République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed Boudiaf De M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

MAAMERI Dalal

Sujet

Relations entre opérateurs positifs et opérateurs compacts normaux

Date de soutenance :

Devant le jury :

Mr. DILMI Mustapha	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. NADIR Mostefa	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. GAGUI Bachir	Prof. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2017 / 2018

Remerciement

Avant toute considération, je remercie le **GRAND DIEU** le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je remercie premièrement mon directeur de recherche, Monsieur, **NADIR Mostefa** pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, ses précieux

conseils mais aussi ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

M.DILMI

B.GAGUI ,

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et à tous

les membres du département des mathématiques.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction générale

Dans ce mémoire on va étudier les propriétés des opérateurs et les notions fondamentales des opérateurs positifs et compacts normaux, et la relation entre les deux opérateurs, cette étude sur la théorie ayant plusieurs application dans l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs.

Ce mémoire est composé en quatre chapitres :

Le premier chapitre, on rappels quelques notions sur les espaces fonctionnels notamment l'espace normé, Euclidien, Hilbert, aussi quelques définitions et propriétés des opérateurs linéaires, borné , continus, compact ...etc.

Le deuxième chapitre, étude détaillé sur la notion de la théorie sur les opérateurs adjoints et normaux et leurs propriétés ainsi on s'intéresse au théorème classique de Fuglede Putnam dans le cas borné .

Le troisième chapitre on présente une introduction sur les opérateurs positifs et leurs propriétés, et la racine carrée d'un opérateur positif.

Dans le dernier, on expose le but de notre travail, où on va faire une étude sur la racine carrée d'un opérateur normal et le théorème de Schur pour démontrer la relation entre les opérateurs normaux et les opérateurs positifs.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

1.1 Espace normés

soit E un espace vectoriel sur le corp $\Bbbk, E$ est dit normé s'il est muni d'une norme, c'est à dire d'une application N

définie sur E a valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que

1. $N(x) = 0 \iff x = 0$.
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), x \in E, \forall \lambda \in K$.
3. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

1.1.1 Produit scalaire

On appele produit sclaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une application $\langle x, y \rangle$ définie sur $E \times E$ dans $\Bbbk(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$vérifient propriétés suivantes

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
2. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.

5. $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$.

pour x ,y et z appartiennent à E et le scalaire λ appartient à $\mathbb{k}$.

1.1.2 Espace Eucludiens

Les espaces Euclidiens sont les espaces vectoriels muni d'un produit scalaire .

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Cauchy-schwartz)
E espace euclidien, on a $\forall x, y \in E : |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.

Définition 1.1.1 (Orthogonalité) *x et y deux vecteurs d'un espace euclidien E sont dit orthogonaux si leurs produit scalaire est nul, c'est à dire $\langle x, y\rangle = 0$ et on l'on not $x \perp y$.*

1.2 Espace de Hilbert

On appelle espace de Hilbert H tout espace euclidien complet au sens de la métrique $\rho(f, g) = \|f - g\|$.

Exemple 1.2.1 *$\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n, L^2(\omega)$ munis de leurs produits scalaire usuels sont des espaces de Hilbert .*

L'espace $l^2 = \left\{ (x_k)_{k\geq 1} \in \mathbb{C}, \text{telque} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty \right\}$ est aussi un espace de Hilbert.

1.3 Opérateurs linéaires continus

1.3.1 Opérateur linéaire

soit E et F deux espaces normés, et l'opérateur $T : E \longrightarrow F$, et le scalaire λ appartient à $\mathbb{k}$.

On dit que l'opérateur T est linéaire si

1. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K \quad T(x+y) = T(x) + T(y)$.

2. $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

1.3.2 Opérateurs continus

soit E et F deux espaces normés, un opérateur T défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F, est dit continu au point x_0 de G, si on a la propriété suivant

Pours toute suite x_n de G converge vers x_0, la suite $T(x_n)$ converge vers $T(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} T(x_n) = T(x_0).$$

l' opérateur T est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

1.3.3 Opérateurs bornés

Un opérateur T linéaire défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \ \forall x \in E.$$

Théorème 1.3.2 *Un opérateur llinéaire T est continu, si est seulement si, il est borné.*

Remarque 1.3.1 *On not $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéiares continus de E dans F. ou E et F, sont deux espaces normés .*

Remarque 1.3.2 *$T \in \mathcal{L}(H)$ est dit inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(H)$ telque*

$$TB = BT = Id.$$

L'opérateur B est alors unique et le not T^{-1}.

Définition 1.3.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on note*

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \{Tx, x \in E\}. \\ \ker(T) &= \{x \in E, Tx = 0\}. \end{aligned}$$

1.4 Opérateur compact

Définition 1.4.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans E à un ensemble relativement compact dans F.*

Théorème 1.4.3 (Arzela-Ascoli) *Un ensemble $U \subset C(G)$ est relativement compact si et seulement si il est borné et*

équicontinu i.e.

S'il existe une constante M tel que

$$\varphi(x) \leq M \text{ pour tout } x \in G \text{ et } /\varphi \in U$$

Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon \text{ pour tout } x, y \in G \text{ et pour tout } \varphi \in U.$$

1.5 Spectre d'un opérateur borné

Définition 1.5.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ et $\lambda \in$*

1. On appelle ensemble résolvante de T l'ensemble

$$\rho(T) = \{\lambda \in K| \ \ \lambda I - T \ \text{ est inversible}\}.$$

Un élément de $\rho(T)$ est appelé valeur résolvante de T.

2. Si $\lambda \in \rho(T)$, on définit la résolvante $R_\lambda(T)$ de T au point λ par

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

La résolvante $R_\lambda(T)$ est simplement notée R_λ.

3. Le spectre $\sigma(T)$ de$T$ est l'ensemble

$$\sigma(T) = K \backslash \rho(T).$$

Un élément de $\sigma(T)$ est une valeur spectrale de T.

4. On appelle $\lambda \in K$ valeur propre de T et l'ensemble des valeurs propres $Vp(T)$ de$T$ est donné par
$$Vp(T) = \{\lambda \in K | Ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}.$$

Définition 1.5.5 (spectre ponctuel) *On appelle spectre ponctuel de T l'ensemble des valeurs propres A noté $\sigma_p(A)$ tel que*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ N(\lambda I - T) \neq \{0\}\}.$$

Définition 1.5.6 (spectre résiduel) *On appelle spectre résiduel de A et on note par $\sigma_r(A)$, l'ensemble*

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda I - A) \ \textit{est injectif et} \ \ R(\lambda I - A) \ \textit{n'est pas dense dans} \ E \ \}.$$

Définition 1.5.7 (spectre continu) *On appelle spectre continu de A et on note par $\sigma_c(A)$, l'ensemble*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \ \textit{est injectif} \ \ \textit{et} \ R(\lambda I - A)\textit{est} \ \ \textit{dense dans} \ E\}.$$

Corollaire 1.5.1
$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A).$$

Chapitre 2

Théorie sur des opérateurs normaux

2.1 Opérateurs adjoints

Théorème 2.1.1 (représentation de Riesz) *soit f une forme linéaire sur espace de Hilbert H . Alors il existe un vecteur et un seul $y \in H$, tel que pour tous $\varphi \in H$*

$$f(\varphi) = \langle \varphi, y \rangle .$$

Théorème 2.1.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors il existe un seul opérateur linéaire borné noté A^* défini de H dans H par*

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \text{ et } \psi \in H .$$

L'opérateur A^* appelé adjoint de A.

Preuve.

1. **Existence** On définit la forme linéaire borné F de H dans $\mathbb{k}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), pour tout φ et $\psi \in H$, comme suit

$$\begin{array}{rcl} H & \to & \mathbb{k} \\ \varphi & \to & F(\varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle . \end{array}$$

F est linéaire car, pour tout φ_1, φ_2 et $\psi \in H$ et $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{k}$, on a

$$\begin{aligned} F(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) &= \langle A(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2), \psi \rangle , \\ &= \langle A(\lambda_1\varphi_1) + A(\lambda_2\varphi_2), \psi \rangle , \\ &= \lambda_1 \langle A\varphi_1, \psi \rangle + \lambda_2 \langle A\varphi_2, \psi \rangle , \\ &= \lambda_1 F(\varphi_1) + \lambda_2 F(\varphi_2). \end{aligned}$$

F est borné car, pour tout φ et $\psi \in H$, on a

$$\begin{aligned} |F(\varphi)| &= |\langle A\varphi, \psi \rangle| \\ &\leq \|A\| \, \|\varphi\| \, \|\psi\| . \end{aligned}$$

D'après théorème de Riesz,il existe un élément unique $f \in H$, telque

$$F(\varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, f \rangle .$$

On défini un opérateur noté A^*de H vers H tel que

$$A^*\psi = f,$$

ou encore

$$F(\varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle .$$

2. **Unicité** Supposons qu'il ya deux opérateurs adjoint de l'opérateur A, A_1^* et A_2^* alors, pour tous φ et $\psi \in H$

$$\begin{aligned} \langle A\varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, A_1^*\psi \rangle = \langle \varphi, A_2^*\psi \rangle , \\ \langle \varphi, A_1^*\psi \rangle &= \langle \varphi, A_2^*\psi \rangle . \end{aligned}$$

D'ou

$$A_1^*\psi = A_2^*\psi,$$

Alors

$$A_1^* = A_2^*.$$

3.

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

On a

$$\begin{aligned}\|A^*\psi\|^2 &= \langle A^*\psi, A^*\psi\rangle,\\ &= \langle A^*A^*\psi, \psi\rangle,\\ &\leq \|A^*\|\,\|A^*\psi\|\,\|\psi\|,\end{aligned}$$

$$\|A^*\psi\| \leq \|A^*\|\,\|\psi\|$$

Ou encore

$$\|A^*\| \leq \|A\|.$$

De plus on à

$$\begin{aligned}\|A\varphi\|^2 &= \langle A\varphi, A\varphi\rangle,\\ &= \langle A^*A\varphi, \varphi\rangle,\\ &\leq \|A^*A\varphi\|\,\|\varphi\|,\\ &\leq \|A^*\|\,\|A\varphi\|\,\|\varphi\|,\end{aligned}$$

$$\|A\varphi\| \leq \|A^*\|\,\|\varphi\|.$$

Alors

$$\|A\| \leq \|A^*\|.$$

D'ou légalité

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

■

1. Soit l'opérateur Shift $S : l^2 \longrightarrow l^2$ définis par : $S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$, $x_n, y_n \in l^2$

$$\begin{aligned}
\langle S^*(x_n), (y_n) \rangle &= \langle (x_n), S(y_n) \rangle , \\
&= \langle (x_1, x_2, ..), (0, y_1, y_2, ...) \rangle , \\
&= x_2 \overline{y_1} + x_3 \overline{y_2} + ..., \\
&= \langle (x_2, x_3, ..), (y_1, y_2, ...) \rangle .
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$S^*(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ..).$$

2. Soit

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
M^* &= \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \\
&= \overline{M}^t
\end{aligned}$$

Définition 2.1.1 *Si $A = A^*$ L'opérateur A est dit auto-adjoint ou(**hermitien**), c'est à dire*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle .$$

Exemple 2.1.1 *1. Considérons l'opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ défini par*

$$(Ax)(t) = e^{-|t|} x(t)$$

A est un opérateur borné auto-adjoint. on Effet

$$\begin{aligned}
\langle Ax, y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} x(t) \overline{y(t)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\overline{e^{-|t|} y(t)} \right] \\
&= \langle x, Ay \rangle .
\end{aligned}$$

2. L'opérateur $AA^* \in \mathcal{L}(H)$ *est auto-adjoint, pour tous* $A \in \mathcal{L}(H)$, *car*

$$(AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^*.$$

Définition 2.1.2 (opérateur anti auto-adjoint) *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$, *on dit que* A *est un opérateur* ***anti auto-adjoint*** *si on a la relation*

$$A = -A^*.$$

Ou encore, pour tout φ, $\psi \in H$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = -\langle \varphi, A\psi \rangle .$$

Proposition 2.1.1 *Si* $A \in \mathcal{L}(H)$,*alors* $\|A\| = \|A^*\| = \|AA^*\|^{1/2}$.

Preuve. pour $\varphi \in H$ avec $\|\varphi\| \leq 1$ on a

$$\begin{aligned} \|A\varphi\|^2 &= \langle A\varphi, A\varphi \rangle , \\ &= \langle A^*A\varphi, \varphi\rangle, \\ &\leq \|A^*A\varphi\| \|\varphi\| , \\ &\leq \|A^*\| \|A\| , \end{aligned}$$

on trouve le suprimum de φ, alors

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &\leq \|A^*\| \|A\| , \\ \|A\| &\leq \|A^*\| . \end{aligned}$$

On remplaçantt A par A^*, on obtient

$$\|A^*\| \leq \|A^{**}\| = \|A\| .$$

Alors

$$\|A\| = \|A^*\| .$$

■

Théorème 2.1.3 *Soit* $A, S \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\alpha \in \mathbb{k}$

1. $(\alpha A + S)^* = \overline{\alpha} A^* + S^*$.
2. $(SA)^* = A^* S^*$.
3. $(A^*)^* = A$.
4. $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$.
5. A admet un inverse A^{-1}alors l'opérateur A^* aussi admet un inverse $(A^*)^{-1}$ de plus
$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Preuve. 1.

$$\begin{aligned} \langle x, (\alpha A + S)^* y\rangle &= \langle (\alpha A + S)x, y\rangle, \\ &= \langle (\alpha A)x, y\rangle + \langle Sx, y\rangle, \\ &= \langle x, \overline{\alpha} A^* y\rangle + \langle x, S^* y\rangle. \end{aligned}$$

Alors

$$(\alpha A + S)^* = \overline{\alpha} A^* + S^*.$$

2.

$$\begin{aligned} (SA)^* &= \langle x, (SA)^* y\rangle, \\ &= \langle (SA)x, y\rangle, \\ &= \langle Ax, S^* y\rangle, \\ &= \langle x, A^* S^* y\rangle, \\ &= A^* S^*. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \langle Ax, y\rangle &= \langle x, A^* y\rangle, \\ &= \overline{\langle A^* y, x\rangle}, \\ &= \overline{\langle y, (A^*)^* x\rangle}, \\ &= \langle (A^*)^* x, y\rangle; \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$(A^*)^* = A.$$

4.

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2 .$$

D'apré la définition de la norme d'un opérateur, on à

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle , \\
&= \langle A^*Ax, x \rangle \leq \|A^*Ax\| \, \|x\| \leq \|A^*A\| \, \|x\|^2 , \\
\|A\|^2 &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|^2 \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|A^*A\| \, \|x\|^2 \leq \|A^*A\| .
\end{aligned}$$

5.

A est inversible on a

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

alors

$$(AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^*.$$

On a

$$I^* = I,$$

$\Rightarrow$

$$(A^{-1})^*(A)^* = (A)^*(A^{-1})^* = I.$$

Alors il existe inverse de A^* telque

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

■

Théorème 2.1.4 *Si* $A \in \mathcal{L}(H)$, *alors*

1. $\ker(A) = (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp}$.
2. $\ker(A^*) = (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$.
3. $\mathrm{Im}(A^*) = (\ker(A))^{\perp}$.
4. $\mathrm{Im}(A) = (\ker(A^*))^{\perp}$.

Preuve. Pour tout $y \in H$ et $A^*y \in (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp}$ on a

1. $x \in \ker(A)$, alors

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle = 0.$$

$\Rightarrow x \in (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp}$, c'est à dire

$$\ker(A) \subset (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp}.$$

2. $z \in (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp}$, alors

$$\langle z, A^*y \rangle = \langle Az, y \rangle = 0,$$

$\Rightarrow z \in \ker(A)$, cest à dire

$$(\mathrm{Im}(A^*))^{\perp} \subset \ker(A).$$

Alors

$$\ker(A) = (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp}.$$

Remplacent (a) par A^* on obtient (b) .

On applique l'orthogonal à l'égalitie (a) pour obtenir (c).

On applique l'orthogonal à l'égalitie (b) pour obtenir (d).

■

2.2 Opérateurs normaux

Définition 2.2.3 *on dit qu'un opérateur $B \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal si*

$$B^*B = BB^*.$$

Proposition 2.2.2 *soit B un opérateur normal et inversible, alors l'inverse B^{-1}est un opérateur normal.*

Preuve. pour prouver que B^{-1} est normal on va démontrer l'égalité suivante

$$(B^{-1})^*(B^{-1}) = (B^{-1})(B^{-1})^*,$$

on a

$$(B^{-1})^*(B^{-1}) = (B^*)^{-1}(B^{-1}).$$

$$\begin{aligned}(B^*)^{-1}(B^{-1}) &= (BB^*)^{-1} = (B^*B)^{-1}, \text{ [car } B \text{ est normal]} \\ &= B^{-1}(B^*)^{-1} = B^{-1}(B^{-1})^*.\end{aligned}$$

Alors B^{-1} est un opérateur normal . ■

Proposition 2.2.3 *Soit B est normal, alors B^n est aussi normal pour tous n appartenant a $\mathbb{N}^*$.*

Preuve.

1. B est normal, d'où $BB^* = B^*B$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (BB^*)^n = (B^*B)^n \\ &\Rightarrow (B)^n(B^*)^n = (B^*)^n(B)^n \\ &\Rightarrow (B)^n(B^n)^* = (B^n)^*(B)^n\end{aligned}$$

i.e $B^{\ n}$ est normal, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

■

Remarque 2.2.1 *L'opsite est faux , c'est à dire*

$$B^n \quad normal \nRightarrow B \quad normal$$

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .on a $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est normal mais B n'est pas normal .

Proposition 2.2.4 *La somme des opérateurs normuax n'est pas géneralement normaux.*

Proposition 2.2.5 *Soit $B \in \mathcal{L}(H)$, est normal alors*

$$Ker(B) \oplus \overline{Im(B)} = H.$$

Preuve. nous avons

$$Ker(B^*) = (ImB)^{\perp},$$

Alors

$$(Ker(B^*))^{\perp} = ((ImB)^{\perp})^{\perp} = (ImB),$$

Donc

$$H = Ker(B^*) \oplus (Ker(B^*))^{\perp}.$$

■

Proposition 2.2.6 *Quelques classes des opérateurs normaux*

Soit $B \in \mathcal{L}(H)$ est dit

1. n-normal si $B^n B^* = B^* B^n$.
2. Hyponormal si $BB^* \leq B^* B$.
3. Quasinormal si $B(B^* B) = (B^* B)B$.
4. Co-hyponormal si $BB^* \geq B^* B$.
5. Semi-hyponormal si $(BB^*)^{\frac{1}{2}} \leq (B^* B)^{\frac{1}{2}}$.
6. p-hyponormal si $(BB^*)^p \leq (B^* B)^p$, $0 \leq p \leq 1$.
7. n-power-hyponormal si $B^n B^* \leq B^* B^n$.
8. Log-hyponormal si B est inversible et $\log(BB^*) \leq \log(B^* B)$

2.3 Opérateurs isométriques, unitaires

Soient E, F deux espaces de Hilbert et $U \in \mathcal{L}(E, F)$

1. U est appelé **isométrique** si:

$$\|U(x)\| = \|x\|, \forall x \in E.$$

2. U est appelé **unitaire** s'il est inversible et $U^* = U^{-1}$, autrement on dit

$$U^*U = UU^* = Id_E.$$

Proposition 2.3.7 *Pour tous U est unitaire, l'opérateur U^*BU est normal si et seulement si B est normal.*

Preuve. Supposons que B est normal, alors

$$\begin{aligned}(U^*BU)^*(U^*BU) &= (BU)^*U(U^*BU),\\ &= U^*B^*UU^*BU,\\ &= U^*B^*BU.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(U^*BU)(U^*BU)^* &= U^*BUU^*B^*U,\\ &= U^*BB^*U.\end{aligned}$$

D'ou

$$(U^*BU)^*(U^*BU) = (U^*BU)(U^*BU)^*.$$

Si U^*BU est normal ,alors

$$U^*B^*BU = U^*BB^*U.$$

On multiple cette égalité à gauche par U^* et à droite par U, on obtient

$$B^*B = BB^*.$$

D'ou B est normal. ■

Remarque 2.3.2 *1. L'opérateur unitaire est normal*

$$U^*U = I = UU^*$$

2. L'opérateur antiauto-adjoint est normal

$$B^*B = BB^* = -B^2$$

Proposition 2.3.8 *$B \in \mathcal{L}(H)$ est normal si et seulement si, pour tous $\varphi \in H$ on a*

$$\|B\varphi\| = \|B^*\varphi\| .$$

Preuve. Soit $B \in \mathcal{L}(H)$, notons que

$$\begin{aligned} B \text{ est normal} &\iff B^*B - BB^* = 0, \\ &\iff \langle (B^*B - BB^*)\varphi, \varphi \rangle = 0, \\ &\iff \langle B^*B\varphi, \varphi \rangle = \langle BB^*\varphi, \varphi \rangle , \\ &\iff \langle B\varphi, B\varphi \rangle = \langle B^*\varphi, B^*\varphi \rangle , \end{aligned}$$

Alors

$$B \text{ est normal} \iff \|B\varphi\| = \|B^*\varphi\| , \quad \text{pour tous } \varphi \in H.$$

■

Théorème 2.3.5 *Soit $B \in \mathcal{L}(H)$, l'opérateur B est auto-adjoint si et seulement si*

$$\langle B\varphi, \varphi \rangle \in \mathbb{R}, \text{ pour tous } \varphi \in H.$$

Preuve. Soit $\varphi \in H$, alors

$$\begin{aligned} \langle B\varphi, \varphi \rangle - \overline{\langle B\varphi, \varphi \rangle} &= \langle B\varphi, \varphi \rangle - \langle \varphi, B\varphi \rangle, \\ &= \langle B\varphi, \varphi \rangle - \langle B^*\varphi, \varphi \rangle, \\ &= \langle (B - B^*)\varphi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Premièrement si $\langle B\varphi, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$, pour tous $\varphi \in H$, alors

$$\langle B\varphi, \varphi \rangle - \overline{\langle B\varphi, \varphi \rangle} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle (B - B^*)\varphi, \varphi \rangle &= 0, \\ &\Rightarrow B - B^* = 0, \\ &\Rightarrow B = B^*. \end{aligned}$$

Alors B est auto adjoint .

Deusiément si B est auto adjoint, on a

$$\langle (B - B^*)\varphi, \varphi \rangle = 0.$$

C'est à dire

$$\langle B\varphi, \varphi \rangle = \overline{\langle B\varphi, \varphi \rangle}.$$

Donc $\langle B\varphi, \varphi \rangle$ est réel pour tous $\varphi \in H$. ■

2.4 Théorème de Fuglede-putnam

Théorème 2.4.6 *Soient A et B deux opérateurs bornés sur un Hilbert H, tels que $AB = BA$ où B est normal.*

Alors

$$AB^* = B^*A.$$

Remarque 2.4.3 *Si on prend $A = B$. Si A est auto adjoint, le théorem est trivial*

$$AB^* = (BA)^* = (AB)^* = B^*A.$$

La généralisation au cas de deux opérateurs normaux est donne par Putnam

Théorème 2.4.7 (Putnam - 1951) *Soient A, M, B trois opérateurs bornés sur un Hilbert H, avec B, M sont normaux et*

$$MA = AB.$$

Alors

$$M^*A = AB^*.$$

Théorème 2.4.8 *Soit A et B Sont normaux et commute avec eux et $\alpha \in \mathbb{k}$, alors*

1. AB est normal .
2. $(A + B)$ est normal .
3. αB est normal .

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}(AB)(AB)^* &= (AB)(B^*A^*),\\ &= ABB^*A^*.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}(AB)^*(AB) &= (B^*A^*)(AB),\\ &= B^*A^*AB.\end{aligned}$$

Lorsque A, A^*, B et B^* commute avec tous les autres, en conséquence de théorème de Fuglede-putnam, les deux produits sont égaux.

2.

$$\begin{aligned}(A+B)(A+B)^* &= (A+B)(A^*+B^*),\\ &= AA^*+AB^*+BA^*+BB^*.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}(A+B)^*(A+B) &= (A^*+B^*)(A+B),\\ &= A^*A+A^*B+B^*A+B^*B.\end{aligned}$$

Pour le méme en consiquence de théoreme de Fuglede-putnam Les valeurs sont les mémes .

3.

$$(aB)(aB)^* = (aB)(\overline{a}B^*) = a\overline{a}BB^*.$$

Et

$$(aB)^*(aB) = \overline{a}B^*aB = \overline{a}aB^*B.$$

Puisque B est normal les deux valeurs sont égaux .

■

Chapitre 3

Théorie sur des opérateurs positifs

3.1 Opérateurs positifs

Définition 3.1.1

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, dit que A est un opérateur positif que l'on note $A \geq 0$,si pour tous $\varphi \in H$.

On a

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

Proposition 3.1.1 *soient A_1 et A_2 deux operateurs linéaire positifs appartenant à $\mathcal{L}(H)$ alors, toute combinaison linéaires $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ à coefficient réels $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ est un opérateur positif.*

Preuve. pours tout $\varphi \in H$, on a

$$\langle (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\varphi, \varphi \rangle = \alpha_1 \langle A_1\varphi, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle A_2\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

■

Proposition 3.1.2 *soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert dans lui même, alors A est un operateur auto-adjoint.*

Preuve. En effet, un opérateur A est auto-adjoint si et seulement si pour tout $\varphi \in H$ on a $\langle A\varphi, \varphi\rangle$ un réel. ■

Lemme 3.1.1 *soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert dans lui même alors, les opérateurs AA^*et A^*A sont des opérateurs positifs.*

Preuve. pour tous $\varphi \in H$ on à

$$\begin{aligned} \langle A^*A\varphi, \varphi\rangle &= \langle A\varphi, A\varphi\rangle, \\ &= \|A\varphi\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

De méme

$$\begin{aligned} \langle AA^*\varphi, \varphi\rangle &= \langle A^*\varphi, A^*\varphi\rangle, \\ &= \|A^*\varphi\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

■

Proposition 3.1.3 *soit A un opérateur positif et inversible, alors l'inverse A^{-1} est un opérateur positif.*

Preuve. soit $y \in D(A^{-1})$ on suppose que $y = Ax$ telque $x \in H$ alors
$\langle A^{-1}y, y\rangle = \langle A^{-1}Ax, Ax\rangle = \langle x, Ax\rangle \geqslant 0.$
D'ou $A^{-1} \geq 0.$ ■

Théorème 3.1.1 *soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert dans lui même Alors, l'opérateur puissance A^n est un opérateur positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. $n = 2m$ on a

$$\begin{aligned} \langle A^n\varphi, \varphi\rangle &= \langle A^mA^m\varphi, \varphi\rangle, \\ &= \langle A^m\varphi, (A^m)^*\varphi\rangle, \\ &= \langle A^m\varphi, (A^m)\varphi\rangle, \\ &= \|A^m\varphi\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si n impaire $n = 2m + 1$

$$\begin{aligned}
\langle A^n\varphi, \varphi\rangle &= \left\langle A^{2m+1}\varphi, \varphi\right\rangle, \\
&= \langle A^m A(A^m\varphi), \varphi\rangle, \\
&= \langle A(A^m\varphi), (A^m\varphi)\rangle, \\
&= \langle A\psi, \psi\rangle.
\end{aligned}$$

Puisque A est positif on a $\langle A\psi, \psi\rangle \geq 0$ avec $\psi = A^m\varphi$. ■

Théorème 3.1.2 (Cauchy shwartz généralisée) *soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert dans lui même, Alors pour tous φ,$\psi \in H$ on a*

$$|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2 \leq \langle A\varphi, \varphi\rangle \langle A\psi, \psi\rangle.$$

Preuve. Pour tous φ,$\psi \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), (\varphi - \lambda\psi)\rangle \geq 0.$$

D'autre part

A est auto-adjoint $\langle A\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, A\varphi\rangle$

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), (\varphi - \lambda\psi)\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \lambda \langle A\psi, \varphi\rangle - \overline{\lambda} \langle A\varphi, \psi\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle A\psi, \psi\rangle,$$

posons $\lambda = \frac{|\langle A\varphi,\psi\rangle|}{\langle A\psi,\psi\rangle}$, alors

$$\begin{aligned}
\langle A\varphi, \varphi\rangle - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} + \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{(\langle A\psi, \psi\rangle)^2} \langle A\psi, \psi\rangle &\geq 0, \\
\langle A\varphi, \varphi\rangle - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} &\geq 0,
\end{aligned}$$

On obtient

$$|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2 \leq \langle A\varphi, \varphi\rangle \langle A\psi, \psi\rangle.$$

■

3.2 Racine carrée d'un opérateur positif

3.2.1 Opérateur racine carrée

Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert dans luis même, alors il existe un unique opérateur positif S tel que

$$S^2 = A,$$

On note

$$S = A^{1/2}.$$

S est dit **racine carrée** de l'opérateur A.

Théorème 3.2.3 *Soit$A$ un opérateur linéaire positif défini sur un espace deHilbert dans luis méme, alors A admet une* ***racine carrée*** *positive* ***unique***

De plus si A commute avec T borné c'est à dire $AT = TA$ alors T commute avec S

$$ST = TS,$$

Ou bien

$$A^{1/2}T = TA^{1/2}.$$

3.3 Produit de deux opérateurs positifs

Théorème 3.3.4 *SiA et T deux opérateurs continus positifs tels que*

$$AT = TA.$$

Alors AT est positif .

Preuve. D'aprés le théoreme précédent,l'opérateur $S^2 = A$ comute avec l'opérateur T c'est à dire $ST = TS$, alors pour tout $\varphi \in H$, On a

$$\begin{aligned} \langle AT\varphi, \varphi\rangle &= \left\langle S^2T\varphi, \varphi\right\rangle, \\ &= \langle ST\varphi, S\varphi\rangle, \\ &= \langle T(S\varphi), S\varphi\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\langle AT\varphi, \varphi\rangle \geq 0.$$

D'ou

$$AT \geq 0.$$

■

Chapitre 4

Relation entre opérateurs positifs et normaux

4.1 Racine carée d'un opérateur normal

Théorème 4.1.1 *Soit $B \in \mathcal{L}(H)$telque $T \geq 0$,alors il existe un opérateur A avec $T = A^2$, de plus*

$$T \text{ est normal} \iff T^{1/2} = A \text{ est normal.}$$

Preuve. B est normal alors

$$\begin{aligned} T^*T &= TT^* \iff (A^2)^*(A^2) = (A^2)(A^2)^* \\ &\iff (A^*)^2(A^2) = (A^2)(A^*)^2, \\ &\iff (A^*A)^2 = (AA^*)^2, \\ &\iff A^*A = AA^*. \end{aligned}$$

Donc $A = T^{1/2}$ est normal. ∎

4.2 Factorisation de Schur

Supposons que W est un espace de dimenssion finie et $A \in \mathcal{L}(W)$complex, alors A a une matrice triangulaire superieure.

L'idiée est de factoriser A comme suite

$$A = PTP^{-1},$$

ou P est inversible à des vecteurs propres,et T est une matrice triangulaire superieure.

Théorème 4.2.2 *Soient A, U et T apartenent à M_n ,oùT est **triangulaire superieure,** et U une matrice **unitaire,** alors A peut étre décomposé sous la forme*

$$A = UTU^{-1},$$

d'autre terme, on peut aussi écrire

$$A = UTU^{*}, \left[U \text{ est unitaire } \text{ c'est à dire } U^{-1} = U^{*}\right]$$

Théorème 4.2.3 *Toutes les matrices carrées admettent une factorisation de Schur.*

Preuve. Existance d'une factorisation de schur

Pour une matrice 1×1, la factorisation est triviale.

Supposons quelle est existe pour une matrice de taille $n-1$, et on prond une matrice A carrée de taille n, y un vecteur propre, et la valeur propre associée.On considere un matrice unitaire Q

$$Q = \begin{pmatrix} y & | & ... \end{pmatrix}.$$

Alors

$$Q^{*}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

ou' B est un vecteur ligne de taille $n-1$ et C une matrice carée de taille $n-1$.

Par hypothese on a

$$C = VTV^{*},$$

alors la matrice

$$U = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

est une matrice unitaire,et

$$\begin{aligned} U^*AU &= \left(Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right)^* AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}^* Q^*AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & VB \\ 0 & V^*CV \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & VB \\ 0 & T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Remarque 4.2.1 *Tous lesopérateurs normaux de dimenssin fini à une racine carrée normale,*

Si T est normal alors

$$\begin{aligned} T &= UDU^*, \\ S &= UD^{1/2}U^*, \end{aligned}$$

est une matrice normal telque

$$S^2 = T$$

Théorème 4.2.4 *Si A une matrice carrée réel à valeurs propres **réel**,alors il exsiste une matrice orthogonal Q et une matrice **triongulaire superieur** T, telque*

$$A = QTQ^T.$$

Preuve.

$$A = QTQ^T \iff AQ = QT,$$

soit q_1 un vecteur propre,associer à une valeur propre λ_1, et soit $q_2 ... q_n$ des vecteurs ortonormals qui sont orthogonal à q_1

Soit $Q_1 = [q_1 ... q_n]$, alors $Q_1^T Q_1 = I$, et

$$Q_1^T A Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

OuA à des valeurs propres $\lambda_2, ..., \lambda_n$ car

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det Q_1^T \det(A - \lambda I) \det Q_1, \\
&= \det(Q_1^T (A - \lambda I) Q_1), \\
&= \det(Q_1^T A Q_1 - \lambda Q_1^T Q_1), \\
&= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & ... \\ 0 & A_2 - \lambda I \end{pmatrix}, \\
&= (\lambda_1 - \lambda) \det(A_2 - \lambda I).
\end{aligned}$$

Alors A à des vleurs propres noté $\lambda_2, ..., \lambda_n$.

Supposons que le théoreme est vrais pour $n = k$, alors maitenent on và démentrer le théoreme pour $n = k + 1$ (notons que le théoreme est triviale pour $n = 1$)

Alors pour $n = k + 1$ on trouve $A_2 = Q_2 T_2 Q_2^T$

Soit

$$Q = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} AQ &= AQ_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}, \\ &= Q_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}, \\ &= Q_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... \\ 0 & A_2Q_2 \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... \\ 0 & Q_2T_2 \end{pmatrix}, \\ &= Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = QT, \end{aligned}$$

Ou T une matrice triangulaire, alors $AQ = QT$,ou bien $A = QTQ^T$ ■

Proposition 4.2.1 *Si A est* ***normal*** *alors T est* ***diagonalisable*** *et les éléments diagonaux de UTU^{-1} sont les valeurs propres de A.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
A \text{ est normal} &\Rightarrow A^*A = AA^* \\
&\Rightarrow (UTU^{-1})^*(UTU^{-1}) = (UTU^{-1})(UTU^{-1})^*, \\
&\Rightarrow (U^{-1})^*(T^*)(U^*)(UTU^{-1}) = (UTU^{-1})(U^{-1})^*(T^*)(U^*), \\
&\Rightarrow U^{-1*}T^*U^*UTU^{-1} = UTU^{-1}U^{-1*}T^*U^*, \\
&\Rightarrow (U^{-1})^*T^*TU^{-1} = UTT^*U^*, \quad [\text{car } U \text{ est unitaire }].
\end{aligned}$$

On multipe l'équation à gauch par U^{-1} on obtient

$$T^*TU^{-1} = TT^*U^*,$$

maintenant on multipe cette équation à droit par U, alors

$$T^*T = TT^*.$$

Les deux membres de l'équation sont équivalents si et seulement si la matrice T doit étre diagonalisable. ∎

Remarque 4.2.2 *Tous les opérateurs normaux de dimenssin fini à une racine carrée normale,c'est à dire*

Si T est normal alors

$$\begin{aligned}
T &= UDU^*, \\
S &= UD^{1/2}U^*,
\end{aligned}$$

est une matrice normal telque

$$S^2 = T$$

Proposition 4.2.2 *Si A est défine positive, alors T une matrice diagonalisable à digonal positif c'est à dire les valeurs propres* associées à T sont positives.

De plus A est strictement défine positive, alors les valeurs propres soient strictement positives

Conclusion

On notres étude de la relation entres les opérateurs positifs et opérateurs compact normaux dans les espaces de Hilbert on a traiter premiérement des notions sur les espaces fonctionnels et sur les définitions et le propriétésdes opérateurs

Comme on a aussi triater dans Le deuxième chapitre la, notion de la théorie sur les opérateurs adjoints et normaux et leurs propriétés ainsi on s'intéresse au théorème de Fuglede Putnam dans le cas borné .

Le troisième chapitre on présente les opérateurs positifs et leurs propriétés, et la racine carrée d'un opérateur positif.

nous interresse dans le dernier chapitre à les espaces de dimension fini pour démentrer q'une matrice A carrée à une factorisation de Schur c'est à dire

$$A = UTU^{-1},$$

ou Uest une matrice unitaire et T matrice triangulaire,

est normal alors T est diagonalisable, et à diagonal positf si A est de plus positif.

Bibliographie

[1] G.AUBRUN, Théorie des Opérateurs, cours M1 Mathématiques Université de la Réunion,http://math.univ-lyon1.fr/~aubrun/enseignement/operateurs/cours.pdf .

[2] S. AXLER, Linear algebra done right, Cham heidelberg New York Dordrecht London, 2015.

[3] P. BARTLETT, The Schur decomposition, UCSB 2014.http://web.math.ucsb.edu/~padraic/ucsb_2013_14/math108b_w2014/math108b_w2014_lect

[4] C.Chellali, Commutativité à un facteur près, Mémoire de Doctorat, université d'oran1Ahmed Ben Bella, 2015. http://theses.univ-oran1.dz/these.php?id=16201523t

[5] M.Guesba, Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, Mémoire de Doctorat, université de M'sila, 2017.

[6] R. A. HORNET et C. JOHNSON, Matrix analysis, Cambridge University press 2013.

[7] A.Khirani, résolution des équations intégrales non lineare type volterra, Mémoire de Magistère, université de M'sila ,2011.

http://www.univ-msila.dz/fr/

[8] E.Kowalski, Spectral theory in Hilbert spaces, https://people.math.ethz.ch/~kowalski/spectral-theory.pdf .

[9] B.Maurey, Cours d'Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale, année 2001-2002, https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/ts012/poly/index.html.

[10] M.Nadir, Operators Theory Courses, université de M'sila, 2017.

http://www.mostefanadir.com/Operators%20Theory.htm

[11] M.Nadir, Functional Analysis Courses, université de M'sila, 2017.

http://www.mostefanadir.com/Functional%20Analysis.htm

[12] L.N TREFETHEN and D. BAU III. Numerical linear algebra, volume 50.Siam, 1997

[13] M. ZERNER, Quelques propriétés spectrales des opérateurs positifs, journal of functional analysis,vol 72, 381-417 (1987).

الملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة العلاقة بين المؤثرات الموجبة والمؤثرات الناظمية في فضاءات إيلبار ايضا قمنا بمعالجة نظريات مهمة جدا فيما يخص المؤثرات مثل نظرتي فلادج بوتنام ونظرية شور .

الكلمات المفتاحية

المؤثرات الموجبة، المؤثرات الناظمية، فضاءات إيلبار، فلادج بوتنام، شور.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions les opérateurs normaux et positifs dans les espaces de Hilbert, et nous allons traiter quelques théorème très important dans la théorie des opérateurs comme le théorème de Fuglede Putnam et le théorème de Schur.

Mots clés :

Les opérateurs normaux ; Les opérateurs positifs, ;Espaces de Hilbert, Le théorème de Fuglede Putnam ; Le théorème de Schur.

Abstract

In this work, we study the normal and positive operators in the Hilbert spaces, and we will treat some very important theorem in the theory of the operators ie the theorem of Fuglede Putnam and the theorem of Schur.

Keywords:

Positive operators, normal operators, Hilbert spaces, theorem of Fuglede, theorem of Schur