



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
**Université Mohamed Boudiaf de M'sila**  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Analyse Mathématiques et numérique

## Thème

---

*Quadratic integral equations in Orlicz spaces*

---

Présentée par :

Legoui Aya

Soutenu publiquement le : 14/06/2025.

Devant le jury composé de :

<i>Mr</i> NADIR Mostefa	Prof,	Université de M'sila	<b>Président.</b>
<i>Mr</i> GAGUI Bachir	M.C.A,	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
<i>Mr</i> DILMI Mustapha	M.C.B,	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2024/2025

---

# REMERCIEMENTS

Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux Avant toute chose, louange et gratitude reviennent à Allah pour m'avoir accordé le succès d'atteindre ce haut niveau académique et pour avoir facilité ma présence ici aujourd'hui afin de présenter mon mémoire de Master. Ma réussite n'est que par la grâce d'Allah, le  
Tout-Puissant.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué à l'achèvement de ce mémoire. En premier lieu, ma reconnaissance la plus sincère va au Professeur Dr. Gagui Bachir pour ses conseils précieux, son soutien constant, ses encouragements continus et sa patience à mon égard.

J'apprécie profondément tous ses efforts éclairants tout au long du processus de supervision. À lui, j'adresse mes plus vifs remerciements et toute ma reconnaissance.

Je remercie également les membres du corps enseignant du Département de Mathématiques de l'Université Mohamed Boudiaf de M'sila pour les connaissances et la sagesse qu'ils m'ont transmises durant mes années d'études.

Je n'oublie pas d'exprimer ma profonde gratitude à ma famille et à mes amis pour leur encouragement et leur soutien.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes ayant contribué, directement ou indirectement, à l'achèvement de ce mémoire, en espérant avoir été à la hauteur de cette tâche et que ce travail saura trouver grâce à vos yeux et mériter votre appréciation.

Louange à Allah, Seigneur des mondes.

---

# DÉDICACE

Qui a dit "Je l'ai atteint"

Le voyage n'a pas été court ni facile, Le savoir n'a pas été acquis facilement, et le chemin  
n'a pas été pavé de facilité,

Mais je l'ai fait, et j'ai réalisé ce que je voulais.

Louange à Allah, par amour, gratitude et reconnaissance. Par Sa grâce, me voici  
aujourd'hui, témoignant d'un rêve longtemps attendu, désormais réalisé, un rêve dont je  
suis fier.

À mon père, qui m'a appris les valeurs de la patience et du travail acharné. Il est la raison  
de mon succès et mon premier modèle. Qu'Allah te garde et fasse de toi mon soutien tout  
au long de ma vie. Merci pour tout ce que tu m'as donné.

À ma mère, source de tendresse et de soutien constant. Merci pour ton dévouement et tes  
soins à chaque étape de ma vie.

À ma sœur, qui a toujours été à mes côtés, partageant les bons moments et les moments  
difficiles. Merci pour ta sincérité et ton soutien inébranlable.

À mes frères, merci pour votre présence merveilleuse et votre soutien dans ma vie. À  
mon cher mari, qui a été pour moi un soutien et une inspiration, mon moteur pour  
accomplir tout ce que j'ai atteint.

À ma petite chérie, qui a été la source d'un nouvel espoir dans ma vie, et à la lumière de  
mes yeux qui m'inspire à donner le meilleur de moi-même chaque jour. Tout ce que je  
fais, c'est pour toi, pour que tu sois fière de moi comme je suis fier de toi.

Je dédie ce travail à vous tous, avec amour et reconnaissance.

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Notations</b>	<b>2</b>
<b>1 Espace fonctionnelle d'Orlicz</b>	<b>5</b>
1.1 N-fonction . . . . .	5
1.2 Espace fonctionnel de Banach . . . . .	6
1.3 Espace modulaire . . . . .	7
1.4 Condition $\Delta_2$ . . . . .	10
1.5 les classes des espaces d'Orlicz . . . . .	11
1.5.1 Comparaison de classes . . . . .	13
1.6 Structure de l'espace d'Orlicz $L^\varphi(\Omega)$ . . . . .	13
1.6.1 Norme d'Orlicz . . . . .	14
1.6.2 Norme de Luxemburg . . . . .	15
1.6.3 Extension de l'inégalité de Hölder . . . . .	15
1.7 Inégalité de Jensen . . . . .	16
<b>2 Mesure de non compacité</b>	<b>17</b>
2.1 Espaces de Banach . . . . .	17
2.1.1 Espaces métriques . . . . .	17
2.1.2 Espace complet . . . . .	18
2.2 Principes fondamentaux des opérateurs . . . . .	19
2.2.1 Compacité . . . . .	19
2.2.2 Compacité dans $C(G)$ . . . . .	20
2.3 Mesure de non compacité . . . . .	20
2.3.1 Mesure de non compacité en général . . . . .	21
2.4 Mesure de non-compacité de Kuratowskii . . . . .	22
2.5 Mesure de non-compacité de Hausdorff : . . . . .	24
2.6 Mesure de non compacité des opérateurs . . . . .	25
2.7 Quelques théorème de point fixe . . . . .	26
<b>3 Equations intégrales</b>	<b>29</b>
3.1 Equation intégrale . . . . .	29
3.2 Classifications des équations intégrales . . . . .	29

3.2.1	Equations intégrales linéaires . . . . .	30
3.2.2	Equations intégrales non-linéaires . . . . .	30
3.2.3	Equations intégrales de Urysohn et de Hammerstein . . . . .	33
3.3	Opérateur non linéaire de superposition . . . . .	34
3.4	Application : existence de solution . . . . .	35
3.4.1	Le cas de la condition $\Delta'$ . . . . .	36

---

# NOTATIONS

$ E $	Mesure de l'ensemble $E$ .
$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien réel de dimension $n$ .
p.p	presque partout.
$supp(f)$	support de la fonction $f$
L'espace d'Orlicz	$L(\Omega) = \left\{ u : \text{fonction mesurable sur } \Omega \mid \exists \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left(\frac{u}{\lambda}\right) dx < +\infty \right\}$
La norme de Luxemburg	$\ u\  = \ u\ _{L(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \int_{\Omega} \left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$
$S(, r)$	La sphère unité.
$B(, r)$	La boule unité
Mesurable et finies p.p sur $\Omega$	$L^{\varphi}(\Omega) = \left\{ u : \text{fonction mesurable sur } \Omega \mid \exists \lambda > 0 : \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx < +\infty \right\}$
Muni de la norme de Luxemburg	$\ u\ _{\varphi} = \ u\ _{L^{\varphi}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$

---

# INTRODUCTION

Les équations intégrales constituent l'un des domaines essentiels de l'analyse mathématique, jouant un rôle central dans la modélisation mathématique. Parmi les types d'équations intégrales, les équations intégrales quadratiques suscitent un intérêt particulier en raison de la complexité de leur structure et de leurs vastes applications dans les domaines non linéaires.

Dans ce travail, on va étudier ces équations dans des cadres plus généraux que les espaces classiques tels que  $L^p$ . Ainsi, la difficulté de l'étude sur les espaces d'Orlicz, qui sont une généralisation naturelle des espaces  $L^p$ , permettant de traiter des fonctions dont la croissance n'est pas polynomiale. Cela les rends particulièrement adaptés à l'étude des phénomènes présentant un comportement non standard ou inhabituel.

L'espace d'Orlicz se distingue par sa flexibilité à représenter des fonctions à croissance lente ou rapide, et il est lié aux fonctions d'Orlicz qui définissent la nature de cet espace. Dans ce cadre que l'on peut étudier les équations intégrales quadratiques avec un noyau non linéaire, où de nouveaux défis apparaissent concernant l'existence, la bornitude des solutions.

D'autre part, les notions de mesures de non-compacité sont des outils analytiques avancés qui aident à étudier l'existence de solutions dans des cas où la compacité classique n'est pas disponible. Ces concepts s'appliquent dans les espaces de Banach, permettant d'étendre l'usage les théorèmes d'existence tels que le principe de Schauder ou le théorème de Darbo.

L'étude des équations intégrales quadratiques dans les espaces d'Orlicz en utilisant la mesure de non-compacité constitue ainsi un cadre mathématique solide pour aborder le problème d'existence, et la bornitude de solutions.

Ce travail est divisé en quatre chapitres :

**le premier Chapitre :** On parle sur la structure de l'espace qui généralise L'espace de Lebesgue  $L^p$ , on le note par  $L^\phi$ , cet espace est appelé l'espace d'Orlicz, dont les éléments qui appartiennent sont des fonctions : convexe, continue et à croissance rapide s'appelle fonction de Young (N-fonction).

**Dans le deuxième Chapitre :** On expose la notation de la mesure de non-compacité, notamment les mesures de Kuratowski et de Hausdorff, ainsi des leurs propriétés, et on conclure le chapitre par un théorème du point fixe.

**dans le dernier Chapitre :** Nous traitons le problème d'existence de solutions des équations intégrales quadratiques dans l'espace d'Orlicz en utilisant la mesure de non-compacité et le théorème du point fixe de Darbo.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## ESPACE FONCTIONNELLE D'ORLICZ

Les espace d'Orlicz ont été introudits la premieré fois en 1932 par la mathématicien polonais ladyslaw Orlicz .Dans cette chapitre on expose les propriétés générales.

### 1.1 N-fonction

**Définition 1.1.** [7] Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que :

1- $\varphi$  est paire ,convexe et continue.

2- $\forall t > s \geq 0, \varphi(t) > \varphi(x) \geq 0$

3-

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s)}{s} = 0 \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(s)}{s} = +\infty$$

La fonction  $\varphi$  est appelée fonction de Young ou N-fonction

**Théorème 1.1.** [7] Chaque fonction convexe  $\varphi(u)$ , qui vérifiée la condition  $\varphi(a) = 0$ , peut être

représentée sous la forme

$$\varphi(u) = \int_a^u p(t) dt$$

où  $p(t)$  est une fonction continue croissante. De même nous avons  $\varphi'(u) = p_+(u)$

**Définition 1.2.** [7] (définition équivalente)

Une fonction  $\varphi(u)$  s'appelle N-fonction s'elle admette la représentation

$$\varphi(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt$$

où la fonction  $p(t)$  est continue pour  $t \geq 0$ , positive pour  $t > 0$  et non décroissante qui vérifiée les conditions

$$p(0) = 0, p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty. \quad (1.1)$$

**Exemple 1.1.** [7] Les fonctions suivantes sont N-fonctions :

$$\varphi(t) = |t|^p, 1 < p < +\infty$$

$$\varphi(t) = e^{|t|} - |t| - 1$$

$$\varphi(t) = e^{(|t|^p)} - 1, 1 < p < +\infty$$

## 1.2 Espace fonctionnel de Banach

Soit  $(\Omega, \mu)$  espace mesuré et soit  $\mathcal{M}^+$  un cône des fonctions  $\mu$ -mesurables sur  $\Omega$  dont les valeurs dans  $[0, \infty]$

**Définition 1.3.** [7] Soit l'application  $\rho$  suivante  $\rho : \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, \infty]$ .

On appelle une norme fonctionnelle de Banach l'application  $\rho$ , telle que

Si pour tout  $f, g$  et  $f_n (n = 1, 2, \dots)$  dans  $\mathcal{M}^+$  et pour  $\lambda \geq 0$

1.  $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0, \mu - p.p.$

$$\rho(\lambda f) = \lambda \rho(f).$$

$$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g).$$

2.  $0 \leq g \leq f, \mu - p.p \Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g).$

3.  $0 \leq f_n \uparrow f, \mu - p.p \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f).$

4.  $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty.$

5.  $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$  où la constante  $C_E$  dépend seulement de  $E$ .

**Définition 1.4.** [7] Soit  $\rho$  une norme fonctionnelle de Banach,  $X = X(\rho)$  l'ensemble de toute les fonctions  $f$  dans  $\mathcal{M}$  avec  $\rho(|f|) < \infty$ , s'appelle espace fonctionnel de Banach (EFB), pour toute  $f \in X$ , on définit

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

## 1.3 Espace modulaire

**Définition 1.5.** Soit  $X$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$ . La fonction  $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$  est dite semimodulaire dans  $X$ , si les propriétés suivantes sont satisfaisantes :

- (i)  $\rho(0) = 0$ .
  - (ii)  $\rho(\lambda x) = \rho(x), \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}, \text{ avec } |\lambda| = 1$ .
  - (iii)  $\rho$  est continue à gauche.
  - (iv)  $\rho(\lambda x) = 0, \forall \lambda > 0$  implique  $x = 0$ .
- le semimodulaire  $\rho$  est dit continu si,
- (v) l'application  $\lambda \mapsto \rho(\lambda x)$  est continue dans  $[0, \infty]$ , pour  $x \in X$ .

**Remarque 1.1.**

1. Le semimodulaire est toujours convexe.
2. Le semimodulaire est dit modulaire si,  $\rho(x) = 0$  implique  $x = 0$ .

**Définition 1.6.** Si  $\rho$  est un semimodulaire ou modulaire dans  $X$ , alors

$$X_\rho = \left\{ x \in X; \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

est appelé espace semimodulaire ou espace modulaire (respectivement).

**Remarque 1.2.** Puisque  $\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda|x)$  requis à  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho(\lambda x)$ , avec  $\lambda \in [0, \infty]$ , on peut définir  $X_\rho$  par :

$$X_\rho = \{ x \in X, \rho(\lambda x) < \infty; \text{ pour } \lambda > 0 \}.$$

**Théorème 1.2.** Soit  $\rho$  un semimodulaire dans  $X$ , alors  $X_\rho$  est un espace vectoriel normé sur le corps  $\mathbb{K}$ , où la norme définie par

$$\|x\|_\rho = \inf \left\{ \lambda > 0, \rho \left( \frac{1}{\lambda} x \right) \leq 1 \right\}$$

*Démonstration.* •  $X_\rho$  est un espace vectoriel.

- Il est claire que  $0 \in X_\rho$ .
- Soit  $u, v \in X_\rho$  et  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , par la définition de  $X_\rho$  et  $\rho(\alpha u) = \rho(|\alpha|u)$  il est claire que  $\alpha u \in X_\rho$ .
- Par la convexité de la fonction  $\rho$ , on peut l'estimer

$$0 < \rho(\lambda(u+v)) \leq \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{2}\lambda u\right) + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{2}\lambda v\right) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$$

et par conséquent, on a  $u+v \in X_\rho$ .

Donc  $X_\rho$  est un espace vectoriel.

- $X_\rho$  est un espace normé.  
- Il est clair que  $\|u\|_\rho < \infty$ , pour tout  $u \in X_\rho$  et  $\|0\|_\rho = 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ .  
-

$$\begin{aligned}\|\alpha u\|_\rho &= \inf\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{\alpha u}{\lambda}\right) \leq 1\} \\ &= |\alpha| \inf\{\lambda > 0; \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\} \\ &= |\alpha| \|u\|_\rho.\end{aligned}$$

- Soit  $u, v \in X$  et  $x \geq \|u\|$ ,  $y \geq \|v\|$ , alors

$$\rho\left(\frac{u}{x}\right) \leq 1 \text{ et } \rho\left(\frac{v}{y}\right) \leq 1$$

et par conséquent de la convexité de  $\rho$ , on a

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{u+v}{x+y}\right) &= \rho\left(\frac{x}{x+y}\frac{u}{x} + \frac{y}{x+y}\frac{v}{y}\right) \\ &\leq \frac{x}{x+y}\rho\left(\frac{u}{x}\right) + \frac{y}{x+y}\rho\left(\frac{v}{y}\right) \leq 1\end{aligned}$$

alors  $\|u+v\|_\rho \leq x+y$ , d'où

$$\|u+v\|_\rho \leq \|u\|_\rho + \|v\|_\rho$$

- Si  $\|u\|_\rho = 0$  alors  $\rho(\alpha u) \leq 1, \forall \alpha > 0$ , donc

$$\rho(\lambda u) \leq \beta \rho\left(\frac{\lambda u}{\beta}\right) \leq \beta, \forall \lambda > 0 \text{ et } \beta \in (0, 1)$$

d'après les propriétés de  $\rho$ , alors  $\rho(\lambda u) = 0, \forall \lambda > 0$  et que  $u = 0$ .

□

## Fonction complémentaire de N-fonction

**Définition 1.7.** [7] Soit la fonction positive  $p(t)$ ,  $t > 0$ , continue à droite pour  $t \geq 0$ , croissante est satisfaite la condition (1.1). On définit la fonction  $q(s)$ , ( $s \geq 0$ ) par l'égalité

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t.$$

La fonction  $q$  est dite fonction conjuguée de la fonction  $p$ .

**Définition 1.8.** [7] Si  $\varphi$  est une  $N$ -fonction, alors la fonction conjuguée (duale)  $\psi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  est définie par

$$\psi = \sup\{xy - \varphi(x)\}.$$

**Théorème 1.3.** [7] Soit  $\varphi$  une fonction de Young ( $N$ -fonction) et  $\psi$  la fonction conjuguée, alors  $\psi$  aussi est une fonction de Young

*Démonstration.*

1- Pour tout  $y$ , la relation  $xy - \varphi(x) = 0$ , si  $x = 0$  i.e.,  $\psi(y) \geq 0$ , donc il est trivial que  $\psi(0) = 0$ .

2- Si  $0 \leq y_1 \leq y_2$ , alors

$$xy_2 - \varphi(x) \geq xy_1 - \varphi(x), \text{ pour tout } x$$

implique  $\psi(y_2) \geq \psi(y_1)$ , alors  $\psi \uparrow$ .

Par définition, il existe un nombre  $0 < x_0 < \infty$ , tel que  $\varphi(x_0) < \infty$ , ainsi

$$\psi(y) \geq x_0 y - \varphi(x_0) \text{ pour tout } y$$

tend vers  $\infty$ , si  $y \rightarrow \infty$ .

Puisque  $\varphi$  est convexe et  $\varphi(0) = 0$ , la fonction  $\frac{\varphi(x)}{x}$  croissante vers une valeur positive, lorsque  $x$  tend vers l'infini.

On note par  $m$  la limite de cette fonction et on suppose que  $0 < y < m$ , alors

$$xy - \varphi(x) \rightarrow -\infty, \text{ si } x \rightarrow \infty$$

implique que  $\psi(y)$  est finie.

3-  $\psi$  est convexe, si  $0 \leq y_1 \leq y_2 < \infty$  et  $0 < \lambda < 1$ , alors

$$\begin{aligned} x(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) - \varphi(x) &= \lambda xy_1 + xy_2 - \lambda xy_2 - \varphi(x) \\ &= \lambda(xy_1 - \varphi(x)) + (1 - \lambda)(xy_2 - \varphi(x)) \\ &\leq \lambda\psi(y_1) + (1 - \lambda)\psi(y_2), \forall x \geq 0. \end{aligned}$$

On prend le  $\sup$  sur le membre à gauche, on trouve

$$\psi(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda\psi(y_1) + (1 - \lambda)\psi(y_2)$$

□

**Remarque 1.3.** Il est facilement de vu que la fonction  $q$  possède les mêmes propriétés que la fonction  $p$ , elle est positive pour  $s > 0$ , continue à droite pour  $s \geq 0$ , croissante et vérifiée les conditions

$$q(0) = 0, \lim_{s \rightarrow \infty} q(s) = \infty$$

**Exemple 1.2.** Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux N-fonctions

1.  $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , où  $p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}$ , ( $t \geq 0$ ), donc  $q_1(s) = s^{\beta-1}$  ( $s \geq 0$ ) avec  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Alors la fonction conjuguée est

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s) ds = \frac{|v|^\beta}{\beta}.$$

2.  $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ , où  $p_2(t) = M_2'(t) = e^t - 1$  ( $t \geq 0$ ) donc  $q_2(s) = \ln(s+1)$ , ( $s \geq 0$ ). Alors la fonction conjuguée est

$$N_2(v) = \int_0^{|v|} q_2(s) ds = (1 + |v|) \ln(1 + |v|) - |v|.$$

**Remarque 1.4.** Il est impossible dans beaucoup des cas trouvé une formule explicite pour déterminer le complémentaire de N-fonction, par exemple, le N-fonction  $M(u) = e^{u^2} - 1$ , où  $p(t) = M'(t) = 2te^{t^2}$ , nous ne pouvons pas exprimer  $q$  sous la forme explicite.

## 1.4 Condition $\Delta_2$

**Définition 1.9.** [4] On dit que la N-fonction  $M(u)$  satisfait la condition  $\Delta_2$ , s'il existe une constante  $k > 0$ , telle que

$$M(2u) \leq kM(u), \quad (u \geq u_0)$$

pour une valeur positive de  $u_0$ .

**Remarque 1.5.** [4] On le voit facilement que nous avons toujours  $k \geq 2$  on a

$$M(2u) > 2M(u) \text{ pour } u \neq 0.$$

**Exemple 1.3.** [4]

1. La fonction  $M(s) = |s| \ln(|s| + 1)$  est satisfait la condition  $\Delta_2$ . En effet, on peut vérifier aisément que  $M$  est une N-fonction et on a :  $k = 4$ .
2. On a aussi, la fonction  $M(s) = \frac{1}{p}|s|^p$ , pour  $p > 1$  est vérifiée la condition  $\Delta_2$ . En effet, on a  $k = 2^p$

**Définition 1.10.** [4] Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de Young.

On dit qu'une fonction de Young satisfait la condition  $\Delta'$ , noté  $\varphi \in \Delta'$ , s'il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$\varphi(xy) \leq c\varphi(x)\varphi(y), \quad x, y \geq x_0 \geq 0.$$

## 1.5 les classes des espaces d'Orlicz

Nous d'abord présenterons et étudierons la structure des espaces d'Orlicz sur un espace de mesure arbitraire, et nous spécialisons ensuite pour obtenir des résultats particuliers.

Soit l'espace mesuré  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  où  $\Omega$  un certain ensemble de points et  $\Sigma$  est un  $\sigma$ -algèbre.

**Remarque 1.6.** [4]

1. Soit  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  une fonction de Young, où la fonction de Young permette de que, pour un certain  $x_0 \in \mathbb{R}$ , si la fonction  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est mesurable, alors  $\Phi(f) =: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  est mesurable.
2. D'après la définition de la fonction de Young, c'est une extension de la fonction réelle de Borel.  $\tilde{x}$

**Définition 1.11.** [4] L'ensemble de toutes les fonctions mesurables  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , telles que

$$\int_{\Omega} \Phi(|f|) d\mu < \infty,$$

est noté par  $\tilde{L}^{\varphi}(\mu)$ .

**Remarque 1.7.** [4]

1.  $\tilde{L}^{\varphi}(\mu)$  l'ensemble des classes des espaces d'Orlicz.
2. Les classes d'Orlicz  $\tilde{L}^{\varphi}$  ne sont pas des espaces vectoriels.

**Exemple 1.4.** On considère  $\Omega = ]0, 1[$  et  $\phi(t) = e^t$ , alors la fonction  $u(x) = -\frac{1}{2} \ln x$  appartient à  $\tilde{L}^{\varphi}$ , mais la fonction  $v(x) = 2u(x) = -\ln x$ , n'appartient pas.

**Théorème 1.4.** [4]

1. L'espace  $\tilde{L}^{\varphi}(\mu)$  est absolument convexe. i.e., si  $f, g \in \tilde{L}^{\varphi}(\mu)$  et  $\alpha, \beta$  des scalaires, tels que  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ , alors

$$\alpha f + \beta g \in \tilde{L}^{\varphi}(\mu).$$

Aussi si  $h \in \tilde{L}^{\varphi}(\mu)$  et  $|f| \leq |h|$ , telle que  $f$  est mesurable, alors  $f \in \tilde{L}^{\varphi}(\mu)$

2. L'espace  $\tilde{L}^{\varphi}(\mu)$  est linéaire (i.e., espace vectoriel) si  $\Phi \in \Delta_2$ , globalement quand  $\mu(\Omega) = \infty$  et localement si  $\mu(\Omega) < \infty$ .

*Démonstration.*

1. Soit  $f, g \in \tilde{L}^{\varphi}(\mu)$ .

Alors par monotonie et convexité de  $\Phi$ , pour  $0 < \gamma = |\alpha| + |\beta| \leq 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(|\alpha f + \beta g|) &\leq \Phi(|\alpha||f| + |\beta||g|) \leq \gamma \Phi\left(\frac{|\alpha|}{\gamma}|f| + \frac{|\beta|}{\gamma}|g|\right) \\ &\leq |\alpha|\Phi(|f|) + |\beta|\Phi(|g|), \end{aligned}$$

de même le membre droit est intégrable. Par conséquent  $\alpha f + \beta g \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$ .

Le deuxième rapport est clair, puisque  $\Phi(|f|) \leq \Phi(|h|)$ .

2. Pour la linéarité, il suffit de vérifier que  $f \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$ ,  $2f \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$ , puis  $nf \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$  pour tout nombre entier  $n$  et par conséquent aussi pour  $\alpha > 0$ ,  $\alpha f \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$ .

Par la dernière partie de , on a

$$af_1 + bf_2 = \gamma\left(\frac{a}{\gamma}f_1 + \frac{b}{\gamma}f_2\right) \in \tilde{L}^\varphi(\mu), \gamma = |a| + |b| > 0,$$

pour tout  $f_i \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$ ,  $i = 1, 2$ , par .

Ainsi nous devons montrer seulement  $2f \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$  pour toute  $f \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$ . Si  $\Phi$  est satisfaite la condition  $\Delta_2$ , on trouve  $\mu(\Omega) = +\infty$ ,

$$\Phi(2|f|) \leq k\Phi(|f|), \quad k > 0,$$

par conséquent  $2f \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$  avec  $f \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$ .

Le cas  $\mu(\Omega) < \infty$ , alors  $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$ , pour  $x \geq x_0 \geq 0$ .

Maintenant soit

$$f_1 = \begin{cases} f, & |f| \leq x_0 \\ 0, & \text{autre} \end{cases}$$

On pose  $f_2 = f - f_1$ , alors  $f = f_1 + f_2$  et

$$\Phi(2|f|) = \Phi(2|f_1|) + \Phi(2|f_2|) \leq \Phi(2|f_1|) + k\Phi(|f_2|).$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega} \Phi(2|f|)d\mu \leq \Phi(2x_0)\mu(\Omega) + k \int_{\Omega} \Phi(|f|)d\mu < \infty$$

donc  $2f \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$ , ceci montre que  $\tilde{L}^\varphi(\mu)$  est un espace linéaire. □

**Définition 1.12.** L'espace  $L^\varphi(\mu)$  de toute fonctions mesurables  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , telle que  $\alpha f \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$  pour  $\alpha > 0$ , s'appelle l'espace d'Orlicz. Autrement dit

$$L^\varphi(\mu) = \{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \text{ mesurable; } \int_{\Omega} \Phi(\alpha f)d\mu < \infty \text{ pour } \alpha > 0\}$$

Nous inclurons maintenant deux propriétés supplémentaires liées aux espaces classiques de Lebesgue  $L^1(\mu)$  et  $L^\infty(\mu)$ , dépendant la détermination de la théorie de l'espace d'Orlicz.

**Définition 1.13.** Soit  $\Phi(u)$  une N-fonction. On note par  $\tilde{L}^\varphi(\Omega)$  la classe de ces fonctions à valeurs réelles, définie sur  $\Omega$ , par

$$\rho(u; \Phi) = \int_{\Omega} \Phi[u(x)] d\mu < \infty.$$

### 1.5.1 Comparaison de classes

Les Classes d'Orlicz  $\tilde{L}^{\varphi_1}$  et  $\tilde{L}^{\varphi_2}$ , qui sont déterminées par des N-fonctions distincte  $\varphi_1(u)$  et  $\varphi_2(u)$ , est généralement distincte.

**Théorème 1.5.** L'inclusion suivant

$$L^{\varphi_1} \subset L^{\varphi_2}, \quad (1.2)$$

est vérifié si et seulement si, s'il existe des constantes positives  $u_0$  et  $a$  telles que

$$\varphi_2(u) \leq a\varphi_1(u), \quad (u \geq u_0)$$

**Remarque 1.8.** En déduit de théorème ci-dessus que les deux fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  déterminer la même classe d'Orlicz, si et seulement si, s'il existe des constantes positives  $a$ ,  $b$  et  $u_0$  telles que

$$a\varphi_2(u) \leq \varphi_1(u) \leq b\varphi_2(u), \quad (u \geq u_0)$$

## 1.6 Structure de l'espace d'Orlicz $L^\varphi(\Omega)$

D'après l'inégalité de Jensen la classe d'Orlicz  $\tilde{L}^\varphi$  est un ensemble convexe, toutes les fois que la classe  $\tilde{L}^\varphi$  contient les deux fonctions  $u_1(x)$  et  $u_2(x)$  puis il contient également le segment entier

$$u_\alpha(x) = \alpha u_1(x) + (1 - \alpha)u_2(x) \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

En effet, si  $u_1(x), u_2(x) \in \tilde{L}^\varphi$ , alors

$$\begin{aligned} \rho(u_\alpha; \Phi) &= \int_{\Omega} \Phi[\alpha u_1(x) + (1 - \alpha)u_2(x)] dx \\ &\leq \alpha \rho(u_1; \Phi) + (1 - \alpha) \rho(u_2; \Phi) < \infty. \end{aligned}$$

### 1.6.1 Norme d'Orlicz

**Définition 1.14.** Soit  $(\Omega, \Sigma, \sigma)$  un espace mesuré.

Soient  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et  $(\varphi, \psi)$  couple complémentaire, de N-fonctions, alors on définit la norme d'Orlicz  $\|\cdot\|_\varphi : u \mapsto \|u\|_\varphi$ , par

$$\|u\|_0 = \|u\|_\varphi^O = \sup \left\{ \int_\Omega |uv| d\mu : \int_\Omega \psi(v) d\mu \leq 1 \right\}. \quad (1.3)$$

la norme d'Orlicz dans l'ensemble  $L^\varphi$  à l'aide de l'égalité suivante

$$\|u\|_\varphi = \sup_{\rho(v; \psi) \leq 1} \left| \int_\Omega u(x)v(x) dx \right|.$$

D'après la définition la norme ci-dessus, est que satisfait les axiomes habituels :

- 1-  $\|u\|_\varphi = 0$  ssi  $u(x) = 0$  p.p;
- 2-  $\|\alpha u\|_\varphi = |\alpha| \|u\|_\varphi$ ;
- 3-  $\|u_1 + u_2\|_\varphi \leq \|u_1\|_\varphi + \|u_2\|_\varphi$ .

L'ensemble  $L^\varphi$  devient un espace linéaire normé qui s'appelle l'espace d'Orlicz.

**Proposition 1.1.** La formule (1.3) définit une norme dans  $L^\varphi$ .

*Démonstration.* Soit  $\|u\|_\varphi = 0$  et soit  $\Omega_1$  un sous ensemble de  $\Omega$ , tel que  $0 < \mu(\Omega_1) < \infty$ .

Soit  $\psi$  une fonction de Young (N-fonction), alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$  et par conséquent il existe  $k > 0$ , tel que  $\psi(k) < \frac{1}{\mu(\Omega_1)}$ .

On définit la fonction  $v$  par

$$v(x) = \begin{cases} k, & \text{si } x \in \Omega_1 \\ 0, & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases}$$

Alors

$$\rho(v; \psi) = \int_\Omega \psi(|v(x)|) dx = \int_{\Omega_1} \psi(k) dx < 1,$$

et par la définition de la norme d'Orlicz, on a

$$\|u\|_\varphi \geq \int_\Omega |u(x)v(x)| dx = k \int_{\Omega_1} |u(x)| dx,$$

et  $\|u\|_\varphi = 0$  implique  $u(x) = 0$  pour presque tout  $x \in \Omega_1$ . Puisque  $\Omega_1 \subset \Omega$  était arbitraire,  $u(x) = 0$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .

Soit  $u, w \in L^\varphi(\Omega)$  i.e.,  $\|u\|_\varphi < \infty$ ,  $\|w\|_\varphi < \infty$  et soit  $c \in \mathbb{C}$ , alors

$$\begin{aligned}
\bullet \|cu\|_\varphi &= \sup_v \int_\Omega |cu(x)v(x)| dx \\
&= |c| \sup_v \int_\Omega |u(x)v(x)| dx \\
&= |c| \|u\|_\varphi < \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \|u + w\|_\varphi &= \sup_v \int_\Omega |(u + w)(x)v(x)| dx \\
&= \sup_v \int_\Omega |u(x) + w(x)||v(x)| dx \\
&\leq \sup_v \int_\Omega |u(x)||v(x)| dx + \sup_v \int_\Omega |w(x)||v(x)| dx \\
&= \|u\|_\varphi + \|w\|_\varphi.
\end{aligned}$$

□

## 1.6.2 Norme de Luxemburg

**Définition 1.15.** Soient  $\varphi$  une fonction de Young et  $u$  une fonction mesurable définie sur  $\Omega$ , le nombre

$$\|u\|_1 = \|u\|_\varphi^L = \inf \left\{ k > 0; \int_\Omega \varphi \left( \frac{1}{k} |u(x)| \right) dx \leq 1 \right\}$$

est appelé la norme de Luxemburg de  $u$ .

**Remarque 1.9.** On peut noter, par

$$\|u\|_1 = \inf k,$$

où le minimum est sur tout  $k > 0$ , tel que

$$\rho\left(\frac{u}{k}; \varphi\right) = \int_\Omega \varphi \left[ \frac{u(x)}{k} \right] dx \leq 1.$$

## 1.6.3 Extension de l'inégalité de Hölder

**Théorème 1.6.** Soit  $(\varphi, \psi)$  le couple complémentaires de fonctions de Young.

Si  $u \in L^\varphi(\Omega)$  et  $v \in L^\psi(\Omega)$ , alors  $u \cdot v \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_\varphi \|v\|_\psi \quad (1.4)$$

*Démonstration.* Si  $\|v\|_\psi = 0$ , l'inégalité (1.4) est évidente.

si  $\|v\|_\psi \neq 0$ , on trouve

$$\rho\left(\frac{v}{\|v\|_\psi}; \psi\right) \leq 1,$$

et par la définition de la norme d'Orlicz de  $u$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx &\leq \|v\|_\psi \int_{\Omega} \left| u(x) \frac{v(x)}{\|v\|_\psi} \right| dx \\ &\leq \|u\|_\varphi \|v\|_\psi. \end{aligned}$$

□

**Remarque 1.10.** L'inégalité (1.4) peut être vue comme prolongation de l'inégalité de Hölder, mais il convient de noter que l'inégalité habituelle de Hölder n'est pas cas particulier de (1.4).

En effet, si nous traitons les espaces de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  et  $L^q(\Omega)$  comme des espaces d'Orlicz  $L^\varphi(\Omega)$  et  $L^\psi(\Omega)$ , avec

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} \text{ et } \psi(t) = \frac{t^q}{q}, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

alors l'inégalité (1.4) est de la forme

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}} \|u\|_\varphi \|v\|_\psi$$

## 1.7 Inégalité de Jensen

Soit  $f \in L_\phi(\Omega)$ . Alors,

$$\phi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} f(t) d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \rho_\phi(\Omega)$$

---

---

# CHAPITRE 2

---

## MESURE DE NON COMPACTITÉ

- Dans ce chapitre nous exposons la mesure de non compacité, notamment les mesures de Kuratowski et de Hausdorff, ainsi que leurs propriétés. Nous examinerons également la relation entre les ensembles compacts et relativement compacts, selon la topologie que la mesure, aussi les propriétés des opérateurs sous la notion la mesure de non compacité et on termine par la théorie du point fixe.

### 2.1 Espaces de Banach

#### 2.1.1 Espaces métriques

On considère sur  $\mathbb{R}$  de la distance usuelle

$$d : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \rightarrow d(x, y) = \|x - y\|$$

**Définition 2.1.** [10] Une distance sur un ensemble  $E$  est une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , telle que :

1.  $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$ , (séparation)
2.  $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$ , (symétrie).
3.  $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , (inégalité triangulaire).

Le couple  $(E; d)$  est appelé un espace métrique.

**Définition 2.2.** [10] Dans un espace métrique  $(E, d)$ , on appelle boule ouverte boule fermé de centre  $a \in X$  et de rayon  $r > 0$ , les sous-ensembles

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \{x \in E; d(a; x) < r\} \\ B_f(a; r) &= \{x \in E; d(a; x) \leq r\} \end{aligned}$$

### Suites dans les espaces métriques

**Définition 2.3.** [10] Soit  $(E, d)$  un espace métrique et soit  $(x_n)_n \in E$ , une suite de  $E$  Soit  $x \in E$ . On dit que  $(x_n)_n \in E$  converge vers  $x$  si l'on a :

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$$

**Définition 2.4.** [10] Une suite  $(x_n)_n \in E$  est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

**Définition 2.5.** On dit que l'espace métrique  $(E, d)$  est complet si toute suite de Cauchy converge.

### 2.1.2 Espace complet

**Définition 2.6.** [10] Soit  $X$  un espace vectoriel. Une norme sur  $E$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  habituellement notée  $\|\cdot\|$  vérifiant pour tous  $x, y$  dans  $E$  et tout dans  $\mathbb{k}$

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (homogénéité),
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

**Définition 2.7.** [10] Un espace vectoriel  $E$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  noté  $(E, \|\cdot\|)$  est appelé un espace vectoriel normé.

**Remarque 2.1.** [10] Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.

**Définition 2.8.** [10] Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. Notons par  $A$  un sous-ensemble de  $X$ , et  $\partial A$  la frontière de  $A$ .

De plus, le diamètre de  $A$  :

$$\text{diam}(A) = \sup\{\|x - y\|; x, y \in A\}$$

et leur distance :

$$\text{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\|; y \in A\}$$

**Définition 2.9.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach de dimension infini on note l'ensemble des opérateurs linéaires de  $X$  dans  $Y$  par  $L(X, Y)$ , et  $L(X) = B(X, X)$  un opérateur linéaire  $T$  défini sur  $X$  dans  $X$

## 2.2 Principes fondamentaux des opérateurs

### 2.2.1 Compacité

**Définition 2.10. Compacité :** Un ensemble  $A$  de  $E$  est compact si de toute suite d'éléments de  $A$ , on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de  $A$ .

1. Une classe de sous-ensemble de  $E$  s'appelle une couverture d'un ensemble  $G$  de  $E$ , si nous avons  $G \subset \cup_j U_j$
2. Un ensemble  $U$  est dit séquentiellement compact si pour tout d'éléments dans  $E$  contient une sous-suite converge vers un élément dans  $U$ .
3. Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement si il est séquentiellement compact.
4. Un sous-ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compact.
5. Un sous-ensemble  $G$  d'un espace normé est totalement borné si il existe une suite finie  $i, \epsilon$  :

$$\forall \epsilon > 0 : G \subset \cup_{j=1}^n B(\varphi_j, \epsilon).$$

**Définition 2.11.**

1. **Opérateur Linéaire :** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes : Condition additive :

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

Condition homogène :

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

2. **Opérateur borné :** Un opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$ , tel que :

$$\|A(x)\|_F \preceq C \|x\|_E, \forall x \in E$$

3. **Opérateur Compacte :** Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $X$  dans un espace normé  $Y$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans  $Y$ .

### 2.2.2 Compacité dans $C(G)$

Dans cette partie, l'espace des fonctions continues définies dans  $C(G)$  est muni de la norme maximum

$$\|\varphi\|_{\infty} = \max|\varphi(x)|.$$

**Théorème 2.1. Arzela-Ascoli :** Un ensemble  $U \subset C(G)$  est relativement compact si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées, i.e :

1. L'ensemble  $U$  est borné telle que :

$$\forall \varphi \in U : \forall x \in k, \exists M > 0 : |\varphi(x)| \leq M .$$

2. L'ensemble  $U$  est équicontinu

$$\forall \epsilon > 0 : \forall \varphi \in U : \forall x, y \in k : \exists \delta > 0 \text{ tel. que } : |x - y| \leq \delta \rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \epsilon$$

**Définition 2.12.** Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace norme  $X$  dans un espace norme  $Y$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact d'il envoie tout ensemble borné  $G$  dans  $X$  un ensemble relativement compact  $A(G)$  dans  $Y$ . Autrement dit, la fermeture  $\bar{A}(\bar{G})$  est compact.

**Définition 2.13.** Un ensemble  $G \subset X$  est relativement compact si pour toute suite  $\{\varphi_n\}$  il existe une sous suite  $\{\varphi_{n(k)}\}$  qui converge dans  $X$ .

**Définition 2.14.** Un opérateur  $A$  de  $X$  dans  $Y$  est compact si et seulement si pour toute suite bornée  $\{\varphi_n\}$  de  $X$ , la suite  $\{A\varphi_n\}$  contient une sous suite convergente dans  $Y$

## 2.3 Mesure de non compacité

La mesure de non compacité est un outil précieux dans les espaces de Banach, ils sont largement utilisés dans la théorie du point fixe, les équations différentielles, les équations fonctionnelles, les intégrales et équations integro-différentielles,.....etc

### 2.3.1 Mesure de non compacité en général

Avant de rappeler la mesure de non compacité on note par  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach, nous désignons par  $M_E$  la famille des sous-ensembles bornées non vide de  $E$ , et par  $N_E$  la famille des sous-ensemble relativement compact de  $E$ , et l'enveloppe convexe d'un ensemble  $X \subset E$  notons par  $\text{conv}(X)$ .

**Définition 2.15.** Une application  $\mu : M_E \rightarrow [0, +\infty[$ , est appelée mesure de non compacité dans  $E$ , qui satisfait les condition suivantes : La famille

$$\ker(\mu) := \{D \in M_E \text{ telle que } \mu(D) = 0\} \neq \emptyset, \text{ et } \ker(\mu) \subset N_X$$

( $\ker$  est appelé le noyau de MNC)

**Théorème 2.2.** Soit  $x, y \in M_X$ , alors :

1. Si  $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$
2.  $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$ .
3.  $\mu(\overline{\text{conv}X}) = \mu(X)$ .
4.  $\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .
5.  $\mu$  est dite semi-norme si

$$\begin{cases} \mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X) & (\mu \text{ est dit homogène}) \\ \mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y) & (\mu \text{ est dit sub additif}) \end{cases}$$

6. Si  $(X_n)$  ensemble de suite de  $M_X$  telle que  $X_{n+1} \subset X_n$  ( $n = 1, \dots, n$ ) et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0$ , alors  $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$  et  $X_\infty \in \ker(\mu)$ .

**Définition 2.16.**

1. Une mesure de non compacité est appelée mesure avec la propriété maximale, si

$$\max(\mu(A), \mu(B)) = \mu(A \cup B).$$

2. Une mesure de non compacité est dit régulière, si  $\ker(\mu) = N_X$ , sup lin'aire et possède une propriété maximal.
3. Une mesure de non compacité est lipschitzienne, si elle satisfait la condition de Lipschitz

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(B(X)) d_H(A, B)$$

Avec :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}$$

et :

$B(X)$  la boule fermée dans  $X$  et de centre  $X$  et de rayon 1.

## 2.4 Mesure de non-compacité de Kuratowski

Kuratowski fut le premier(1930) a introduire et étudier la notion de la mesure de non-compacité

**Définition 2.17.** [8] :La mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné  $A \in M_X$  ,notée  $\alpha(A)$  ,est définie par :

$$\alpha(A) = \inf \{ \forall \epsilon > 0 : A \subset \cup_{i=1}^n B_i, B_i \subset X, \text{diam}(B_i) < \epsilon, i = 1, 2, \dots, n \}$$

désigne le diamètre de l'ensemble  $B_i$  ,

$$\alpha(A) = \inf \{ \epsilon > 0 : \text{admet une recouvrement fini par des ensembles de diamètre } < \epsilon \}$$

avec : $B$  est sous ensemble de  $X$  et  $B \in M_X$ . On notera que, dans cette définition, l'expression peut être remplacée par  $\text{diam} B_i > \epsilon$ . Il est clair que  $\alpha(A) \leq \text{diam} A$  pour tout ensemble borné  $A$  dans  $M_X$  et que  $\alpha(A) = 0$  si  $A$  est fini. Les propriétés essentielles de la mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné sont résumées dans le théorème suivant :

**Théorème 2.3.** [8] Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $A, A_1, A_2 \in M_X$  , alors

1.  $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \bar{A}$  est compact.
2.  $A \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(A_1)$ .
3.  $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$ .
4.  $\alpha(A_1 \cup A_2) = \max \{ \alpha(A_1), \alpha(A_2) \}$ .
5.  $\alpha(A_1 \cap A_2) \leq \min \{ \alpha(A_1), \alpha(A_2) \}$ .
6. Si  $X$  est complet,  $(F_n)_n$  une suite des ensembles croissantes d'ensembles non vide fermés et bornés, telles que :

$$\lim_n \alpha(F_n) = 0, \text{ alors } F_\infty = \cap_{n=1}^\infty F_n \text{ est sous-ensemble non vide et compact.}$$

*Démonstration.* [8]

1. Par définition de la mesure de non-compacité.
2. Soit  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ,  $\{B_i\}_{i=1}^n$  un recouvrement fini de l'ensemble  $A$  avec  $\text{diam} B_i \leq \epsilon_1; i = 1, \dots, n$ .  
et  $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$  un recouvrement fini de l'ensemble  $A_1$  avec  $\text{diam} \varphi_j \leq \epsilon_2; j = 1, \dots, m$   
Puisque  $A \subset A_1$ , on peut toujours choisir les  $\varphi_j$ , telle que :

$$A \subset \cup_{i=1}^n B_i \subset \cup_{j=1}^m \varphi_j$$

Ceci implique  $\alpha(A) < \epsilon_2$ , Par conséquent , $\alpha(A) \leq \alpha(A_1)$ .

3. Puisque  $A \subset \bar{A}$  alors  $\alpha(A) \leq \alpha(\bar{A})$  d'après l'assertion 2, il suffit de démontrer l'inégalité dans l'autre sens :  $\alpha(\bar{A}) \leq \alpha(A)$  Soit  $\epsilon > 0$  Avec  $\text{diam}B_i \leq \epsilon$ ; Pour  $i=1, \dots, n$ , on a

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n B_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{B}_i$$

Comme  $\text{diam}B_i = \text{diam}\bar{B}_i$ , on déduit que  $\alpha(A) < \epsilon$ , par conséquent  $\alpha(\bar{A}) \leq \alpha(A)$ .

4. D'après l'assertion 2, on a

$$A_1 \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow \alpha(A_1) \leq \alpha(A_1 \cup A_2)$$

$$A_2 \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow \alpha(A_2) \leq \alpha(A_1 \cup A_2).$$

Donc

$$\max(\alpha(A_1), \alpha(A_2)) \leq \alpha(A_1 \cup A_2).$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens, soit  $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0, r = \max(\alpha(A_1), \alpha(A_2))$  et considérons  $\{B_i\}_{i=1}^n = \{\bar{\varphi}_j\}_{j=1}^m$  des recouvrements finis des ensembles  $A_1, A_2$  respectivement avec  $\text{diam}B_i < \epsilon_1$  pour  $i=1, \dots, n$  et  $\text{diam}\varphi_j \leq \epsilon_2$  pour  $j=1, \dots, m$  on a  $\text{diam}B_i < r + \epsilon$  et  $\text{diam}\varphi_j < r + \epsilon$  pour  $i=1, \dots, n$  et  $\text{diam}\varphi_j \leq \epsilon_2$  pour  $j=1, \dots, m$ . par conséquent,

$$A_1 \cup A_2 \subset (\bigcup_{i=1}^n B_i) \cup (\bigcup_{j=1}^m \varphi_j) \Rightarrow A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{k=1}^l G_k < r + \epsilon.$$

D'où :

$$\alpha(A_1 \cup A_2) \leq \max\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}.$$

5. Utilisons l'assertion 2, on obtient :

$$A_1 \cap A_2 \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A_1 \cap A_2) \leq \alpha(A_1)$$

$$A_1 \cap A_2 \subset A_2 \Rightarrow \alpha(A_1 \cap A_2) \leq \alpha(A_2)$$

D'où :

$$\alpha(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$$

6. Montrons que  $F_\infty$  est non vide ,Choisissons,pour chaque  $n$  ,un élément  $x_n \in F_n$ . Posons  $X_n = \{x_i, i \geq n\}$  .Puisque  $X_n \subset F_n$  alors  $\alpha(X_n) \leq \alpha(F_n); \forall n$ . Par passage a la limite, on obtient  $\alpha(X_1) = 0$ . C'est a dire  $X_1$  est relativement compact .Donc la suite  $(X_n)_n$  contient une sous-suite  $(X_{n_k})_k$  convergente dans  $X$ . Soit  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Comme  $F_\infty$  est un sous-ensemble fermé de  $X$  alors  $x \in F_n; \forall n$ . Ceci implique que  $F_\infty \neq \emptyset$ .

Montrons maintenant que  $F_\infty$  est compact .Comme  $F_\infty \subset F_n; \forall n$  alors  $\alpha(F_\infty) \leq \alpha(F_n)$  est relativement compact et donc compact puisqu'il fermé.

Si  $X$  est un espace normé alors la mesure de non-compactité de Kuratowski vérifie,en outre, les propriétés citées dans la proposition suivante.

□

**Proposition 2.1.** [8] :Soit  $(X, d)$  un espace normé et  $A, A_1, A_2 \in M_X$  ,alors :

1.  $\alpha(A_1 + A_2) \leq \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$ .
2.  $\alpha(A + x) = \alpha(A), \forall x \in X$ .
3.  $\alpha(\lambda A) = |\lambda| \alpha(A)$ .
4.  $\alpha(A) = \alpha(\text{conv}(A))$  où  $\text{conv}A$  désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble  $A$ .

## 2.5 Mesure de non-compactité de Hausdorff :

En 1957,Goldenstein,Goh'berg et Markus ont introduit une autre mesure de non-compactité appelée mesure de non-compactité de Hausdorff.

**Définition 2.18.** La mesure de non-compactité de Hausdorff d'un ensemble borné  $A \in M_E$ ,notée  $\chi(A)$ , est définie par :

$$\chi(A) = \inf \{ \epsilon > 0 : A \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon, i = 1, \dots, n \}.$$

Où : $B(x_i, r_i)$  désigne la boule de centre  $x_i$  et de rayon  $r_i$ .

où :

$$\chi(A) = \inf \{ \epsilon > 0, B \text{ admet un recouvrement fini des boules de rayons } < \epsilon \}$$

avec  $B$  est la famille des sous espace fermés de  $X$  et  $B \in M_X$ .Dans cette définition ,l'inégalité  $r_i < \epsilon$ ,peut être remplacée par  $r_i \leq \epsilon$ ,De plus les centres  $x_i$  des boules qui recouvrent l'ensemble  $A$  ne sont pas forcément dans l'ensemble( $Ax_i \in X$ , en général) .

**Théorème 2.4.** Soit  $(X, d)$  un espace de Banach et soit  $A, A_1, A_2$  des sous ensembles bornés.

1. Si est fini  $A$  alors  $\chi(A) = 0 \Leftrightarrow A$  totalement bornée  $\Leftrightarrow \bar{A}$  est compact.
2. Si  $A$  est fini, alors  $\chi(A) = 0$ .
3.  $A \subset A_1 \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(A_1)$
4.  $\chi(A) = \chi(\bar{A}) = \chi(\text{con}(A))$ .
5.  $\chi(A_1 \cup A_2) = \max\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$ .
6.  $\chi(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$
7. Si  $X$  est complet,  $(F_n)_n$  une suite décroissante d'ensembles non vides, fermés et bornés telle que  $\lim_n (F_n) = \emptyset$ , alors  $F_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$  est un sous-ensemble non vide et compact.

**Proposition 2.2.** Soient  $X$  un espace normé  $A, A_1, A_2 \in M_X$ . Alors :

1.  $\chi(A_1 + A_2) \leq \chi(A_1) + \chi(A_2)$ .
2.  $\chi(A + x) = \chi(A), \forall x \in X$ .
3.  $\chi(\lambda A) = |\lambda| \chi(A), \lambda \in \mathbb{k}$ .
4.  $\chi(A) = \chi(\text{con}(A))$ , où  $\text{con}(A)$  désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble  $A$ .

**Théorème 2.5.** Soit  $X$  un espace normé de dimension fini et  $\bar{B}_x$  la boule unité fermée dans  $X$ . Alors :

1.  $\alpha(\bar{B}_x) = 2$ .
2.  $\chi(\bar{B}_x) = 1$ .

## 2.6 Mesure de non compacité des opérateurs

**Définition 2.19.** [8] Soient  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow X$  un opérateur continu  $\alpha(\cdot)$  est la mesure de non compacité de Kuratowski dans  $X$ , pour tout  $0 < k < 1$ , on dit que  $T$  est une contraction si pour tout sous-ensemble borné  $A$  de  $D(T)$ ,  $T(A)$  est un sous-ensemble borné dans  $X$  et

$$\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A).$$

**Remarque 2.2.** [8] pour tout sous-ensemble borné  $A$  de  $D(T)$ , alors  $\alpha(A) > 0$ ,  $T(A)$  est un sous-ensemble borné dans  $X$  et

$$\alpha(T(A)) < \alpha(A)$$

**Définition 2.20.** [8] Soient  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow X$  un opérateur continu  $\chi(\cdot)$  est la mesure de non compacité de Hausdorff dans  $X$  et  $0 < k < 1$ ,  $T$  est dit  $K$ -boule contraction si pour tout sous-ensemble borné  $A$  de  $D(T)$ ,  $T(A)$  est un sous-ensemble borné dans  $X$  et

$$\chi(T(A)) \leq k\chi(A).$$

1.  $\frac{1}{2}\alpha(T) \leq \chi(T) \leq 2\alpha(T)$ .
2.  $\alpha(T) = 0 \Leftrightarrow \chi(T) = 0 \iff T$  est compact.
3. Si  $T, S \in L(X)$ , donc  $\alpha(TS) \leq \alpha(T)\alpha(S)$  et  $\chi(TS) \leq \chi(S)\chi(T)$ .
4. Si  $k \in K(X)$ , donc  $\alpha(T+k) = \alpha(T)$  et  $\chi(T+k) = \chi(T)$ .
5.  $\alpha(T^*) \leq \chi(T)$  et  $\alpha(T) \leq \chi(T^*)$ , où  $T^*$  désigne l'opérateur dual de  $T$ .
6. Si  $B$  est un sous-ensemble borné de  $X$ , donc  $\alpha(T(B)) \leq \alpha(T)\alpha(B)$ .
7. Si  $A \subset D(T)$ ,  $\alpha(A) > 0$  alors  $T(A)$  borné.

## 2.7 Quelques théorème de point fixe

Dans cette section on rappelle quelques outils et résultats d'analyse fonctionnelle utilisés par la suite : principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder, de Brouwer pour résoudre des équations différentielle d'ordre fractionnaire où deuxième membre est non linéaire, nous besoin des théories du point fixe.

On note par  $L^1(I, E)$  l'espace de Banach des fonctions mesurables,  $y : I \rightarrow E$  où le deuxième qui sont Bochner intégrales, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^T \|y(t)\| dt.$$

L'espace de Banach des fonctions mesurables  $y : I \rightarrow E$  qui sont bornées est noté par  $L^\infty(I, E)$  muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \inf \{c > 0, \|y(t)\| < c, \text{ p.p } t \in J\}.$$

On note par  $AC^1(I, E)$  l'espace de Banach des fonctions dérivables  $y : I \rightarrow E$ , ayant la première dérivée absolument continue.[8]

**Définition 2.21.** [8] L'application  $f : I \times E \rightarrow E$  est dit de Carathéodory si,

1.  $t \rightarrow f(t, u)$  est mesurable  $\forall u \in E$ .
2.  $u \rightarrow f(t, u)$  est continue presque pour tout  $t \in I$ .
3.  $\forall r > 0$ , il existe une fonction  $\Phi_r \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ , telle que  $\forall u \in \mathbb{R}$  avec  $\|u\| < r$ ,

$$\|f(t, u)\| \leq \Phi_r(t).$$

**Remarque 2.3.** Si  $f$  vérifier l'assertion 3, alors est dite  $L^1$  Carathéodory.

**Définition 2.22.** [8] Soit  $X$  une espace de Banach on dit que  $F$  est contractant  $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in X$  on a :

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|, 0 < k < 1$$

**Théorème 2.6. (Scharefer).** Soient  $X$  un espace de Banach et  $F : X \rightarrow X$  complétement continu. Alors  $F$  possède au moins un point fixe.

**Théorème 2.7. (Banach).** Soit  $X$  un espace de Banach, et  $F : X \rightarrow X$  est contractant alors  $F$  admet un point fixe unique :

$$\exists y^* \in X \text{ telle que } F(y^*) = y^*$$

**Théorème 2.8. (Schauder).** Soit  $(E; d)$  un espace métrique complet et  $A$  une partie convexe fermée de  $E$  et soit  $F : A \rightarrow A$ , on a si l'ensemble  $\{F^n x : x \in A\}$  est relativement compact dans  $E$ . Alors  $F$  admet au moins un point fixe.

**Définition 2.23.** On dit que  $A$  est convexe :

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in A$$

**Définition 2.24.** L'application  $T : C \subset E \rightarrow E$  est dit une  $\alpha_E$  contraction s'il existe une constante  $k < 1$  positive telle que :

$$\alpha_E(T(W)) \leq k \alpha_E(W), (\forall W \text{ fermé et borné})$$

**Théorème 2.9. (Darbo-généralisé)** soit  $C$  un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach  $E$  l'application continue

$$T : C \rightarrow C,$$

satisfaisant :

$$\mu(T(W)) \leq \Phi \mu(W), \quad \forall W \subset C,$$

où  $\mu$  une mesure de non compacité arbitraire et  $\Phi : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ , une fonction strictement croissante (non nécessairement continue), avec :

$$\lim_n \Phi^n(t) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty[.$$

Alors,  $T$  admet au moins un point fixe dans  $C$ .

**Lemme 2.1.** Soit  $C$  un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach,  $C(I, E)$  et soit  $G$  une fonction continue de  $I \times I$  et  $f : I \times E \rightarrow E$  une fonction qui satisfait les conditions de Carathéodory, et il existe  $p \in L^1(I; \mathbb{R}_+)$  telle que pour tout  $t \in I$ , et pour tout sous ensemble borné  $B \subset E$  on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(t) \alpha(B); I_{t,h} = [t-h, t] \cap I$$

Si  $V$  est un sous ensemble équicontinu de  $D$ , alors :

$$\alpha\left(\left\{\int G(t, s) f(s, y(s)) ds : y \in V\right\}\right) \leq \int_I \|G(t, s)\| p(s) \alpha(V(s)) ds.$$

**Théorème 2.10. (Darbo-sadovskii)** Soit  $C$  un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach  $E$  et soit l'application continue

$$T : C \rightarrow C$$

alors  $T$  admet au moins un point fixe dans  $C$ .

**Théorème 2.11. (Mönch)** Soit  $D$  un sous espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach, tel que  $0 \in D$ ; et soit  $N$  une application continue de  $D$  dans  $D$ . Si l'implication

$$V = \text{conv} \overline{N(V)} \text{ ou } V = N(V) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(V) = 0.$$

est vérifiée pour tout ensemble  $V$  de  $D$ , alors  $N$  admet un point fixe dans  $D$ .

---

---

## CHAPITRE 3

---

# EQUATIONS INTÉGRALES

Ce chapitre a pour but d'étudier l'existence et le calcul de la solution de l'équation intégrale quadratique dans l'espace d'Orlicz, ainsi que la mesure de non-compacité, en mettant l'accent sur les conditions d'existence et d'unicité.

### 3.1 Equation intégrale

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparait sous le signe intégral. Nous allons s'intéresser beaucoup plus aux équations intégrales non linéaires dont les formes suivantes.

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_{\Omega} k(x, t)F(x, t, \varphi(t))dt$$

### 3.2 Classifications des équations intégrales

La classification des équations intégrales porte sur beaucoup de caractéristiques de base, ce sont : (A)- Linéarité ou non, (B)- Limite de l'intégration, (C)- Le placement de la fonction inconnue.

### 3.2.1 Equations intégrales linéaires

1. On appelle équation intégrale de Fredholm (EIF) de seconde espèce, une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (3.1)$$

2. On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce, une équation de la forme :

$$\lambda \int_{\alpha}^b k(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (3.2)$$

3. On appelle équation intégrale de Volterra (EIV) de seconde espèce, une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (3.3)$$

4. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, une équation de la forme :

$$\lambda \int_{\alpha}^x k(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (3.4)$$

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau  $K(x, t) = 0$  pour  $t > x$ .

### 3.2.2 Equations intégrales non-linéaires

1. On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm (EINF) de deuxième espèce, une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^b k(x, t, \varphi(t))dt = f(x) \quad (3.5)$$

2. On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm de première espèce, une équation de la forme :

$$\lambda \int_{\alpha}^b k(x, t, \varphi(t))dt = 0 \quad (3.6)$$

3. On appelle équation intégrale non-linéaire de Volterra (EINV) de deuxième espèce, une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^x k(x, t, \varphi(t))dt = f(x) \quad (3.7)$$

4. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, une équation de la forme :

$$\lambda \int_{\alpha}^x k(x, t, \varphi(t))dt = 0 \quad (3.8)$$

- (i) Si  $f(x) \neq 0$ , dans les équations (3.1,3.3,3.5) et (3.7) sont dites non homogènes
- (ii) Si  $f(x) = 0$ , dans les équations (3.2,3.4,3.6) et (3.8) sont dites homogènes.

On présente maintenant deux théorèmes de point fixe : le théorème du point fixe de Banach avec application aux équations intégrales non linéaires de Fredholm et de Volterra de seconde espèce et celui de Schauder avec application à ces dernières équations. Pour l'étude de l'existence de solutions pour les équations non linéaires d'opérateurs, on a souvent recours à la théorie du point fixe. Plusieurs théorèmes d'existence sont obtenus à l'aide des théorèmes de points fixes de Banach et celui de Schauder en reformulant le problème d'existence en un problème de point fixe.

**Théorème 3.1.** [9] Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $A : E \rightarrow E$  un opérateur et  $f \in E$  donné. Pour résoudre l'équation

$$Ax = f \quad (3.9)$$

on définit souvent d'une certaine manière un opérateur  $T : E \rightarrow E$ , par exemple :

$$Tx = f + (I - A)x$$

où  $I$  est l'opérateur identité, et on réécrit l'équation (3.9) comme un problème de point fixe.

$$Tx = x$$

Par application d'un des théorèmes de point fixe, nous obtenons un point fixe pour  $T$  qui est une solution pour l'équation (3.9).

### Equation intégrale non linéaire de Fredholm

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, y, \varphi(y)) dy \quad x \in [0, 1] \quad (3.10)$$

où  $\lambda$  est un nombre réel donné.

Si on cherche une solution continue pour l'équation (3.10), alors on peut la reformuler en un problème de point fixe, sous des hypothèses appropriées.

Supposons que :

- (i)  $k : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, bornée ;  
k est appelée noyau de l'équation intégrale.
- (ii) k est L-Lipschitzienne par rapport à la troisième variable, i.e. il existe  $L > 0$  tel que

pour tout  $x, y \in [0, 1]$  et  $z_1, z_2 \in R$ , on a

$$|k(x, y, z_1) - k(x, y, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$$

(iii)  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

(iv)  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction inconnue, supposée continue.

On considère l'espace de Banach  $E = C([0, 1]; \|\cdot\|_\infty)$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme  $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi|$ . On définit sur l'espace  $E$  l'opérateur  $T$  donné par

$$(T\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, y, \varphi(y)) dy \quad x \in [0, 1] \quad (3.11)$$

Il évident que  $T$  applique  $E$  sur lui même (  $k$  et  $f$  continues ) et donc  $T(E) \subset E$ . Donc, l'équation intégrale (3.10) est équivalente au problème de point fixe

$$T\varphi = \varphi$$

où  $T$  est défini par (3.11). De plus,  $T$  est Lipschitzien et, sous des hypothèses appropriées sur  $\lambda$ ,  $T$  est une contraction. En effet,

$$\begin{aligned} |T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| &= \left| \lambda \left[ \int_0^1 k(x, y, \varphi_1(y)) dy - \int_0^1 k(x, y, \varphi_2(y)) dy \right] \right| \\ &\leq |\lambda| \int_0^1 |k(x, y, \varphi_1(y)) - k(x, y, \varphi_2(y))| dy \\ &\leq |\lambda| L \int_0^1 |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy. \end{aligned}$$

Mais

$|\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$  pour tout  $y \in [0, 1]$  et donc, pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $\varphi_1, \varphi_2 \in E$ , on a

$$|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| \leq |\lambda| L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$$

Finalement, on obtient

$$\|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)\|_\infty \leq |\lambda| L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in E$$

ce qui montre que  $T$  est  $|\lambda|L$ -Lipschitzien.

**Remarque 3.1.** Si on choisit  $\lambda$  tel que  $|\lambda|L < 1$ , alors  $T$  est une contraction, et donc, par le théorème du point fixe de Banach,  $T$  a un unique point fixe, qui est la solution unique de l'équation intégrale (3.11), et cette solution peut-être obtenue par les approximations successives.

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = \int_0^1 k(x, y, \varphi(y)) dy \quad x \in [0, 1] \quad (3.12)$$

Si on cherche une solution continue  $\varphi$  pour l'équation (3.12) dans la boule de centre 0 et de rayon  $R$ ,  $\overline{B}_R(0; C([0, 1]; \mathbb{R}))$ , de l'espace  $C([0, 1]; \mathbb{R})$ , alors on peut la reformuler en un problème de point fixe, sous des hypothèses appropriées. Supposons que :

$k : [0, 1] \times [0, 1] \times [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et que

$$M = \max_{[0,1] \times [0,1] \times [-R,R]} |k(x, y, z)| \leq R$$

On considère l'espace de Banach  $E = C([0, 1]; \|\cdot\|_\infty)$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme  $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|$

On définit l'opérateur  $T : \overline{B}_R(0; C([0, 1]; \mathbb{R})) \rightarrow C([0, 1]; \mathbb{R})$  donné par

$$(T\varphi)(x) = \int_0^1 k(x, y, \varphi(y)) dy \quad x \in [0, 1] \quad (3.13)$$

L'opérateur  $T$  applique la boule  $\overline{B}_R(0; C([0, 1]; \mathbb{R}))$ , sur elle-même. Donc, l'équation intégrale (3.12) est équivalente au problème de point fixe

$$T\varphi = \varphi$$

où  $T$  est défini par (3.13).

**Remarque 3.2.** L'opérateur  $T$  est continu et compact, et alors, par le théorème du point fixe de Schauder,  $T$  a au moins un point fixe dans la boule  $\overline{B}_R(0; C([0, 1]; \mathbb{R}))$ , qui est une solution de l'équation intégrale (2.4), dans la boule  $\overline{B}_R(0; C([0, 1]; \mathbb{R}))$ .

### 3.2.3 Equations intégrales de Urysohn et de Hammerstein

**Définition 3.1.** (équation de Urysohn)[6]

On appelle équation intégrale de Urysohn une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_\Omega F(x, t, \varphi(t)) = g(x), \quad t \in \Omega$$

où  $F$  et  $g$  sont des fonctions arbitraires.

**Définition 3.2.** [6](équation de Hammerstein)

on appelle équation intégrale de Hammerstein, une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \int_{\Omega} k(x, t)f(x, t, \varphi) = g(x), \quad t \in \Omega$$

**Remarque 3.3.** [6] L'équation de Hammerstein est un cas particulier de l'équation de Urysohn.

### 3.3 Opérateur non linéaire de superposition

L'un des opérateurs les plus importants étudiés en analyse fonctionnelle non linéaire est le soi-disant opérateur de superposition [6]. Supposons qu'une fonction  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfasse aux conditions de Carathéodory, c'est-à-dire qu'elle est mesurable en  $t$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et continue en  $x$  pour presque tout  $t \in I$ . Alors, à toute fonction  $x(t)$  mesurable sur  $I$ , on peut associer la fonction correspondante.[6]

$$F(x)(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I$$

L'opérateur  $F$  défini de cette manière est appelé opérateur de superposition engendré par la fonction  $f$ . Nous nous intéresserons au cas où  $F$  agit entre certains espaces d'Orlicz. Une discussion complète sur les conditions nécessaires et suffisantes pour la continuité et la bornitude de ce type d'opérateurs est disponible. Les propriétés suivantes seront utiles :

**Lemme 3.1.** [6] Supposons qu'une fonction  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait les conditions de Carathéodory. Alors, l'opérateur de superposition  $F$  transforme les fonctions mesurables en fonctions mesurables.

**Lemme 3.2.** Supposons qu'une fonction  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait les conditions de Carathéodory. L'opérateur de superposition  $F$  transforme une suite de fonctions convergente en mesure en une suite de fonctions convergente en mesure.

**Lemme 3.3.** [6] Supposons qu'une fonction  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait les conditions de Carathéodory. Alors :

$$M_2(f(s, x)) \leq a(s) + bM_1(x).$$

où  $b \geq 0$  et  $a \in L^1(I)$ , si et seulement si l'opérateur de superposition  $F$  agit de  $L_{M_1}(I)$  vers  $L_{M_2}(I)$ .

**Lemme 3.4.** [6] Soit  $f$  une fonction de Carathéodory. Si l'opérateur de superposition  $F$  agit de  $L_{M_1}(I)$  dans  $E_{M_2}(I)$ , alors il est continu.

Le problème de la bornitude de ce type d'opérateurs dans différentes classes d'espaces d'Orlicz sera décrit dans les démonstrations de nos résultats principaux.

Deux autres opérateurs joueront un rôle important dans ce travail, à savoir l'opérateur intégral linéaire.

$$H(x) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

et l'opérateur de multiplication. Le premier est bien connu et tous les résultats nécessaires concernant les propriétés de ce type d'opérateurs dans les espaces d'Orlicz sont déjà établis, donc ici nous omettons les détails et les résultats importants seront soulignés dans les démonstrations de nos résultats principaux.

Maintenant, nous devons décrire le second. Par  $U(x)(t)$ , nous désignerons l'opérateur de la forme suivante :

$$U(x)(t) = x(t) \cdot A(x)(t),$$

où  $A = H \circ F$  est un opérateur de Hammerstein.

**Proposition 3.1.** [9] Supposons que  $M$  vérifie la  $\Delta$ -condition . Alors, il existe une constante  $k_1 > 0$  telle que

$$\|uv\|_M \leq k_1 \|u\|_M \|v\|_M \quad (3.14)$$

pour tout  $u, v \in L_M(I)$

## 3.4 Application : existence de solution

$$x(t) = g(t) + \lambda x(t) \int_a^b k(t, s)f(s, x(s))ds \quad (3.15)$$

On considère l'équation intégrale suivante (3.15), c'est-à-dire  $B(x) = g + U(x)$ , où  $U(x)(t) = \lambda x(t) \int_a^b k(t, s)f(s, x(s))ds$

Nous allons essayer de choisir les domaines des opérateurs définis ci-dessus de manière à obtenir l'existence de solutions dans un espace souhaité (ici : un espace d'Orlicz). Nous mettons l'accent sur les conditions qui permettent de considérer des opérateurs fortement non linéaires.

Nous devons distinguer un cas . Nous supposerons dans cet article que cet espace  $L_\varphi$  est une algèbre de Banach–Orlicz. Cela nous permet d'obtenir des conditions de croissance plus générales sur  $f$ . [9]

### 3.4.1 Le cas de la condition $\Delta'$

Rappelons que pour une fonction  $\varphi$  satisfaisant la condition  $\Delta'$ , il existe une constante  $K_1$  telle que l'inégalité (3.14) soit vérifiée.

Appelons que, dans ce cas  $K_1$ , où  $K$  est une constante provenant de la définition de la condition  $\Delta'$ .

**Théorème 3.2.** [9] *Supposons que  $M$  et  $N$  sont des  $N$ -fonctions complémentaires, et que :*

- (C1)  $g \in E_\varphi(I)$  est croissante presque partout sur  $I$ .
- (C2)  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait les conditions de Carathéodory et  $f(t, x)$  est supposée être croissante par rapport à chaque variable  $t$  et  $x$  séparément
- (C3)  $|f(t, x)| \leq b(t) + G(|x|)$  pour  $t \in I$  et  $x \in \mathbb{R}$ , où  $b \in E_N(I)$  et  $G$  est une fonction non négative, croissante, continue définie sur  $\mathbb{R}^+$
- (C4) Soit  $N$  et  $\varphi$  satisfaisant la condition  $\Delta'$  et supposons qu'il existent  $\omega, \gamma, u_0 \geq 0$  pour lesquels :

$$N(\omega(G(u))) \leq \gamma\varphi(u) \leq \gamma M(u) \text{ pour } u \geq u_0$$

- (K1)  $s \rightarrow k(t, s) \in E_M(I)$  presque partout  $t \in I$
- (K2)  $K \in E_M(I^2)$  et  $t \rightarrow k(t, s) \in E_\varphi(I)$  presque partout  $s \in I$ ,  $\|K\|_M < \frac{1}{2k_1 \cdot |\lambda| \cdot G(1)^\gamma}$
- (K3)  $\int_a^b K(t_1, s) ds \geq \int_a^b K(t_2, s) ds$  pour  $t_1, t_2 \in [a, b]$  avec  $t_1 < t_2$

Alors, il existe un nombre  $\rho > 0$  tel que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  avec  $|\lambda| < \rho$  et pour tout  $g$  tel que  $\|g\|_\varphi < 1$  il existe une solution  $x \in E_\varphi(I)$  de (1) qui est croissante presque partout sur  $I$ .

*Démonstration.* [9] Nous devons diviser la démonstration en plusieurs étapes

- I. L'opérateur  $B$  est bien défini de  $L_\varphi(I)$  dans lui-même et est continu sur un domaine dépendant du cas considéré.
- II. Nous allons construire une boule invariante  $B_r$  pour  $B$  dans  $L_\varphi(I)$ .
- III. Nous construisons un sous-ensemble  $Q_r$  de cette boule, qui contient des fonctions croissantes presque partout, et nous étudions les propriétés de  $Q_r$ .
- IV. Nous vérifions les propriétés de continuité et de monotonie de  $B$  dans  $Q_r$ , de sorte que  $U : Q_r \rightarrow Q_r$ .
- V. Nous démontrons que  $B$  est une contraction par rapport à une mesure de non-compacité.
- VI. Nous utilisons le théorème du point fixe de Darbo pour trouver une solution dans  $Q_r$ .

I. Tout d'abord, observons que, sous les hypothèses (C2) et (C3), le **lemme 3.3** implique que l'opérateur de superposition  $F$  agit de  $L_\varphi(I)$  vers  $L_N(I)$

Dans ce cas, nous allons démontrer que  $U$  est une application continue de la boule unité dans  $E_\varphi(I)$  vers l'espace  $E_\varphi(I)$  (remarque :  $L_\varphi(I)$  n'est pas suffisant pour notre démonstration). Rappelons que  $x \in E_\varphi(I)$  si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\|x\chi_T\|_\varphi < \epsilon$  pour tout sous-ensemble mesurable  $T$  de  $I$  de mesure inférieure à  $\delta$  (c'est-à-dire que  $x$  a une norme absolument continue).

Puisque  $N$  est une  $N$ -fonction satisfaisant la condition  $\Delta'$  et que l'hypothèse (C3) est vérifiée. Il en résulte qu'il existe une constante  $C$  (indépendante du noyau) telle que, pour tout sous-ensemble mesurable  $T$  de  $I$  et  $x \in L_\varphi(I)$ ,  $\|x\|_\varphi \leq 1$ , on a :

$$\|A(x)\chi_T\|_\varphi \leq C\|K\chi_{T \times I}\|_M \quad (3.16)$$

Commençons par observer qu'au vu du **Lemme 3.1**, il suffit de vérifier la propriété souhaitée pour l'opérateur  $A$ .

De plus, d'après les hypothèses (C3) et (C4), il existe  $\omega, \gamma, u_0 > 0$ .

$$\begin{aligned} \|G(|x(\cdot)|)\|_N &= \frac{1}{\omega} \|\omega G(|x(\cdot)|)\|_N \\ &\leq \frac{1}{\omega} \inf_{r>0} \left\{ \int N(\omega G(|x(t)|)/r) dt \leq 1 \right\} \\ &\leq \frac{1}{\omega} \left( 1 + \int_a^b N(\omega G(|x(t)|)/r) dt \right) \\ &\leq \frac{1}{\omega} \left( 1 + N(\omega G(u_0)) \cdot (b-a) + \gamma \int_a^b \varphi(|x(t)|) dt \right) \end{aligned}$$

lorsque  $x \in L_\varphi(I)$  avec  $\|x\|_\varphi \leq 1$ .

À présent, grâce à l'inégalité de Hölder et à l'hypothèse (C2), on obtient

$$|K(t, s)f(s, x(s))| \leq \|k(t, s)\| \cdot |f(s, x(s))| \leq \|k(t, s)\| \cdot |(b(s) + G(|x(s)|))|$$

pour  $t, s \in I$  posons  $k(t) = 2\|K(t, \cdot)\|_M$  pour  $K \in E_M(I^2)$  cette fonction est intégrable sur  $I$ . D'après les hypothèses (K1) et (K2) concernant le noyau  $K$  de l'opérateur  $H$ , nous obtenons que

$$\|A(x)(t)\| \leq k(t) \cdot (\|b\|_N + \|G(|x(\cdot)|)\|_N) \text{ pour } t \in I$$

D'où, pour tout sous-ensemble mesurable  $T$  de  $I$  et  $x \in E_\varphi(I)$

$$\|A(x)\chi_T\|_\varphi \leq \|k\chi_T\|_\varphi \cdot (\|b\|_N + \|G(|x(\cdot)|)\|_N).$$

Enfin, si  $t$  est tel que  $K(t, \cdot) \in E_M(I)$  et  $x \in E_\varphi(I)$  on a :

$$\int_T \|K(t, s)f(s, x(s))\| ds \leq 2\|k(t, s)\chi_T\|_M \cdot (\|b\|_N + \|G(|x(\cdot)|)\|_N). \text{ pour } t \in I$$

Il en découle que  $A$  envoie  $B_1(E_\varphi(I))$  dans  $E_\varphi(I)$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la continuité de  $A$  en tant qu'application de la boule unité  $B_1(E_\varphi(I))$  dans l'espace  $E_\varphi(I)$ . Soit  $x_n, x_0 \in B_1(E_\varphi(I))$  tel que  $\|x_n - x_0\|_\varphi \rightarrow 0$  lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ . Supposons, par contradiction, que  $A$  n'est pas continue et que  $\|A(x_n) - A(x_0)\|_\varphi$  ne converge pas vers zéro. Alors, il existe  $\epsilon > 0$  et une sous-suite  $(x_{n_k})$  tels que

$$\|A(x_{n_k}) - A(x_0)\|_\varphi > \epsilon \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Et la sous-suite est convergente a.i vers  $x_0$ . Puisque  $(x_n)$  est un sous-ensemble de la boule, la suite  $\int_a^b \varphi(|x_n(t)|) dt$  est bornée. Comme l'espace  $E_\varphi(I)$  est régulier, les boules y sont fermées pour la norme dans  $L_1$ , donc la suite  $\int_a^b |x_n(t)| dt$  est également bornée. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_T \|K(t, s)f(s, x_n(s))\| ds &\leq 2\|k(t, s)\chi_T\|_M \cdot (\|b\|_N + \|G(|x(\cdot)|)\|_N). \\ &\leq 2\|k(t, s)\chi_T\|_M \cdot \left( \|b\|_N + \frac{1}{\omega} \left[ 1 + N(\omega G(u_0)) \cdot (b - a) + \gamma \int_a^b \varphi(|x_n(t)|) dt \right] \right) \end{aligned}$$

Et alors la suite  $(\|K(t, s)f(s, x_n(s))\|)$  est équi-intégrable sur  $I$  pour  $t \in I$ . Par la continuité de  $f(t, \cdot)$ , on obtient  $\lim_{k \rightarrow \infty} K(t, s)f(s, x_{n_k}(s)) = K(t, s)f(s, x_0(s))$  pour a.i  $s \in I$ . En appliquant maintenant le théorème de convergence de Vitali, nous en déduisons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(x_{n_k})(t) = A(x_0)(t) \quad \text{pour } t \in I$$

Mais l'équation (3.16) implique que  $A(x_{n_k})$  sous-ensemble de  $E_\varphi(I)$ , et donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} A(x_{n_k})(t) = A(x_0)(t)$ , ce qui contredit l'inégalité (3.7). Puisque  $A$  est continue entre les espaces indiqués, alors, l'opérateur  $U$  possède la même propriété, et donc  $U$  est une application continue de  $B_1(E_\varphi(I))$  dans l'espace  $E_\varphi(I)$ .

Selon l'hypothèse (C1),  $B$  applique  $B_1(E_\varphi(I))$  dans  $E_\varphi(I)$  de manière continue.

- II. Nous allons démontrer que l'opérateur  $U$  est borné, c'est-à-dire que nous allons construire la boule invariante pour cet opérateur. Par  $B$ , nous désignerons le second membre de notre équation intégrale, c'est-à-dire  $B = g + U$ . Posons  $r = 1$ , et soit :

$$\rho = \frac{1 - \|g\|_\varphi}{2k_1 \cdot C \cdot \|K\|_M}$$

Soit  $x$  un élément arbitraire de  $B_1(E_\varphi(I))$ . En utilisant les considérations ci-dessus,

l'hypothèse (C3), la formule (3.16) et la Proposition 3.1, pour un suffisamment petit  $\lambda$  ( $|\lambda| < \rho$ ), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\|B(x)\|_\varphi &\leq \|g\|_\varphi + \|Ux\|_\varphi \\
&= \|g\|_\varphi + \|x \cdot A(x)\|_\varphi \\
&\leq \|g\|_\varphi + k_1 \|x\|_\varphi \cdot \|A(x)\|_\varphi \\
&= \|g\|_\varphi + k_1 |\lambda| \|x\|_\varphi \cdot \left\| \int_a^b K(\cdot, s) f(s, x(s)) ds \right\|_\varphi \\
&\leq \|g\|_\varphi + 2k_1 \cdot |\lambda| \cdot C \cdot \|x\|_\varphi \cdot \|K\|_M \\
&\leq \|g\|_\varphi + 2k_1 \cdot |\lambda| \cdot C \cdot r \cdot \|K\|_M \\
&\leq \|g\|_\varphi + 2k_1 \cdot \rho \cdot C \cdot \|x\|_\varphi \cdot \|K\|_M \\
&\leq r
\end{aligned}$$

chaque fois que  $\|x\|_\varphi \leq 1$ . Alors, nous avons  $B : B_r(E_\varphi(I)) \rightarrow B_r(E_\varphi(I))$ . De plus,  $B$  est continue sur  $B_r(E_\varphi(I))$  (voir la partie I de la démonstration).

III. Soit  $Q_r$  le sous-ensemble de  $B_r(E_\varphi(I))$  constitué de toutes les fonctions presque partout croissantes sur  $I$ . Cet ensemble est non vide, borné (par  $r$ ), convexe (ceci résulte directement de la définition) et fermé dans  $L_\varphi(I)$ .

Pour démontrer cette dernière propriété, soit  $(y_n)$  une suite d'éléments de  $Q_r$  convergeant dans  $L_\varphi(I)$  vers  $y$ . Alors, la suite converge en mesure et, en vertu du théorème de convergence de Vitali pour les espaces d'Orlicz ainsi que de la caractérisation de la convergence en mesure, on obtient l'existence d'une sous-suite  $(y_{n_k})$  de  $(y_n)$  qui converge vers  $y$  presque uniformément sur  $I$ . De plus,  $y$  est encore presque partout croissante sur  $I$ , ce qui implique que  $y \in Q_r$  et donc l'ensemble  $Q_r$  est fermé. L'ensemble  $Q_r$  est compact pour la convergence en mesure.

IV. Nous allons maintenant montrer que l'opérateur  $B$  préserve la monotonie des fonctions. Prenons  $x \in Q_r$ , alors  $x$  est presque partout croissante sur  $I$ , et par conséquent  $f(x)$  l'est aussi, en vertu de l'hypothèse (C2). De plus,  $A(x) = HF(x)$  est presque partout croissante sur  $I$ , grâce à l'hypothèse (C4). Comme le produit ponctuel de fonctions presque partout monotones est encore de même type, l'opérateur  $U$  est presque partout croissant sur  $I$ .

De plus, les hypothèses (C1) et (C2) nous permettent de déduire que  $Bx(t) = g(t) + U(x)(t)$  est également presque partout croissante sur  $I$ . Ce fait, associé à l'assertion selon laquelle  $B : B_r(E_\varphi(I)) \rightarrow B_r(E_\varphi(I))$ , implique que  $B$  est également une application de  $Q_r$  dans lui-même.

D'après les considérations précédentes, il en résulte que  $H$  est une application continue de  $Q_r$  dans  $Q_r$ .

V. Nous allons démontrer que  $B$  est une contraction par rapport à une mesure de forte non-compacité. Supposons que  $X$  est un sous-ensemble non vide de  $Q_r$ , et soit la constante fixe  $\epsilon > 0$  quelconque. Alors, pour un  $x \in X$  arbitraire et pour un ensemble  $D \subset I$ ,

de mesure  $\text{meas}D \leq \epsilon$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\|B(x) \cdot \chi_D\|_\varphi &\leq \|g\chi_D\|_\varphi + \|U(x) \cdot \chi_D\|_\varphi \\
&= \|g\chi_D\|_\varphi + \|x \cdot A(x)\chi_D\|_\varphi \\
&\leq \|g\chi_D\|_\varphi + k_1 \|x\chi_D\|_\varphi \cdot \|A(x) \cdot \chi_D\|_\varphi \\
&= \|g\chi_D\|_\varphi + k_1 \cdot |\lambda| \cdot \|x\chi_D\|_\varphi \cdot \left\| \int_D K(\cdot, s) f(s, x(s)) ds \right\|_\varphi \\
&\leq \|g\chi_D\|_\varphi + k_1 \cdot |\lambda| \cdot \|x\chi_D\|_\varphi \cdot \left\| \int_D |K(\cdot, s)| (b(s) + G(|x(s)|)) ds \right\|_\varphi \\
&\leq \|g\chi_D\|_\varphi + k_1 \cdot |\lambda| \cdot \|x\chi_D\|_\varphi \cdot 2 \|k\|_M \| [b\chi_D + G(1)] \|_N \\
&\leq \|g\chi_D\|_\varphi + k_1 \cdot |\lambda| \cdot \|x\chi_D\|_\varphi \cdot \|k\|_M \| [b\chi_D \|_N + G(1)]
\end{aligned}$$

Par conséquent, en tenant compte du fait que  $g \in E_\varphi, b \in E_N$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\text{mes}D \leq \epsilon} \left[ \sup_{x \in X} \{ \|g\chi_D\|_\varphi = 0 \} \right] \right\} \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\text{mes}D \leq \epsilon} \left[ \sup_{x \in X} \{ \|b\chi_D\|_N = 0 \} \right] \right\}$$

Par définition de  $c(x)$ ,

$$c(B(x)) \leq 2k_1 \cdot |\lambda| \cdot \|K\|_M \cdot G(1) \cdot c(X).$$

Puisque  $X \subset Q_r$  est un sous-ensemble non vide, borné et compact pour la mesure d'un espace régulier idéal  $E_\varphi$ , nous pouvons appliquer et obtenir :

$$\beta_H(B(x)) \leq 2k_1 \cdot |\lambda| \cdot \|K\|_M \cdot G(1) \cdot \beta_H(X).$$

L'inégalité obtenue ci-dessus, ainsi que les propriétés de l'opérateur  $B$  et de l'ensemble  $Q_r$  établies précédemment, et l'inégalité provenant de l'hypothèse (K2), nous permettent d'appliquer le théorème du point fixe de Darbo, ce qui achève la démonstration.

**Exemple 3.1.** [9] Pour souligner certains avantages de nos résultats, rappelons que les résultats obtenus étendent en particulier ceux concernant les équations quadratiques du type :

$$x(t) = g(t) + \lambda x(t) \int_0^1 K(t, s)|x(s)|ds$$

ou

$$x(t) = g(t) + \lambda x(t) \int_0^1 K(t, s)(\log(1 + |x(s)|))ds$$

avec le noyau du type  $K(t, s) = \exp(s - t)$ . Ici  $G(u) = u$  ou  $G(u) = \log(1 + |u|)$ , respectivement. Dans la dernière équation, la fonction  $N(u) = (1 + |u|) - |u|$  satisfait la condition  $\Delta'$  et donc  $M(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ . D'où  $K \in E_M(I^2)$ . Nous posons  $\varphi = N$  et prenons un  $g \in E_\varphi$  arbitraire avec un ensemble de propriétés appropriées.

□

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.P. AGARWAL, M. BENCHOHRA et S. HAMANI. « Boundary value problems for differential inclusions with fractional order ». In : *Adv.Stud.Contemp.Math* (2008).
- [2] J. BANAS et M. MURSALEEN. « Sequence spaces and measures of non compactness with applications to differential and integral equations ». In : *Springer* (2014).
- [3] CH. BELABBACI. « Mesure de non compacité et spectre essentiel ». Thèse de doct. université de Laghouat, 2017.
- [4] S. BENACER. « Continuité des opérateurs linéaires dans les espaces d'Orlicz ». Mém. de mast. Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2022.
- [5] F. BOULAHIA. « Espaces d'Orlicz ». In : *Université Abderrahmane Mira de Bejaia* (2020).
- [6] K. CHAABANI. « Boundedness and Compactness of Nonlinear Integral Equations in Functional Spaces ». Mém. de mast. Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2020.
- [7] B. GAGUI. « Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz ». Thèse de doct. Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2015.
- [8] M. MEZAACHE. « L'existence d'une classe d'équations différentielles d'ordre fractionnaire en utilisant la mesure de non compacité. APPLICATION : L'opérateur de Hilfer ». Mém. de mast. Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2024.
- [9] C. MIECZYŚLAW et M.A.M. METWALI. « On quadratic integral equations in Orlicz spaces ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (J.Math.Anal.Appl. 387 (2012) 419–432 ) (2011), p. 419-432.
- [10] M. NADIR. « Cours sur les équations intégrales ». In : *Université de M'sila* (2016). URL : [www.mostefanadir.com](http://www.mostefanadir.com).
- [11] S. SZUÁA. « On the application of non-compactness to existence theorems ». In : *Unive Padova* (1986), p. 1-14.

## Résumé

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence de solutions des équations intégrales quadratiques dans l'espace d'Orlicz, en utilisant le théorème du point fixe associé aux mesures de non-compacité.

---

## ملخص

قنا في هذه المذكرة بدراسة وجود حلول للمعادلات التكاملية التربيعية في فضاء أورليتز، باستخدام نظرية النقطة الثابتة مقترنة بالقياسات غير المترابطة.

---

## Abstract

---

In this dissertation, we studied the existence of solutions of quadratic integral equations in Orlicz space using the fixed point theorem combined with measures of noncompactness.

---