Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, Mon Dieu qui m'a donné la force, la volonté et le patience avec croyance pour rediger et terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercie Mr.Noui Djaidja directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses meilleurs conseils, trés utiles et pour mon encouragé toujours tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à exprimer tout mes respects et remerciements à Mr.Gagui pour leur guidage et leur aide afin de complément notre mémoires.

Je remercie aussi tous mes collègues de classe de spésialité Mathématiques Appliquées et fondamantalles pour leurs Soutenir et encouragement, sans oublier tous ceux qui ont participé de loin ou de prés à la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes trés chers parents.

- A mes trés chers soeurs.

-A mes aimées et spécialles amies.

-A ma grande et belle famille.

-A tous mes enseignants à travers mes années d'étude ,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui sont chers et proches.

Introduction

La théorie des équations intégrales a été domaine de recherche actif dans la mathématique appliquée et la physique mathématique, beaucoups des problémes dans le domaine des équations différentielles ordinaires et partielles, les problémes de contacts et l'arstrophysique, aussi les équations intégrales intervient dans plusieurs domaines scientifiques, tel que la population dynamique, semi condectour.

Les principaux fondateurs de La théorie des équations intégrales sont Vito Volterra, Ivar Fredholm, ainsi que David Hilbert et Erhard Scmidt, mais Volterra était le premier à avoir identifier l'importance des équations intégrales et les considérer systématiquement.

Généralement La théorie des équations intégrales porte sur deux types principaux, les équations intégrales linéaires et non linéaires de Fredholm, et de Volterra.

Dans ce mémoire on va traiter les équations intégrales linéaires de Volterra de première et de deuxième espèce, ou on démontrer l'éxistence et l'unicité de la solution de cette derniére et cherchons une solution approché par la méthode de Trapèze qu'il est considérer parmi les meilleurs méthodes de résolution numérique.

Notre mémoire est composé de trois chapitres.Dans ***le premier chapitre****, nous rapplons les notions d'analyse fonctionelle, espaces fonctionelles(espace de Banach, espace de Hilbert...), les opérateurs et ses propriétées, les équations intégrales et leurs classification, et finallement on parle sur l'intégration numérique et les méthodes quadatures(méthode de Simpson et méthode de Trapèze).*

Dans ***le deuxième chapitre*** *on parle sur l'éxistence et l'unicité d'équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce, on utilise la théorie classique de point fixe, ensuite on présente comment on peut transformé une équation intégrale de Volterra de première* *espèce à une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce, enfin on ridiger l'un des méthodes de résolution l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce qui le résolvante.*

Le troisième chapitre *et le dernier réprésente le but de ce mémoire, consiste à la résolution numérique d'équation intégrale de Volterra de première espèce à l'aide de méthode de Trapèze, on fait la comparaison entre la solution approchée et la solution exacte.*

Chapitre 1

Espaces fonctionelles et opérateurs

1.1 *Espaces fonctionelles*

Le but visé dans le premier chapitre est de familiariser les lecteurs de ce mémoire avec le concept d'équation intégrale, donc premierement on donne quelques notations des especes fonctionelles(espace normé,espace de hilbert...), ainsi on introduit quelques concepts sur les opérateurs (opérateur borné,compact...) avec la défintion des équations intégrales et leurs classification.Enfin on rappelons dans la partie numériques les méthodes quadrateures (méthode de trapéze, méthode de simpson...)

1.1.1 *Espase normé*

Définition 1.1.1

soit E *un espase vectoriel sur un corps* K $(K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$, *on appelle norme sur* E *une application de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *habituellement noté* $\| . \|$ *vérifiant pour tout* $x, y \in E$ *et tout* $\lambda \in K$ *les conditions suivantes:*

1. $\| x \| > 0$ *et* $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2. $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$

3. $\| x + y \| \leq \| x \| \| y \|$

Définition 1.1.2

On appelle un espace vectoriel normé E tout espace muni d'une norme$\| \, . \, \|$.

Exemple 1.1.1

Sur des espaces vectorielles normés:

1. $E = \mathbb{R}$ *avec la norme usuelle* $|x|$.

2. $E = M_n(\mathbb{R})$, *espace des matrices carres de dimension* n, *soit* $A \in E$, *on pose*

   $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$:

   $\|A\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$

   $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

   $\|A\|_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$

3. $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$ *espace des fonctions continues dans* $\mathbb{R}$ *où* a *et* b *sont deux réels avec* $a < b$, *soit* f *dans* E:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$
$$\|f\|_1 = \int_a^b f(t)dt$$
$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt}$$

1.1.2 *Espace de banach*

Définition 1.1.3 *:*

On appelle espace de banach tout espace normé E dont toute suite de cauchy (x_k)d'elément de E convege c-à-d:

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists N \geq n, \forall p, q : \| \, x_p \, - x_q \, \| < \varepsilon \Longrightarrow \exists x \text{ } telque \| \, x_n - x \, \| < \varepsilon$$

1.1.3 *Espace de Hilbert*

Définition 1.1.4

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une application:

$\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ *tel que pour tout* x, y *et* $z \in E$ *et* $\lambda \in K$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$

2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \ \langle x, y \rangle$

4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \ \langle x, z \rangle$

5. $\langle x, y \rangle = \overline{\ \langle x, y \rangle}$

Définition 1.1.5
un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.1.6
un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui complet pour la norme associé où ce produit scalaire.

1.1.4 *Espace* $L^2(a, b)$

Définition 1.1.7 *:*
L'espace $L^2(I, \mathbb{R})$ *est l'espace des fonctions de carré intégrables défini par:*

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f \ ; \ \int_I |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

où l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, menu de la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 \, dt$$

induite par le produit scalaire définit par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) dx$$

1.2 Opérateurs

1.2.1 Linéarité des opérateurs

Définition 1.2.1 *:*
Soient E et Fdeux espaces normés, un opérateur A définie sur E dans F est dite linéaire s'il vérifie les conditions suivantes:

1. *Pour toutes φ_1 et $\varphi_2 \in E$, $A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$*

2. *Pour toute $\varphi_1 \in E$, $\lambda \in K = (\mathbb{R}$ où $\mathbb{C})$, $A(\lambda\varphi_1) = \lambda A(\varphi_1)$*

1.2.2 Continuité des opérateurs linéaires

Définition 1.2.2 *:*
Un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dite continu au point x_0 de G si pour toute suite x_n de G converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0)$$

Remarque 1.2.1
L'opérateur linéaire A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensenble G.

1.2.3 Opérateur compact

Théorème 1.2.1 *(Arzela-Ascoli)*
Un ensemble G de $C(\Omega)$ avec Ω est compact est relativement compact si

1. *G est borné:$\forall\varphi \in G, \forall x \in \Omega, \exists M > 0 : \mid \varphi(x) \mid < M$.*

2. *G est équicontinue:$\forall x, y \in \Omega; \forall\varphi \in G; \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, |x-y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.*

Définition 1.2.3 *:*

soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F. A est dit opérateur compact si pour tout ensemble borné $\Omega \subset E$, $A(\Omega)$ est relativement compact i.e $\overline{A(\Omega)}$ est compact.Autrement dit A est dit compact si pour toute suite borné $\{\varphi_n\}$ de E, la suite $\{A\varphi_n\}$ contient une sous suite convergente dans F.

Théorème 1.2.2

La combinaison linéaire $A=\alpha A_1+\beta A_2$ avac A_1 , A_2 deux opérateurs compact est un opérateur compact.

Preuve. *Voir référence [8].* ■

Théorème 1.2.3

Le produit AB de deux opérateurs bornés est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Preuve. *Voir référence [8].* ■

Théorème 1.2.4

Une suite des opérateurs compacts (A_n) converge vers un opérateur

$A: E \to F$ pas nécessairement compact si et seulement si:

1. *E un espace normé et F un espace de banach.*

2. *$\|A_n - A\| \to 0$ (convergence uniformement en norme).*

Preuve. Voir référence [8]. ■

Théorème 1.2.5

L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si E de dimension finie.

Preuve. *Voir référence [8].* ■

1.2.4 *Opérateur intégral*

Définition 1.2.4 *:*

Soit Ω *un ensemble compact de* $\mathbb{R}^n$, k *une fonction continue de* $\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$.

l'opérateur linéaire A *définie comme suit:*

$$\begin{aligned} A &: \varphi \in C(\Omega) \to A\varphi \in C(\Omega) \\ (A\varphi)(x) &= \int_a^b k(x,y)\,\varphi(y)\,dy \end{aligned}$$

est appelé opérateur intégral à noyau continue $k(x,y)$, *cet opérateur est borné, la norme de* A *donnée par:*

$$\|A\|_\infty = \max_{x\in\Omega} \int_\Omega |k(x,y)|\,dy$$

Théorème 1.2.6

L'opérateur intégral A *de* $C(\Omega)$ *dans* $C(\Omega)$ *à noyau continue est un opérateur compact.*

Preuve.

En effet, soit E *un ensemble borné de* $C(\Omega)$; ($\|\varphi\| < M$, *pour tout* $\varphi \in E$) *De plus,on a:*

$$|A\varphi(x)| \leq\ M\,|\Omega| \max_{x,y\ \in G} |K(x,y)|\,,\ \forall x \in \Omega\ et\ \varphi \in E$$

D'où l'ensemble $A(E)$ *est borné. D'autre part, le noyau* K *est uniformément continu sur le compact* $\Omega \times \Omega$, *alors pour tout* x, y *et* z *de* Ω , *on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, tel\ que\ |x-y| < \delta \Rightarrow |K(x,z) - K(y,z)| < \frac{\varepsilon}{M\,|\Omega|}$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon\ \ pour\ tout\ x, y \in \Omega\ et\ \varphi \in E\ avec\ |x-y| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ *est équicontinu, d'où* $A(E)$ *est relativement compact par le théorème d'Arzelà-Ascoli. Alors* A *est compact.* ■

1.3 *Equations intégrales*

Les équations intégrales ont un caractère différent des équations différentielles quel'on rencontre dans la pluspart des phénomènes physiques.

Définition 1.3.1 *:*
une équation intégrale est une équation ou la fonction inconnue $\varphi(x)$ à déterminer apparaitre sous l'ntégrale, la forme générale d'une équation intégrale dans $\varphi(x)$ est donne par:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.3.1}$$

avec $k(x,t)$ est le noyan de l'équation intégrale et $\alpha(x), \beta(x)$ sont les bornes d'intégration .

Exemple 1.3.1
Considerons le probleme suivant:

$$\varphi'(x) = 2x\varphi(x), \quad x \geq 0 \tag{1.3.2}$$

avec la condition initiale :

$$\varphi(0) = 1 \tag{1.3.3}$$

l'équation (1.3.2) peut résoudre facillement avec la méthode de séparation des variables, avec l'utilisation de la condition initiale (1.3.3), la solution est

$$\varphi(x) = e^{x^2} \tag{1.3.4}$$

est obtenue facilement pourtant on intégre les deux côtes de l'équatin (1.3.2) respectivement par rapport x *de* 0 *à* x *et utilisé la condition initiale dans (1.3.3), on obtient*

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = \int_0^x \ 2t\varphi(t)\,dt \tag{1.3.5}$$

ou bien

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \ 2t\varphi(t)\,dt \tag{1.3.6}$$

compare(1.3.6) avec (1.3.1) on trouve $f(x) = 1$ *et le noyau* $k(x,t) = 2t$.
l'équation (1.3.6) définie une équation intégrale.

1.3.1 *Classification des équations intégrales*

Equations intégrales linéaires

la plupart des équations intégrales linéaires utilisé revenir a deux classes principales nommément équations intégrales de Volterra et de Fredholm.

Equation intégrale de Volterra

1. *On appelle équation intégrale de Volterra de deuxiéme espéce une équation de la forme:*

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^x \ k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.3.7}$$

2. *On appelle équation intégrale de Volterra de premiére espéce une équation de la forme*:

$$f(x) = \lambda \int_a^x \ k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.3.8}$$

Equation intégrale de Fredholm

Définition 1.3.2

1. *On appelle équation intégrale de Fredhom de deuxiéme espéce une équation de la forme:*

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1.3.9)$$

2. *On appelle équation intégrale de Fredhom de premiére espéce une équation de la forme*:

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt \qquad (1.3.10)$$

Equations intégrales non linéaire

Equations intégrales de Volterra

1. *On a ppelle équation intégrale de Volterra de deuxième espèce une équation de la forme:*

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t,\varphi(t))dt \qquad (1.3.11)$$

2. *On appelle équation intégrale de Volterra de premiére espèce une équation de la forme*

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t,\varphi(t))dt \qquad (1.3.12)$$

Equations intégrales de Fredholm

Définition 1.3.3 *1.*

On appelle équation intégrale de Fredhom de deuxiéme espéce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt \qquad (1.3.13)$$

2. On appelle équation intégrale de Fredhom de premiére espéce une équation de la forme:

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt \qquad (1.3.14)$$

1.3.2 *Equations intégrales singulières*

l'équation intégrale de première espèce:

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.3.15}$$

ou bien l'équation intégrale de deuxième espèce :

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.3.16}$$

est appellé singulière si la borne inferieur, la borne séperieur où les deux bornes de l'intégration sont infinie.

Exemple 1.3.2

de premiére type de singularité

$$\varphi(x) = 2x + 6\int_0^\infty \sin(x-t)\varphi(t)\,dt$$
$$\varphi(x) = x + \tfrac{1}{3}\int_{-\infty}^0 \cos(x+t)\varphi(t)\,dt$$
$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \tfrac{1}{6}\int_{-\infty}^\infty \sin(x+t)\varphi(t)\,dt$$

exemples de deusième type de singularité où le noyau est infinie :

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}}\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha}\,\varphi(t)\,dt$$

Remarque 1.3.1

pour tout les équations intégrales dans ce partie de (1.3.7) à (1.3.16)

1. *Si* $f(x) = 0$ *l'équation intégrale appellée équation intégrale homogène.*
2. *Si* $f(x) = 0$ *l'équation intégrale appellée équation intégrale non homogène.*

1.3.3 *Laisons entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra*

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = F(x)$$

à coefficients continus $a_i(x) \quad (i = 1, 2, ..., n)$

Avec la condition initiale

$$y(0) = C_0, y\prime(o) = C_1, ..., y^{n-1}(0) = C_{n-1}.$$

Peut être ramène à la résolution d'une équation intégrale de volterra de second espèce.

Illustrons notre affirmation sur l'example de l'équation différentielle de second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \tag{1.3.17}$$

$$y(0) = C_0, \;\; y\prime(o) = C_1. \tag{1.3.18}$$

Posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)$$

D'où vu les conditions iniale (1.3.18), on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + C_1, \;\; y = (x-t)\varphi(t)dt + C_1x + C_0$$

Nous avons utilisè la formule :

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx ... \int_{x_0}^x f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x (x-z)^{n-1}f(z)dz$$

Compte tenu de ()et()metons l'équation différentielle sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + C_1a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + C_1xa_2(x) + C_0a_2(x) = F(x)$$

où

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\varphi(t)dt = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x).$$

Posant

$$K(x,t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t)$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x)$$

nous ramenons l'équation () à la forme suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + f(x)$$

i.e nous obtnons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

1.3.4 *Intégration numérique*

Soit $f : x \in [a,b] \to f(x) \in \mathbb{R}$ *une fonction continue donné sur un intervalle*$[a,b]$.

Nous désirons approcher numériquement la quantité

$$\int_a^b f(x)dx$$

pour ce faire ,nous partitions l'intervalle $[a,b]$ *en petits intervalles* $[x_{i+1}, x]$, $i = \overline{0, N-1}$ *tel que* $a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N$.

Soit $h = x_{i+1} - x_i$, *le réel positif caractérisant la finesse de la partition .*

Nous posons

$$h = \frac{b-a}{N} \text{ et } x_i = a + ih \text{ avec } i = 0, 1, ..., N$$

il est clair d'écrire

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{i-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

Méthodes quadratures

De façan générale, une formule de quadrature est une expresion de la forme

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{(x_i)}$$

où les points x_i sont $n+1$ points deux à deux dinstints donnés dans l'intervalle $[a,b]$ et les scalaires α_i sont choisis de façan à ce que l'erreur de quadrature

$$e_n(f) = \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{(x_i)}$$

ne soit pas trop grande, avec $w(x)$ *fonction de poids.*

Méthode de Trapèze

Dans cette méthode nous approximé $f(x)$ *avec collection des segments et intégré à travers de chacun.*

Principe de méthode:

Soit f *une fonction continue sur* $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$ *et* $a = x_0 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ *une subdivision régulière de l'intervalle* $[a,b]$, *On note* h *le pas de cette subdivision. Dans la méthode de trapèze, la fonction* f *est remplacée sur chaque intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$ *par la droite joignant les points* $(x_i, f(x_i))$ *et* $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, *soit*

$$h(x) = \frac{(x-x_i)\ \ f(x_{i+1})\ \ -(x-x_{i+1})\ \ f(x)}{x_{i+1}-x_i} \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

La méthode s'écrit

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) \frac{f(x) +\ f(x_{i+1})}{2}$$

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression $x_0 = a$, $x_1 = b$

on a

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))$$

La méthode de trapèze est une méthode d'ordre 1. *L'erreur dans la méthode de trapèze est donnée par l'expression*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| \leq \frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

lq somme s'éxprime par

$$S = \frac{h}{2}(f(a)+f(b)+\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f(x_i).$$

Méthode de Simpson

Dans la méthode de Thomas Simpson$(1710-1761)$, *la fonction* f *est remplacée par un polynôme de degré* 2 *définissant un arc de parabole passant par les points d'ordonnées* $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$*et* $f(x_{i+2})$. *La méthode s'écrit*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{6}(x_{i+1}-x_i)(f(x_{i+1})+f(x_i)+4f(\frac{x+\ x_{i+1}}{2}))$$

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{(a+b)}{2}$, $x_2 = 2.la$ *formule précédente devient*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{3}(b-a)(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

La méthode de Simpson est une méthode d'ordre 4. *L'erreur dans la méthode de Simpson est donnée par:*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S\right| \leq \frac{1}{2880}\frac{(b-a)5}{n5}\sup\left|f^{(5)}(x)\right|$$

La somme S qui approche l'intégrale s'exprime par

$$S = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(a+ih) + f(a+(i+1)h) + 4f(a+ih+\frac{h}{2})\right]$$

Chapitre 2

Résolution de l'équation intégrale de Volterra du deuxième espèce

Dans ce chapitre on traité les théorémes d'éxistence et d'unicité de la solution d'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce, on applique le théorème classique de point fixe, au plus on donne les méthodes de transformation d'équation intégrale de Volterra de première espèce à une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce .Finallement, on parle sur l'un des méthodes pour résoudre l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

2.1 *Théorie de point fixe:*

Définition 2.1.1 *:*
Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur borné, l'opérateur A est dit opérateur contractant s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H, \ \ \|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq \alpha \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

Théorème 2.1.1
Soit A un opératuer contractant dans un espace de Hilbert H, alors l'équation

$$A\varphi = \varphi \tag{2.1.1}$$

admet une solution unique φ dans H, cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Preuve.

Pour démonter l'existence de la solution d'équation (2.1.1) on utilise la méthode des approximations succeessives, soit $\varphi_0$une fonction arbitaire, on définit la suite $\{\varphi_n\}$ comme suit

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n, \quad n = 1, 2, ...$$

$\{\varphi_n\}$ est de cauchy et converge vers la solution de l'équation (2.1.1), en effet:

$$\left\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\right\| = \left\|A\varphi_n - A\varphi_{n-1}\right\| \leq \alpha \left\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\right\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \alpha^2 \left\|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\right\| \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\leq \alpha^n \left\|\varphi_1 - \varphi_0\right\| \end{aligned}$$

d'autre part, pour tout $n > m$,on a

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_m\| &= \left\|(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + ... + (\varphi_{m+1} - \varphi_m)\right\| \\ &\leq \left\|(\varphi_n - \varphi_{n-1})\right\| + \left\|(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})\right\| + ... + \left\|(\varphi_{m+1} - \varphi_m)\right\| \\ &\leq \left(\alpha^m + \alpha^{m+1} + ... + \alpha^{n-1}\right) \|\varphi_1 - \varphi_0\| \\ &\leq \alpha^m \left(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{\frac{n-1}{m}}\right) \|\varphi_1 - \varphi_0\| \\ &\leq \frac{\alpha^m - \alpha^n}{1 - \alpha} \|\varphi_1 - \varphi_0\| \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$$

d'où la suite $\{\varphi_n\}$ est de Cauchy dans un espace de Hilbert donc elle converge vers la solution unique φ, et on a:

$$A\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (A\varphi_n) = A(\lim_{n\to\infty} \varphi_n) = \varphi$$

Pour montrer l'unicité de la solution, on suppose qu'il exsiste deux points fixes distincts φ et ψ tels que :

$$A\varphi = \varphi \text{ et } A\psi = \psi$$

alors on peut écrire

$$\|\varphi - \psi\| = \|A\varphi - A\psi\| \leq \alpha \|\varphi - \psi\|$$

d'où

$$(1-\alpha)\|\varphi - \psi\| \leq 0$$

ce que nous donne

$$\|\varphi - \psi\| = 0 \Rightarrow \varphi = \psi$$

■

Corollaire 2.1.1
Supposons que l'opérateurA admet un point fixe φ dans l'éspace de Hilbert H, alors l'opérateur A^n admet le même point fixe φ.

Théorème 2.1.2
Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur dans H, et soit A^n un opérateur contractant, $n \in \mathbb{N}$,alors l'équation :

$$A^n\varphi = \varphi$$

admet une solution unique φ dans H.

Preuve.

Soit φ_0 *une fonction arbitaire dans* H *telle que :*

$$\lim_{k\to\infty} A^{kn}\varphi_0 = \varphi$$

quand on prend

$$\varphi_0 = A\varphi$$

on obtient

$$\lim_{k\to\infty} A^{kn}A\varphi = \varphi$$

on a $A^n\varphi = \varphi$ *et aussi* $A^{kn}\varphi = \varphi$ *alors:*

$$\lim_{k\to\infty} A^{kn}A\varphi = \varphi = \lim_{k\to\infty} A^{kn}A\varphi = \lim_{k\to\infty} A^n\varphi = A^n\varphi$$

d'où

$$A^n\varphi = \varphi$$

Pour démontrer que la solution est unique, on note que si:

$$A\varphi = \varphi \text{ et } A\psi = \psi$$

de même pour:

$$A^n\varphi = \varphi \text{ et } A^n\psi = \psi$$

alors A^n *un opérateur contractant avec un point fixe unique* $\varphi = \psi$. ■

Théorème 2.1.3

Soit $k(x,y)$*une fonction continue borné pour tout* $x, y \in [a,b]$, *c'est -à-dire* $|k(x,y)| \leq M$ *avec* $M > 0$*, alors l'équation de Volterra*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b \tag{2.1.2}$$

admet une solution unique $\varphi(x)$ *pour tout* f *dans* $L_2[a,b]$.

Preuve.

Pour l'équation intégrale de Volterra nous considérons l'opérateur

$$A\varphi(x) = f(x) + \lambda T\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

avec

$$T\varphi(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

et nous somme on train de prouver que l'opérateur A^n est contractant pour un $n \in \mathbb{N}$, donc $A\varphi$ admet un point fixe , qui doit être une solution de l'équation (2.1.2)

$$\begin{aligned}
A\varphi &= f + \lambda T\varphi \\
A^2\varphi &= A(f + \lambda T\varphi) = f + \lambda T(f + \lambda T\varphi) = f + \lambda T\varphi + \lambda^2 T^2 \varphi \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A^n\varphi &= f + \lambda T f + \lambda^2 T^2 f + \ldots + \lambda^{n-1} T^{n-1} f + \lambda^n T^n \varphi
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\|A^n\varphi_2 - A^n\varphi_1\| = \|\lambda^n T^n \varphi_2 - \lambda^n T^n \varphi_1\|$$

avec

$$T^n\varphi = \int_a^x k_n(x,t)\varphi(t)dt$$

et $k_n(x,t)$ donné par:

$$k_n(x,t) = \int_t^x k(x,z)k_{n-1}(z,t)dz, \text{ pour } n = 2, 3....$$

par hypothése

$$|k(x,t)| \leq M$$

alors

$$|k_n(x,t)| \leq \frac{M^n (x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad a \leq t \leq x \leq b \tag{2.1.3}$$

pour $n = 1$, l'expression (2.1.3) est évidente.

Supposons qu 'elle est vraie pour $m \in \mathbb{N}$,alors

$$|k_m(x,t)| \leq \frac{M^m (x-t)^{m-1}}{(m-1)!}$$

on a

$$\begin{aligned}
|k_m(x,t)| &= \left| \int_t^x k(x,z) k_m(z,t) dz \right| \\
&\leq \int_t^x |k(x,z) k_m(z,t) dz| \\
&\leq \frac{M^{m+1}}{(m-1)!} \int_t^x (x-z)^{m-1} dz \\
&\leq \frac{M^{m+1}}{m!} (x-t)^m
\end{aligned}$$

tant que

$$\|A_n \varphi_2 - A_n \varphi_1\| \leq \frac{M^n |\lambda|^n}{(n-1)!} \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

pour n assez grand, on obtient

$$\frac{M^n |\lambda|^n}{(n-1)!} < 1$$

donc l'opérateur A^n est contractant ce qui implique que A admet un point fixe , on écrit

$$A\varphi = \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt.$$

■

Théorème 2.1.4 *Soit $k(x,t)$ une fonction continue pour $x, t \in [a,b]$ vérifie :*

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dx dt < +\infty$$

alors l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt = f(x) \tag{2.1.4}$$

admet une solution unique φ pour toute $f \in L_2([a,b])$.

Preuve.

On pose

$$A^2(x) = \int_a^x |k(x,t)|^2 \, dt, \;\; B^2(t) = \int_t^b |k(x,t)|^2 \, dx$$

et par hypothése $A^2(x)$, $B^2(t)$ *sont intégrables , soit* N *tel que :*

$$\int_a^b A^2(x)dx \leq N, \ \int_a^b B^2(t)dt \leq N$$

on définie la fonction $\rho(x)$ *par:*

$$\rho(x) = \int_a^x A^2(t)dt \ \ et \ \ \rho(b) < N$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda kf + \lambda^2 k^2 f + ... + \lambda^{n-1}k^{n-1}f + \lambda^n k^n \varphi \tag{2.1.5}$$

et

$$k^n\varphi = \int_a^x k_n(x,t)\varphi(t)dt$$

pour estimer $\|k^n\|$ *, on examine* $k_n(x,t)$*, on a*

$$k_2(x,t) = \int_t^x k(x,z)k(z,t)dz$$

à partir l'inégalité de cauchy -shwartz

$$|k_2(x,t)|^2 \leq \int_t^x |k_2(x,z)|^2 dz \int_t^x |k_2(z,t)|^2 dz \leq A^2(x)B^2(t)$$

semblablement

$$k_3(x,t) = \int_t^x k(x,z)k_2(z,t)dt$$

pour que

$$|k_3(x,t)|^2 \leq \int_t^x |k(x,z)|^2 dz \int_t^x |k_2(z,t)|^2 dz$$

$$\leq A^2(x)B^2(t) \int_t^x A^2(z)dz = A^2(x)B^2(t)\left[\rho(x) - \rho(t)\right]$$

il est facile de porter par un argument inductif, pour dire :

$$|k_n(x,t)|^2 \leq \frac{A^2(x)B^2(t)\left[\rho(x) - \rho(t)\right]^{n-2}}{(n-2)!}, \quad n \geq 2.$$

donc on peut écrire (2.1.5) comme suit:

$$A^n\varphi = \varphi, \text{ où } A\varphi = f + \lambda k\varphi$$

pour n assez grand A^n est un opérateur cantractant

$$|A^n\varphi_2 - A^n\varphi_1| = \left|\int_a^x k(x,t)\left[\varphi_2 - \varphi_1\right]dt\right|^2$$
$$\leq \int_a^x \frac{A^2(x)B^2(t)\left[\rho(x)-\rho(t)\right]^{n-2}}{(n-2)!}dt \times \int_a^x \left[\varphi_2 - \varphi_1\right]^2 dt$$
$$\leq \frac{A^2(x)\left[\rho(x)\right]^{n-2}}{(n-2)!}\int_a^x B^2(t)dt \left\|\varphi_2 - \varphi_1\right\|^2$$

avec une intégration, on obtient

$$\left\|A^n\varphi_2 - A^n\varphi_1\right\|^2 \leq \frac{\left[\rho(b)\right]^{n-1}N}{(n-1)!}\left\|\varphi_2 - \varphi_1\right\|^2 \leq \frac{N^n}{(n-1)!}\left\|\varphi_2 - \varphi_1\right\|^2$$

pour n assez grand

$$\frac{N^n}{(n-1)!} < 1$$

imlique que l'opérateur A est un opérateur contractant, alors l'équation (2.1.4) et l'équation (2.1.5) admet une seule solution dans $L_2[a,b]$. ■

Remarque 2.1.1 *L'unicité de la solution des équations intégrales de Volterra de deuxième espèce*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

est assuré sensiblement sur la fonction $f(x)$ et le noyau $k(x,t)$et leur continuité.

2.2 *Méthodes de transformation une équation de Volterra de première espèce à une équation de Volterra de deuxième espèce*

Générallement, il est difficile de trouver une solution pour équation intégrale de Volterra du première espèce, pour cela on cherchons une équation équivalante admet une solution

,dans ce but on va le transformé à une équation de Volterra de douxiéme espèce qui admet toujours une solution unique,dans ce partie on va présenté les méthodes pour transformé équation intégrale de Volterra du premiére espèce à une équation de Volterra de douxiéme espèce.

Formule de Leibnitz

Soit $f(x,t)$ une fonction continue $\dfrac{df}{dt}$ est continue aussi, pour $a \leq x \leq b$ et $t_0 \leq t \leq t_1$,et soit

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)dt$$

alors

$$F'(x) = f(x,h(x))\frac{dh(x)}{dx} - f(x,g(x))\frac{dg(x)}{dx} + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt$$

Si $g(x) = a$ et $h(x) = b$ où a et b sont des canstants, alors la formule de Leibnitz réduire à:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt$$

Considérons l'équation suivante:

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.2.1}$$

Si les dérivées $\dfrac{df}{dx} = f'(x), \dfrac{\partial k}{\partial x} = k_x(x,t)$ et $\dfrac{\partial k}{\partial t} = k_t(x,t)$ existe et continue, alors l'équation 2.2.1 peut réduire à une équation de Volterra de deuxième espèce avec deux méthodes.

Première méthode

Consiste de dérivée les deux côtes de l'équation(2.2.1)respectivement par rapport à x on utilise la formule de Leibnitz, on obtient :

$$k(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}k(x,t)\varphi(t)dt = f'(x) \tag{2.2.2}$$

si $k(x,x) \neq 0$ l'équation (2.2.2) ramène à une équation de Volterra du deuxième espèce donné par :

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{\frac{\partial}{\partial x}k(x,t)}{k(x,x)}\varphi(t)dt = \frac{f'(x)}{k(x,x)} \tag{2.2.3}$$

où bien

$$\varphi(x) + \int_a^x H(x,t)\varphi(t)dt = g(x)$$

où $H(x,t) = \dfrac{\frac{\partial}{\partial x}k(x,t)}{k(x,x)}$ *et* $g(x) = \dfrac{f'(x)}{k(x,x)}$.

Deuxième méthode

Dans la deuxième méthode on va utilisé l'intégration par partie, on pose

$$\psi(x) \ = \int_0^x \varphi(t)dt \text{ d'où } \int_0^t \varphi(\xi)d\xi \ = \psi(t). \tag{2.2.4}$$

On prend

$$\begin{aligned} u &= k(x,t) \ \longrightarrow u' = \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} \\ \text{et } v' &= \varphi(t) \ \longrightarrow v = \int_0^t \varphi(\xi)d\xi \end{aligned}$$

On parforme une intégration par partie, dans l'équation intégrale (2.2.1), on obtient:

$$\left[k(x,t)\int_0^t \varphi(\xi)d\xi\right]_{t=0}^x - \int_0^x k_t(x,t)\left(\int_0^t \varphi(\xi)d\xi\ \right)dt = f(x)$$

$$= [k(x,t)\psi(t)]_{t=0}^x - \int_0^x k_t(x,t)\psi(t)\ dt = f(x)$$

$$= k(x,x)\psi(x) - \int_a^x \frac{\partial}{\partial t}k(x,t)\psi(t)dt = f(x).$$

Pour tout $k(x,x) \neq 0$ *on a l'équation suivante:*

$$\psi(x) - \int_a^x \frac{\frac{\partial}{\partial t}k(x,t)}{k(x,x)}\psi(t)dt = \frac{f(x)}{k(x,x)} \tag{2.2.5}$$

où bien

$$\psi(x) + \int_a^x H(x,t)\psi(t)dt = g(x)$$

où $H(x,t) = \dfrac{\frac{\partial}{\partial x}k(x,t)}{k(x,x)}$ et $g(x) = \dfrac{f(x)}{k(x,x)}$.

Remarque 2.2.1 *Si $k(x,x) = 0$, alors on ne peut pas fait la conversion de de première espèce à deuxième espèce, si $k(x,x) = 0$ et $k_x(x,x) \neq 0$ alors avec dérivation de l'équation de Volterra de première espèce plusieurs fois comme il est besoin, alors on peut réduire l'équation à deuxième espèce.*

2.3 Résolution des équations intégrales à l'aide des résolvantes

Soit l'équation intégrale de Volterra de deuxiéme espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.3.1}$$

où $k(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq a$ et $f(x)$ est continue si $0 \leq x \leq a$.

Cherchons la solution de (2.3.1) sous la forme d'une série entiére de puissances en λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ... \tag{2.3.2}$$

formellent cette série dans (2.3.1), on obtient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2\varphi_2(t) + ... + \lambda^n\varphi_n(t) + ...]dt$$

en procédant par identification, nous obtenons

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_0^x k(x,t)f(t)dt$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_0^x k(x,t)\int_0^x k(x,t_1)f(t_1)dt_1dt = ... \tag{2.3.3}$$

Moyennant la relation (2.3.3) on peut définir successivement les fonctions $\varphi_n(x)$. on va montre que comme $f(x)$ et $k(x,t)$, la série (2.3.2) converge uniformement en x et λ pour tout x et $\lambda \in [a,b]$ et que sa somme est solution de l'équation (2.3.1).

(2.3.3) entrâine

$$\varphi_1(x) = \int_0^x k(x,t) f(t) dt$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x k(x,t) \left[\int_0^x k(x,t_1) f(t_1) dt_1 \right] dt$$

$$= \int_0^x f(t_1) dt_1 \int_{t_1}^x k(x,t) k(t,t_1) dt$$

$$= \int_0^x k_2(x,t_1) f(t_1) dt_1$$

où

$$k_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x k(x,t) k(t,t_1) dt$$

en façon général

$$\varphi_n(x) = \int_0^x k_n(x,t) f(t) dt \qquad n = 1, 2... \tag{2.3.4}$$

les fonctions $k_n(x,t)$ s'appellent noyaux itérés,on le montre par la formule de récurrence

$$k_1(x,t) = k(x,t)$$

$$k_{n+1}(x,t) = \int_t^x k(x,z) k_n(z,t) dz \qquad n = 1, 2, 3... \tag{2.3.5}$$

de (2.3.4) et(2.3.5), l'égalité (2.3.2) peut s'écrire

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_0^x k_n(x,t) f(t) dt$$

une fonction définie par la série

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_n(x,t) \tag{2.3.6}$$

Remarque 2.3.1

- *La résolvante ou le noyau résolvante de l'équation intégrale (2.3.1) qui exprimé sous forme d'un série convege absolument et uniformément si le noyau $k(x,t)$ est continue .*
- *Les noyaux itérés et la résolvante sont indépandants de la limite inférieure de l'intégrale dans l'équation intégrale.*
- *La solution de l'équation intégrale (2.3.1) en fonction de la résolvante s'écrit comme suit :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda) f(t)dt$$

Exemple 2.3.1
Trouver la résolvante de l'équation intégrale de Volterra à noyau $k(x,t) = 1$.

Solution:
On a

$$k_1(x,t) = k(x,t) = 1$$

à partir qui est précédant

$$k_2(x,t) = \int_t^x k(x,z)k_1(z,t)dz = \int_t^x dz = x - t$$

$$k_3(x,t) = \int_t^x 1.(z-t)dz = \frac{(x-t)^2}{2!}$$

$$k_3(x,t) = \int_t^x 1.\frac{(z-t)^2}{2!}dz = \frac{(x-t)^3}{3!}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$k_n(x,t) = \int_t^x 1.\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

par définition

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^{n-1}}{n!} = e^{\lambda(x-t)}$$

alors

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt$$

Chapitre 3

Résolution numérique de l'équation de Volterra de deuxième espèce

Dans ce partie essentiellement pratique, nous exposerons l'un des méthodes trés usuelles pour la résolution numérique d'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce qui est la méthode de Trapéze, toute en élucident les étapes de la discrétisation de cette équation, on donne des exemples d'application numérique.

3.1 *Principe de la méthode de Trapèze*

Soit l'équation de Volterra de deuxième espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.1.1}$$

notre objectif est d'appoximer la solution φ *de cette équation.Pour ce faire, nous commensons par partitionner l'intervalle en sous intervalles* $[x_i, x_{i+1}]\,, i = 0, N-1,$ *c'ést à dire nous choisissons des points* $x_i, i = 0, 1, ..., N$ *des noeuds tels que*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_j < x_n = b$$

supposons que ce systéme est équidistant, i.e. $x_j = a + jh$ *avec* $j = 0, 1, ..., n$ *où* h *est le pas de la discrétisation.*

Pour ce faire en exigent que l'équation 3.1.1 ait lien uniquent en ces noeuds, alors l'équation 3.1.1 devient

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \int_0^{x_j} k(x_j, t)\varphi(t)dt$$

la méthode de Trapéze, nous amène à une discrétisation par rapport à la variable d'intégration t.

On pose $t = (x_i)_{0\leq i\leq j}$ *, il vient:*

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_i}^{x_{i_{+1}}} k(x_j, t)\varphi(t)dt$$

alors

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{j-1} [k(x_j, t_{i+1})\varphi(t_{i+1}) + k(x_j, t_i)\varphi(t_i)]$$

donc

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \frac{h}{2}k(x_j, t)\varphi(t) + h\sum_{i=1}^{j-1}k(x_j, t_i)\varphi(t_i)$$

Si $j = 0 : \varphi(x_0) = \varphi(0) = f(x_0) \Rightarrow \varphi(a) = f(a) \Rightarrow \varphi(0) = f(0)$.

On notons $\varphi_j = \varphi(x_j)$, $f_i = f(x_j)$, *et* $k_{ji} = k(x_j, t_i)$, *alors la formule 3.1.1 devient*

$$\varphi_j = f_i + \frac{h}{2}k_{j0}\varphi_0 + \frac{h}{2}k_{jj}\varphi_j + h\sum_{i=1}^{j-1}k_{ji}\varphi_i$$

donc on a en général:

$$(1 - \frac{h}{2}k_{jj})\varphi_j = f_i + \frac{h}{2}k_{j0}\varphi_0 + h\sum_{i=1}^{j-1}k_{ji}\varphi_i \tag{3.1.2}$$

cette discrétisation nous à fournée alors un systéme d'équation algébriques linéaires de la forme

$$A\varphi = b \tag{3.1.3}$$

ou A *est une matrice de la forme*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \frac{-h}{2}k_{10} & 1-\frac{-h}{2}k_{11} & . & . & . & . & 0 \\ \frac{-h}{2}k_{12} & \frac{-h}{2}k_{22} & 1\frac{-h}{2}k_{22} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \frac{-h}{2}k_{1n} & . & . & . & . & . & 1\frac{-h}{2}k_{nn} \end{bmatrix}$$

avec $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)^t$ *et* $b = (f_0, f_1, ..., f_n)^t$.

S'aggissant de la solubilité du systéme (3.1.3), un rôle essensiellement revient du détarminant de la matrice A*, on a*:

$$\det(A) = \left(1 - \frac{h}{2}k_{11}\right)\left(1\frac{-h}{2}k_{22}\right)...(1\frac{-h}{2}k_{22})$$

parcque la matrice A *est trianglaire inférieur.*

Soit $M = \max\limits_{i \leq j \leq n} |k_{ij}|$ *,il en résulte évidament*

$$\Delta \geq \left(1 - \frac{h}{2}M\right)^n = \left(1 - \frac{b-a}{2n}M\right)^n = \left(1 - \frac{h}{2}M\right)^{\frac{b-a}{h}} \qquad (3.1.4)$$

le seconde membre de cette inégalité est non nul pour tout h *suffissament petit, il en croit avec la diminution de* h*,ainsi* $\left(1 - \frac{h}{2}M\right)$ *et pour* h *deux fois moindre:*

$$\left(1 - \frac{h}{2}M\right)^2 = 1 - \frac{h}{2}M + 1 - \frac{h^2}{16}M^2$$

lorsque $h \rightarrow 0$ *le second membre de 3.1.4 tend vers* $e^{-(b-a)\frac{M}{2}}$.

Algébriquement dit le déterminant du systéme (3.1.3) est non nul et ne tand pas vers 0 *avec* h*.*

Exemple 3.1.1

Considérons l'équation de Volterra de prmière espèce suivante:

$$\int_0^x e^{-x+t}\varphi(t)dt = xe^{-x}.$$

On peut le transformé à une équation de Volterra de deuxième espèce on utilise l'intégration par partie, on obtient:

$$\psi(x) - \int_0^x e^{-x+t}\psi(t)dt = xe^{-x}.$$

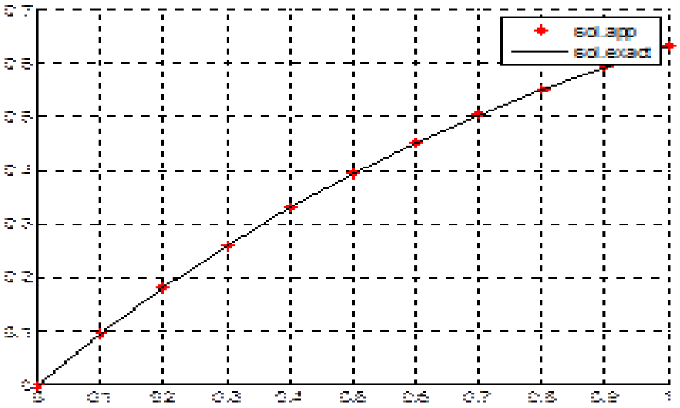
la solution exacte de cette équation est

$$\psi(x) = 1 - e^{-x}, \text{ alors } \varphi(x) = e^{-x}.$$

Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée:

pour $n = 10$

x	*solution exacte*	*solution approchée*	*erreur*
0.00	0.00000000000000000000	0.00000000000000000000	0.00000000000000000000
0.01	0.09516258196404048200	0.09524604400378521000	8.346203974473e-005
0.02	0.18126924692201818000	0.18143617796741979000	1.669310454016e-004
0.03	0.25918177931828223000	0.25943218633583409000	2.504070175519e-004
0.04	0.32967995396436067000	0.33001384392113797000	3.338899567773e-004
0.05	0.39346934028736658000	0.39388672015102544000	4.173798636589e-004
0.06	0.45118836390597361000	0.45168924064475202000	5.008767387784e-004
0.07	0.50341469620859058000	0.50399907679130795000	5.843805827174e-004
0.08	0.55067103588277844000	0.55133892727883604000	6.678913960576e-004
0.09	0.59343034025940089000	0.59418174943878166000	7.514091793808e-004
1.00	0.63212055882855767000	0.63295549276182594000	8.349339332683e-004



comparaison entre la solution exacte et la solution approchée.

Exemple 3.1.2

Considérons l'équation de Volterra de prmière espèce suivante:

$$9x^2 + 5x^3 = \int_0^x (10x - 10t + 6)\,\varphi(t)dt.$$

On peut le transformé à une équation de Volterra de deuxième espèce on utilise l'intégration par partie, on obtient:

$$\psi(x) + \frac{5}{3}\int_0^x \psi(t)dt = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3.$$

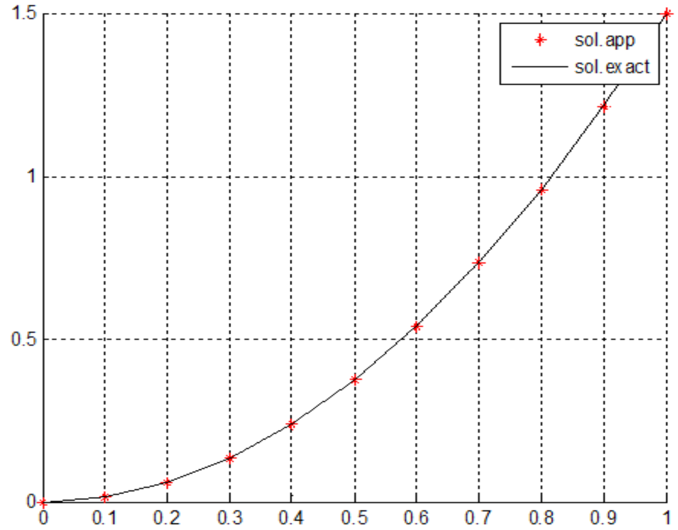
la solution exacte de cette équation est

$$\psi(x) = \frac{3}{2}x^2 \text{ alors } \varphi(x) = 3x.$$

Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée:

pour $n = 10$

x	solution exacte	solution approchée	erreur
0.00	0.00000000000000000000	0.00000000000000000000	0.000000000000000e+000
0.01	0.01500000000000000300	0.01461538461538462000	3.846153846154e-004
0.02	0.06000000000000001200	0.05928994082840238100	7.100591715976e-004
0.03	0.13500000000000004000	0.13401456531634051000	9.854346836595e-004
0.04	0.24000000000000005000	0.23878155526767272000	1.218444732327e-003
0.05	0.37500000000000000000	0.37358439291879997000	1.415607081200e-003
0.06	0.54000000000000015000	0.53841756323898471000	1.582436761015e-003
0.07	0.73500000000000010000	0.73327639966375635000	1.723600336244e-003
0.08	0.96000000000000019000	0.95815695356163999000	1.843046438360e-003
0.09	1.21500000000000010000	1.21305588378292620000	1.944116217074e-003
1.00	1.50000000000000000000	1.49797036320093760000	2.029636799062e-003



comparaison entre la solution exacte et la solution approchée

Conclution générale

D'aprés les examples présédents, on peut conclure que la résolution d'une équation intégrale de Volterra de premiére espèce peut être réguliérisé pour obtenir une equation intégrale de deuxième espèce.

Ces deux types d' équation donne les m*êmes résultats,ceci preuve que les deux équation sont équivalentes.*

Bibliographie

[1] **Abdul-Majid Wazwaz:** linear and nonlinear Integral Equations methods and applications, Saint Xavier university.

[2] **Alouache Keltoum:**Résolution des équations intégrales par polynômes de Legendre, thése de Master, M'sila, 2014.

[3] **Andrai D.Polyanin and Alexander V.Manzhirov:**Handbook of Integal Equation, by CRC Press LLC 1998.

[4] **Gagui.B:**Résolution des équations intégrales par les méthodes adaptatives, thése de Magister, université de M'sila 2006.

[5] **Harry Hochstadt:**Integral equations,Wiley classics eddition, 1989.

[6] **M-Krasnov, A.Kisselev, G.Makaenko:**équations intégrales.Moscou.

[7] **M-Rahman:**Integral equations and their applications, Dalhousie university, Canada,witpress 2007.

[8] **Nadir-M:**Cours sur les équations intégrales, douxième année master, université de M'sila.

[9] **Nadir-M:**Cours d'analyse fonctionelle, première année master, université de M'sila.

[10] **Rahmoun.A:**Résolution numérique des équations intégrales, thése de magister, université de M'sila.