

Remerciements

Je tiens d'abord à témoigner ma vive reconnaissance au Docteur Merzougui,A le directeur de mon mémoire de master , pour tout ce qu' il m'a apporté scientifiquement et humainement, et pour avoir accepté la direction de mon mémoire.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement Mr Nouiri.B d'avoir accepté la présidence du jury, ainsi que Mr Saadi.A.

Mes remerciements vont aussi aux enseignants du département de Mathématiques de l'université de M'sila.

Notations

- $L_2([a, b])$: L'ensemble de toutes les fonctions de carrée intégrable sur $[a, b]$.
- $C^k([a, b])$: L'ensemble des fonctions dérivées deux fois continues sur $[a, b]$.
- H : L'espaces de Hilbert
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit scalaire.
- $\|\cdot\|$: La norme.
- $T_n(x)$: Polynôme de Chebyshev de premier espèce.
- $T_n^*(x)$: Changement de polynôme de Chebyshev $T_n(x)$.
- $U_n(x)$: Polynôme de Chebyshev de deuxième espèce.
- $U_n^*(x)$: Changement de polynôme de Chebyshev $U_n(x)$.
- $V_n(x)$: Polynôme de Chebyshev de Troisième espèce.
- $V_n^*(x)$: Changement de polynôme de Chebyshev $V_n(x)$.
- $K(x, t)$: Le noyau
- φ : La solution exacte d'équation intégrale.
- φ^* : La solution approchée d'équation intégrale.
- a_i : Coefficients de polynôme de Chebyshev.

Résumé

Résumé

L'idée est de résoudre approximativement une équation intégrale par la méthode spectrale, tout en remplaçant la fonction inconnue par l'expression du polynôme de Chebyshev

Mots clés : Opérateurs , Equation intégrale , polynôme de Chebyshev.

Abstract

The idea is to solve an integral equation approximately using a spectral method while replacing the unknown function .

The expression of the Chebyshev polynomial then the digital implementation of the latter by comparison with other approximations .

Key words : operators , integral equation , polynomial Chebyshev.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappales et Notion Fondamentales	2
1.1 Espace Normé	2
1.2 Espace complets	4
1.3 Espace Euclidien	6
1.4 Espace de Banach	6
1.5 Espace de Hilbert	7
1.6 Notions sur les opérateurs	8
1.6.1 Opérateur Continu	8
1.6.2 Opérateur Compact	9
1.6.3 Opérateur Intégral	11
1.6.4 Opérateurs Adjointes	11
1.6.5 Opérateurs Positifs	12
2 Polynôme de Chebyshev et Equations intégrales	13
2.1 Polynôme de Chebyshev	13
2.1.1 Les polynômes	13
2.1.2 Polynôme de Chebyshev de première espèce	14
2.1.3 Polynôme de Chebyshev de deuxième espèce	17
2.1.4 Polynôme de Chebyshev de troisième espèce	20
2.2 Equation intégrale	22

2.2.1	Type d'équations intégrales	22
2.2.2	L'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale de type Fredholm	24
2.3	Méthode spectrale	25
3	Approximation numérique des équations intégrales de Fredholm en utilisant les polynômes de Chepyshev	27
3.1	Intégration numérique	27
3.1.1	La méthode des rectangles	27
3.1.2	Méthode de trapèze composée	29
3.1.3	Méthode de Simpson généralisée	30
3.2	Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce	32
3.2.1	Equation intégrales de Fredholm de deuxième espèce	32
3.2.2	Application	33
	Conclusion	76
	Bibliographie	77

Introduction

La résolution des équations intégrales linéaires par les polynômes de Chebyshev a une importance dans l'analyse numérique et les problèmes pratiques ceci est d'un fait qu'un grand nombre de lois et des relations physiques se traduisent mathématiquement sous forme des équations intégrales.

Le but de ce travail est de trouver une solution des équations intégrales par les polynômes de Chebyshev.

Le premier chapitre : rappel d'analyse fonctionnelle et notions sur les opérateurs.

Le deuxième chapitre : quelques définitions et propositions des trois Polynômes de Chebyshev, et le troisième chapitre : Résolution numérique d'équation intégrale linéaire (de Fredholm), telle que la solution approchée est donnée sous forme de polynôme chebyshev, en estimant les erreurs pour la méthode et comparer la solution approchée avec la solution exacte par programmation en Matlab

Chapitre 1

Rappales et Notion Fondamentales

Dans ce chapitre, donne des définitions de base sur l'analyse fonctionnelle, étudié sur l'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé.

Ainsi on donne quelques notions sur les opérateurs.

1.1 Espace Normé

Définition 1.1.1 (Norme) Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{k} qui sera soit le corps \mathbb{R} des nombres réels soit le corps \mathbb{C} des nombres complexes.

Une norme sur E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifiant les cinq propriétés suivantes:

1. $\forall u \in E \quad N(u) \geq 0$ *[positivité]*
2. $N(0) = 0$ *[nullité à l'origine de E]*
3. $N(u) = 0$ implique $u = 0$ *[séparation]*
4. $\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{k} : N(\lambda u) = |\lambda|N(u)$ *[positivité]*
5. $\forall u, v \in E : N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ *[inégalité triangulaire ou inégalité de convexité]*

Pour $u \in E$ donné, le nombre réel positif, $N(u)$ est appelé norme de u .

Remarque 1.1.1 Notons que pour tout $u \in E$:

$$N(-u) = N(-1.u) = |-1|.N(u) = 1.N(u) = N(u).$$

Notation 1.1.1 En général la norme noté par $\|\cdot\|$.

Définition 1.1.2 (Distance associée à une norme) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} , et soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . On associe à cette norme, de manière naturelle, une distance d sur E par la formule

$$\forall u \in E \forall v \in E \quad d(u, v) = \|u - v\|.$$

Cette distance est dite associée à la norme $\|\cdot\|$, sauf indication contraire, lorsqu'on parle de distance pour un espace vectoriel muni d'une norme, c'est de cette distance dont il s'agit.

Vérification :

d est bien une fonction positive de $E \times E$ dans \mathbb{R}

a) $d(u, u) = \|u - u\| = 0$

b) $d(u, v) = 0 \implies \|u - v\| = 0$

$$\implies u - v = 0 \quad (\text{par (3)})$$

$$\implies u = v$$

c) $d(u, v) = \|u - v\| = \|-(v - u)\| = \|v - u\| = d(v, u).$

d) $d(u, v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| = \|(u - w) + (w - v)\|$

$$\leq \|u - w\| + \|w - v\| \quad (\text{par (5)})$$

$$\leq d(u, w) + d(w, v).$$

d est effectivement une distance sur E .

Remarque 1.1.2 Remarquons que la distance associée à une norme vérifie les propriétés particulières que n'a aucune raison de posséder une distance quelconque sur E (penser à la distance discrète). En effet :

soient u, v et $w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$

- $d(u + w, v + w) = \|(u + w) - (v + w)\| = \|u - v\| = d(u, v)$. [*Invariance de d par translation*]
- $d(\lambda u, \lambda v) = \|\lambda u - \lambda v\| = |\lambda| \|u - v\| = |\lambda| d(u, v)$. [*homogénéité de d*]

Propriétés importantes d'une norme

- a) $\forall u, v \in E \quad \|u - v\| \geq | \|u\| - \|v\| |$ [seconde inégalité triangulaire]
- b) $\forall u_1 \in E, \dots, u_n \in E, \forall \lambda_1 \in \mathbb{k}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k} \quad \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|u_i\|$ [inégalité triangulaire généralisée]

Définition 1.1.3 (Espace Normé)

L'espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle espace normé.

Exemple 1.1.1 La droite \mathbb{R}^1 devient un espace normé, si pour tout $x \in \mathbb{R}^1$ on pose $\|x\| = |x|$.

2. Si $x \in \mathbb{R}^n$, tel que :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

on pose

$$\|x\| = \sqrt{\left\| \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\|}$$

Tous les axiome de la norme sont satisfaits par $\|\cdot\|$.

1.2 Espace complets

Soit (X, d) un espace métrique

Définition 1.2.1 (Suite de Cauchy) Une suite (x_n) de X est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Il est aisé de voir que toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse n'est pas forcément vérifiée. Puisqu'il existe des suites de Cauchy qui ne convergent pas, à savoir :

Exemple 1.2.1 Dans $X =]-1, 1[$, la suite $\{1 - \frac{1}{n}\}$ est de Cauchy puisque la même suite converge vers 1 dans \mathbb{R} mais $1 \notin X$

Lemme 1.2.1 Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une sous suite (x_{n_k}) convergente vers x alors la suite (x_n) est aussi convergente vers le même élément x .

Preuve. Soit (x_n) une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \text{ on a } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

et comme x_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \text{ on a } \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

en particulier pour $n_k > n_0$, on a

$$\forall n_k, m \geq n_0 \quad \|x_m - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite x_{n_k} vers x

$$\forall n_k > n_0 \quad \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon'$$

D'où la convergence de la suite x_n vers l'élément x

$$\forall n_k, m \geq n_0 \quad \|x_m - x\| = \|x_m - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \leq \|x_m - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon''.$$

■

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy (x_n) d'éléments de E est une suite convergente dans E .

Lemme 1.2.2 Tout espace normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie est complet.

Preuve. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace de dimension finie cette dernière est bornée d'où, on peut extraire une sous suite x_{n_k} convergente vers x ce qui implique à son tour que la suite (x_n) est aussi convergente vers x . D'où l'espace E est complet ■

1.3 Espace Euclidien

On se donne un espace vectoriel sur \mathbb{R} , appelé H .

Définition 1.3.1 (produit scalaire) *On appelle produit scalaire sur H une forme bilinéaire symétrique*

définie positive $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que

(i) *(Linéarité à droite) $B(u, \lambda v) = \lambda \langle u, v \rangle, B \langle u, v + v' \rangle = B \langle u, v \rangle + B \langle u, v' \rangle,$*

(ii) *(Symétrie) $B(u, v) = B(v, u).$*

(iii) *(Définie positive) $B(u, u) \geq 0$ et $B(u, u) = 0 \iff u = 0.$*

Définition 1.3.2 (Espace Euclidien) *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle espace Euclidien*

Exemple 1.3.1 *L'espace réel à n dimension \mathbb{R}^n des éléments*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

muni des opérations habituelles d'addition et multiplication par un nombre et du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

représente un exemple bien connu d'espace Euclidien.

1.4 Espace de Banach

Définition 1.4.1 *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.*

Exemple 1.4.1 *Tous espace vectoriel normé de dimension finie (en particulier les \mathbb{R}^n) est un espace de Banach*

Lemme 1.4.1 *Tout espace Banach $(E, \|\cdot\|)$ est fermé.*

Preuve. [12] ■

1.5 Espace de Hilbert

Théorème 1.5.1 L'application $u \longrightarrow \|u\| = \sqrt{B(u, u)}$

est une norme appelée norme associée au produit scalaire B (on parle aussi de norme hilbertienne) et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|B(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$

et il n'y a égalité que si u et v sont parallèles ($u = \lambda v$ ou bien $v = 0$).

Rappelons aussi "l'inégalité du parallélogramme" : $\|\frac{u+v}{2}\|^2 + \|\frac{u-v}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

Rappelons aussi que le produit scalaire (u, \cdot) est une forme linéaire,

voir les Théorèmes 6.1 livre [6] et Théorèmes précédent elle est donc continue.

Preuve.

(i) (Cauchy-Schwarz) On considère le polynôme et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|u\|^2 + \lambda \|u\|^2 - 2\lambda B(u, v) = B(u - \lambda v, u - \lambda v) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Cette condition de signe implique que son discriminant est négatif :

$$B(u, v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Ceci prouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le cas d'égalité correspond au cas où ce polynôme a une racine double ($u = \lambda v$) ou bien au cas où $v = 0$.

(ii) (Norme) Il est bien clair que $\|u\| = 0 \iff u = 0$ et $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz on déduit aussi que $\|u + v\|^2 = B(u + v, u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2B(u, v) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$

et l'inégalité triangulaire) est du montrée. ■

On vérifie aisément que l'application $(u, v) \longrightarrow B(u, v)$ est alors continue de $H \times H$ dans \mathbb{R} .

Définition 1.5.1 (Espace de Hilbert) On dit que (H, B) est un espace de Hilbert si muni de la norme associée à la forme bilinéaire B , H est complet.

1.6 Notions sur les opérateurs

1.6.1 Opérateur Continu

Définition 1.6.1 (Opérateurs linéaires)

Soient E et E_1 deux espaces vectoriel topologiques. On appelle opérateur linéaire de E dans E_1 une application

$$y = Ax \quad (x \in E, y \in E_1)$$

qui vérifie la condition

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2$$

Exemple 1.6.1 Soit E un espace vectoriel topologique. posons

$$Ax = x \quad \text{pour tous les } x \in E$$

Un tel opérateur qui transforme tout élément de l'espace de lui-même s'appelle opérateur identique.

L'ensemble D_A de tous les $x \in E$ pour lesquels l'application A est définie s'appelle domaine de définition de l'opérateur A , en général, il n'est pas supposé que $D_A = E$, mais nous allons toujours supposer que D_A est une variété linéaire, c-à-d que si $x, y \in D_A$, on a aussi $\alpha x + \beta y \in D_A$, quels que soient α, β .

L'opérateur A s'appelle *continu* au point $x_0 \in D_A$, si pour tout voisinage V du point $y_0 = Ax_0$ il existe un voisinage U du point x_0 tel que $Ax_0 \in V$, dès que $x_0 \in U \cap D_A$. L'opérateur A est dit continu, s'il est continu en tout point $x \in D_A$.

Lorsque E et E_1 sont des espaces normés, cette définition est équivalente à la suivante : l'opérateur A est continu, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$\|x' - x''\| < \delta \quad (x', x'' \in D_A)$$

ce qui implique

$$\|Ax' - Ax''\| < \varepsilon$$

Remarque 1.6.1 L'opérateur linéaire A est dit continu sur $G \subset E$, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Définition 1.6.2 (*Opérateurs bornés*)

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, tq

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E \quad \forall x \in E \quad (2.2.1)$$

Proposition 1.6.1 La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1) est appelée norme de A notée $\|A\|$ est donnée par :

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F$$

Preuve. [12] ■

Théorème 1.6.1 Un opérateur linéaire A est continu si et seulement si, il est borné

Preuve. [12] ■

1.6.2 Opérateur Compact

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F

Définition 1.6.3 (Ensembles relativement compacts) Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F

Définition 1.6.4 (Opérateurs linéaires compacts) On dit que A un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F .

Théorème 1.6.2 (Critère de compacité) Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée x_n de E , la suite Ax_n contient une sous suite convergente de F .

Théorème 1.6.3 Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compact est un opérateur compact.

Preuve. Soit $\{u_n\}$ une suite bornée de E est soit $\{Au_n\}$ une suite de F , alors

$$Au_n(x) = \alpha A_1 u_n(x) + \beta A_2 u_n(x) \quad \text{avec } u_n(x) \in E, \quad n \in \mathbb{N}$$

A_1 et A_2 étant compacts, on peut extraire de $\{A_1 u_n\}$ et de $\{A_2 u_n\}$ deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de $\{Au_n\}$, donc A est compact. ■

Théorème 1.6.4 Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Preuve. Soit $\{u_n\}$ une suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $Bu_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous de $A(Bu_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $Bu_n(x)$ une sous suite convergente $Bu_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(Bu_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. ■

Théorème 1.6.5 soit A un opérateur borné de E dans F , à image $A(E)$ de dimension finie alors A est compact.

Preuve. [12] ■

Théorème 1.6.6 L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Preuve. [12] ■

Théorème 1.6.7 Un opérateur compact est un opérateur borné.

Preuve. [12]

Remarque 1.6.2 La réciproque de théorème précédent est fausse car l'opérateur identique I de E dans E est borné mais n'est pas compact.

■

1.6.3 Opérateur Intégral

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement.

Les opérateurs intégraux interviennent dans plusieurs domaines tels que les équations aux dérivées partielles, les phénomènes de diffusion et *les équations intégrales*.

Définition 1.6.5 (Opérateur intégral) On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme :

$$A\varphi(x) = \int_{G_2} K(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in G_1,$$

où $K(x, y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$ et $\varphi(y)$ est une fonction mesurable définie sur G_2 .

Définition 1.6.6 (Noyau d'un opérateur) La fonction mesurable $k(x, y)$ est dite noyau de l'opérateur intégral.

1.6.4 Opérateurs Adjointes

Opérateurs linéaires Adjointes dans les espaces normés

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F alors, pour tout $\varphi \in E$ et $\psi \in F$, on définit les fonctionnelles linéaires bornées $U \in F^* = \mathcal{L}(F, \mathbb{k})$ et $V \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ avec $\mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ comme suit :

$$\begin{aligned} U &: F \rightarrow \mathbb{k} \\ \psi &\rightarrow U(\psi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V &: E \rightarrow \mathbb{k} \\ \varphi &\rightarrow V(\varphi) \end{aligned}$$

L'opérateur noté A^* défini sur F^* dans E^* est dit opérateur adjoint de A si l'on a, pour tout $U \in F^*$ et $V \in E^*$

$$\begin{aligned} A^* &: F^* \rightarrow E^* \\ U &\rightarrow A(U) = U(A(\varphi)) = V(\varphi) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} A^* = U \circ A &: E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{U} k \\ \varphi &\rightarrow A(\varphi) \rightarrow U(A(\varphi)). \end{aligned}$$

1.6.5 Opérateurs Positifs

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit que A est un opérateur positif et que l'on note $A \geq 0$; si pour tout $\varphi \in H$ on a:

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0$$

Proposition 1.6.2 -Soient A_1 et A_2 deux opérateurs linéaires positifs définis sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, toute combinaison linéaire $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ à coefficients réels positifs $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ est un opérateur positif.

Comparaison des opérateurs

Soient A et B deux opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert

Proposition 1.6.3 On dit que $A \geq B$ si la différence $A - B$ est un opérateur positif. Autrement dit, pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\langle (A - B)\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

Chapitre 2

Polynôme de Chebyshev et Equations intégrales

2.1 Polynôme de Chebyshev

2.1.1 Les polynômes

Les polynômes constitues une famille des fonction tout à fait remarquable en mathématique, ils sont aussi un outil essentiel du calcul dans l'analyse numérique, notamment dans l'évaluation au l'approximation des fonctions, dans les problème d'interpolation et d'extrapolation, dans la résolution des équation intégrales ou équations différentielles,...etc.

Définition 2.1.1 (*Orthogonalité*)

On dit que deux vecteurs x et y d'un espace euclidien E sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

Propriétés

-Si un vecteur x de E est orthogonal à chaque vecteur d'un ensemble F , on dit que x est orthogonal à l'ensemble F , et on écrit

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in F.$$

-Si les vecteurs de deux ensembles E et F sont orthogonaux deux à deux, on dit que ces ensemble orthogonaux, et on écrit

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in E, \forall y \in F.$$

Définition 2.1.2 Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dans $L^2[a, b]$ sont dites orthogonales sur l'intervalle $[a, b]$ par rapport à une donnée continue et fonction positive de poids $W(x)$ si

$$\int_a^b W(x)f(x)g(x)dx = 0.$$

Si pour plus de commodité, nous utilisons la notation «produit intérieur»

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b W(x)f(x)g(x)dx.$$

Où W, f et g sont des fonctions de x sur $[a, b]$, alors la condition de l'orthogonalité est équivalent à dire que f est orthogonal à g si

$$\langle f, g \rangle = 0,$$

la définition formelle d'un produit interne (dans le cadre des fonctions réelles d'un variable réelle).

2.1.2 Polynôme de Chebyshev de première espèce

Le polynôme de Chebyshev $T_n(x)$ de premier type est un polynôme en x de degré n , la relation de définition de cette polynômes est donne par l'expression suivante:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (2.1.1)$$

Si la variable x est dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Ce qui implique que :

$$T_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad T_1(x) = x. \quad (2.1.2)$$

Ils obéissent à une relation de récurrence que nous allons établir. Pour cela, il suffit de poser

$\theta = \arccos x$, on obtient :

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad (2.1.3)$$

Ecrivons $T_{n+1}(x)$ et $T_{n-1}(x)$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \\ T_{n-1}(x) &= \cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta \end{aligned}$$

De et on a :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2 \cos \theta \cos n\theta = 2T_1(x)T_n(x) = 2xT_n(x)$$

alors on a :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.1.4)$$

On génère de manière récursive tous les polynômes $[T_n(x)]$ de manière très efficace il est facile de déduire à partir de (2.1.2) et (2.1.3).

Par exemple :

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Propriété de polynôme de Chebyshev T_n

Changement le polynôme de Chebyshev T_n par T_n^* Depuis l'intervalle $[0, 1]$ est souvent plus facile à utiliser l'intervalle $[-1, 1]$, nous traçons parfois la variable indépendante x dans $[0, 1]$ pour variable s dans $[-1, 1]$ par la transformation :

$$s = 2x - 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}(s + 1).$$

Ce qui conduit à un changement le polynôme de Chebyshev (de premier espèce) $T_n^*(x)$ de degré n en x sur $[0, 1]$ proposée par :

$$T_n^*(x) = T_n(s) = T_n(2x - 1). \quad (2.1.6)$$

Ainsi, nous avons les polynômes

$$T_0^*(x) = 1, T_1^*(x) = (2x - 1), T_2^*(x) = 2(2x - 1)^2 - 1 = 8x^2 - 8x + 1. \quad (2.1.7)$$

de (2.1.2) et (2.1.4), nous pouvons déduire la relation de récurrence T_n^* de la forme

$$T_n^*(x) = 2(2x - 1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x)$$

avec des conditions initiales

$$T_0^*(x) = 1, T_1^*(x) = 2x - 1.$$

Le polynôme $T_n^*(x)$ possèdent une autre propriété particulière, qui est dérivées de 2.1.2 et 2.1.3 plus (2.1.6) ce forme :

$$T_{2n}(x) = \cos(2n\theta) = \cos n(2\theta) = T_n(\cos 2\theta) = T_n(2 \cos^2(\theta) - 1) = T_n(2x^2 - 1) = T_n^*(x^2),$$

c'est -à dire que

$$T_{2n}(x) = T_n^*(x^2),$$

cette propriété peut être facilement confirmé au cours des polynômes premiers en comparant les formules (2.1.5) et (2.1.7).

Polynôme de Chebyshev sur $[a, b]$ Nous pouvons définir les polynômes de Chebyshev a priori sur tout intervalle fini $[a, b]$, de x en faisant le changement de variable suivant :

$$s = \frac{2x - (a + b)}{b - a}$$

Les polynômes de Chebyshev sur $[a, b]$ sont donc $T_n(s)$.

Exemple 2.1.1 les polynômes de Chebyshev de premier type de degré inférieur ou égale deux a priori à l'intervalle $[1, 4]$ de x sont :

$$\begin{aligned} T_0(s) &= T_0\left(\frac{2x-5}{3}\right) = 1 \\ T_1(s) &= T_1\left(\frac{2x-5}{3}\right) = \frac{2x-5}{3} \\ T_2(s) &= T_2\left(\frac{2x-5}{3}\right) = 2\left(\frac{2x-5}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9}x^2 - \frac{40}{9}x + \frac{41}{9} \end{aligned}$$

Orthogonalité de premier polynôme de ChebyShev

À présent nous allons montrer que ces polynômes sont orthogonaux. En partant de la relation :

$$\langle T_i(x), T_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi (\cos i\theta \cos j\theta) d\theta$$

Effectuons le changement de variable $x = \cos \theta$

$$dx = -\sin \theta d\theta = -\sqrt{\sin^2 \theta} d\theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} d\theta = -\sqrt{1 - x^2} d\theta, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Maintenant, pour $i \neq j$

$$\int_0^\pi (\cos i\theta \cos j\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(i+j)\theta + \cos(i-j)\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(i+j)\theta}{i+j} + \frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} \right]_0^\pi = 0$$

d'où

$$\langle T_i(x), T_j(x) \rangle = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.1.8)$$

et $(T_i(x), i = 0, 1, \dots)$ forme un système de polynômes orthogonaux sur $[-1, 1]$ par rapport au poids de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, la norme de T_i est donnée par :

$$\begin{aligned} \|T_i\|^2 &= \langle T_i(x), T_i(x) \rangle = \int_0^\pi (\cos^2 i\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2i\theta) d\theta \quad (2.1.9) \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2i\theta}{2i} \right]_0^\pi \quad (i \neq 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

pour $i = 0$

$$\|T_0\|^2 = \langle T_0(x), T_0(x) \rangle = \int_0^\pi 1^2 d\theta = \pi, \quad (2.1.10)$$

le système (T_i) n'est donc pas orthonormé, nous pourrions, si nous le voulions, échelle les polynômes orthonormé $\sqrt{\frac{1}{\pi}}T_0(x), (\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_i(x), i = 1, 2, \dots)$, mais Les coefficients irrationnels résultant font généralement cet inconvénient, il est simple dans la pratique à adopter le (T_i) nous avants initialement, prenant note de la valeurs de leurs normes (2.1.9) plus (2.1.10).

2.1.3 Polynôme de Chebyshev de deuxième espèce

Soit n un entier naturel et x un réel, On définit le polynôme, Noté U_n par:

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \text{ avec } x = \cos \theta \quad (2.1.11)$$

Et soit les Minutes suivantes :

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta, \sin 3\theta = \sin \theta(4 \cos^2 \theta - 1), \sin 4\theta = \sin \theta(\cos^3 \theta - 4 \cos \theta), \\ \sin 5\theta &= \sin \theta(16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1) \end{aligned}$$

D'après l'équation (2, 1, 11) donne :

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1 \end{aligned}$$

la formule général de polynôme Chepyshev de deuxième espèce :

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} \quad (2.1.12)$$

avec la relation récurrente

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.1.13)$$

avec condition initiale $U_0(x) = 1$ et $U_1(x) = 2x$

Propriété de polynôme de Chebyshev

Changement le polynôme de Chebyshev U_n par U_n^* De puis l'intervalle $[0, 1]$ est souvent plus facile à utiliser que l'intervalle $[-1, 1]$. On définit la variable indépendant x dans $[0, 1]$, pour la variables s dans $[-1, 1]$ par transformation suivante :

$$s = 2x - 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}(s + 1)$$

alors

$$U_n^*(x) = U_n(2x - 1),$$

On définit la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$U_{2n-1}(x) = 2xU_n^*(x), n = 1, 2, \dots \quad (2.1.14)$$

Polynôme de Chebyshev sur $[a, b]$ De même nous pouvons définir les polynômes de Chebyshev deuxième espèce a priori sur tout intervalle fini $[a, b]$, de x en faisant le changement de variable suivant :

$$s = \frac{2x - (a + b)}{b - a}$$

Les polynômes de Chebyshev sur $[a, b]$ sont donc $U_n(s)$.

Exemple 2.1.2 *Le deuxième type de polynôme de Chebyshev à des propriétés à l'intervalle* $[1, 4]$

$$s = \frac{2x - 5}{3} \text{ et } U_2(x) = 4x^2 - 1$$

Donc:

$$U_2\left(\frac{2x - 5}{5}\right) = \frac{16x^2 - 80x + 99}{9}$$

Orthogonalité de deuxième polynôme de Chebyshev

Définie le produit scalaire si on utilise l'intervalle $[-1, 1]$, et fonction $W(x) = \sqrt{(1-x^2)}$

$$\begin{aligned} \langle U_i, U_j \rangle &= \int_{-1}^1 \sqrt{(1-x^2)} U_i(x) U_j(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} U_i(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} U_j(x) dx \\ &= \int_0^\pi \sin(i+1)\theta \sin(j+1)\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(i-j)\theta - \cos(i+j+2)\theta] d\theta \end{aligned}$$

si $i \neq j$

$$\langle U_i, U_j \rangle = 0$$

si $i = j$

$$\langle U_i, U_j \rangle = \langle U_i, U_i \rangle = \|U_i\|^2 = \int_0^\pi \sin^2(i+1)\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

ainsi

$$\langle U_i, U_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{\pi}{2} & i = j \end{cases} \quad (2.1.15)$$

2.1.4 Polynôme de Chebyshev de troisième espèce

Le polynôme de Chebyshev $V_n(x)$ de troisième type est le polynôme de degré n en x , défini par la relation

$$V_n(x) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} \quad \text{lorsque } x = \cos \theta \quad (2.1.16)$$

Pour justifier cette définition, nous observons d'abord que $\cos(n + \frac{1}{2})\theta$ est un polynôme de degré impair $2n + 1$ dans $\cos \frac{1}{2}\theta$, donc le côté droit de 2.1.16 est un polynôme de même degré $2n$ dans $\cos \frac{1}{2}\theta$, qui est l'équivalent d'un polynôme de degré n dans $\cos^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ et d'où à un polynôme de degré n dans $\cos \theta$.

Ainsi $V_n(x)$, effet un polynôme de degré n en x , par exemple :

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \frac{\cos(1 + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = \frac{4 \cos^3(\frac{1}{2}\theta) - 3 \cos \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} \\ &= 4 \cos^2(\frac{1}{2}\theta) - 3 = 4 \left(\frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \right) - 3 = -1 + 2 \cos \theta = 2x - 1. \end{aligned}$$

Nous pouvons facilement montrer que

$$V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x - 1, V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1, \dots$$

De manière générale, l'une et l'autre suite sont définies par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x).$$

Pour tout réel θ et tout entier naturel n , on a

$$\frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} + \frac{\cos(n + 2 + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = 2 \cos \theta \frac{\cos(n + 1 + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta}$$

Ce qui fournit encore

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, V_n(\cos \theta) + V_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta V_{n+1}(\cos \theta).$$

Enfin

$$\forall x \in [-1, 1], V_n(x) + V_{n+2}(x) = 2xV_{n+1}(x).$$

Ainsi, les polynôme $V_n(x) + V_{n+2}(x)$ et $2xV_{n+1}(x)$ coïncident avec en une infinité de valeurs sont donc égaux

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+2} = 2xV_{n+1} - V_n. \quad (2.1.17)$$

Remarque 2.1.1 *Le polynôme de Chebyshev $V_n(x)$ de troisième type il existe et unique.*

Propriété de polynôme de Chebyshev

Changement le polynôme de Chebyshev V_n par V_n^* Depuis l'intervalle $[0, 1]$ est souvent plus facile à utiliser l'intervalle $[-1, 1]$, nous traçons parfois la variable indépendante x dans $[0, 1]$ pour variable s dans $[-1, 1]$ par la transformation :

$$s = 2x - 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}(s + 1).$$

Ce qui conduit à un changement le polynôme de Chebyshev (du troisième type) $V_n^*(x)$ de degré n en x sur $[0, 1]$ donnée par :

$$V_n^*(x) = V_n(s) = V_n(2x - 1). \quad (2.1.18)$$

Ainsi, nous avons les polynômes

$$V_0^*(x) = 1, V_1^*(x) = (4x - 3), V_2^*(x) = 16x^2 - 20x + 5 \dots$$

Polynôme de Chebyshev sur $[a, b]$ De même nous pouvons définir les polynômes de Chebyshev troisième espèce a priori sur tout intervalle fini $[a, b]$, de x en faisant le changement de variable suivant :

$$s = \frac{2x - (a + b)}{b - a}$$

Les polynômes de Chebyshev sur $[a, b]$ sont donc $V_n(s)$.

Exemple 2.1.3 Les polynômes de Chebyshev de troisième type de degré inférieur ou égale deux a priori à l'intervalle $[1, 4]$ de x sont :

$$\begin{aligned} V_0(s) &= V_0\left(\frac{2x-5}{3}\right) = 1 \\ V_1(s) &= V_1\left(\frac{2x-5}{3}\right) = 2\left(\frac{2x-5}{3}\right) - 1 = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3} \\ V_2(s) &= V_2\left(\frac{2x-5}{3}\right) = 4\left(\frac{2x-5}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{2x-5}{3}\right) - 1 = \frac{16}{9}x^2 - \frac{92}{9}x + \frac{121}{9} \end{aligned}$$

Orthogonalité de troisième polynôme de ChebyShev

En utilisant la fonction de poids $W(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ et l'intervalle $[a, b] = [-1, 1]$.

Nous constatons que le polynôme de ChebyShev de troisième espèce satisfait

$$\begin{aligned}
 \langle V_i, V_j \rangle &= \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} V_i(x)V_j(x)dx \\
 &= \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} V_i(x)V_j(x)dx \\
 &= \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} V_i(x)V_j(x)dx \\
 &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} V_i(x)(1+x)^{\frac{1}{2}} V_j(x)dx \\
 &= 2 \int_0^\pi \cos(i + \frac{1}{2})\theta \cos(j + \frac{1}{2})\theta d\theta
 \end{aligned}$$

Car : $(x = \cos \theta, dx = -\sin \theta d\theta = -\sqrt{1-\cos^2 \theta} d\theta = -\sqrt{1-x^2} d\theta, \cos \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos \theta)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+(1-x^2)^{\frac{1}{2}})$
 donc $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cos \frac{1}{2}\theta$ et $(1+x)^{\frac{1}{2}} V_i(x) = \sqrt{2} \cos(i + \frac{1}{2})\theta$.

$$\langle V_i, V_j \rangle = \int_0^\pi \cos(i + j + \frac{1}{2})\theta \cos(i - j)\theta d\theta$$

Alors

$$\int_{-1}^1 W(x)V_i(x)V_j(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \pi & \text{si } i = j \end{cases} \tag{2.1.19}$$

2.2 Equation intégrale

2.2.1 Type d'équations intégrales

On appelle équation intégrale une équation qui contient la fonction inconnue sous le signe d'intégration. Telle est, par exemple; l'équation

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt + f(s) \tag{2.2.1}$$

où f et K sont des fonctions continues et φ est la fonction inconnue.

Les variables s et t parcourent ici un segment donné $[a, b]$.

La particularité caractéristique de l'équation (2.2.1) réside dans sa linéarité: elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue φ .

De nombreux problèmes conduisent à des équations intégrales non linéaires, par exemple, à des équations de la forme

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)g(\varphi(t), t)dt$$

où K et g sont des fonctions données. Cependant, nous bornerons dans toute la suite aux équations intégrales linéaires.

Certaines équations intégrales ont été considérées déjà au début du siècle passé. Ainsi, par exemple, l'équation

$$f(s) = \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha} dt \quad (0 < \alpha < 1, f(0) = 0)$$

A été considérée en 1823 par Abel et porte son nom. Dans cette équation f est une fonction donnée et φ est la fonction inconnue. Abel a montré que la solution de cette équation est

$$\varphi(s) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Cependant, la théorie générale des équations intégrales linéaires n'a été construite qu'à la limite des XIX^e et XX^e siècles, principalement grâce aux travaux de Volterra, Fredholm et Hilbert.

L'équation (2.2.1) s'appelle équation de Fredholm de deuxième espèce. L'équation

$$\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt = f(s) \tag{2.2.2}$$

(Contenant la fonction inconnue φ seulement sous le signe d'intégration) s'appelle équation de Fredholm de première espèce.

L'équation d'Abel, mentionnée plus haut, fait partie des équations dites de Volterra, la forme générale de ces équations est

$$\int_a^s K(s, t)\varphi(t)dt = f(s) \tag{2.2.3}$$

(Équation de Volterra de première espèce) ou

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s, t)\varphi(t)dt + f(s) \tag{2.2.4}$$

(Équation de Volterra de deuxième espèce).

Il est clair que l'équation de Volterra peut être considérée comme une équation de Fredholm où la fonction K vérifie la condition

$$K(s, t) = 0 \text{ pour } t > s$$

Mais il est plus raisonnable de ranger les équations du type de Volterra en une classe spéciale, car elles possèdent des propriétés qui n'ont pas lieu pour des équations de Fredholm arbitraires.

Si dans les équations (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) ou (2.2.4) la fonction f est nulle, on dit qu'une telle équation est homogène. Dans le cas contraire l'équation est dite non homogène.

2.2.2 L'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale de type Fredholm

La théorie de point fixe

Théorème 2.2.1 *Soit l'équation suivante*

$$\varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt = f(s) \tag{2.2.1}$$

admet une solution unique $\varphi \in L^2([a, b])$, avec le noyau k est continu sur l'intervalle $[a, b]$, $f \in L^2([a, b])$ et $k < 1$, avec $k = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(s, t)|^2 ds dt}$.

Preuve. [5] On considère l'équation

$$(T\varphi)(s) = g(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \tag{2.2.5}$$

Puisque $f \in L^2([a, b])$, $T\varphi \in L^2([a, b])$. Si

$$\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \in L_2([a, b])$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, donc

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \right| &\leq \int_a^b |K(s, t) \varphi(t)| dt \\ &\leq \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 \varphi(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donc

$$\left| \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \right|^2 \leq \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 \varphi(t) dt \right) \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right)$$

alors

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \right|^2 ds &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 \varphi(t) dt \right) \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) ds \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 \varphi(t) dt \right) ds \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \right) ds \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) \end{aligned}$$

puisque

$$\int_a^b \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \right) ds < \infty \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) < \infty$$

alors l'équation 2.2.5 est satisfaisante et T de $L^2([a, b])$ dans lui-même.

Notons que la démonstration ci-dessous est également que l'opérateur défini par

$$(T\varphi)(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

est borné, donc par le théorème 2.2.1 l'équation $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique, pour $k < 1$. ■

2.3 Méthode spectrale

La méthode est de chercher la solution approchée d'une équation intégral dans un espace fonctionnels de dimension finie, et l'idée de cette méthode est de chercher une solution approchée sous forme d'un développement, on peut écrire la solution approchée sous forme

$\varphi^*(x) = \sum_{i=0}^n a_i \text{chebyshev}_i(x)$ sont le plus souvent utilisées comme aide l'études des phénomènes physique.

Chapitre 3

Approximation numérique des équations intégrales de Fredholm en utilisant les polynômes de Chepyshev

3.1 Intégration numérique

L'intégration est un des problèmes les plus importants que l'on rencontre en analyse. En effet, on rencontre souvent des intégrales dont le calcul par des méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible, car il n'existe pas d'expression analytique de la primitive de fonction à intégrer. Voici quelques exemples:

$$\int_a^b \cos(x^2)dx, \int_a^b \exp(x^2)dx$$

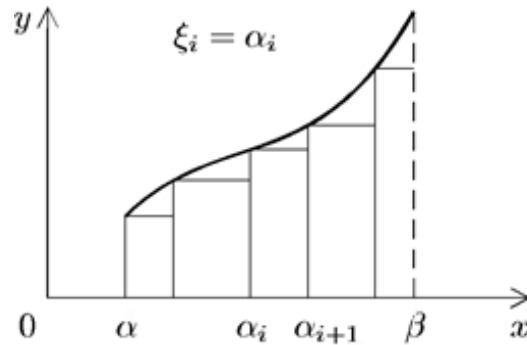
Dans ces cas, on peut appliquer des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale donnée.

3.1.1 La méthode des rectangles

Les rectangles à gauche :

Soit donc $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On choisit comme fonction g la fonction constante égale à $f(a)$ et l'erreur est donc :

$$E = \int_a^b (f(t) - f(a))dt = \int_a^b f(t)dt - (b-a)f(a).$$

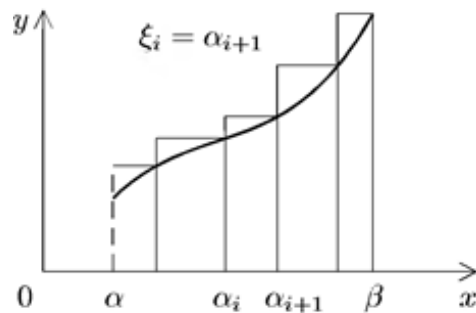


Les rectangles à gauche

Les rectangles à droite :

Soit donc $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On choisit cette fois comme fonction g la fonction constante égale à $f(b)$ et l'erreur est donc :

$$E = \int_a^b (f(t) - f(b))dt = \int_a^b f(t)dt - (b-a)f(b).$$



Les rectangles à droite

La méthode des rectangles à gauche (resp à droite) consiste donc à approximer $I = \int_a^b \cos(x^2)dx$ par :

$$r_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

(resp par :

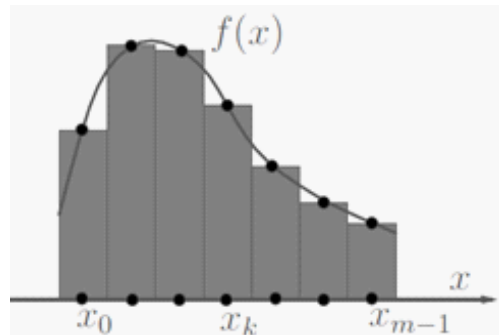
$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Proposition 3.1.1 : (Cas des fonction) Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 Alors :

$$|I - r_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot m_1 \quad \text{et} \quad |I - R_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot m_1.$$

Méthode du point médian :

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, on l'approxime par la fonction constante égale à $f(c)$ où $c = \frac{a+b}{2}$ est le milieu de (a, b) .



Les rectangles à point médians

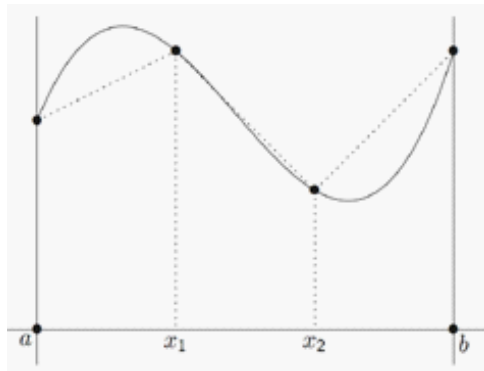
Avec les notations précédentes, en supposant f de classe C^2 , soit $m_2 = \sup |f^{(2)}(t)|$ on a la majoration suivante :

$$\int_a^b (f(t) - f(c)) dt \leq \frac{(b-a)^3}{24} \cdot m_2$$

De plus, si f est un polynôme de degré ≤ 2 , cette inégalité est une égalité.

3.1.2 Méthode de trapèze composée

On divise l'intervalle $[a, b]$ en sous intervalle égaux $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ puis on applique la méthode de trapèze simple sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}] = [a + ih, a + (i+1)h]$



Méthode de Trapèze généralisée

On trouve :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x) dx \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(a+ih) + f(a+(i+1)h)] \\
 &= \frac{h}{2} [f(a) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) + f(b)] \\
 &= \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]
 \end{aligned}$$

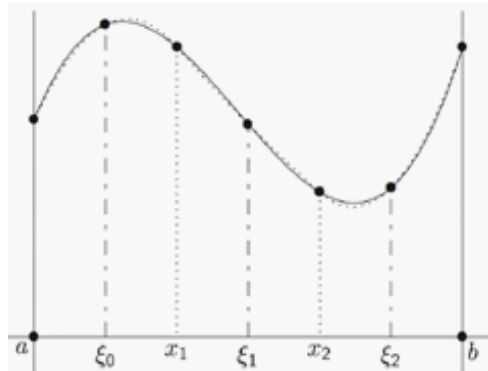
L'erreur de cette méthode :

$$|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \quad M_2 = \max_{[a,b]} |f^{(2)}(\zeta)|$$

3.1.3 Méthode de Simpson généralisée

Soit la subdivision $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tel que n pair ($n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$)

$$h = \frac{b-a}{m} \quad m = \frac{n}{2}$$



Méthode de Simpson généralisée

Dans ce cas on peut appliquer la méthode de Simpson simple sur sous intervalles suivante:

$[a, a + 2h], [a + 2h, a + 4h], [a + 4h, a + 6h], \dots$

On trouve :

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(a) + f(a + 2h) + 4f(a + h)].$$

$$\int_{a+2h}^{a+4h} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(a + 2h) + f(a + 4h) + 4f(a + 3h)].$$

.

.

$$\int_{a+(n-2)h}^{a+nh} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(a + (n - 2)h) + f(a + nh) + 4f(a + (n - 1)h)]$$

alors

$$\int_a^{a+nh} f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(a + nh) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(a + 2ih) + 4 \sum_{i=1}^m f(a + 2(i - 1)h) \right]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + 4 \sum_{i=1}^m f_{2(i-1)} \right]$$

L'erreur de cette méthode :

$$|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)5}{2880} M_4 \qquad M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(\zeta)|$$

3.2 Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

En va utilisé le polynôme de Chebyshev de première espèce pour résoudre les équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce.

3.2.1 Équation intégrales de Fredholm de deuxième espèce

Soit l'équation intégrales de Fredholm de deuxième espèce:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad (3.2.1)$$

$f(x)$ est une fonction continue dans $[a, b]$, $K(x, t)$ une fonction continue pour $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$.

On approxime la solution $\varphi(x)$ par $\varphi^*(x)$ telle que

$$\varphi^*(x) = \sum_{i=0}^n a_i T_i(x),$$

nous estimons la fonction inconnue $\varphi(x)$ par le polynôme de Chebyshev sous la forme :

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i T_i(x), \quad (3.2.2)$$

avec $T_i(x)$ est le polynôme de Chebyshev de première espèce, a_i ($i = \overline{1, n}$) sont des inconnus de coefficient de polynôme de Chebyshev T_i .

On remplace 3.2.2 dans 3.2.1, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i T_i(x) &= f(x) + \int_a^b K(x,t) \sum_{i=0}^n a_i T_i(t) dt \\ \sum_{i=0}^n a_i T_i(x) - \int_a^b K(x,t) \sum_{i=0}^n a_i T_i(t) dt &= f(x). \\ \sum_{i=0}^n a_i \left[T_i(x) - \int_a^b K(x,t) T_i(t) dt \right] &= f(x) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

On pose $g_i(x) = \int_a^b K(x,t) T_i(t) dt$ et en remplace dans 3.2.3

$$\sum_{i=0}^n a_i [T_i(x) - g_i(x)] = f(x) \quad (3.2.4)$$

On multiplie 3.2.4 par $T_j(x)$ alors on a

$$\sum_{i=0}^n a_i [T_i(x) - g_i(x)] T_j(x) = f(x) T_j(x) \quad (3.2.5)$$

on intègre 3.2.5

$$\int_a^b \sum_{i=0}^n a_i [T_i(x) - g_i(x)] T_j(x) dx = \int_a^b f(x) T_j(x) dx \quad (3.2.6)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \int_a^b [T_i(x) - g_i(x)] T_j(x) dx = \int_a^b f(x) T_j(x) dx \quad (3.2.7)$$

Cette équation intégrale (3.2.7) peut être convertie à un système d'équations linéaires $A_{ij} X = B$ où :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \left[\int_a^b [T_i(x) - g_i(x)] T_j(x) dx \right]_{j=0}^n \quad i = 0 : n \\ X &= [a_0, a_1, \dots, a_n]^t \\ B &= \left[\int_a^b f(x) T_j(x) dx \right]_{j=0}^n \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1 Même méthode pour le $\mathcal{P}^{\text{ème}}$ et le $\mathcal{S}^{\text{ème}}$ type de polynôme de Chebyshev pour approximer les équations intégrales de de Fredholm de deuxième espèce

3.2.2 Application

L'approximation des équations intégrales linéaires de type Fredholm par les polynômes de Chebyshev sont exposées dans les exemples suivants :

Exemple 3.2.1

Soit l'équation intégrale $\varphi(x) - \int_{-1}^1 (x^4 - t^4) \varphi(t) dt = x$.

Avec la solution exacte $\varphi(x) = x$

$K(x, t) = x^4 - t^4$ et $f(x) = x$

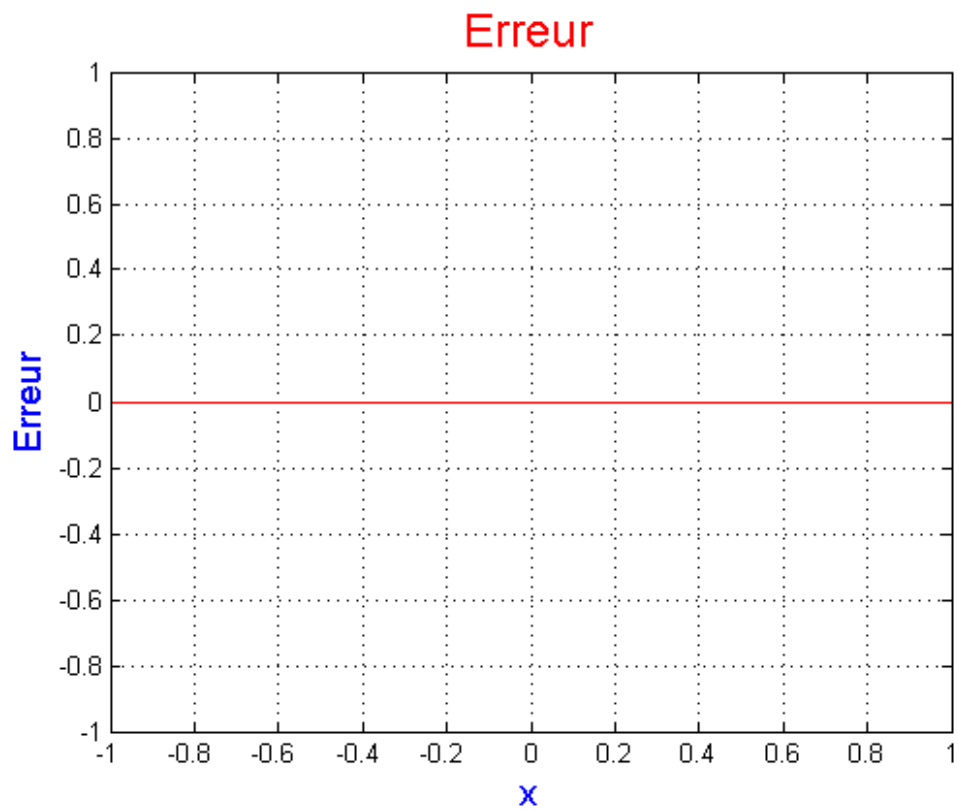
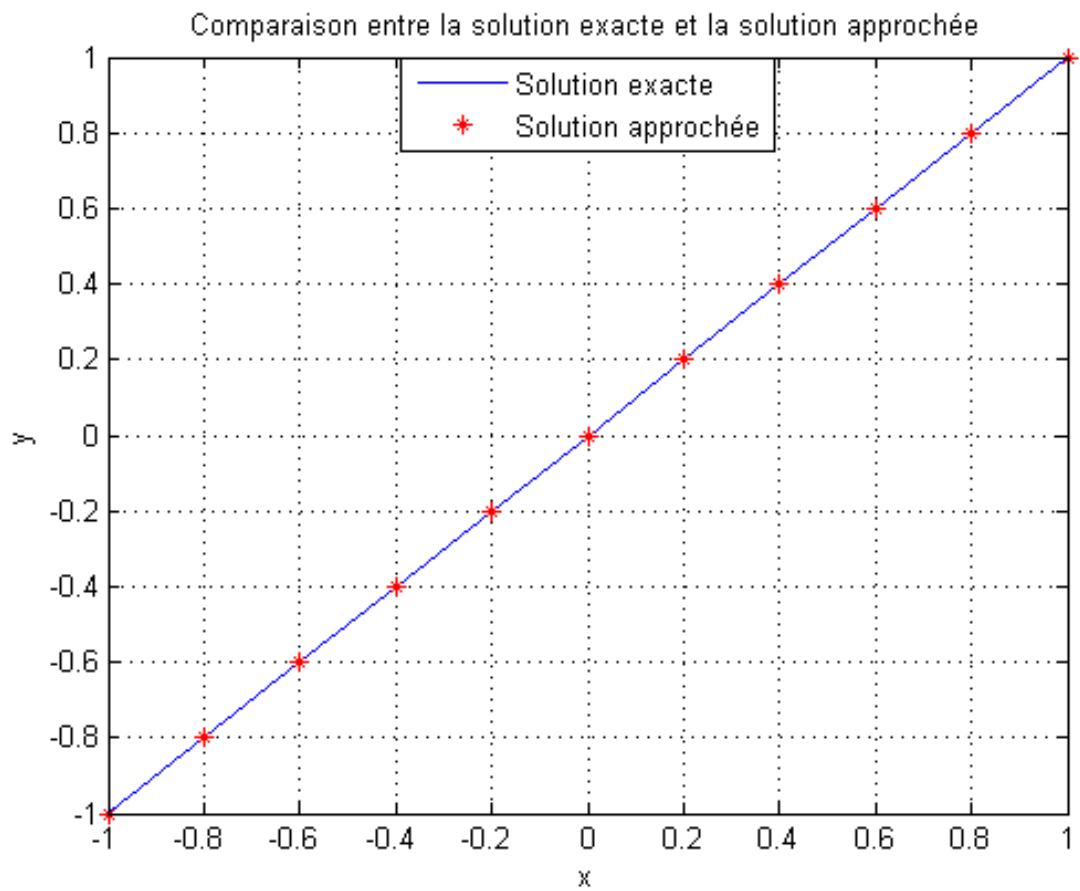
3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour le premier type de Chebyshev et pour $n = 5$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 0 \quad a_5 = 0 \quad a_6 = 0$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	-1	-1	-1	0
2	-0.8	-0.8	-0.8	0
3	-0.6	-0.6	-0.6	0
4	-0.4	-0.4	-0.4	0
5	-0.2	-0.2	-0.2	0
6	0	0	0	0
7	0.2	0.2	0.2	0
8	0.4	0.4	0.4	0
9	0.6	0.6	0.6	0
10	0.8	0.8	0.8	0
11	1	1	1	0

(TAB.1: Comparaison des résultats, erreur absolue par le premier type de Chebyshev)



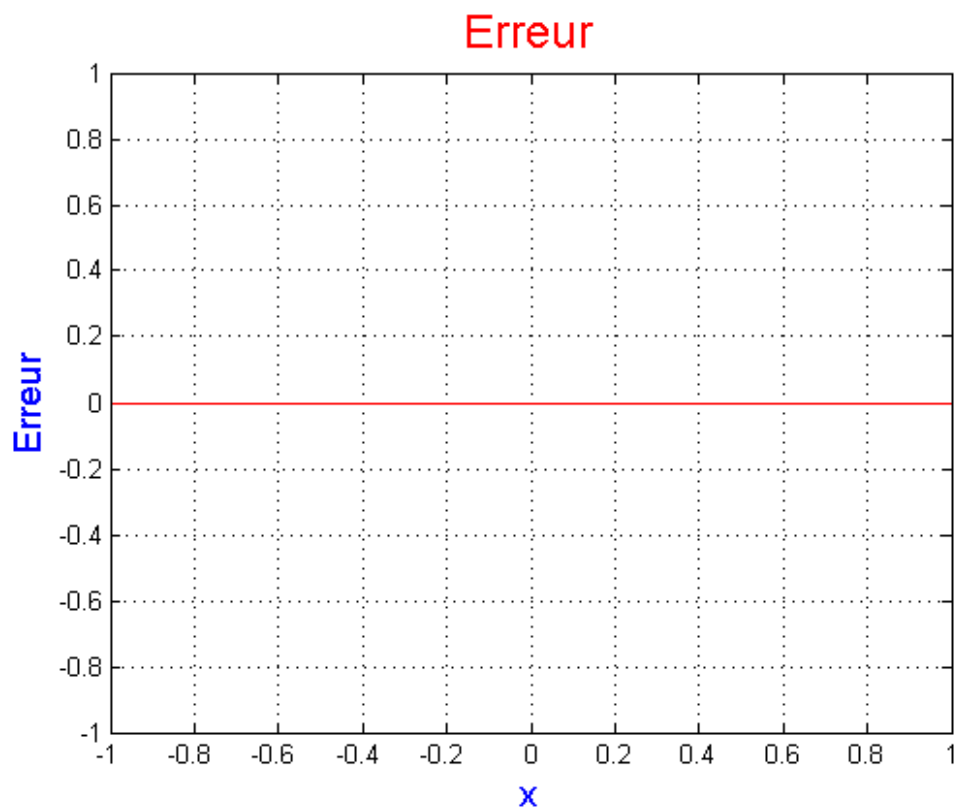
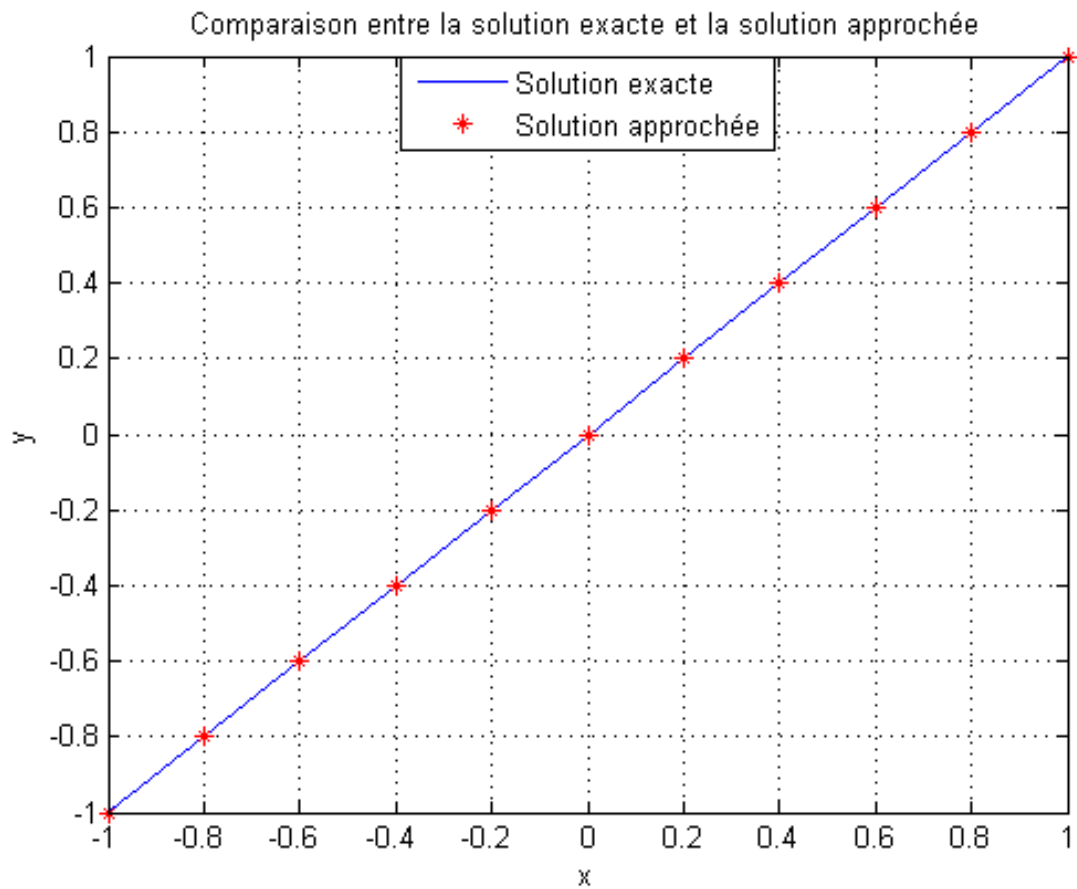
3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le deuxième type de Chebyshev et pour $n = 5$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1/2 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 0 \quad a_5 = 0 \quad a_6 = 0$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	-1	-1	-1	0
2	-0.8	-0.8	-0.8	0
3	-0.6	-0.6	-0.6	0
4	-0.4	-0.4	-0.4	0
5	-0.2	-0.2	-0.2	0
6	0	0	0	0
7	0.2	0.2	0.2	0
8	0.4	0.4	0.4	0
9	0.6	0.6	0.6	0
10	0.8	0.8	0.8	0
11	1	1	1	0

(TAB.2: Comparaison des résultats, erreur absolue par le deuxième type de Chebyshev)



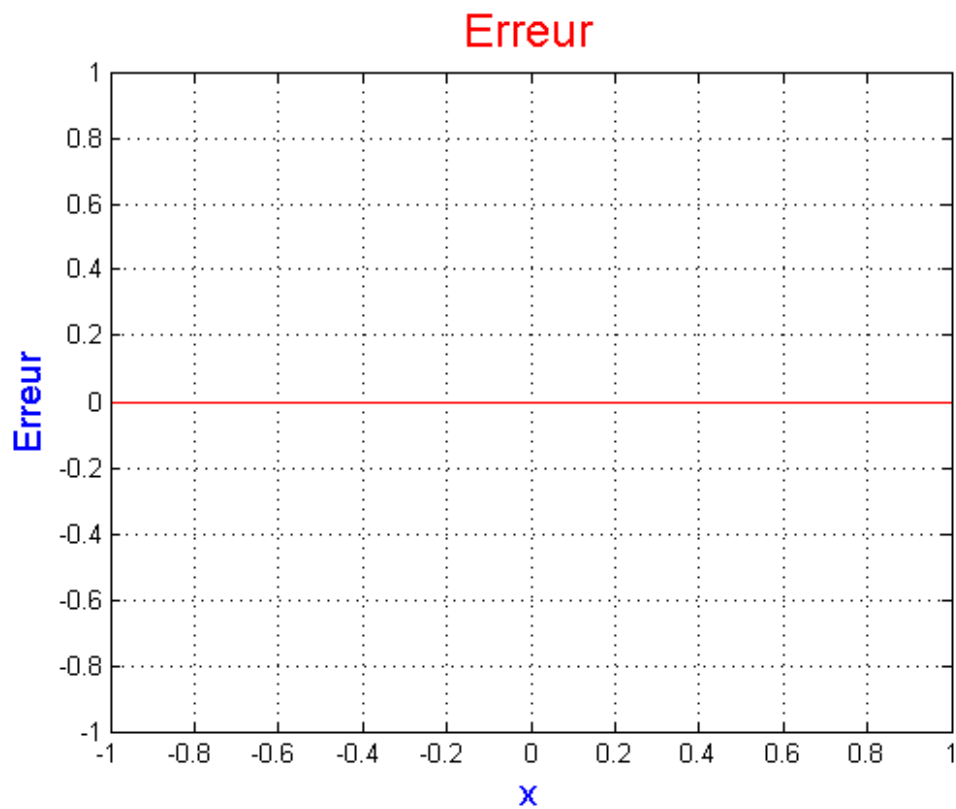
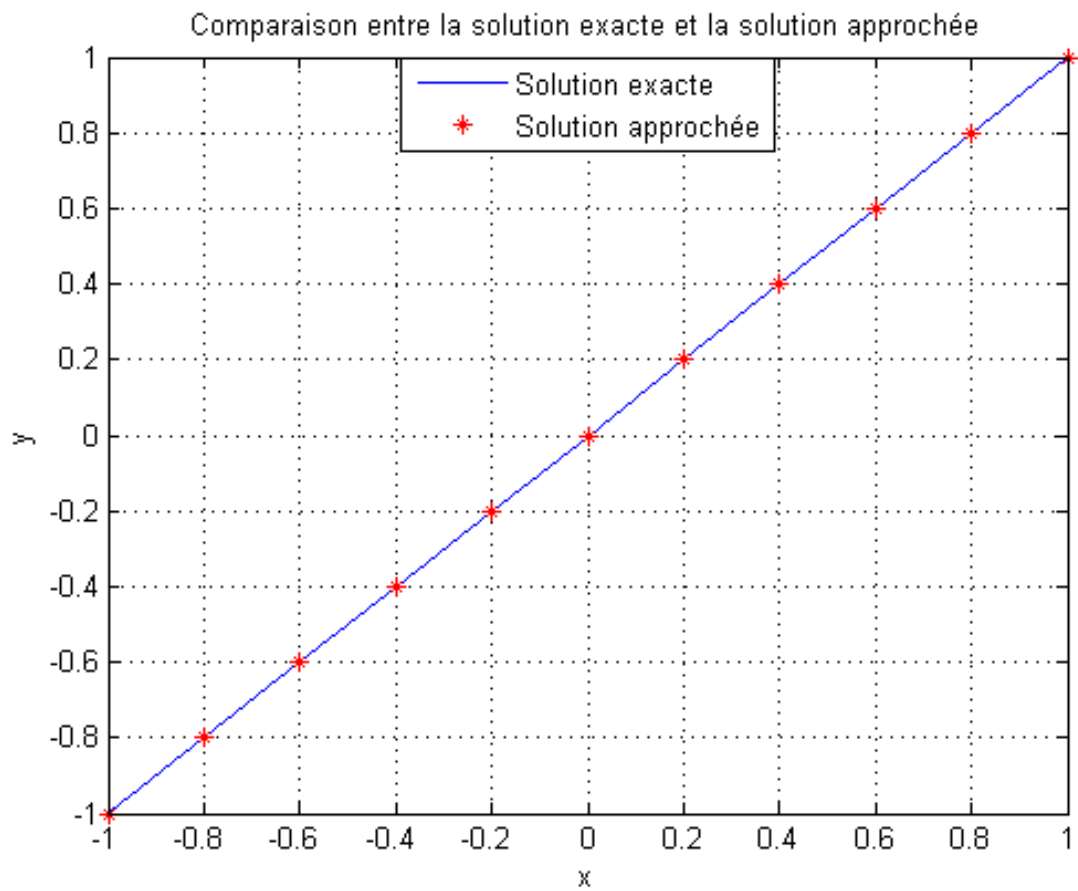
3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le troisième type de Chebyshev et pour $n = 5$

$$a_1 = 1/2 \quad a_2 = 1/2 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 0 \quad a_5 = 0 \quad a_6 = 0$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	-1	-1	-1	0
2	-0.8	-0.8	-0.8	0
3	-0.6	-0.6	-0.6	0
4	-0.4	-0.4	-0.4	0
5	-0.2	-0.2	-0.2	0
6	0	0	0	0
7	0.2	0.2	0.2	0
8	0.4	0.4	0.4	0
9	0.6	0.6	0.6	0
10	0.8	0.8	0.8	0
11	1	1	1	0

(TAB.3: Comparaison des résultats, erreur absolue par le troisième type de Chebyshev)



Exemple 3.2.2

Soit l'équation intégrale $\varphi(x) + \frac{1}{3} \int_0^1 e^{2x-\frac{5t}{3}} \varphi(t) dt = e^{2x+1/3}$.

Avec la solution exacte $\varphi(x) = e^{2x}$

$K(x, t) = e^{2x-\frac{5t}{3}}$ et $f(x) = e^{2x+1/3}$

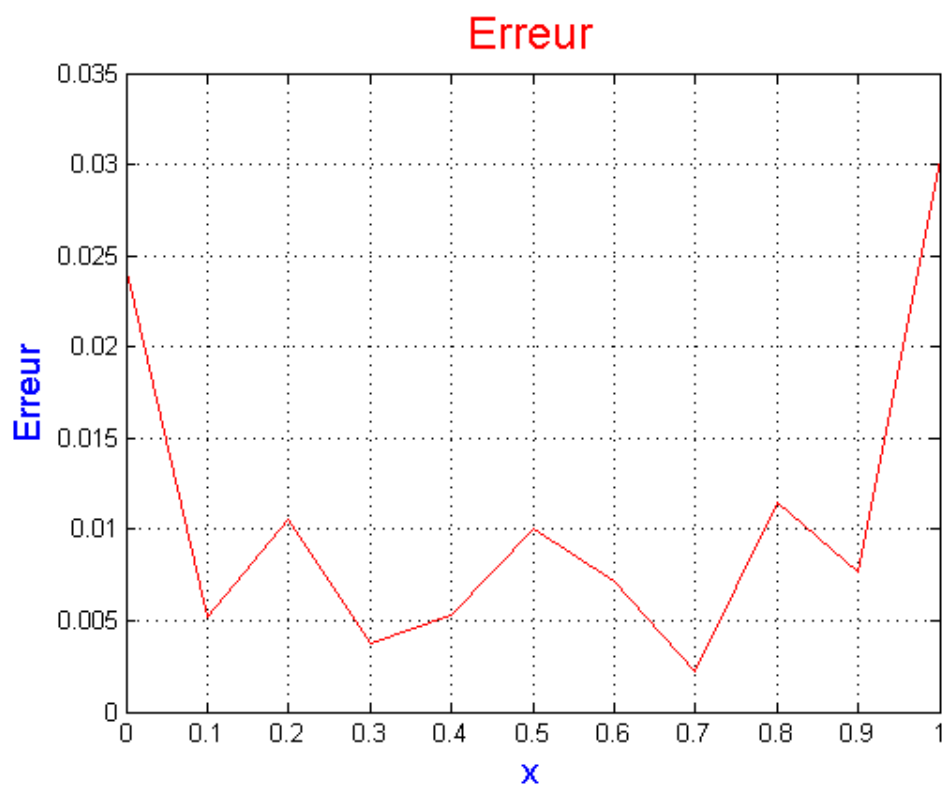
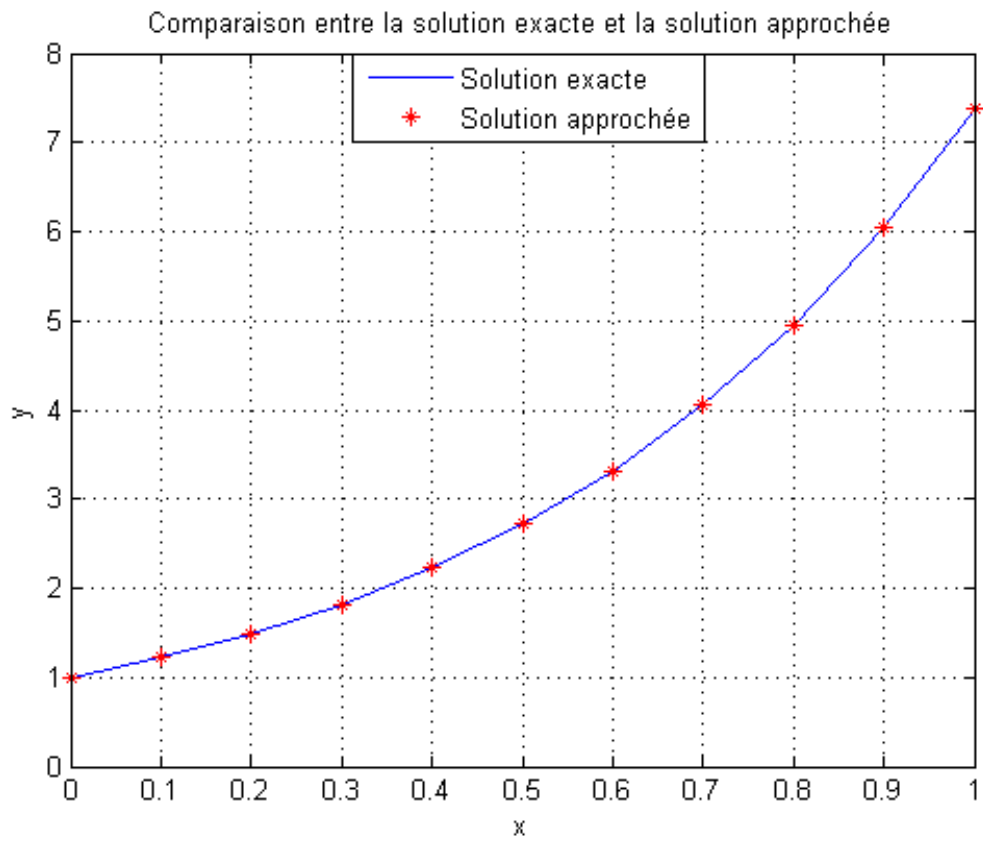
- Pour Le premier type de Chebyshev et pour $n = 3$

$$a_1 = 3.437693159747888 \quad a_2 = 3.071823861918309 \quad a_3 = 0.729481256780322$$

$$a_4 = 0.119699093731023$$

n	x	solution exacte	solution approchée	Erreur
1	0	1	0.97565146087888	0.02434853912112
2	0.1	1.22140275816017	1.22662290310505	0.00522014494488
3	0.2	1.49182469764127	1.50238244243065	0.01055774478938
4	0.3	1.82211880039051	1.82591230485203	0.00379350446152
5	0.4	2.22554092849247	2.22019471636555	0.00534621212692
6	0.5	2.71828182845905	2.70821190296757	0.01006992549148
7	0.6	3.32011692273655	3.31294609065443	0.00717083208212
8	0.7	4.05519996684467	4.05737950542250	0.00217953857783
9	0.8	4.95303242439511	4.96449437326814	0.01146194887303
10	0.9	6.04964746441295	6.05727292018770	0.00762545577475
11	1	7.38905609893065	7.35869737217753	0.03035872675312

(TAB.1: Comparaison des résultats, erreur absolue par le premier type de Chebyshev)



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

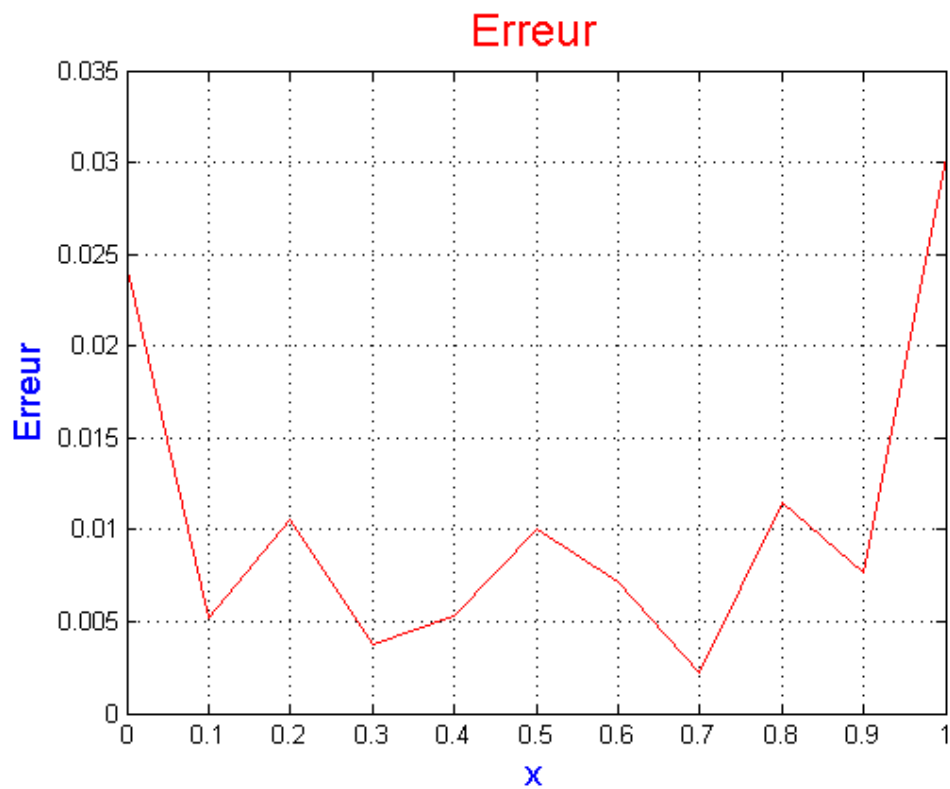
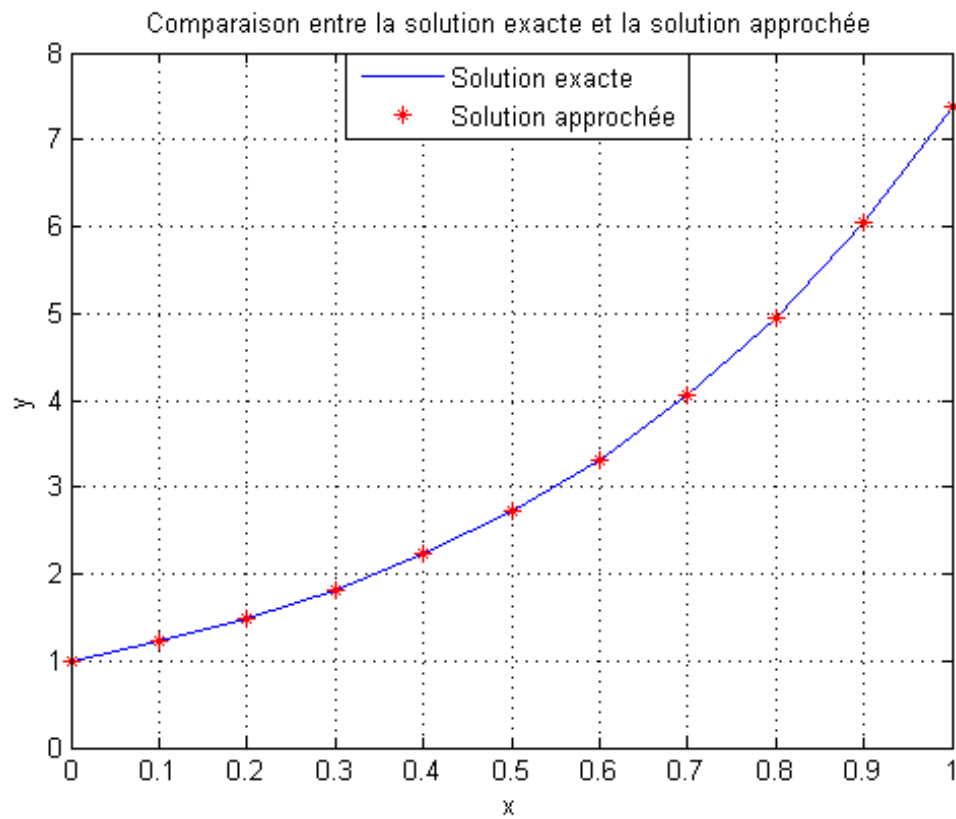
- Pour Le deuxième type de Chebyshev et pour $n = 3$

$$a_1 = 3.072952531357729 \quad a_2 = 1.476062384093642 \quad a_3 = 0.364740628390160$$

$$a_4 = 0.059849546865515$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	0	1	0.97565146087887	0.02434853912113
2	0.1	1.22140275816017	1.22662290310505	0.00522014494488
3	0.2	1.49182469764127	1.50238244243066	0.01055774478939
4	0.3	1.82211880039051	1.82591230485204	0.00379350446153
5	0.4	2.22554092849247	2.22019471636556	0.00534621212691
6	0.5	2.71828182845905	2.70821190296757	0.01006992549147
7	0.6	3.32011692273655	3.31294609065444	0.00717083208211
8	0.7	4.05519996684467	4.05737950542251	0.00217953857784
9	0.8	4.95303242439511	4.96449437326815	0.01146194887304
10	0.9	6.04964746441295	6.05727292018772	0.00762545577477
11	1	7.38905609893065	7.35869737217756	0.03035872675309

(TAB.2: Comparaison des résultats, erreur absolue par le deuxième type de Chebyshev)



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le troisième type de Chebyshev et pour $n = 3$

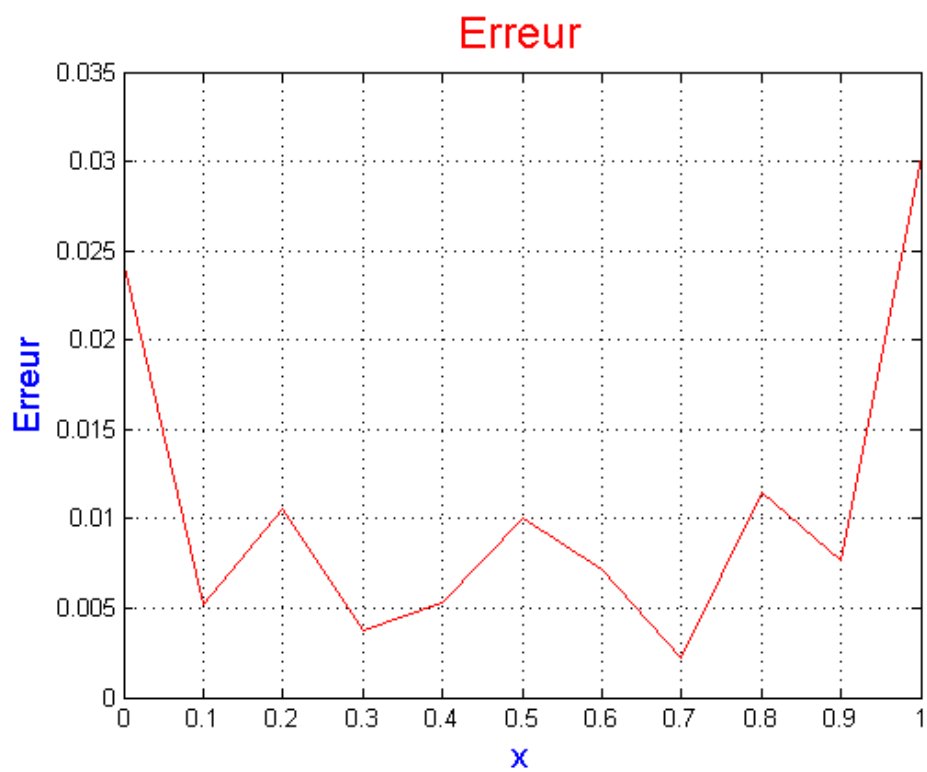
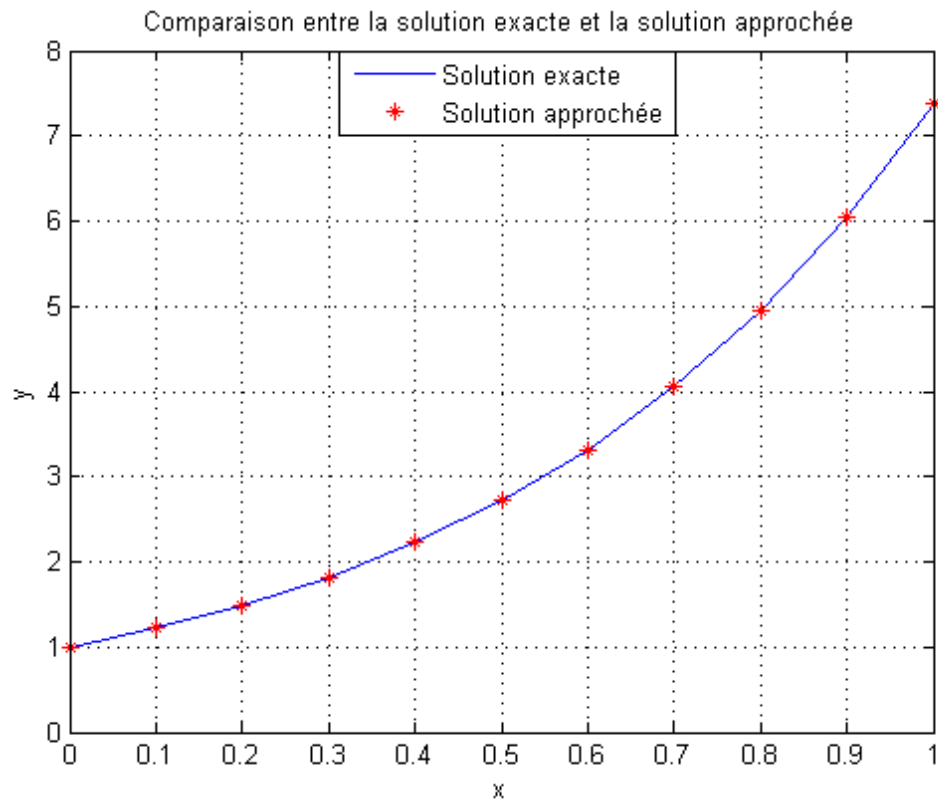
$$a_1 = 4.973605090707045 \quad a_2 = 1.900652559349320 \quad a_3 = 0.424590175255681$$

$$a_4 = 0.059849546865520$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	0	1	0.97565146087884	0.02434853912116
2	0.1	1.22140275816017	1.22662290310504	0.00522014494487
3	0.2	1.49182469764127	1.50238244243065	0.01055774478938
4	0.3	1.82211880039051	1.82203973760199	0.00379350446152
5	0.4	2.22554092849247	2.22019471636555	0.00534621212692
6	0.5	2.71828182845905	2.70821190296756	0.01006992549149
7	0.6	3.32011692273655	3.31294609065441	0.00717083208213
8	0.7	4.05519996684467	4.05737950542248	0.00217953857781
9	0.8	4.95303242439511	4.96449437326813	0.01146194887301
10	0.9	6.04964746441295	6.05727292018770	0.00762545577475
11	1	7.38905609893065	7.35869737217756	0.03035872675309

(TAB.3: Comparaison des résultats, erreur absolue par le troisième type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le premier type de Chebyshev et pour $n = 5$

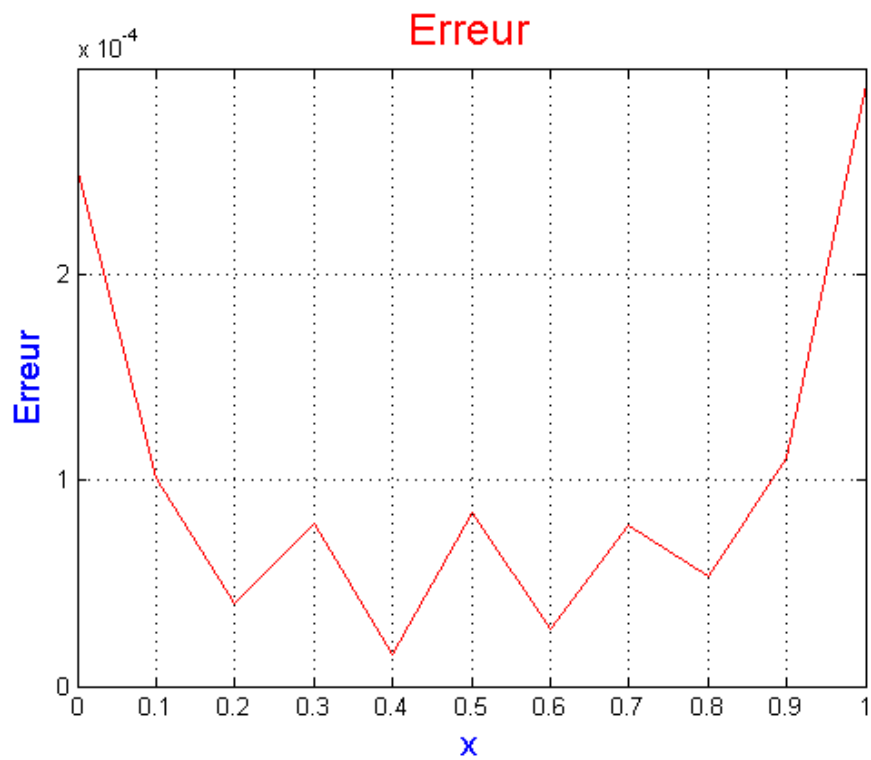
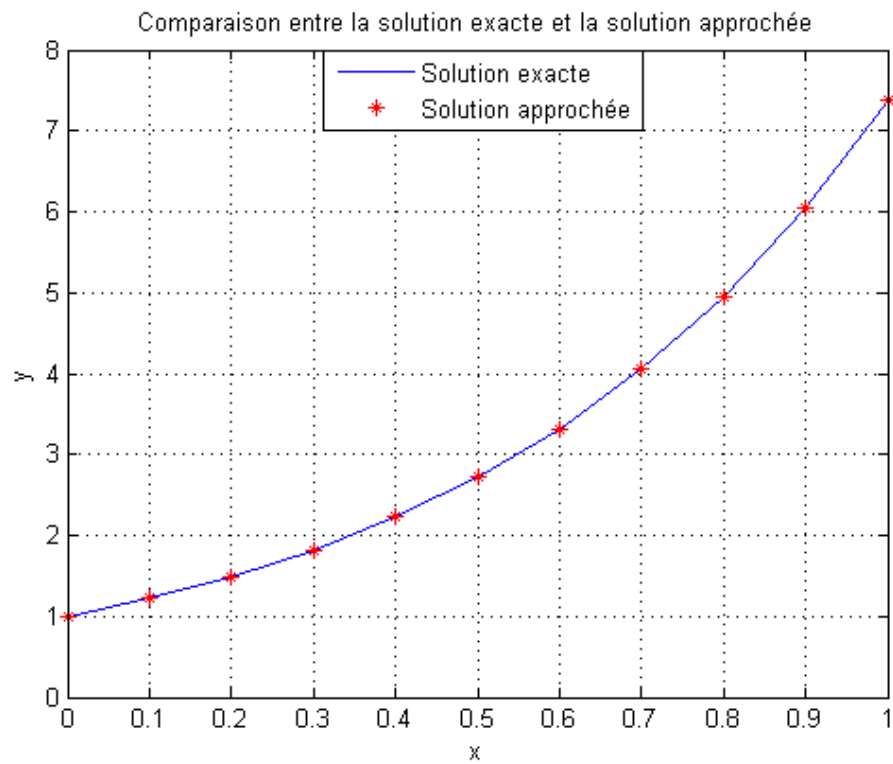
$$a_1 = 3.441497365305139 \quad a_2 = 3.072519894341451 \quad a_3 = 0.737945193911627$$

$$a_4 = 0.120516218536867 \quad a_5 = 0.014813764638573 \quad a_6 = 0.001471141048313$$

n	x	solution exacte	solution approchée	Erreur
1	0	1	0.99974906992795	0.00025093007205
2	0.1	1.22140275816017	1.22150375087042	0.00010099271025
3	0.2	1.49182469764127	1.49178455994882	0.00004013769245
4	0.3	1.82211880039051	1.82203973760199	0.00007906278852
5	0.4	2.22554092849247	2.22555670558547	0.00001577709300
6	0.5	2.71828182845905	2.71836593603162	0.00008410757258
7	0.6	3.32011692273655	3.32014482050968	0.00002789777313
8	0.7	4.05519996684467	4.05512153908583	0.00007842775884
9	0.8	4.95303242439511	4.95297892938335	0.00005349501177
10	0.9	6.04964746441295	6.04975835564260	0.00011089122965
11	1	7.38905609893065	7.38876357778120	0.00029252114945

(TAB.1: Comparaison des résultats, erreur absolue par le premier type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le deuxième type de Chebyshev et pour $n = 5$

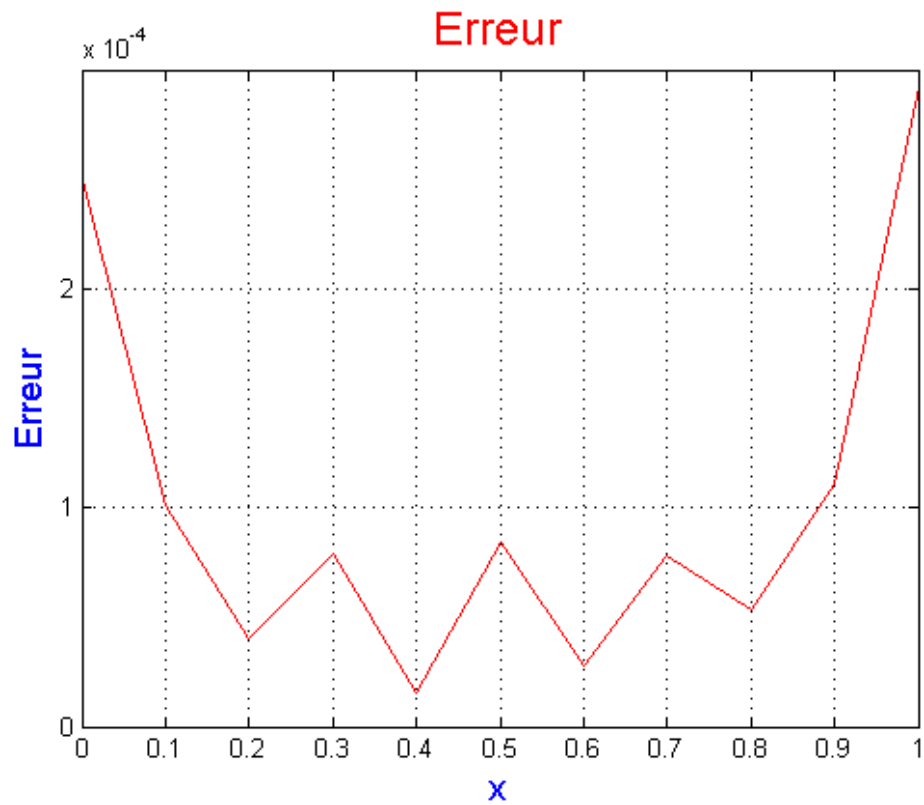
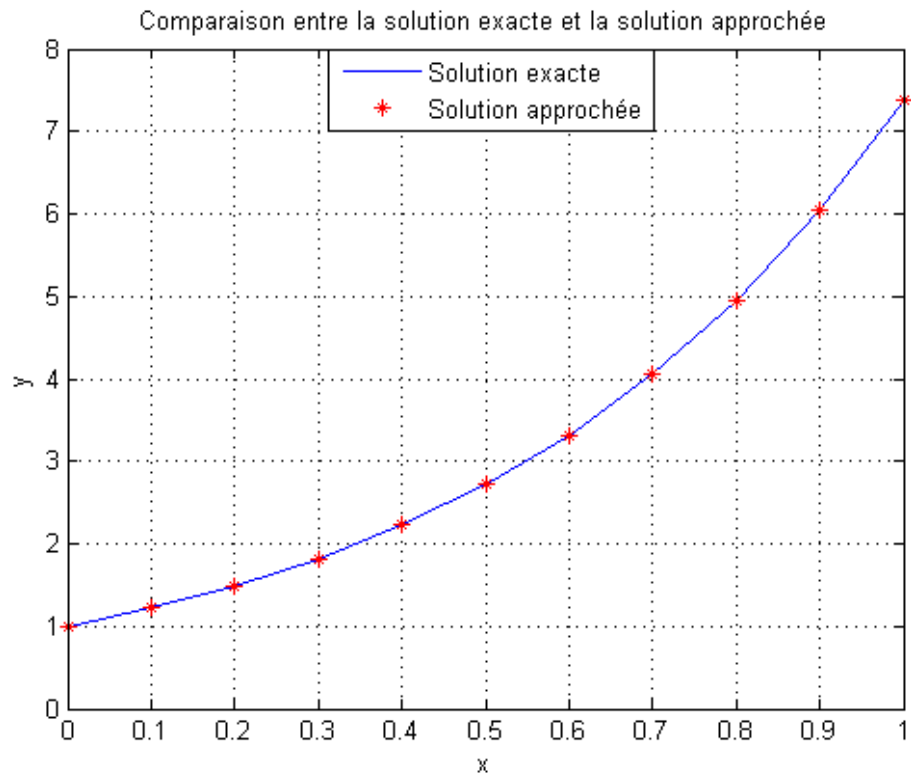
$$a_1 = 3.072524768348918 \quad a_2 = 1.476001837902376 \quad a_3 = 0.361565714636487$$

$$a_4 = 0.059522538744408 \quad a_5 = 0.007406882319293 \quad a_6 = 7.355705238736576e - 004$$

n	x	solution exacte	solution approchée	Erreur
1	0	1	0.99974906992956	0.00025093007044
2	0.1	1.22140275816017	1.22150375087028	0.00010099271011
3	0.2	1.49182469764127	1.49178455994886	0.00004013769241
4	0.3	1.82211880039051	1.82203973760244	0.00007906278807
5	0.4	2.22554092849247	2.22555670558590	0.00001577709343
6	0.5	2.71828182845905	2.71836593603164	0.00008410757259
7	0.6	3.32011692273655	3.32014482050928	0.00002789777274
8	0.7	4.05519996684467	4.05512153908544	0.00007842775923
9	0.8	4.95303242439511	4.95297892938342	0.00005349501170
10	0.9	6.04964746441295	6.04975835564298	0.00011089123004
11	1	7.38905609893065	7.38876357778007	0.00029252115058

(TAB.2: Comparaison des résultats, erreur absolue par le deuxième type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le troisième type de Chebyshev et pour $n = 5$

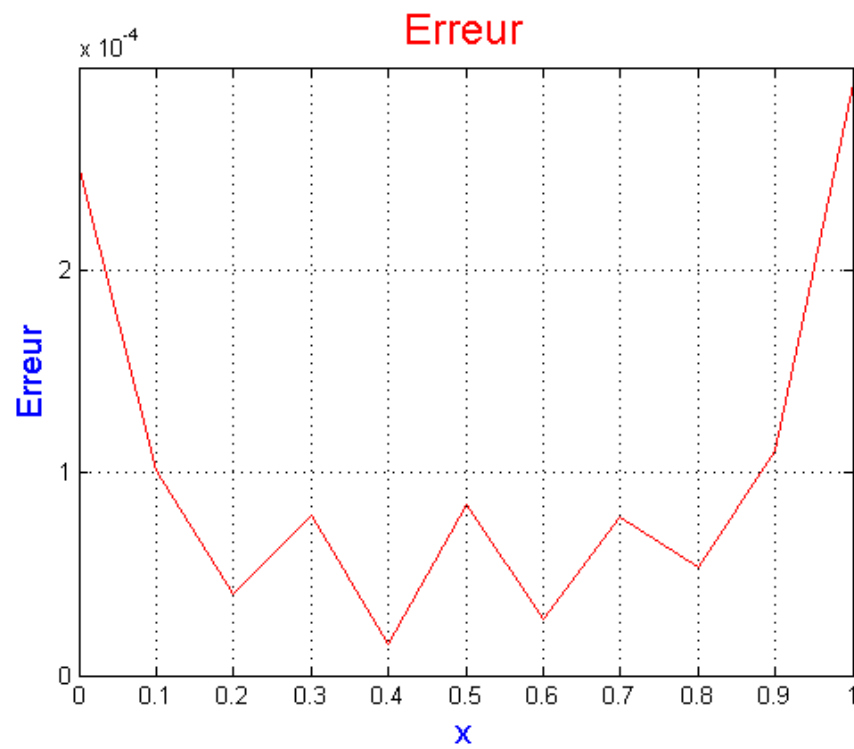
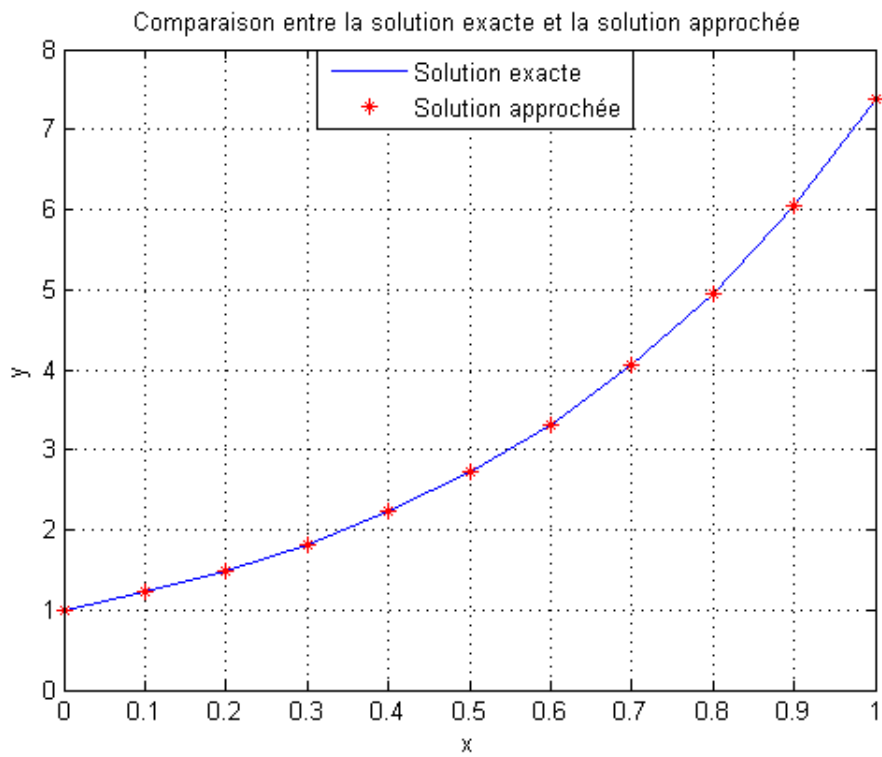
$$a_1 = 4.977757312475024 \quad a_2 = 1.905232544126346 \quad a_3 = 0.429230706223861$$

$$a_4 = 0.067664991587372 \quad a_5 = 0.008142452842868 \quad a_6 = 7.355705236629095e - 004$$

n	x	solution exacte	solution approchée	Erreur
1	0	1	0.99974906992848	0.00025093007152
2	0.1	1.22140275816017	1.22150375086862	0.00010099270845
3	0.2	1.49182469764127	1.49178455994766	0.00004013769361
4	0.3	1.82211880039051	1.82203973760166	0.00007906278885
5	0.4	2.22554092849247	2.22555670558518	0.00001577709271
6	0.5	2.71828182845905	2.71836593603072	0.00008410757168
7	0.6	3.32011692273655	3.32014482050824	0.00002789777169
8	0.7	4.05519996684467	4.05512153908461	0.00007842776007
9	0.8	4.95303242439511	4.95297892938309	0.00005349501203
10	0.9	6.04964746441295	6.04975835564282	0.00011089122988
11	1	7.38905609893065	7.38876357777831	0.00029252115234

(TAB.3: Comparaison des résultats, erreur absolue par le troisième type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



Exemple 3.2.3

Soit l'équation intégrale $\varphi(x) + \int_0^1 e^{-x-t}\varphi(t)dt = e^x + e^{-x}$.

Avec la solution exacte $\varphi(x) = e^x$

$K(x, t) = e^{-x-t}$ et $f(x) = e^x + e^{-x}$

- Pour Le premier type de Chebyshev et pour $n = 3$

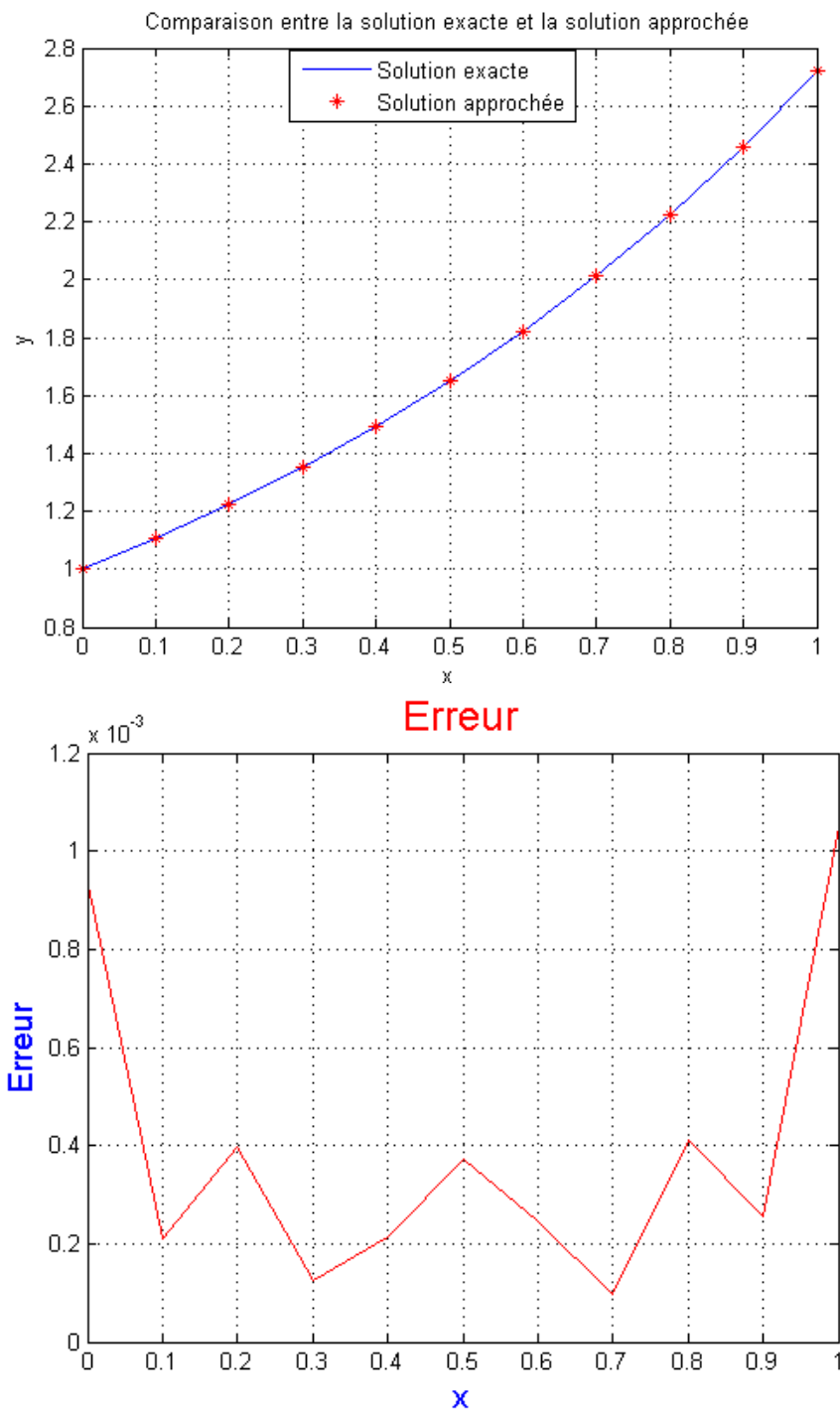
$$a_1 = 1.753247845564645 \quad a_2 = 0.850378726794524 \quad a_3 = 0.104897998132222$$

$$a_4 = 0.008707034819082$$

n	x	solution exacte	solution approchée	Erreur
1	0	1	0.99906008208326	0.00093991791674
2	0.1	1.10517091807565	1.10538117986237	0.00021026178672
3	0.2	1.22140275816017	1.22179895460157	0.00039619644140
4	0.3	1.34985880757600	1.34998515698614	0.00012634941014
5	0.4	1.49182469764127	1.49161153770134	0.00021315993993
6	0.5	1.64872127070013	1.64834984743243	0.00037142326770
7	0.6	1.82211880039051	1.82187183686467	0.00024696352584
8	0.7	2.01375270747048	2.01384925668333	0.00009654921286
9	0.8	2.22554092849247	2.22595385757368	0.00041292908121
10	0.9	2.45960311115695	2.45985739022097	0.00025427906402
11	1	2.71828182845905	2.71723160531046	0.00105022314858

(TAB.1: Comparaison des résultats, erreur absolue par le premier type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le deuxième type de Chebyshev et pour $n = 3$

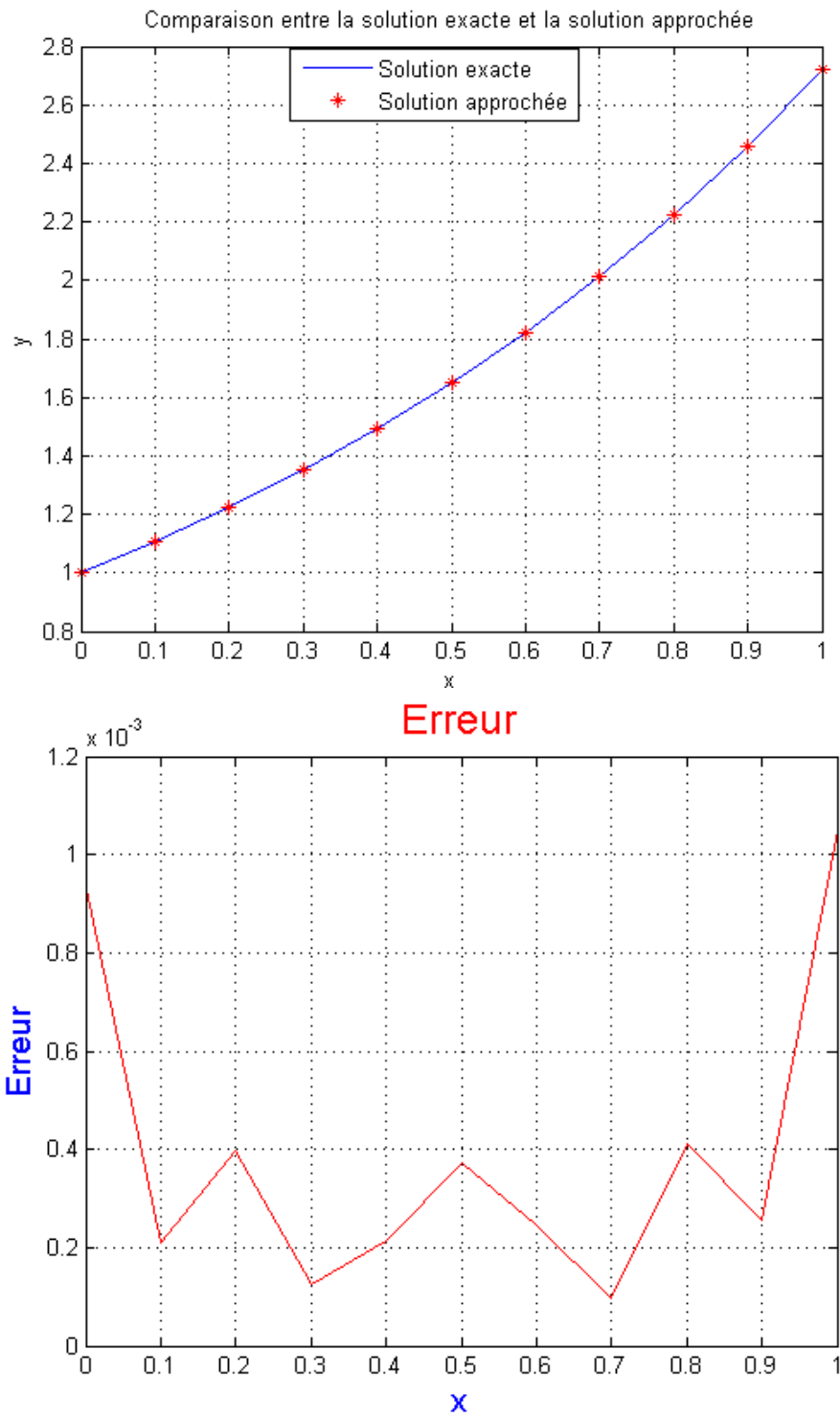
$$a_1 = 1.700798846498532 \quad a_2 = 0.420835845987679 \quad a_3 = 0.052448999066113$$

$$a_4 = 0.004353517409644$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	0	1	0.99906008208319	0.00093991791681
2	0.1	1.10517091807565	1.10538117986236	0.00021026178672
3	0.2	1.22140275816017	1.22179895460160	0.00039619644143
4	0.3	1.34985880757600	1.34998515698617	0.00012634941017
5	0.4	1.49182469764127	1.49161153770135	0.00021315993992
6	0.5	1.64872127070013	1.64834984743242	0.00037142326771
7	0.6	1.82211880039051	1.82187183686464	0.00024696352587
8	0.7	2.01375270747048	2.01384925668329	0.00009654921281
9	0.8	2.22554092849247	2.22595385757364	0.00041292908117
10	0.9	2.45960311115695	2.45985739022097	0.00025427906402
11	1	2.71828182845905	2.71723160531055	0.00105022314850

(TAB.2: Comparaison des résultats, erreur absolue par le deuxième type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le troisième type de Chebyshev et pour $n = 3$

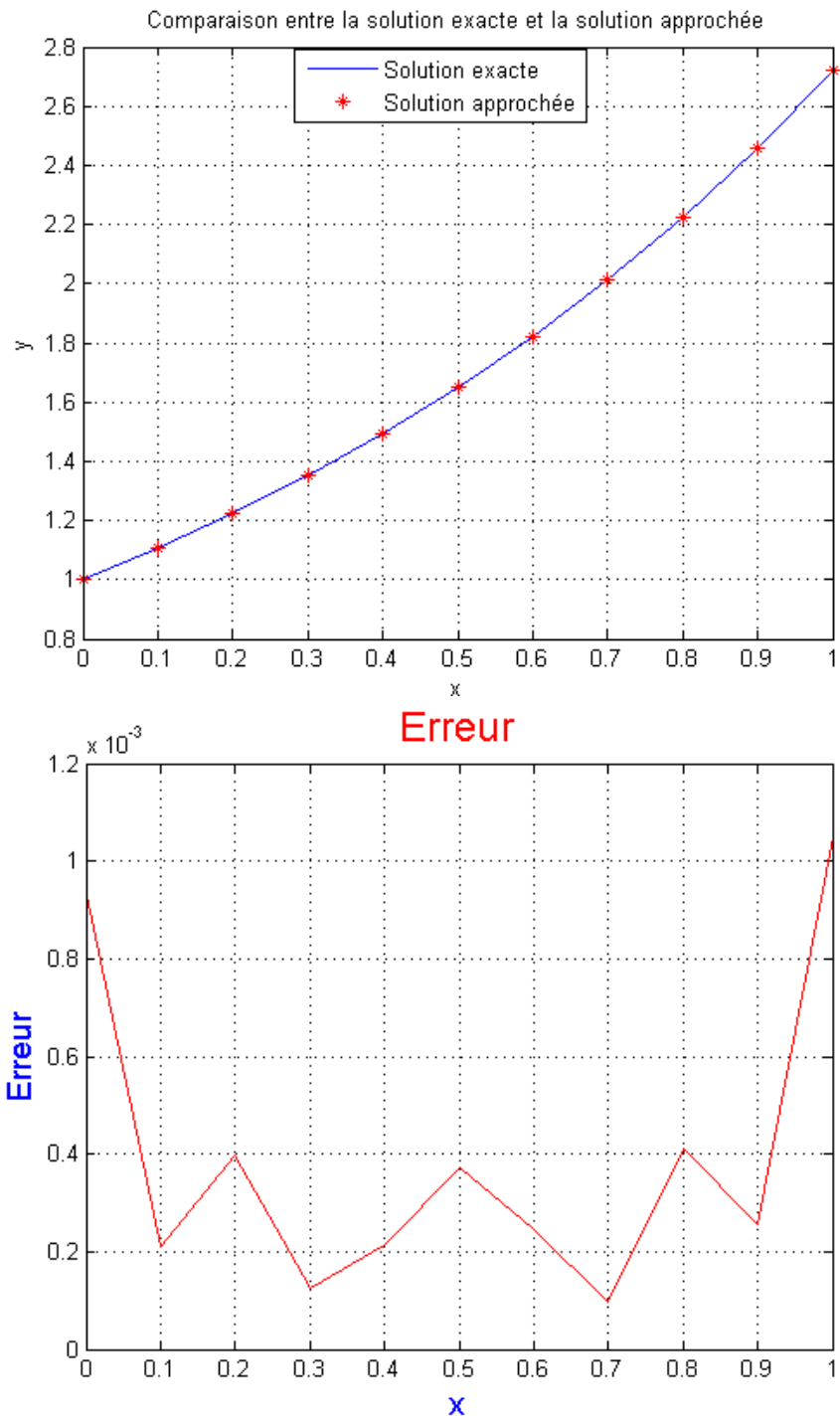
$$a_1 = 2.178437208961945 \quad a_2 = 0.477638362463425 \quad a_3 = 0.056802516475746$$

$$a_4 = 0.004353517409635$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	0	1	0.99906008208325	0.00093991791675
2	0.1	1.10517091807565	1.10538117986240	0.00021026178675
3	0.2	1.22140275816017	1.22179895460162	0.00039619644145
4	0.3	1.34985880757600	1.34998515698619	0.00012634941018
5	0.4	1.49182469764127	1.49161153770137	0.00021315993990
6	0.5	1.64872127070013	1.64834984743244	0.00037142326769
7	0.6	1.82211880039051	1.82187183686466	0.00024696352585
8	0.7	2.01375270747048	2.01384925668331	0.00009654921284
9	0.8	2.22554092849247	2.22595385757366	0.00041292908119
10	0.9	2.45960311115695	2.45985739022097	0.00025427906402
11	1	2.71828182845905	2.71723160531052	0.00105022314853

(TAB.3: Comparaison des résultats, erreur absolue par le troisième type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour le premier type de Chebyshev et pour $n = 5$

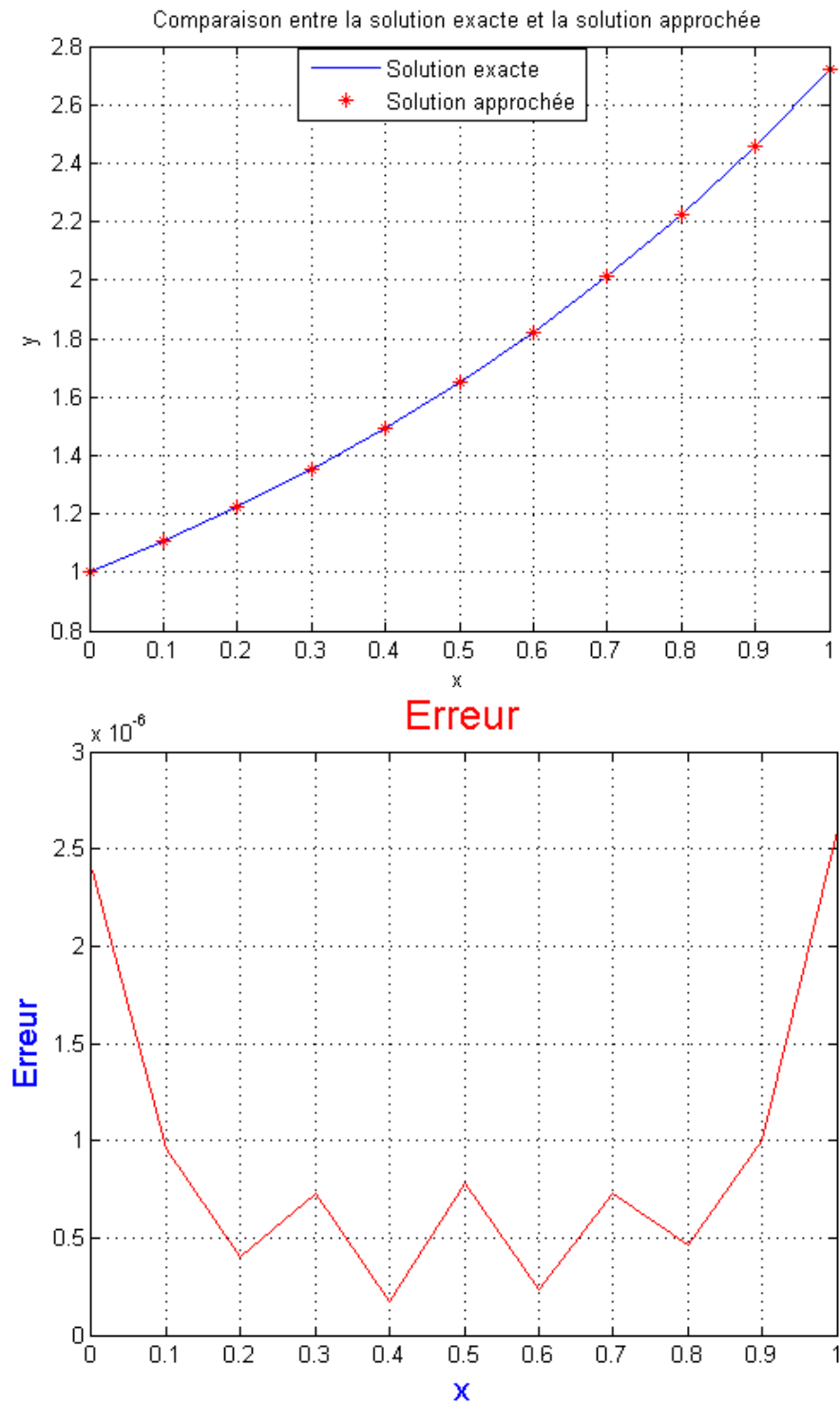
$$a_1 = 1.753387410098241 \quad a_2 = 0.850391637329297 \quad a_3 = 0.105208180656466$$

$$a_4 = 0.008722086963732 \quad a_5 = 5.428213114048263e - 004 \quad a_6 = 2.709369867201494e - 005$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	0	1	0.99999759407386	0.00000240592614
2	0.1	1.10517091807565	1.10517187416842	0.00000095609277
3	0.2	1.22140275816017	1.22140235837085	0.00000039978932
4	0.3	1.34985880757600	1.34985807575635	0.00000073181966
5	0.4	1.49182469764127	1.49182487100157	0.00000017336030
6	0.5	1.64872127070013	1.64872205075312	0.00000078005299
7	0.6	1.82211880039051	1.82211902999598	0.00000022960547
8	0.7	2.01375270747048	2.01375197842202	0.00000072904845
9	0.8	2.22554092849247	2.22554046679843	0.00000046169404
10	0.9	2.45960311115695	2.45960411333617	0.00000100217922
11	1	2.71828182845905	2.71827923005848	0.00000259840056

(TAB.1: Comparaison des résultats, erreur absolue par le premier type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

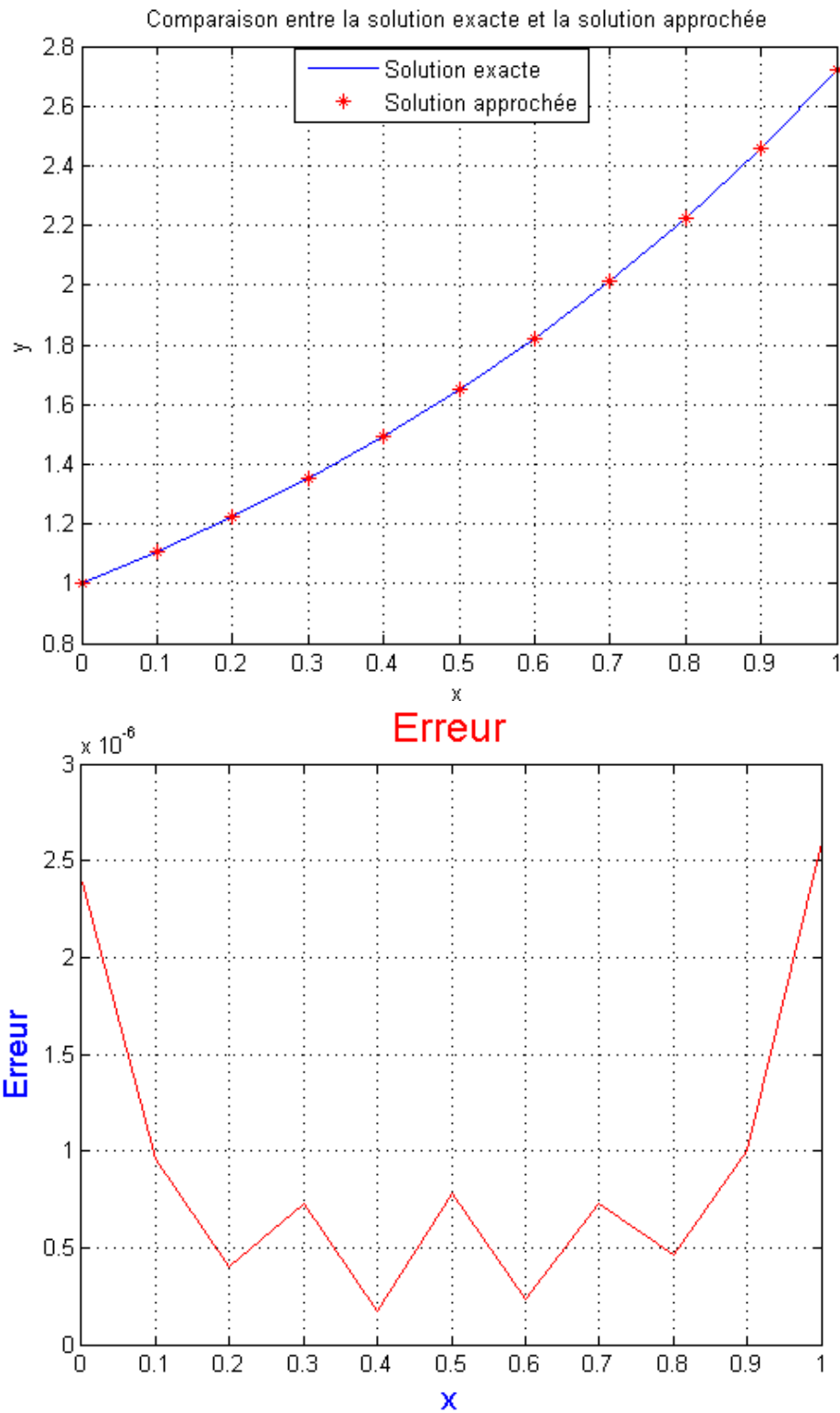
- Pour Le deuxième type de Chebyshev et pour $n = 5$

$$a_1 = 1.700783319770870 \quad a_2 = 0.420834775182179 \quad a_3 = 0.052332679672310$$

$$a_4 = 0.004347496629192 \quad a_5 = 2.714106562461127e - 004 \quad a_6 = 1.354685707879087e - 005$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	0	1	0.99999759404259	0.00000240595741
2	0.1	1.10517091807565	1.10517187418164	0.00000095610599
3	0.2	1.22140275816017	1.22140235837622	0.00000039978395
4	0.3	1.34985880757600	1.34985807574813	0.00000073182787
5	0.4	1.49182469764127	1.49182487099194	0.00000017335067
6	0.5	1.64872127070013	1.64872205075298	0.00000078005285
7	0.6	1.82211880039051	1.82211903000540	0.00000022961489
8	0.7	2.01375270747048	2.01375197843016	0.00000072904032
9	0.8	2.22554092849247	2.22554046679308	0.00000046169939
10	0.9	2.45960311115695	2.45960411332281	0.00000100216586
11	1	2.71828182845905	2.71827923008892	0.00000259837013

(TAB.2: Comparaison des résultats, erreur absolue par le deuxième type de Chebyshev)



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le troisième type de Chebyshev et pour $n = 5$

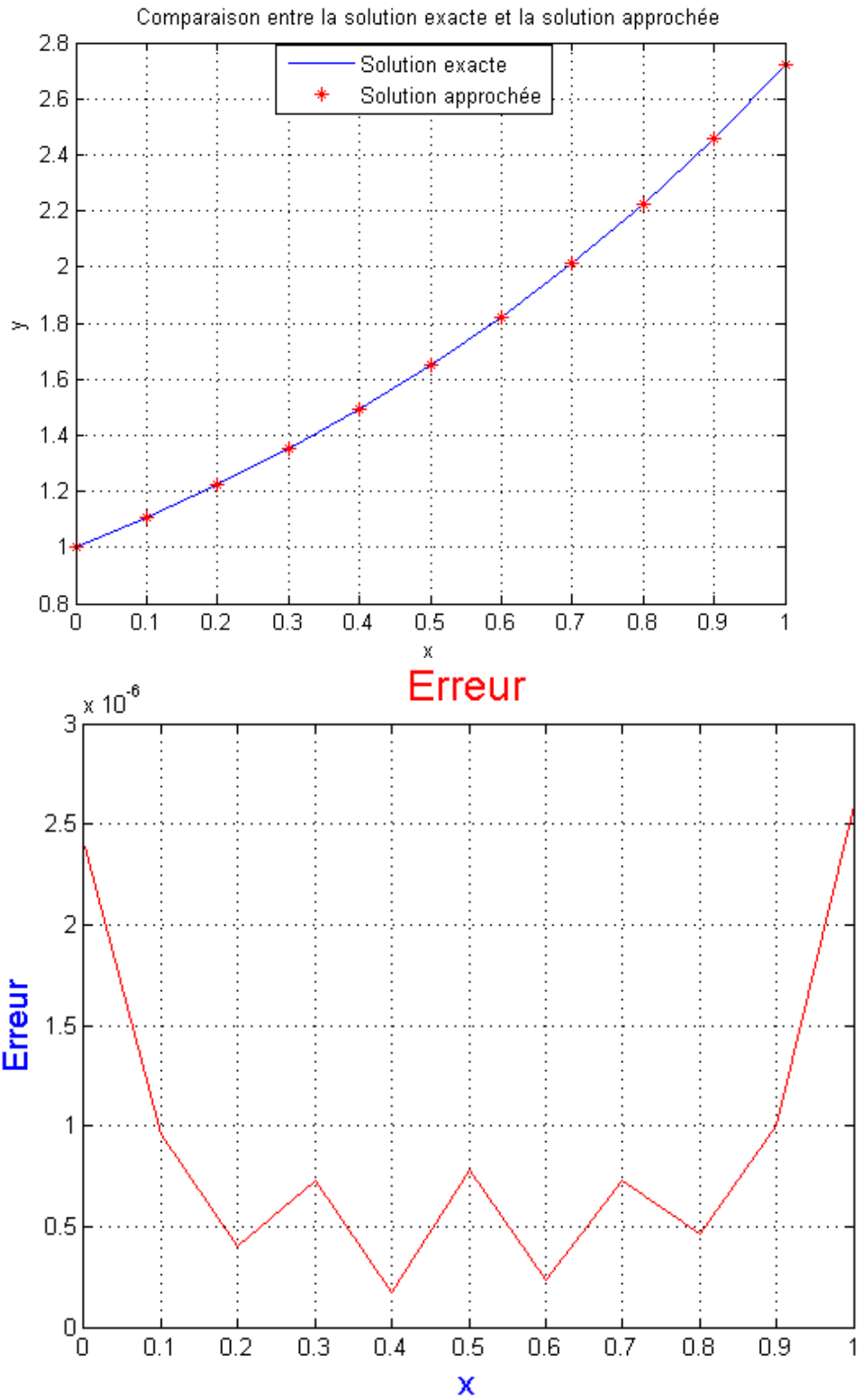
$$a_1 = 2.178583228767452 \quad a_2 = 0.477799908999789 \quad a_3 = 0.056965133818661$$

$$a_4 = 0.004632454146508 \quad a_5 = 2.849575203571764e - 004 \quad a_6 = 1.354686392776583e - 005$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	0	1	0.99999759403182	0.00000240596818
2	0.1	1.10517091807565	1.10517187420569	0.00000095613004
3	0.2	1.22140275816017	1.22140235839423	0.00000039976594
4	0.3	1.34985880757600	1.34985807575584	0.00000073182016
5	0.4	1.49182469764127	1.49182487099902	0.00000017335775
6	0.5	1.64872127070013	1.64872205076795	0.00000078006782
7	0.6	1.82211880039051	1.82211903002810	0.00000022963759
8	0.7	2.01375270747048	2.01375197845185	0.00000072901863
9	0.8	2.22554092849247	2.22554046680403	0.00000046168844
10	0.9	2.45960311115695	2.45960411332757	0.00000100217062
11	1	2.71828182845905	2.71827923012909	0.00000259832996

(TAB.3: Comparaison des résultats, erreur absolue par le troisième type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



Exemple 3.2.4

Soit l'équation intégrale $\varphi(x) + \int_0^1 \sqrt{xt}\varphi(t)dt = \sqrt{x}$.

Avec la solution exacte $\varphi(x) = \frac{2\sqrt{x}}{3}$

$K(x, t) = \sqrt{xt}$ et $f(x) = \sqrt{x}$

- Pour Le premier type de Chebyshev et pour $n = 3$

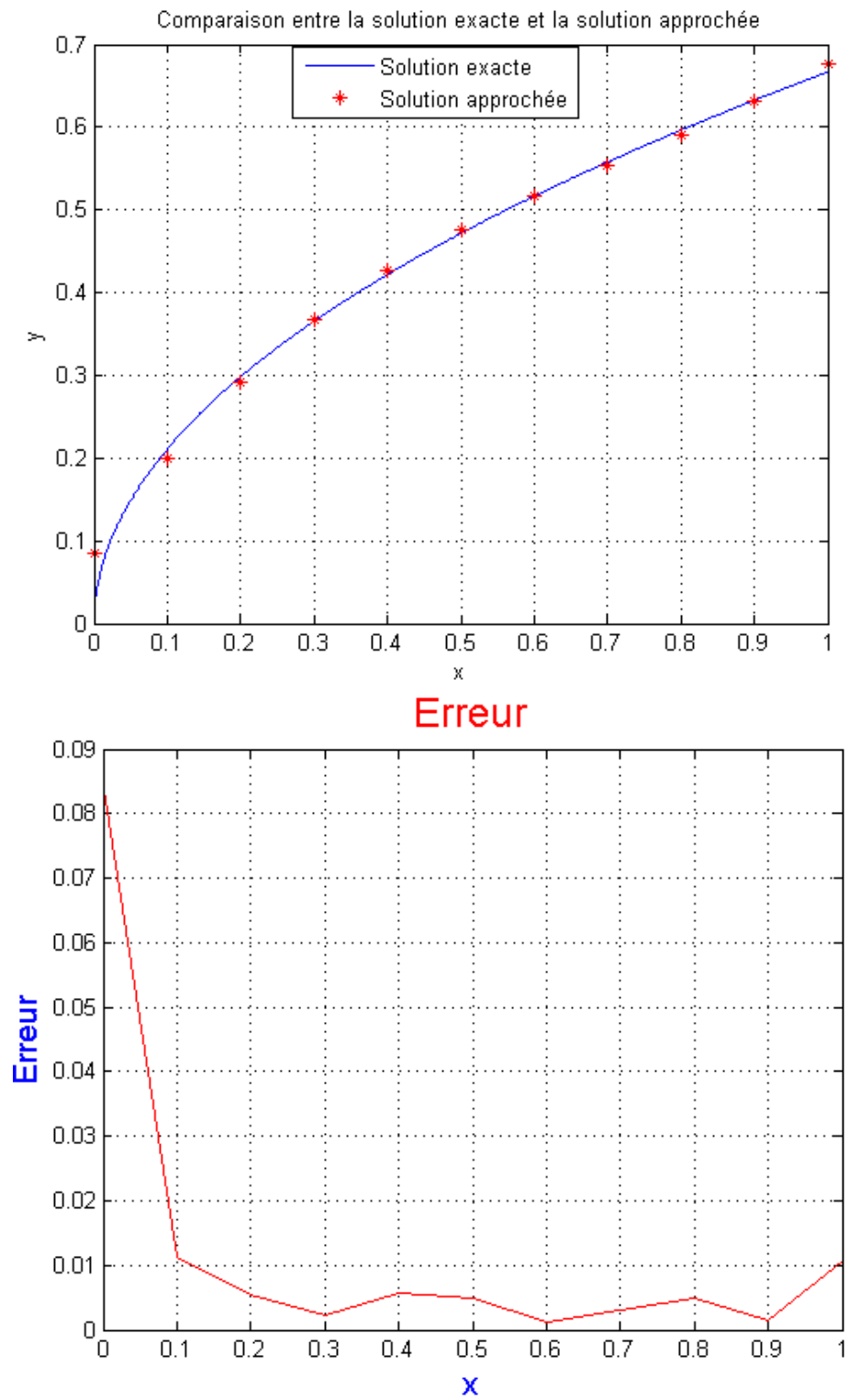
$$a_1 = 5103/11906 \quad a_2 = 6615/23812 \quad a_3 = -567/11906$$

$$a_4 = 441/23812$$

n	x	solution exacte	solution approchée	Erreur
1	0	0	0.08466319502772	0.08466319502772
2	0.1	0.21081851067789	0.19955115068033	0.01126735999756
3	0.2	0.29814239699997	0.29259600201579	0.00554639498418
4	0.3	0.36514837167011	0.36735360322526	0.00220523155515
5	0.4	0.42163702135578	0.42737980849992	0.00574278714413
6	0.5	0.47140452079103	0.47623047203091	0.00482595123988
7	0.6	0.51639777949432	0.51746144800941	0.00106366851508
8	0.7	0.55777335102272	0.55462859062657	0.00314476039614
9	0.8	0.59628479399994	0.59128775407358	0.00499703992637
10	0.9	0.63245553203368	0.63099479254158	0.00146073949210
11	1	0.66666666666667	0.67730556022174	0.01063889355507

(TAB.1: Comparaison des résultats, erreur absolue par le premier type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le deuxième type de Chebyshev et pour $n = 3$

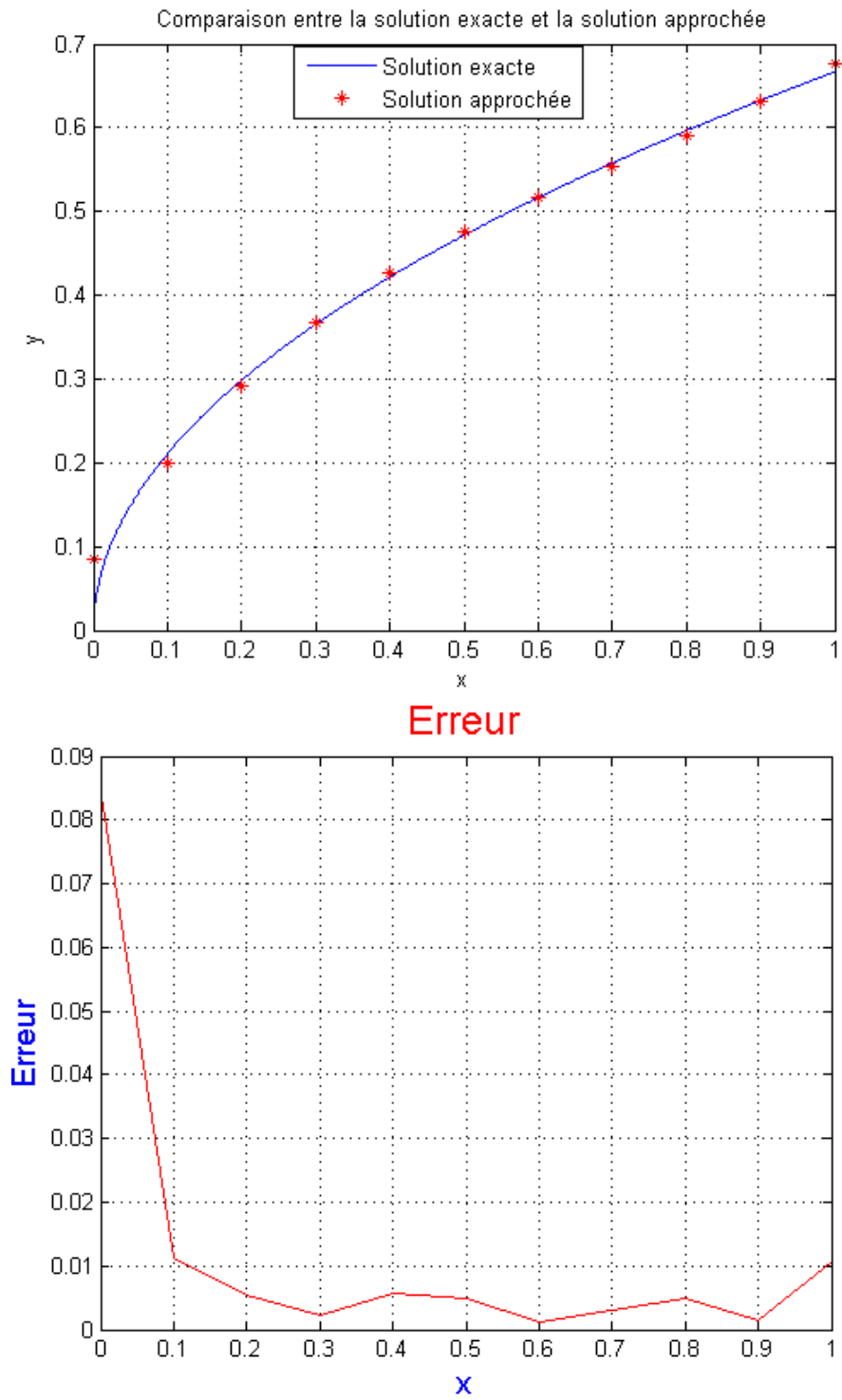
$$a_1 = 10773/23812 \quad a_2 = 3087/23812 \quad a_3 = -567/23812$$

$$a_4 = 441/47624$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	0	0	0.08466319502772	0.08466319502772
2	0.1	0.21081851067789	0.19955115068033	0.01126735999756
3	0.2	0.29814239699997	0.29259600201579	0.00554639498418
4	0.3	0.36514837167011	0.36735360322526	0.00220523155515
5	0.4	0.42163702135578	0.42737980849992	0.00574278714413
6	0.5	0.47140452079103	0.47623047203091	0.00482595123988
7	0.6	0.51639777949432	0.51746144800941	0.00106366851508
8	0.7	0.55777335102272	0.55462859062657	0.00314476039614
9	0.8	0.59628479399994	0.59128775407358	0.00499703992637
10	0.9	0.63245553203368	0.63099479254158	0.00146073949210
11	1	0.66666666666667	0.67730556022174	0.01063889355507

(TAB.2: Comparaison des résultats, erreur absolue par le deuxième type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le troisième type de Chebyshev et pour $n = 3$

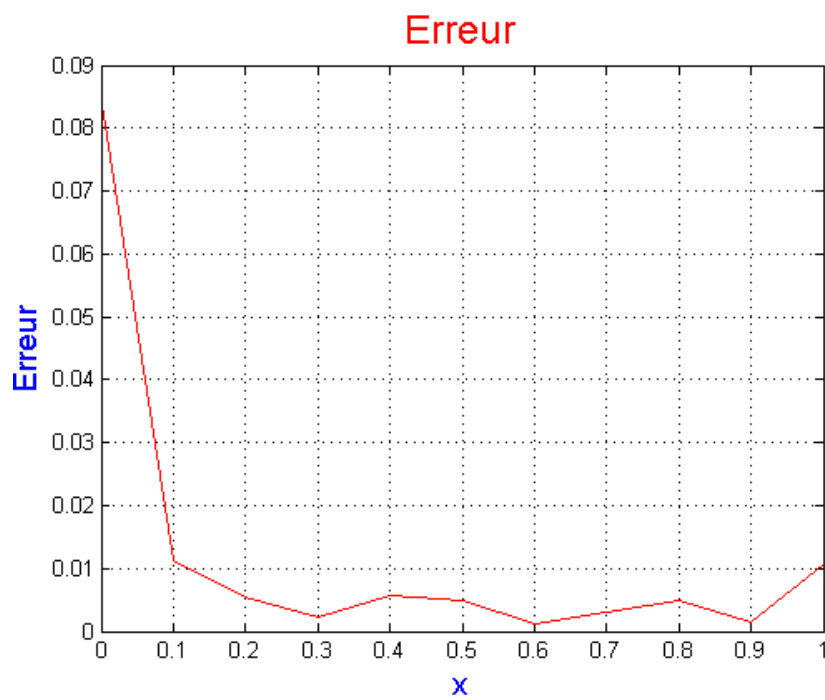
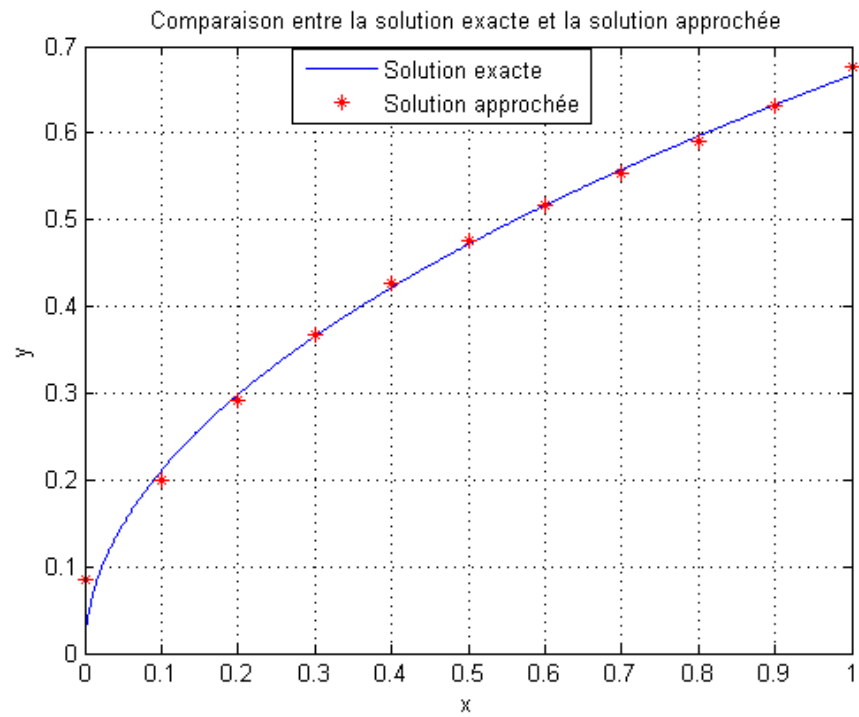
$$a_1 = 27027/47624 \quad a_2 = 5481/47624 \quad a_3 = -693/47624$$

$$a_4 = 441/47624$$

n	x	<i>solution exacte</i>	<i>solution approchée</i>	<i>Erreur</i>
1	0	0	0.08466319502772	0.08466319502772
2	0.1	0.21081851067789	0.19955115068033	0.01126735999756
3	0.2	0.29814239699997	0.29259600201579	0.00554639498418
4	0.3	0.36514837167011	0.36735360322526	0.00220523155515
5	0.4	0.42163702135578	0.42737980849992	0.00574278714413
6	0.5	0.47140452079103	0.47623047203091	0.00482595123988
7	0.6	0.51639777949432	0.51746144800941	0.00106366851508
8	0.7	0.55777335102272	0.55462859062657	0.00314476039614
9	0.8	0.59628479399994	0.59128775407358	0.00499703992637
10	0.9	0.63245553203368	0.63099479254158	0.00146073949210
11	1	0.66666666666667	0.67730556022174	0.01063889355507

(TAB.3: Comparaison des résultats, erreur absolue par le troisième type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le premier type de Chebyshev et pour $n = 5$

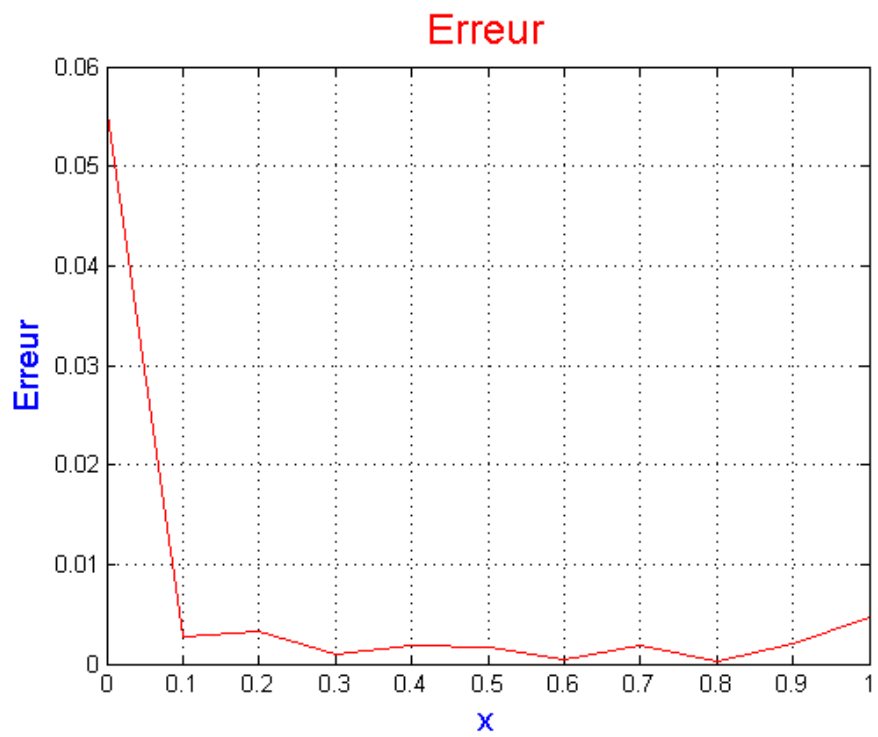
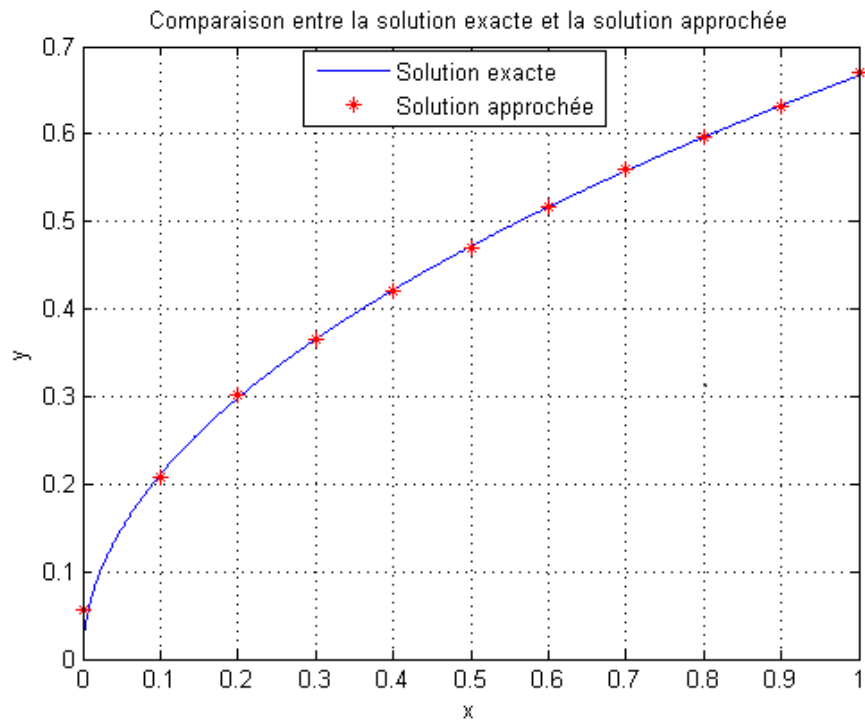
$$a_1 = 418275/981536 \quad a_2 = 275275/981536 \quad a_3 = -13013/245384$$

$$a_4 = 42471/1963072 \quad a_5 = -9295/981536 \quad a_6 = 11011/1963072$$

n	x	solution exacte	solution approchée	Erreur
1	0	0	0.05594496788707	0.05594496788707
2	0.1	0.21081851067789	0.20812535063411	0.00269316004378
3	0.2	0.29814239699997	0.30138076353797	0.00323836653799
4	0.3	0.36514837167011	0.36620121409709	0.00105284242698
5	0.4	0.42163702135578	0.41982894141427	0.00180807994151
6	0.5	0.47140452079103	0.46970462621850	0.00169989457253
7	0.6	0.51639777949432	0.51691360088677	0.00051582139245
8	0.7	0.55777335102272	0.55963205946598	0.00185870844326
9	0.8	0.59628479399994	0.59657326769472	0.00028847369477
10	0.9	0.63245553203368	0.63043377302514	0.00202175900854
11	1	0.66666666666667	0.67133961464480	0.00467294797814

(TAB.1: Comparaison des résultats, erreur absolue par le premier type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

- Pour Le deuxième type de Chebyshev et pour $n = 5$

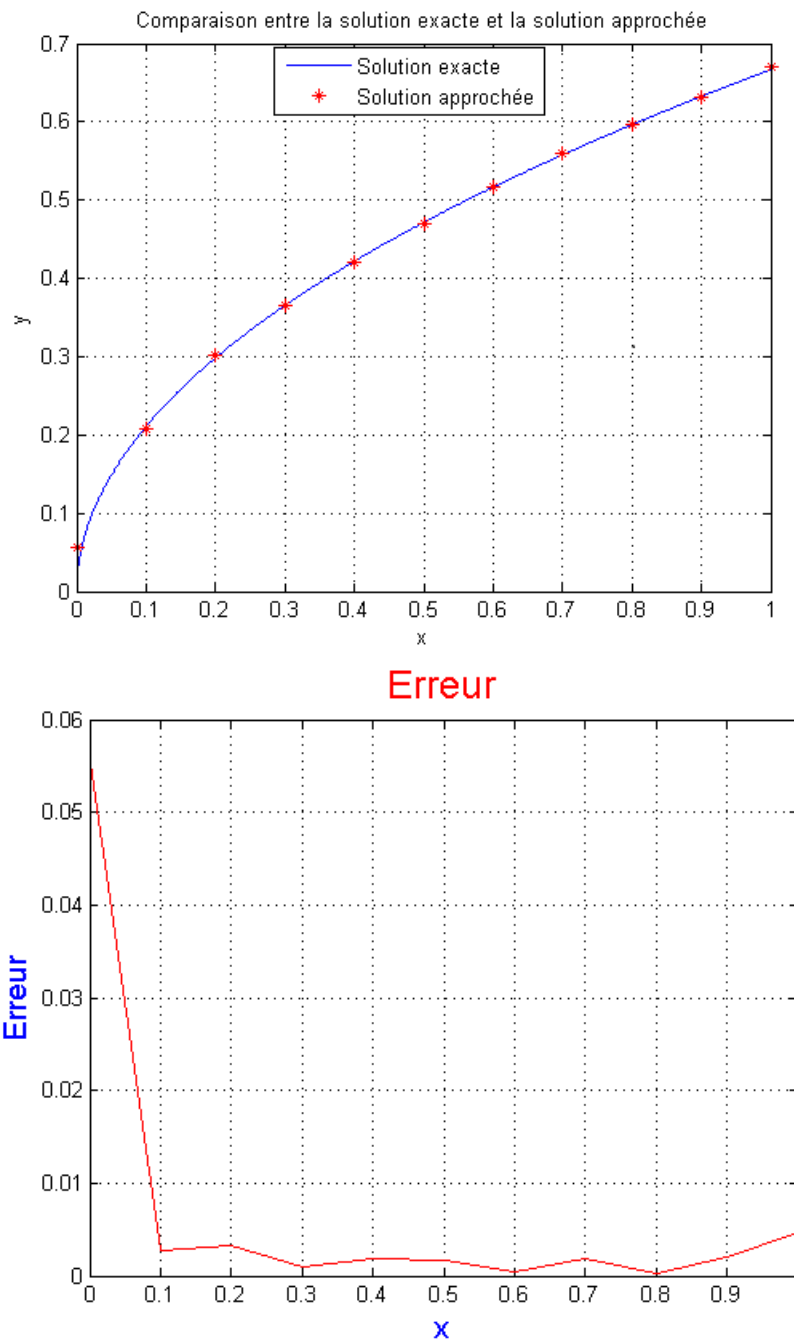
$$a_1 = 444301/981536 \quad a_2 = 508079/3926144 \quad a_3 = -42757/1963072$$

$$a_4 = 7865/981536 \quad a_5 = -9295/1963072 \quad a_6 = 11011/3926144$$

n	x	solution exacte	solution approchée	Erreur
1	0	0	0.05594496788707	0.05594496788707
2	0.1	0.21081851067789	0.20812535063411	0.00269316004378
3	0.2	0.29814239699997	0.30138076353797	0.00323836653799
4	0.3	0.36514837167011	0.36620121409709	0.00105284242698
5	0.4	0.42163702135578	0.41982894141427	0.00180807994151
6	0.5	0.47140452079103	0.46970462621850	0.00169989457253
7	0.6	0.51639777949432	0.51691360088677	0.00051582139245
8	0.7	0.55777335102272	0.55963205946598	0.00185870844326
9	0.8	0.59628479399994	0.59657326769472	0.00028847369477
10	0.9	0.63245553203368	0.63043377302514	0.00202175900854
11	1	0.66666666666667	0.67133961464480	0.00467294797814

(TAB.2: Comparaison des résultats, erreur absolue par le deuxième type de Chebyshev)

3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce



3.2. Application aux équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

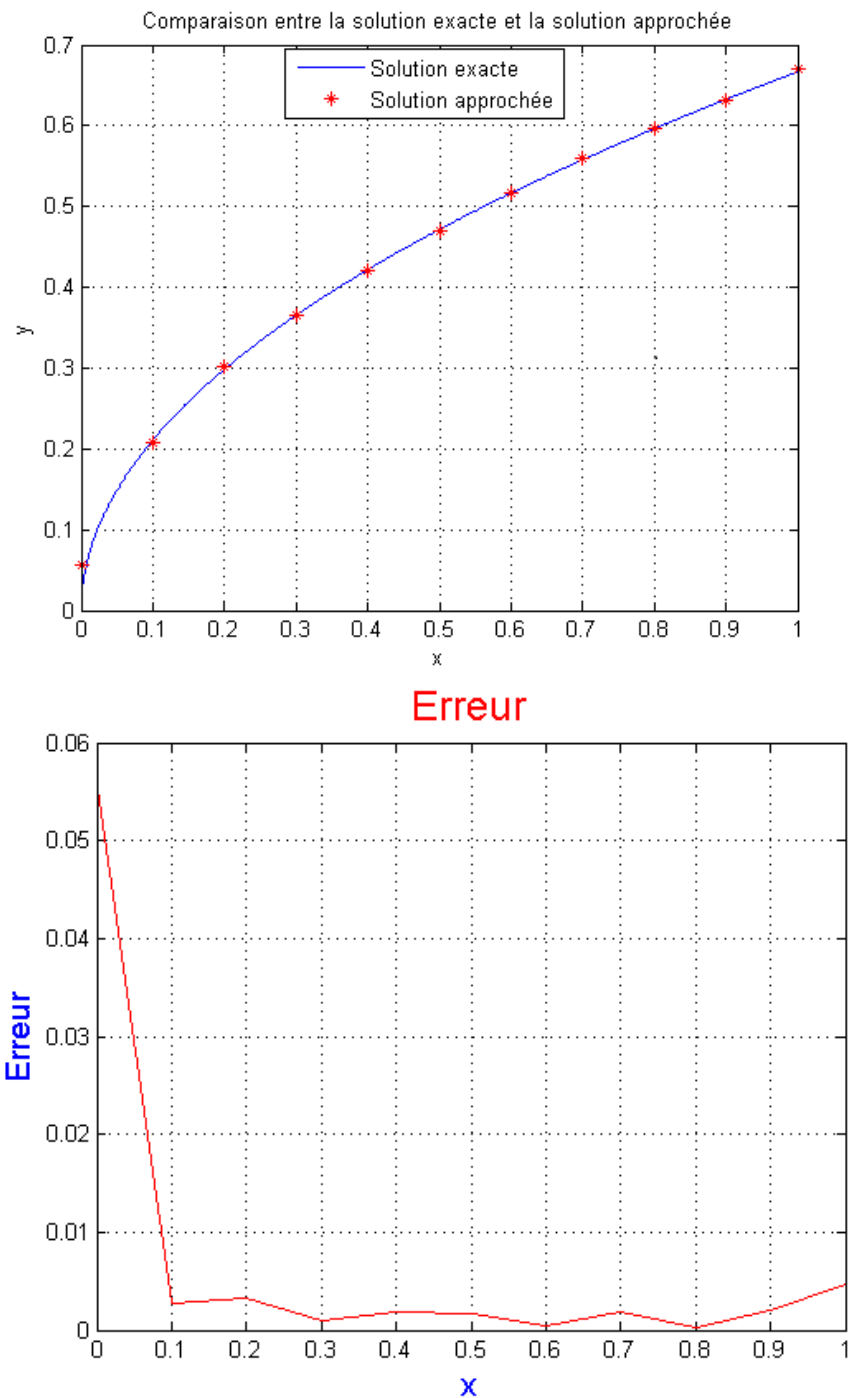
- Pour Le troisième type de Chebyshev et pour $n = 5$

$$a_1 = 1111825/1963072 \quad a_2 = 223223/1963072 \quad a_3 = -61633/3926144$$

$$a_4 = 23881/3926144 \quad a_5 = -7579/3926144 \quad a_6 = 11011/3926144$$

n	x	solution exacte	solution approchée	Erreur
1	0	0	0.05594496788707	0.05594496788707
2	0.1	0.21081851067789	0.20812535063411	0.00269316004378
3	0.2	0.29814239699997	0.30138076353797	0.00323836653799
4	0.3	0.36514837167011	0.36620121409709	0.00105284242698
5	0.4	0.42163702135578	0.41982894141427	0.00180807994151
6	0.5	0.47140452079103	0.46970462621850	0.00169989457253
7	0.6	0.51639777949432	0.51691360088677	0.00051582139245
8	0.7	0.55777335102272	0.55963205946598	0.00185870844326
9	0.8	0.59628479399994	0.59657326769472	0.00028847369477
10	0.9	0.63245553203368	0.63043377302514	0.00202175900854
11	1	0.66666666666667	0.67133961464480	0.00467294797814

(TAB.3: Comparaison des résultats, erreur absolue par le troisième type de Chebyshev)



Conclusion

On a remarqué même résultats pour approximer les équations intégrales par rapport les trois polynômes de chebyshev.

Pour des résultats très efficace on augmente la valeur n .

Conclusion

Nous proposons une méthode numérique de résolution des équations intégrales, celle méthode spectrale (approximée par un polynôme de Chebyshev).

Nous avons calculé les erreurs de la valeur absolue de la différence entre la solution exacte et approchée connue d'avance et la solution numérique qu'on a trouvée, pour un choix d'une solution approchée sous forme une série $\varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i \text{chebyshev}_i(x)$. Ensuite on a schématisé ces résultats. En n, la lecture de ces schémas, nous a donné une illusion générale sur la méthode ainsi proposée.

Cela donnera un avantage de plus à la résolution numérique des équations intégrales.

Bibliographie

- [1] -**Anissa.Leulmi**, Résolution des équations intégrales par le premier polynôme de Chebychev, Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master, Université de Msila, 2013/2014.
- [2] -**Alfio.Quarteroni, Riccardo.Sacco et Fausto.Saleri**. Numerical Mathematics, Springer, 2000.
- [3] -**Azedine.Rahmoune**, Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales, Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat, Université de Batna, 2011.
- [4] -**Aziza.Tabi**, Résolution des équations intégrales par le deuxième polynôme de Chebychev, Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master, Université de Msila, 2013/2014.
- [5] -**Bachir.Gagui**, Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz. Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat, Université de Msila, 2015.
- [6] -**Benoit.Perthame**, Topologie et analyse différentielle, 25 March 2005.
- [7] -**Christian GULP IN**, MANUEL DE CALCUL NUMÉRIQUE APPLIQUÉ, EDP SCIENCES.
- [8] -**Elisabeth.Burroni**. La topologie des espaces métriques, ellipses, 1997.
- [9] -**Halima.Djebblahi**, Résolution des équations intégrales par le troisième polynôme de Chebychev, Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master, Université de Msila, 2013/2014.

- [10] -**Kolmogorov.A, Fomine.S**, Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, 2^e édition, Mir.moscou, 1973.
- [11] -**M. HITTA Amara**, Cours Licence Topologie des espaces Métriques, Université 8 Mai 1945, Guelma.
- [12] -**Moustafa.Nadir**, Analyse fonctionnelle, cour master-01-, université de Msila, 2012/2013
- [13] -**Won Young.Yang, Wenwu.Cao, Tae-Sang.Chung et John.Morris**.APPLIED NUMERICAL METHODS USING MATLAB,Wiley-interscience,2004.
- [14] -**Yves.Sonntag**, TOPOLOGIE et ANALYSE FONCTIONNELLE, ellipses, 1997.