



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## Mémoire de Master

**Domaine** : Mathématiques et Informatique  
**Filière** : Mathématiques  
**Option** : Analyse Mathématique et Numérique

### Thème

---

**Comparaison entre les solutions des polynômes de Touchard  
et de Gegenbauer pour les équations intégrales-différentielles**

---

Présentée par : *DAHMANI Meryem*

Soutenu publiquement le : 14/05/2024

Devant le jury composé:

**Mr. NADIR Mostefa**  
**Mr. DILMI Mustapha**  
**Mr. LAKHAL Aissa**

Prof  
M.C.B  
M.A.A

Université de M'sila  
Université de M'sila  
Université de M'sila

**Président.**  
**Encadreur.**  
**Examineur.**

Année universitaire 2023/2024

---

# Remerciement

Tout d'abord, nous remercions **Allah**, notre Créateur, qui nous a donné la force, la volonté et le courage d'accomplir ce travail important et utile dans le domaine des équations intégro-différentielles..

Je tiens à remercier profondément mon directeur de thèse, **Dr. Mustapha DILMI**, qui a proposé le sujet de cette mémoire et pour son précieux soutien, ses conseils et son assistance tout au long de ce projet.

Nous remercions également les membres du comité de jugement et tous les professeurs du département de mathématiques pour toutes les connaissances qu'ils nous ont apportées au cours de notre parcours académique.

Je tiens également à remercier ma famille et mes amis pour leur soutien et leurs encouragements continus pendant que je travaillais sur ce mémoire.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué directement et indirectement à la réalisation de ce travail.

## المخلص

في هذا العمل قمنا بتطبيق طريقة متعددة الحدود من نوع توشارد و جيجنباور مع طريقة جالركين على معادلات فولتيرا وفريدولم التكاملية التفاضلية من أجل إيجاد حلول تقريبية ومقارنتها بالحلول الدقيقة.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التكاملية-التفاضلية، كثيرات حدود توشارد، كثيرات حدود جيجنباور، طريقة جالركين.

---

# Abstract

In this work, we applied the polynomial method of the Touchard and Gegenbauer type with the Galerkin method to the Volterra and Fredholm integro-differential equations in order to find approximate solutions and compare them with exact solutions.

**Keywords :** Integro-differential equations, Touchard polynomials, Gegenbauer polynomials, Galerkin method.

---

# Résumé

Dans ce travail, nous avons appliqué la méthode polynômiale de type Touchard et Gegenbauer avec la méthode de Galerkin aux équations intégrales de Volterra et Fredholm afin de trouver des solutions approchées et de les comparer avec des solutions exactes.

**Mots clés :**

Equations intégrales-différentielles, polynôme de Touchard, polynôme de Gegenbauer, Méthode de Galerkin.

# Table des matières

<b>Liste des tableaux</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction aux concepts de base</b>	<b>4</b>
1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles . . . . .	4
1.2 Notions sur les opérateurs . . . . .	6
1.3 Les équation intégrales . . . . .	8
1.4 Classification des équations intégrales . . . . .	9
1.5 Equation intégrro-différentielles . . . . .	10
1.6 Classification des équations intégrro-différentielles . . . . .	11
<b>2 Existence et unicité de la solution des équation intégrro-différentielle</b>	<b>14</b>
2.1 Existence et unicité de la solution E.I.D . . . . .	14
2.2 Méthodes de résolution des (E.I-D) . . . . .	16
2.2.1 <b>Méthodes analytiques</b> . . . . .	16
2.2.2 <b>Méthodes numériques</b> . . . . .	21
<b>3 Solutions des équations intégrro-differentielles</b>	<b>24</b>
3.1 Polynômes de Touchard . . . . .	24
3.2 Polynômes de Gegenbauer . . . . .	25
3.3 Méthode de P-Galerkin . . . . .	25

<b>Conclusion</b>	<b>32</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>

# Liste des tableaux

1	solutions exactes et approximatives des E.I.D de Volterra. Exemple 3.1	.....27
3	solutions exactes et approximatives des E.I.D de Volterra. Exemple 3.2	.....28
4	solutions exactes et approximatives des E.I.D de Fredholm. Exemple 3.3	.....29
5	solutions exactes et approximatives des E.I.D de Fredholm. Exemple 3.4	.....30
6	solutions exactes et approximatives des E.I.D de Fredholm. Exemple 3.5	.....31

---

# Notations

$C[a, b]$	espace des fonctions continues sur $[a, b]$
$f$	terme libre dans l'équation intégrale
$A$	opérateur linéaire
$I$	opérateur identique
$\oplus$	somme directe
$r$	nombre de Riesz
$L$	est le constant de Lipschitz
$Ker(A)$	noyau de l'opérateur
$Im(A)$	image de l'opérateur
$H$	espace de Hilbert
$B(0, 1)$	boule unité
$P$	opérateur de projection
$\int$	signe intégral
$u^{(n)}$	la dérivée $n$ -ième
$\langle, \rangle$	le produit scalaire
$T, G$	polynôme de Touchard, Gegenbauer
$k(x, t)$	noyau de l'équation intégrale
$u$	la fonction inconnue dans l'équation intégrale
$u_n$	solution approchée
$EID$	equation intégro-differentielle

# Introduction

Depuis un siècle, l'étude des équations intégrales et différentielles dans le domaine des mathématiques numériques suscite un grand intérêt.

Dans ce mémoire, nous intéresserons aux équations intégro-différentielles et plus précisément aux résultats de l'existence de la solution et de son unicité ou à la recherche de la solution approchée pour certaines catégories d'équations intégro-différentielles.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

**Le premier chapitre** couvre les concepts de facteurs ainsi que la définition et la classification des équations intégrales, et intégro-différentielles.

**Le deuxième chapitre** dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des équations intégro-différentielles, et nous présenterons quelques méthodes analytiques et numériques importantes pour résoudre des équations intégro-différentielles.

**Le troisième chapitre** contient, l'utilisation des Polynômes de Touchard et, Gegenbauer pour résoudre des équations intégro-différentielles de type Volterra et, Fredholm, et les comparer avec des solutions exactes.

# Chapitre 1

## Introduction aux concepts de base

Dans ce chapitre, on donne la base sur la théorie des équations intégrales, étudiée sur l'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé. Ainsi on donne quelques définitions sur les bases de l'analyse numérique.

### 1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles

#### Espace de Hilbert

**Définition 1.1** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel  $H$  sur  $\mathbb{C}$  muni d'un produit scalaire  $\langle x, x \rangle$ , et qui est complet pour la norme  $\langle x, x \rangle^2$ .*

**Définition 1.2** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Un système orthonormé est un sous-ensemble  $E$  de  $H$  tel que pour toute  $f$  de  $E$  nous avons :*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Définition 1.3** *Une famille  $e_i, i \in I$  d'éléments de  $H$  est dite orthonormée si :*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Définition 1.4** Soit  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un système orthonormé dans un espace de Hilbert  $H$  et soit  $x \in H$  alors :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ce résultat est appelé l'inégalité de Bessel. Une base orthonormée de  $H$  est un système orthonormé  $E$  tel que :

$$x = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle e, x \in H,$$

où la convergence est dans  $H$ .

**Définition 1.5** Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $S \subset H$ . Le complément orthogonal de  $S$  est :

$$S^\perp = \{x \in H : \langle x, s \rangle = 0, \forall s \in S\}.$$

Nous remarquons de cette définition que  $S^\perp$  est toujours un sous-espace fermé de  $H$  et que  $S \cap S^\perp = \{0\}$ .

**Définition 1.6** Un espace vectoriel  $X$  est la somme directe de deux sous-espaces  $Y$  et  $Z$  de  $X$  et on écrit :

$$X = Y \oplus Z,$$

si chaque  $x \in X$  a une représentation unique.

$x = y + z$  où  $y \in Y$  et  $z \in Z$  : Soit  $M$  un sous-espace fermé de  $H$ , Alors :

$$H = M \oplus M^\perp.$$

## Produit scalaire

**Définition 1.7** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , un produit scalaire sur  $E$  est application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $\langle \dots \rangle$  possédant les propriétés suivantes : pour tout  $x, y, z$  dans  $E$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}$  on a :

1.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ .
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ .
4.  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ .

## Espace de Banach

**Définition 1.8** *Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

### Espace de $L^2[0,1]$

L'espace de fonctions  $L^2[0, 1]$  défini par :  $L^2[0, 1] = \{f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ est mesurable et } \|f\| < \infty\}$ , est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

## 1.2 Notions sur les opérateurs

### Opérateurs linéaires

**Définition 1.9** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels topologiques. On appelle opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$  une application,  $y = Ax, (x \in E, y \in F)$  qui vérifie la condition :*

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2).$$

### Opérateurs bornés

**Définition 1.10** *L'opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est borné, s'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in E$ ,*

$$\|Ax\| \leq C \|x\|. \tag{1.1}$$

### Norme d'un opérateur

**Définition 1.11** *Pour tout opérateur borné  $A$  d'un espace normé dans un espace normé on a :*

- Le plus petit des nombres  $C$  vérifiant l'inégalité (1.1) s'appelle norme de l'opérateur  $A$  et se note  $\|A\|$ .

- La norme de l'opérateur  $A$  est donnée aussi par :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

**Proposition 1.12** - L'opérateur  $A$  est dit continu, s'il est continu en tout point  $x \in E$ .

### Opérateur inverse

**Définition 1.13** Soient  $A$  un opérateur de  $E$  dans  $F$ ;  $D_A$  son domaine de définition et  $R_A$  le domaine de ses valeurs. L'opérateur  $A$  est dite inversible, si pour tout  $y \in R_A$  l'équation :

$$Ax = y,$$

a une et une seule solution.

Si  $A$  est inversible, chaque  $y \in R_A$  on peut faire correspondre un élément et un seul  $x \in D_A$  à savoir la solution de l'équation :

$$Ax = y.$$

L'opérateur qui réalise cette correspondance s'appelle inverse de  $A$  et se note  $A^{-1}$ .

**Proposition 1.14** L'opérateur  $A^{-1}$ , l'inverse d'un opérateur linéaire  $A$  est aussi linéaire.

### Opérateur compact

**Définition 1.15** Un opérateur linéaire  $A : E \rightarrow F$  est compact si et seulement si, pour toute suite bornée  $(\varphi_n)$  de  $E$ , on peut extraire de la suite  $(A\varphi_n)$  de  $F$  une sous suite convergente. i.e., si toute suite de l'ensemble  $\{A\varphi, \varphi \in E, \|\varphi\| \leq 1\}$  contient une sous suite convergente.

### Opérateur Adjoint

**Définition 1.16** Soit  $A$  un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert  $E$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $F$ , l'opérateur linéaire noté  $A^*$  défini de  $F$  dans  $E$  est dite opérateur adjoint de  $A$  si l'on a pour tout  $\varphi \in E$  et  $\psi \in F$ ,

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_F = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_E.$$

## Opérateur intégral

**Définition 1.17** On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire  $A$  défini sur un espace normé  $E$  à valeurs dans un espace normé  $F$  donné sous la forme :

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt, \quad x \in \Omega;$$

$k(x,t)$  étant appelé noyau de l'opérateur intégrale  $A$ .

## Théorème de Riesz

**Théorème 1.18** Soit un opérateur compact  $A : E \longrightarrow E$  tel que  $E$  est un espace normé. Alors l'opérateur  $L = I - A$ , (l'opérateur étudié dans le cadre des équation intégral) a les propriétés suivantes :

- $\text{Ker}(L)$  est de dimension finie.
- $\text{Im}(L)$  est fermé, et de co-dimension fini.
- Il existe un unique  $r \in \mathbb{N}$  appelé nombre de Riesz de l'opérateur  $A$ , tel que :

$$\begin{aligned} \{0\} &= \text{Ker}(L^0) \subset \text{Ker}(L^1) \subset \dots \subset \text{Ker}(L^r) = \text{Ker}(L^{r+1}) = \dots \\ E &= \text{Im}(L^0) \supset \text{Im}(L^1) \supset \dots \supset \text{Im}(L^r) = \text{Im}(L^{r+1}) = \dots \end{aligned}$$

Et on a la somme directe :

$$E = \text{Ker}(L^r) \oplus \text{Im}(L^r).$$

De plus, on a l'alternative de Fredholm :

$$\text{Im}(L) = \text{Ker}(L^*)^\perp,$$

où  $L^*$  est l'opérateur de adjoint de  $L$ .

les inclusion énoncés ci-dessus sont strictes.

## 1.3 Les équation intégrales

**Définition 1.19** Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration  $\int$ . La forme générale d'une équation

intégrale est :

$$\alpha(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t) u(t) dt, \quad (1.2)$$

où  $\alpha(x)$ ,  $f(x)$ ,  $K(x, t)$  sont des fonctions données, la fonction  $u(x)$  qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer,  $\lambda$  est un paramètre réel ou complexe différent de zéro, et  $\Omega$  un ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie.

## 1.4 Classification des équations intégrales

### Equation intégrale de Fredholm

Une équation de la forme (1.2) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm.

i) Si  $\alpha(x) = 1$ , l'équation s'écrit :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt, \quad (1.3)$$

et elle est dite de seconde espèce.

ii) Si  $\alpha(x) = 0$ , l'équation s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt = 0,$$

et elle est dite de première espèce.

iii) Si  $f(x) = 0$ , l'équation s'écrit :

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt,$$

et elle est dite homogène.

### Equation intégrale de Volterra

La forme la plus classique de Volterra est de la forme :

$$\alpha(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt, \quad (1.4)$$

où les bornes de l'intégration sont fonction de  $x$  et la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît linéairement sous le signe intégral.

i) Si  $\alpha(x) = 1$ , l'équation s'écrit :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt.$$

Cet équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

ii) Si  $\alpha(x) = 0$ , l'équation s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt = 0,$$

qui s'appelle l'équation intégrale de Volterra de première espèce.

iii) Si  $f(x) = 0$ , l'équation s'écrit :

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt,$$

et elle dite homogène.

## 1.5 Equation intégro-différentielles

Une équation intégro-différentielle est une équation composée de deux opérations intégrale et différentiel qui impliquent la fonction inconnue  $u$ . La forme générale d'une équation intégro-différentielle linéaire d'ordre  $n$  est :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t) u(t) dt, \quad (1.5)$$

où  $\Omega$  un ensemble fermé et borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie,  $\lambda$  est un paramètre numérique,  $K(x, t)$  le noyau de l'équation intégrale,  $f(x)$  est la fonction donnée,  $u(t)$  est la fonction inconnue,  $u^{(n)}$  est la dérivée nième de  $u(x)$ .

## 1.6 Classification des équations intégro-différentielles

### Equation intégro-différentielle de Fredholm

L'équation de la forme (1.5) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégro-différentielle linéaire de Fredholm.

L'(E.I-D) de Fredholm s'écrit sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt, \quad (1.6)$$

où  $u^{(n)}(x)$  indique la dérivée nième de  $u(x)$ . Autre dérivés de l'ordre moins peuvent apparaitre avec  $u^{(n)}$  sur le coté gauche. Des exemples de Fredholm intégro-différentielles :

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xu(t) dt, u(0) = 0,$$

et

$$u''(x) + u'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t) dt, u(0) = 0, u'(0) = 1.$$

### Equation intégro-différentielle de Volterra

Les équation intégro-différentielle de Volterra de première espèce, de seconde espèce ou homogène sont définies de la même manière précédente sauf que le borne d'intégration supérieure est variable, i.e  $b = x$ .

L'équation intégro-différentielle de Volterra s'écrit sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt. \quad (1.7)$$

Exemples d'équations l'intégral-différentielle de Volterra sont :

$$u'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - x \exp x - \int_0^x tu(t) dt, u(0) = 0,$$

et

$$u''(x) + u'(x) = 1 - x - (\sin x + \cos x) - \int_0^x tu(t) dt, u(0) = -1, u'(0) = 1.$$

### Equation intégral-différentielle de Volterra-Fredholm

Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra consistent alors l'(E.I-D) est dite de Fredholm-Volterra ou Volterra-Fredholm.

L'équation intégral-différentielle de Volterra-Fredholm s'écrit sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t) u(t) dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t) u(t) dt, \quad (1.8)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des paramètres numériques,  $K_1(x, t)$  et  $K_2(x, t)$  les noyaux de l'équation intégrale (1.8),  $f(x)$  est la fonction donnée et  $u(t)$  est la fonction inconnue.

Et la forme mixte :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b K(x, t) u(t) dt.$$

Un exemple de Volterra-Fredholm intégral-différentielles :

$$u'(x) = 24x + x^4 + 3 - \int_0^x (x-t) u(t) dt - \int_0^1 tu(t) dt, u(0) = 0.$$

### Linéarité et Homogénéité de l'(E.I-D)

**Définition 1.20** L'équation intégral-différentielle :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt,$$

est dite linéaire si l'exposant de la fonction inconnue  $u(x)$  sous le signe intégral est un et que l'équation ne contient pas de fonctions non linéaires de  $u(x)$ , sinon l'équation est dite non linéaire.

**Définition 1.21** L'équation intégro-différentielle :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt,$$

est dit homogène si  $f(x)$  est identiquement nul, sinon on dit non homogène.

# Chapitre 2

## Existence et unicité de la solution des équation intégral-différentielle

Dans ce chapitre nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un point fixe, et nous présenterons quelques méthodes analytiques, et numériques importantes pour résoudre les équations intégral-différentielles de la deuxième espèce.

### 2.1 Existence et unicité de la solution E.I.D

**Définition 2.1** Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans lui-même. On appelle point fixe de  $f$  tout point  $u \in E$ ,

tel que :

$$f(u) = u.$$

Rappelons que le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe.

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

**Théorème 2.2 (Picard)** Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et,  $\varphi \in E \longrightarrow E$  une application contractante, i.e Lipschitzienne par rapport  $k < 1$ . Alors,  $\varphi$  admet un unique point fixe  $a \in E$ . De plus, pour tout point initial  $x_0 \in E$ , la suite itérée  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , avec  $x_0 \in E$  quelconque et  $x_{p+1} = \varphi(x_p)$  converge vers  $a$ .

**Théorème 2.3** Soit  $T$  un opérateur défini dans un espace de Banach  $X$ , tel que  $T^n$  est contractant sur  $X$ , pour un entier positif  $n$ , alors  $T$  a un point fixe unique.

**Lemme 2.4** Soit l'opérateur  $T$  tel que  $T : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$ ,  $u$  et  $v \in C([a, b])$ , et  $L \in \mathbb{R}_+^*$  est le constant de Lipschitz de la fonction  $K$  au troisième variable,

$$K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors :

$$\|T^p(u) - T^p(v)\|_\infty \leq \frac{L^p(b-a)^{2p}}{p!} \|u - v\|_\infty,$$

et l'équation intégral-différentielle de Fredholm :

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt, & x \in [a, b] \\ \varphi(a) = a, & a \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2,1)$$

Admet une seule solution point fixe.

**Théorème 2.5** Supposons que  $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ ,  $K \in C[J \times J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$  tel que :

$$\int_{t_0}^t k(r, s, u(s)) dr \leq N,$$

pour

$$t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha,$$

avec

$$u \in H_0 = \{\phi \in C[J \times \mathbb{R}^n] : \phi(t_0) = u_0 \text{ et } |\phi(t) - u_0| \leq b\},$$

pour certain  $0 < \alpha \leq a$ . Alors l'équation intégral-différentielle de Volterra .

$$\begin{cases} u'(x) = f(t, x(t)) + \int_s^t k(t, s, u(t)) dt \\ \phi(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Admet une solution unique.

## 2.2 Méthodes de résolution des (E.I-D)

### 2.2.1 Méthodes analytiques

**Définition 2.6** Le noyau  $K(x, t)$  d'une équation intégrale-différentielle de Fredholm est dite dégénérée s'il est la somme d'un nombre fini de produit des fonctions de variable  $x$  seul par des fonctions de variable  $t$  seul i.e il est de la forme :

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^n g_i(x)h_i(t).$$

Les fonctions  $g_i(x)$  et  $h_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) seront supposées continues dans le carré fondamental  $a \leq x, t \leq b$  et linéairement indépendantes.

**Remarque 2.7** Le noyau non dégénéré peut réduire à noyau dégénérée par développement de Taylor.

#### Méthode de calcul direct

Cette méthode peut être utilisée pour résoudre l'équation intégrale-différentielle de Fredholm de deuxième espèce directement au lieu d'une forme série.

Pour l'application de cette méthode, nous considérons le noyau séparable de la forme :

$$K(x, t) = g(x)h(t). \quad (2.3)$$

Nous considérons l'équation intégrale-différentielle de Fredholm de la forme générale :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad (2.4)$$

aux conditions initiales

$$u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n - 1.$$

En substituant (2.3) dans (2.4), on trouve :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_a^b h(t)u(t)dt. \quad (2.5)$$

Puisque l'intégrale dans l'équation (2.5) est une intégrale bornée et ne dépend que d'une seule variable  $t$ , alors nous pouvons assigner cet intégrale par une constante  $\beta$  c'est-à-dire :

$$\int_a^b h(t) u(t) dt = \beta. \quad (2.6)$$

L'équation (2.5) devient :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \beta g(x). \quad (2.7)$$

En intégrant les deux cotés de (2.7)  $n$  fois de 0 à  $x$ , en utilisant également les condition initiales, nous pouvons trouver une formule pour  $u(x)$  qui dépend de  $\beta$  et  $x$ . Cela signifie que nous pouvons écrire :

$$u(x) = u(x, \beta). \quad (2.8)$$

En substituant (2.8) dans le coté droit de (2.6), en calculant l'intégrale, en résolvant également résultante. Quand on a déterminé  $\beta$ , nous obtenons la solution exacte  $u(x)$  après avoir substitué  $\beta$  dans (2.8).

Considérons l'équation intégro-différentielle de Fredholm :

$$u'(x) = 12x + \int_0^1 u(t) dt \quad \text{avec } u(0) = 0. \quad (2.9)$$

Cet équation peut s'écrire :

$$u'(x) = 12x + \beta, \quad u(0) = 0. \quad (2.10)$$

On pose :

$$\int_0^1 u(t) dt = \beta. \quad (2.11)$$

En intégrant les deux cotés de (2.10) de 0 à  $x$ , et en utilisant la condition initiale, nous obtenons :

$$u(x) = 6x^2 + \beta x. \quad (2.12)$$

En remplaçant (2.12) dans (2.11) et évaluer le rendement intégral :

$$\beta = \int_0^1 u(t) dt = 2 + \frac{1}{2}\beta.$$

On trouve :

$$\beta = 4.$$

La solution exacte est donnée par :

$$u(x) = 6x^2 + 4x.$$

### La méthode de décomposition Adomian

La méthode de décomposition Adomian (MDA) a été introduite et développée par George Adomian. (MDA) donne la solution dans un infini série de composants. L'idée de la méthode de décomposition Adomian transforme l'équation intégro-différentielle de Fredholm en une équation intégrale.

Nous considérons l'équation intégro-différentielle de Fredholm du second ordre et du second type :

$$u''(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) u(t) dt, \quad (2.13)$$

avec les conditions initiales  $u(0) = b_0$ ,  $u'(0) = b_1$ .

Intégrant les deux cotés de (2.13) de 0 à  $x$  deux fois, nous obtenons :

$$u(x) = b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t)u(t)dt\right), \quad (2.14)$$

où les conditions initiales sont utilisées et  $L^{-1}$  et un opérateur intégral double .

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x). \quad (2.15)$$

Nous utilisons la série de décomposition (2.15) dans les cotés de (2.14), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt\right),$$

ou de façon équivalent :

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots &= b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt\right) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt\right) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_2(t)dt\right) + \dots \end{aligned}$$

Par conséquent, pour déterminer les composant  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$ , ..., de la solution  $u(x)$ , nous définissons la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= b_0 + b_1x + L^{-1}(f(x)) \\ u_{k+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} u_k(t)dt\right), k \geq 0. \end{aligned}$$

Notons que  $u_0(x)$  est défini par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral, c'est -à-dire :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= b_0 + b_1(x) + L^{-1}(f(x)) \\ u_{n+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t) u_k(t) dt, k \geq 0\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

En utilisant (2.16), la série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe.

Utilisez la méthode de décomposition d'Adomain pour résoudre l'équation intégréo-différentielle de Fredholm :

$$u'''(x) = e^x - x + \int_0^1 xtu(t) dt \quad \text{avec } u(0) = u'(0) = u''(0) = 1. \quad (2.17)$$

Intégrant les deux cotés de l'équation (2.17) trois fois de 0 à  $x$ , nous obtenons :

$$u(x) = e^x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3!}x^3 \left( \int_0^1 tu(t) dt \right).$$

D'après la procédure, nous définissons les relations de récurrence :

$$u_0(x) = e^x - \frac{1}{3!}x^3, u_{k+1}(x) = \frac{1}{3!}x^3 \int_0^1 tu_k(t) dt, \quad k \geq 0.$$

Cela on donne :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= e^x - \frac{1}{3!}x^3 \\ u_1(x) &= \frac{1}{3!}x^3 \int_0^1 tu_0(t) dt = \frac{29}{180}x^3 \\ u_2(x) &= \frac{1}{3!}x^3 \int_0^1 tu_1(t) dt = \frac{29}{5400}x^3 \\ u_3(x) &= \frac{1}{3!}x^3 \int_0^1 tu_2(t) dt = \frac{29}{162000}x^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La solution sous forme de série est donnée par :

$$u(x) = e^x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{29}{180}x^3 \left( 1 + \frac{1}{30} + \frac{1}{900} + \dots \right).$$

La somme de série géométrique infinie

$$S = 1 + \frac{1}{30} + \frac{1}{900} + \dots = \frac{30}{29}$$

L'utilisation de se résultat donne la solution exacte  $u(x) = e^x$ .

## 2.2.2 Méthodes numériques

### Rappel Integration Numérique

Le but de ce rappel est donner des méthodes permettant de calculer la valeur approchée d'intégrale .

$$\int_a^b f(t)dt. \quad (2.18)$$

Sur le plan pratique, pour obtenir une approximation lorsque les primitives de  $f$  ne sont pas calculables. Sur le plan théorique, de connaître des méthodes permettant d'obtenir des encadrements d'amplitude aussi petite que souhaitée. Lorsque la fonction  $f$  est de classe  $C^n$  sur l'intervalle réel  $I = [a, b]$ , on note :  $M_i = \max |f^{(i)}| ; x \in [a, b], i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ , on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $n \in \mathbb{N}^*$  de même longueur  $h = (b - a)/n$  que l'on appelle le pas de la subdivision. Et pour tout  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ , on note  $x_i = a + ih$ .

### Méthode des trapèzes

**Principe des méthodes** On remplace la courbe représentative de  $f$ , sur chaque segment de la subdivision, par le segment qui joint  $(x_i, f(x_i))$  a  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ . Cela revient donc a interpoler la fonction  $f$  sur le segment  $[x_i, x_{i+1}]$  par le polynôme de Lagrange de degré 1 aux points  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

**Proposition 2.8** la valeur approchée de l'intégrale  $f$  sur  $I$  par le méthode des trapèzes est alor donnée par :

$$T_n = \frac{b - a}{n} \left( \frac{f(a) - f(b)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right). \quad (2.19)$$

**Preuve.** L'aire de trapèzes en baze  $[x_i, x_{i+1}]$  est  $\frac{(x_{i+1}-x_i)(f(x_i)+f(x_{i+1}))}{2} = \frac{h(f(x_i)+f(x_{i+1}))}{2}$   
On déduit que :

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} h (f(x_i) + f(x_{i+1})) / 2 = h \left( \frac{f(a) - f(b)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (2.20)$$

■

### La méthode des fonctions de Haar rationalisées

**Définition 2.9** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , et  $0 < k \leq 2^n$ , les fonctions de Haar est définie comme :

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\Psi_{n,k}(t) = \Psi(2^n t - k + 1).$$

Une autre façon :

$$\Psi_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } t \in \left[ \frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right] \\ -2^{\frac{n}{2}} & \text{si } t \in \left[ \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[ \end{cases}$$

pour  $n \geq 0$  et,  $k = 1, 2, \dots, 2^n$

De manière analogue, définir la famille de l'extension des fonctions.

### Les fonctions de Haar rationalisées

**Définition 2.10** Les fonctions de Haar rationalisées sont composées [11] seulement de trois valeurs  $+1$ ,  $-1$  et  $0$  et peuvent être définie sur l'intervalle  $[0, 1)$  comme :

$$\Psi_{n,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[ \frac{j-1}{2^i}, \frac{2j-1}{2^{i+1}} \right] \\ -1 & \text{si } t \in \left[ \frac{2j-1}{2^{i+1}}, \frac{j}{2^i} \right] \\ 0 & \text{si } t \notin \left[ \frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i} \right[ \end{cases}$$

### Méthode de perturbation d'homotopie(HPM)

La méthode de perturbation homotopique a été introduite et développée par Jihvan He [10]. La méthode de perturbation homotopique couple une homotopie technique de topologie et technique de perturbation.

Considérer l'équation integro-différentielle de Fredholm suivante de la deuxième type de formulaire.

$$v'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, t)v(t)dt. \quad (2.21)$$

Nous définissons l'opérateur :

$$L(u) = u'(x) - \lambda \int_0^1 k(x,t)u(t)dt - f(x) = 0. \quad (2.22)$$

Où  $u'(x) = v'(x)$ . En suite, nous définissons l'homotopie  $H(u, m)$ ,  $m \in [0, 1]$  par :

$$H(u, 0) = F(u) \quad , \quad H(u, 1) = L(u) . \quad (2.23)$$

Où  $F(u)$  est un opérateur fonctionnel. Nous construisons une homotopie convexe de la forme :

$$H(u, m) = (1 - m)F(u) + mL(u). \quad (2.24)$$

Cette homotopie satisfait (2.23) pour  $m = 0$  et  $m = 1$  respectivement. Le paramètre d'intégration  $m$  augmente monotone de zéro à l'unité comme le problème trivial  $F(u) = 0$  est continuellement déformé au problème d'origine  $L(u) = 0$ . HPM utilise le paramètre Homotopy  $m$  comme paramètre d'extension pour obtenir :

$$u = w_0 + mw_1 + m^2w_2 + m^3w_3 + \dots, \quad (2.25)$$

quand  $m \rightarrow 1$ , (2.25) correspond à (2.24) et devient le solution de (2.22), c.-à-d.

$$v = \lim_{m \rightarrow 1} u = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \dots \quad (2.26)$$

La série (2.33) est convergente pour la plupart des cas et le taux de convergence dépend de  $L(u)$ .

Supposons que  $F(u) = u(x) - f(x)$ , et substituant (2.25) dans (2.22) et assimilant les termes avec la puissance identique de  $m$ , nous avons :

$$m^0 : w_0'(x) = f(x) \quad (2.27)$$

$$m^n : w_n'(x) = \int_0^1 k(x,t)w_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

# Chapitre 3

## Solutions des équations intégréo-différentielles

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode polynomiale de type Touchard et Gegenbauer à une certaine classe d'équations intégréo-différentielle de type Volterra [3, 6] et de type Fredholm du deuxième espèce, et comparé les résultats obtenus.

### 3.1 Polynômes de Touchard

Les polynômes de Touchard, étudiés par J. Touchard, composé de (a séquence polynomiale de type binomial). Les polynômes de touchard [5, 8, 9, 25] sont donné comme :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

où  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $n$  est le degré de polynomes,  $(k)$  est l'index des polynômes et  $(x)$  est la variable.

Les premiers polynômes de Touchard sur l'intervalle  $[0, 1]$ , pour  $n = 3$  sont :

$T_0(x) = 1$	$T_1(x) = 1 + x$	$T_2(x) = 1 + 2x + x^2$	$T_3(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$
--------------	------------------	-------------------------	--------------------------------

### Les dérivés des Polynômes de Touchard

Sont :

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{k-1}$$

## 3.2 Polynômes de Gegenbauer

Le n-<sup>ième</sup> polynômes de Gegenbauer  $G_n(x)$  est défini par  $G_0(x) = 1$  et la récursion suivante [7].

$$G_n(\alpha, x) = \frac{\Gamma(2\alpha + n) \cdot \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(2\alpha) \Gamma(\alpha + n + \frac{1}{2})} \cdot J(n, \alpha - \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}, x).$$

Les polynômes de Gegenbauer  $G_n$  sont des polynômes à coefficients rationnels :

$G_0 = 1$	$G_1 = 2x$	$G_2 = 2x^2 - 1$	$G_3 = \frac{8}{3}x^3 - 2x$
-----------	------------	------------------	-----------------------------

## 3.3 Méthode de P-Galerkin

On considère l'équation integro-differentielle suivante :

$$u'(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t)u(t)dt \tag{3.1}$$

$$u(a) = \alpha. \tag{3.2}$$

Tel que  $u(x)$  est la fonction inconnue,  $K(x, t)$  est la fonction connue continue,  $f(x)$  est une fonction donnée.

La méthode utilise les polynômes  $P$ -Galerkin.  $P$  Il représente les polynômes de Touchard ou Gegenbauer, pour approcher la solution dans un intervalle fermé et fini.

$$u(x) \cong u_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i P_i(x), a \leq x \leq b, \tag{3.3}$$

où  $P(x)$ , est le polynôme de Touchard ou Gegenbauer construit et valide dans l'intervalle  $[a, b]$ . Ainsi, en différenciant (3.3) par rapport à  $x$ , on a :

$$u'(x) \cong u'_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i P'_i(x). \quad (3.4)$$

En remplaçant (3.3) et (3.4) dans (3.1), on obtient :

$$\sum_{i=0}^n a_i P'_i(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t) \sum_{i=0}^N a_i P_i(t) dt. \quad (3.5)$$

Nous avons déterminé les coefficients inconnus  $a_i$  en utilisant l'idée de P-Galerkin en multipliant les deux côtés de (3.5) par  $P_j(x)$  puis en intégrant par rapport à  $x$  de  $a$  à  $b$ . Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b P'_i(x) P_j(x) dx \\ &= \int_a^b P_j(x) f(x) dx + \int_a^b \int_a^x k(x, t) \sum_{i=0}^n a_i P_i(t) P_j(x) dt dx, j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ce processus génère un système d'équations linéaires pour l'inconnu  $\{a_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ . Et la condition aussi :

$$\sum_{i=0}^n a_i P_i(a) = \alpha, \quad (3.7)$$

pour le même nombre d'équations dans le système linéaire. Les paramètres inconnus sont déterminés en résolvant les systèmes (3.6) et (3.7). Les valeurs des constantes obtenues sont ensuite substituées dans (3.3) pour obtenir la solution approximative.

### Résultats numériques

**Exemple 3.1** considérons l'équation integro- différentielle linéaire de Volterra.

$$u'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x \int_0^x tu(t)dt ,$$

avec la condition initiale  $u(0) = 0$ .

La solution exacte soit donnée par :

$$u(x) = 1 - \exp(x).$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode des polynômes de Touchard et Gegenbauer.

**Tableau 1.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.1 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$ .

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$ pour $T_n$	Erreur $G_n$	Erreur $T_n$
0.0	0.0000	0.0000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.1	-0.1052	-0.1052	1.181224e-07	4.018680e-10
0.2	-0.2214	-0.2214	1.240865e-07	2.001042e-10
0.3	-0.3499	-0.3499	4.428027e-08	2.824012e-10
0.4	-0.4918	-0.4918	8.055553e-08	3.386343e-10
0.5	-0.6487	-0.6487	9.539796e-08	1.475158e-10
0.6	-0.8221	-0.8221	7.641807e-09	3.267855e-10
0.7	-1.0138	-1.0138	7.999178e-08	5.701661e-12
0.8	-1.2255	-1.2255	6.585608e-08	2.418297e-10
0.9	-1.4596	-1.4596	3.825747e-08	2.088929e-10
1	-1.7183	-1.7183	2.750349e-10	3.486100e-14

**Exemple 3.2** considérons l'équation integro- différentielle linéaire de Volterra.

$$u'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \int_0^x u(t) dt,$$

avec la condition initiale  $u(0) = 0$ .

La solution exacte soit donnée par :

$$u(x) = 2x.$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode des polynômes de Touchard et Gegenbauer .

**Tableau 2.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.2 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$ .

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$ pour $G_n$	Erreur $G_n$	Erreur $T_n$
0.0	0.0000	0.0000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.1	0.2000	0.2000	5.551115e-17	4.546100e-11
0.2	0.4000	0.4000	5.551115e-17	3.050771e-11
0.3	0.6000	0.6000	1.110223e-16	2.620604e-11
0.4	0.8000	0.8000	3.330669e-16	4.714906e-11
0.5	1.0000	1.0000	2.220446e-16	9.988899e-12
0.6	1.2000	1.2000	2.220446e-16	4.605494e-11
0.7	1.4000	1.4000	2.220446e-16	6.851408e-12
0.8	1.6000	1.6000	2.220446e-16	3.263234e-11
0.9	1.8000	1.8000	2.220446e-16	3.237899e-11
1	2.0000	2.0000	4.440892e-16	8.881784e-16

**Exemple 3.3** considérons l'équation integro- différentielle linéaire de Fredholm.

$$u'(x) = xe^x + e^x - x + \int_0^1 xu(t)dt,$$

avec la condition initiale  $u(0) = 0$ .

La solution exacte soit donnée par :

$$u(x) = xe^x.$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode des polynômes de Touchard et Gegenbauer.

**Tableau 3.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

l'exemple 3.3 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$ .

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$ pour $G_n$	Erreur $G_n$	Erreur $T_n$
0.0	0.0000	0.0000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.1	0.1105	0.1105	2.510347e-07	1.684015e-10
0.2	0.2443	0.2443	2.635946e-07	5.280915e-12
0.3	0.4050	0.4050	9.387603e-08	1.925111e-10
0.4	0.5967	0.5967	1.711263e-07	5.011702e-11
0.5	0.8244	0.8244	2.025128e-07	1.482066e-10
0.6	1.0933	1.0933	1.631099e-08	4.893796e-11
0.7	1.4096	1.4096	1.696869e-07	9.171108e-11
0.8	1.7804	1.7804	1.399741e-07	5.911982e-11
0.9	2.2136	2.2136	8.117024e-08	4.014122e-12
1	2.7183	2.7183	7.874119e-10	5.684342e-14

**Exemple 3.4** considérons l'équation integro- différentielle linéaire de Fredholm.

$$u'(x) = 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3 + 1)x + \int_0^1 3xtu(t)dt,$$

avec la condition initiale  $u(0) = 1$ .

La solution exacte soit donnée par :

$$u(x) = e^{3x}.$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode des polynômes de Touchard et Gegenbauer.

**Tableau 4.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

l'exemple 3.4 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$ .

$x$	solution exacte $u$	solution approchée $u_n$ pour $T_n$	Erreur $G_n$	Erreur $T_n$
0.0	1.0000	1.0000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.1	1.3499	1.3499	2.224544e-06	1.821110e-07
0.2	1.8221	1.8221	2.332818e-06	2.196689e-07
0.3	2.4596	2.4596	8.192581e-07	1.080370e-07
0.4	3.3201	3.3201	1.530228e-06	1.372972e-07
0.5	4.4817	4.4817	1.795768e-06	2.037644e-07
0.6	6.0496	6.0496	1.589366e-07	3.222279e-09
0.7	8.1662	8.1662	1.517251e-06	1.723809e-07
0.8	11.0232	11.0232	1.247652e-06	1.568693e-07
0.9	14.8797	14.8797	7.209476e-07	9.678357e-08
1	20.0855	20.0855	8.744678e-09	8.384404e-13

**Exemple 3.5** considérons l'équation integro-différentielle linéaire de Fredholm.

$$u'(x) = 3 + 6x + \int_0^1 xtu(t)dt,$$

avec la condition initiale  $u(0) = 0$ .

La solution exacte soit donnée par :

$$u(x) = 3x + 4x^2.$$

La solution approximative  $u_n(x)$  de  $u(x)$  est obtenue par la méthode des polynômes de Touchard et Gegenbauer.

**Tableau 5.** Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans

*l'exemple 3.5 dans certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$ .*

$x$	<i>solution exacte <math>u</math></i>	<i>solution approchée <math>u_n</math> pour <math>G_n</math></i>	<i>Erreur<math>G_n</math></i>	<i>Erreur<math>T_n</math></i>
0.0	0.00000	0.00000	0.000000e+00	0.000000e+00
0.1	0.34000	0.34000	8.883658e-07	0.000000e+00
0.2	0.76000	0.76000	9.327980e-07	0.000000e+00
0.3	1.26000	1.26000	3.322368e-07	0.000000e+00
0.4	1.84000	1.84000	6.056290e-07	0.000000e+00
0.5	2.50000	2.50000	7.165786e-07	0.000000e+00
0.6	3.24000	3.24000	5.761295e-08	0.000000e+00
0.7	4.06000	4.06000	6.006336e-07	0.000000e+00
0.8	4.96000	4.96000	4.951495e-07	0.000000e+00
0.9	5.94000	5.94000	2.874869e-07	0.000000e+00
1	7.00000	7.00000	2.488216e-09	0.000000e+00

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté et étudié une méthode de résolution numérique d'équations intégral-différentielles basée sur les polynômes de Touchard et Gegenbauer. à la fin de notre mémoire, nous avons illustré des exemples de programmation à l'aide du programme de calcul numérique MATLAB, où nous avons estimé les erreurs de méthode et comparé les solutions approchées obtenues en utilisant Touchard et Gegenbauer séparément, tout en comparant également avec la solution exacte.

# Bibliographie

- [1] A. Adawi, F. Awawdeh, A numerical method for solving linear integral equations, *Int. J. Contemp. Mathematics Sciences*, 10, (2009) pp 485-496.
- [2] K. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, the press Syndicate of the University of Cambridge, United Kingdom, 1997.
- [3] S. Aggarwal, N. Sharma, R. Chauhan. Solution of Linear Volterra Integro-Differential equations of Second Kind Using Mahgoub Transform. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. Volume VII, Issue V, (2018) 173-176.
- [4] E. Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equations of the second kind, *App. Math. Comput*, 165 (2005) 223–227.
- [5] O. Chrysaphinou, *Discrete Mathematics*. 143-152 Elsever Noth-Holland, 1985
- [6] M. Djalil, H. Souidan, W. Souidan, Approximate Solution of Linear Volterra Integro-Differential Equation by Touchard Polynomials Method, (*WJSM*) 11(2), (2018), 29-41.
- [7] M. Dilmi, Gegenbauer Series for Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind, *Communications in Mathematics and Applications*, 14(1), (2023) 167-173.
- [8] M. Dilmi, Touchard Series for Solving Volterra Integral Equations Form of the Lane-Emdan Equations, *TECHNICAL JOURNAL* 17, 4(2023), 493-496
- [9] M. Dilmi, Comparison between Touchard and Bernstein polynomials solutions of integral equations, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, Vol.13 No.03 (2022), 736-745

- 
- [10] J. He, Homotopy perturbation technique, *Comput, Methods Appl. Mech. Engrg*, 178 (1999) 257-262.
- [11] A. Hocine, Résolution de système d'équations intégro-différentielles par la méthode des fonctions de Haar rationalisées, mémoire de magister universite kasdi merbah ouargla, 2012.
- [12] S. Krasnov, A. Kissèlev, G.Makarenko, équations intégrales ,problèmes et exercices, éditions Mir, Moscou , Traduction française Editions Mir, 1977.
- [13] C. Kwang. Algorithms for Bernoulli numbers and Euler numbers. *Journal of Integer Sequences*, volume 4 article, 01.1.6, issue 1 (2001), pp 1-7.
- [14] W. Lovitt. *linear integral equation*, Dover, NewYork. 1950.
- [15] K. Maleknejad, N. Aghazadeh, Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method, *Appl. Math. Comput*, 161, (2005) 915–922.
- [16] K. Maleknejad, M. Karami, Using the WPG method for solving integral equations of the second kind, *App. Math. and Comput.*, 166, (2005) 123-130.
- [17] K. Maleknejad, K. Nouri, M. Yousefi, Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations, *Applied Mathematics and Computation*, 193, (2007), 335-339.
- [18] F. Mirzaee, Numerical Solution for Volterra Integral Equations of the First Kind via Quadrature Rule, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, no. 20, (2012), 969 - 974.
- [19] M. Nadir, *Cours sur les équations intégrales*, université M'sila 2008.
- [20] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, in *Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics*, 4, ( 2014), pp 37-44.
- [21] M. Nadir, Solving linear integral equations with Fibonacci polynomials, *Malaya Journal of Matematik*, Vol. 6, No. 4, (2018), 711-715.
- [22] M. Nadir, D. Mustapha, Euler Series solutions for linear Integral equations *AJMAA*, Vol. 14, No. 2, Art. 11, (2017) pp 1-7.

- [23] M. Nadir, A. Rahmoune, Modified Method for Solving Linear Volterra Integral equations of the Second Kind Using Simpson's Rule, in International Journal Mathematical Manuscripts (IJMM), 1, (2) (2007), 133-140.
- [24] M. Rahman, Mathematical Methods with Application, WIT Press, Southampton, UK, pp. 456,2000
- [25] S. Roman, The umbral Calculus. 208 Dover Publications USA, 2005.
- [26] S. Wang, J.H. He. Variational iteration method for solving integro-differential equations. Phys. Lett., A 367 (2007) 188-191.

**المخلص :** في هذا العمل قمنا بتطبيق طريقة متعددة الحدود من نوع توشارد و جيجنباور مع طريقة جالركين على معادلات فولتيرا وفريدولم التكاملية التفاضلية من أجل إيجاد حلول تقريبية ومقارنتها بالحلول الدقيقة.  
**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التكاملية-التفاضلية، كثيرات حدود توشارد، كثيرات حدود جيجنباور، طريقة جالركين.

**Résumé:** Dans ce travail, nous avons appliqué la méthode polynômiale de type Touchard et Gegenbauer avec la méthode de Galerkin aux équations intégral-différentielles de Volterra et Fredholm afin de trouver des solutions approchées et de les comparer avec des solutions exacte.

**Mots-clés:** Equations intégral-différentielles, polynôme de Touchard, polynôme de Gegenbauer, Méthode de Galerkin.

**Abstract:** In this work, we applied the polynomial method of the Touchard and Gegenbauer type with the Galerkin method to the Volterra and Fredholm integro-differential equations in order to find approximate solutions and compare them with exact solutions.

**Keywords:** Integro-differential equations, Touchard polynomials, Gegenbauer polynomials, Galerkin method.