mittag-Leffler a été développée pour les équations différentielles linéaires avec des dérivées fractionnaires. Cette nouvelle généralisation est basée sur la dérivée fractionnelle de Caputo. On peut conclure que cette technique est très puissante et efficace pour trouver les solutions analytiques d'une grande classe d'équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. Aussi la transformée de Laplace qui est un outil puissant en mathématiques appliquées a été est mise en œuvre pour obtenir la solution exacte de certaines équations différentielles fractionnaires linéaires. Les dérivées fractionnaires dans ce cas sont décrites dans le sens de Caputo et Riemann-Liouville. Une variété d' exemples illustratifs sont présentés dans les chapitres 2 et 3 pour montrer la validité des deux méthodes.

Bibliographie

[1] S.Z. Rida and A.A.M. Arafa, New Method for Solving Linear Fractional Differential Equations. *International Journal of Differential Equations* Vol 2011, Article ID 814132.

[2] T. Blaszczyk, J. Siedlecki, M. Ciesielski, Numerical algorithms for approximation of fractional integral operators based on quadratic interpolation. *Math Meth Appl Sci*, 1-11 , 2018.

[3] I. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, Yu. Luchko, Algorithms for the Fractional Calculus :A Selection of Numerical Methods, *Preprint submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17 March 2003.

[4] S. Kazem, Exact Solution of Some Linear Fractional Differential Equations by Laplace Transform,*International Journal of Nonlinear Science*, Vol.16(2013) No.1,pp.3-11

[5] F. Jedrzejewski, Introduction aux méthodes numériques. Springer, Paris 2005.

[6] A. J. Jerri, Introduction to integral equations with applications. *John Wiley and Sons, INC*, 1999.

[7] K. Kamlesh, K. Rajesh,Pancley, Shiva Sharma. Approximtions of fractional integrals and Caputo derivatives with appliction in solving Abel's integral equations. *Journal of King Saud University*, 2018.

[8] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujllo. *Theory and Application of Fractional Differential Equations.* Elsevier, 2006.

[9] R. Kress. An approximation of the fractional integrals using quadratic interpolation. *New York*. 1998.

[10] C. Li, M. Cai, Theory and Numerical Approximations of Fractional Integrals and Derivatives. *Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia. Shanghai University,* February 2019.

[11] Mujeeb ur Rehman, I. Amna, S. Umer, A quadrature method for numerical solutions of fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation 307* : 38 - 49, 2017.

[12] Z. Odibat. Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives, *Applied mathematics and computation 178* : 527 - 533, 2006.

Annexe A : Tableau des transformations de Laplace

N^o	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	N^o	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
(1)	c	$\frac{c}{s}$	(14)	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
(2)	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	(15)	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
(3)	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	(16)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
(4)	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(17)	$e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(s-a)^2 + k^2}$
(5)	$f^n(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	(18)	$e^{at} \cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$
(6)	$\int_0^t f(x) g(t-x) dx$	$F(s)G(s)$	(19)	$e^{at} \sinh kt$	$\frac{k}{(s-a)^2 - k^2}$
(7)	$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(20)	$e^{at} \cosh kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - k^2}$
(8)	$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$	(21)	$t \sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
(1)	$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	(22)	$t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
(9)	$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$	(23)	$t \sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$
(10)	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	(24)	$t \cosh kt$	$\frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$
(11)	$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$	(25)	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$
(12)	$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$			
(13)	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$			

Annexe B : Programmes Matlab

Figure 2.1 (a)

```
%graphe de la fonction mitag_Leffler E_{\alpha,\beta}
function plot_mittag
a1=1; b1=1;a2=2; b2=1;a3=1; b3=2%;b4=3;
x=[];y1=[];y2=[];y3=[];
for i=-30:0.5:4.5;
x=[x,i];
y1=[y1;mittag(a1,b1,i)];
y2=[y2;mittag(a2,b2,i)];
y3=[y3;mittag(a3,b3,i)];
end
j=-2:4;
plot(x,y1,'r',x,y2,'b--',x,y3,'g-.');
hold on
plot(x,0.*x-0.01,'k',0.*j,j,'k');
xlabel('x');
ylabel('y')
title('E_{\alpha, \beta} (x)');
axis([-30 5 -2 4]);
l1=sprintf('\\alpha=%d, \\beta=%d',a1,b1);
l2=sprintf('\\alpha=%d, \\beta=%d',a2,b2);
l3=sprintf('\\alpha=%d, \\beta=%d',a3,b3);
lgd =legend(l1,l2,l3,2,'Location','northwest')
lgd.FontSize = 14;
grid
function res=mittag(a,b,z)
k=sym('k');
res=double(1/gamma(b)+symsum((z.^k)/gamma(a*k+b),k,1,Inf));
```

Figure 2.1 (b)

```
%graphe de la fonction mitag_Leffler $E_\alpha$
function plot_mittag2
a0=0.2; a1=0.4; a2=0.6;a3=0.8;
x=[];y1=[];y2=[];y3=[];y0=[];
for i=-1:0.01:1;
x=[x,i];
y0=[y0;mittag2(a0,i)];
y1=[y1;mittag2(a1,i)];
y2=[y2;mittag2(a2,i)];
y3=[y3;mittag2(a3,i)];
end
j=-2:4;
plot(x,y0,'b',x,y1,'r--',x,y2,'g-.',x,y3,'k');
hold on
plot(x,0.*x-0.01,'k',0.*j,j,'k');
xlabel('x');
ylabel('y')
title('E_{\alpha} (x)');
axis([-1 1 -1 2]);
l0=sprintf('\\alpha=%1.2f',a0);
l1=sprintf('\\alpha=%1.2f',a1);
l2=sprintf('\\alpha=%1.2f',a2);
l3=sprintf('\\alpha=%1.2f',a3);
lgd =legend(l0,l1,l2,l3,2,'Location','northwest')
lgd.FontSize = 12;
grid
function res=mittag2(a,z)
k=sym('k');
res=double(1/gamma(1)+symsum((z.^k)/gamma(a*k+1),k,1,Inf));
```

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بحل بعض المعادلات التفاضلية الخطية ذات مشتق كسري وذالك باستعمال الدالة ميتاج-ليفلر $E_\alpha(z)$ المعممة . اعتمدنا في هذا التعميم الجديد على المشتق الكسري لكبوتو. كما تم ايضا تطبيق تحويل لابلاس وهو أداة قوية في الرياضيات التطبيقية للحصول على حل تحليلي لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية، تم اعتماد الحل في هذه الحالة على المشتق الكسري لكبوتو و ريمان ليوفيل . قدمنا مجموعة متنوعة من الأمثلة التوضيحية في الفصلين 2 و 3 لإظهار صلاحية كلتا الطريقتين.

كلمات مفتاحية: مشتق كسري ، دالة ميتاج ليفلر ، معادلة تفاضلية كسرية ، تحويل لابلاس .

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons résolu quelques équations différentielles fractionnelles linéaires en utilisant la fonction généralisée de Mitag-Leffler. Cette nouvelle généralisation est basée sur la dérivée fractionnelle de Caputo, Aussi la transformée de Laplace a été est mise en oeuvre pour obtenir la solution exacte de certaines équations différentielles fractionnaires linéaires. Les dérivées fractionnaires dans ce cas sont décrites dans le sens de Caputo et Riemann-Liouville. Une variété d'exemples illustratifs sont présentés dans les chapitres 2 et 3 pour montrer la validité des deux méthodes.

Mots clés : Dérivée fractionnaire, fonction de Mitage-Leffler, équation différentielle fractionnaire, transformée de Laplace

Abstract

In this work, we have solved some linear fractional differential equations using the generalized Mitag-Leffler function. This new generalization is based on the fractional derivative of Caputo. Also the Laplace transform is used to obtain the exact solution of some linear fractional differential equations. The fractional derivatives in this case are described in the sense of Caputo and Riemann-Liouville. A variety of illustrative examples are presented in Chapters 2 and 3 to show the validity of both methods.

Keywords: Fractional derivative, Mitage-Leffler function, Fractional differential equation, Laplace transform.