N° d'ordre : ....

UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique

Par

Akila LOUGLAIB

SUJET

Adjoint d'opérateurs lipshitziens

Soutenu publiquement le : 17/ 06/2012 devant le jury composé de

Mr. D. DRIHM	**MC(A)**	**Université de M'sila**	**Président**
Mr. L. MEZRAG	**Prof.**	**Université de M'sila**	**Rapporteur**
Mr. D. ACHOUR	**MC(A)**	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Promotion : 2011 /2012

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **L. MEZRAG** pour avoir accepté de diriger le travail de ce mémoire, pour sa gentillesse, sa bonne volonté, sa disponibilité et sa patience ainsi ces orientations et ces guidances avisés.

J'éxprime ainsi mes chaleureux remerciement à Mrs D. Achour et D. Drihem pour avoir accepté d'être membre de jury.

Enfin, Je tiens aussi à remercier mes camarades précisément et toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

A toutes ces personnes j'exprime ma reconnaissance.

Résumé

Dans ce travail nous avons étudié le concept et quelques propriétés de l'adjoint des opérateurs non linéaires (lipschitziens) à partir de l'adjoint des opérateurs linéaires bornés.

Mots clés

Espace métrique pointé, application lipchitzienne, espace de Lipschitz, adjoint lipschitzien.

Abstract

In this work we studied the concept and some properties of adjoint nonlinear operators (of lipschitz) starting from adjoint of bounded linear operators.

Key words

Pointed metric space, Lipschitz map, space of Lipschitz, Lipschitz adjoints.

الملخص بالعربية

في هذا العمل قمنا بدراسة مفهوم و بعض الخواص المتعلقة بقرين المؤثرات غير الخطية(الليبشتيزية) انطلاقا و اعتمادا على قرين المؤثرات الخطية المحدودة.

الكلمات المفتاحية

فضاء متري نقطي ، تطبيق ليبشتيزي، فضاء ليبشتيزي، قرين تطبيق ليبشتيزي.

Table des matières

Introduction

Les travaux de ce mémoire se situent dans le cadre de l'analyse fonctionnelle non linéaire et sont dédiés aux développements de quelques théorèmes lorsque les espaces de Banach sont remplacés par les espaces métriques. Un certain nombre des propriétés linéaires des espaces de Banach a été caractérisé en terme non linéaire.

Dans ce travail on étudie le concept l' adjoint des opérateurs lipschitziens. On présente la notion de ce concept d'opérateurs qui a été introduit en 1975 par I. Sawashima [Saw75]. En 2003 S. Cobzas [Cob03] a étudie l'adjoint lipschitzien d'un application lipschitzienne entre deux espaces normés.

Notre travail de mémoire se divisé en quatre chapitres qui sont les suivants.

Dans le premier chapitre et en premier lieu on définit les applications linéaires bornées. On consacrera le reste de ce chapitre à rappeler le théorème de Hahn-Banach forme analytique et les topologies faibles et $*-$faibles. Ils nous seront utiles pour la suite de notre travail .

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étudier des principes généraux de l'espace de Lipschitz. On commencera par rappeler les définitions et les propriétés relatives aux espaces métriques et on définit qu'un espace métrique est pointé s'il admet un élément distingué, puis on étudiera les propriétés de les fonctions lipschitziennes. Une application f entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) est lipschitzienne, si pour tout $(x, y) \in X^2$ on a,

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y)$$

où C est une constante absolue.

Nous terminerons ce chapitre par l'étude des espaces de Lipschitz. Dans [Wea99] Weaver a prouvé que l'espace de Lipschitz $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$ de toutes les applications lipschitziennes de l'espace métrique X dans un espace de Banach Y nulles sur l'élément distingué est un espace de Banach. cet espace a été utilisé par les mathématiciens comme un cadre pour étendre les résultats de l'analyse fonctionnelle linéaire au cas non linéaire. On établira quelques propriétés de l'espace de Lipschitz.

Dans le troisième chapitre on va présenter le prédual de $\mathrm{Lip}_0(X)$ tel que X un espace métrique pointé. Dans un premier temps, on parlera de l'existence de cet espace pour cela on définit une application qui a été introduit dans l'article de [Lee61]. Dans un second, on commencera par la construction de cet espace [AE56], puis on montrera que son dual est isométriquement isomorphe à $\mathrm{Lip}_0(X)$.

On termine ce travail par le chapitre quatre où nous donnons l'adjoints d'opérateurs linéaires bornés et ainsi que quelques propriétés fondamentales. Puis, nous présenterons les opérateurs compacts et leurs relations avec l'opérateurs adjoints. Nous terminerons ce chapitre par l'étude de l'adjoint des opérateurs lipschitziens. Si X et Y sont des espaces réels normés, on définit l'adjoint lipschitzien $T^{\#} : \mathrm{Lip}_0(Y) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(X)$ d'une application lipschitzienne $T \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$ par la formule

$$T^{\#} : \mathrm{Lip}_0(Y) \longrightarrow \mathrm{Lip}_0(X) : g \longmapsto T^{\#}g = g \circ T \text{ où } g \in \mathrm{Lip}_0(Y).$$

Finalement, ou termine ce mémoire par poser quelques questions ouvertes relatives à ce travail.

	Notations
$L(X,Y)$	Espace des application linéaires.
$\mathcal{L}(X,Y)$	Espace des applications linéaires continues.
X^*	Espace dual de X.
i	Injection canonique.
$\sigma(X,X^*)$	Topologie faible définie sur X.
$\sigma(X^*,X)$	Topologie $*-$faible définie sur X^*.
e	Èlément neutre ou distingué,on prend 0 si X est normé.
$\mathcal{M}_0$	Ensemble des espaces métriques complets pointés.
$\mathcal{M}_2$	Ensemble des espaces métriques complets de diamètre au plus 2.
$\mathbb{k}$	Corps des scalaires ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
X^+	Espaces métriques complets de diamètre au plus 2 union e.
$\mathrm{Lip}(X,Y)$	Espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de$X$ dans Y.
$\mathrm{Lip}_0(X,Y)$	Espace de toutes les applications lipschitziennes de X dans Y nulles au point e.
$X^\#$	Espace des formes lipschitziennes sur X.
$\widetilde{X}$	Ensemble définis par $\{(x,y) \in X^2 : x \neq y\}$.
$M(X)$	Espace normé des molécules sur$X$.
$Æ(X)$	Complètet de l'espace normé $M(X)$ (espacedeArens-Eells).
$\mathcal{F}(X)$	Espace de Lipschitz libre.
$\ell_\infty(X)$	Espace des fonctions borneés de X dans $\mathbb{R}$.
B_X	Boule unité fermé de l'espace X.
$\mathcal{K}(X,Y)$	Espace de tous les opérateurs linéaires compacts de X dans Y.
T^*	Adjoint de l'opérateur linéaire.
$T^\#$	Adjoint de l'opérateur lipschitzien.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous commençons par quelques définitions et résultats basiques des applications linéaires bornées. Ensuite on donnera le théorème de Hahn-Banach form analytique ainsi que quelques conséquences et les topologies faibles et $*-$faibles. Ils nous seront utiles pour la suite de notre travail .

1.1 Applications linéaires bornées

Soient X, Y deux espaces normés et $u : X \longrightarrow Y$ une application. Elle est linéaire si
1) $\forall x, y \in X : u(x+y) = u(x) + u(y)$.
2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : u(\lambda x) = \lambda u(x)$.
On note $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires, on le muni de deux opérations algébriques suivantes
1) $\forall x \in X : (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$.
2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda u)(x) = \lambda u(x)$.
Définition 1.1. Soit $u \in L(X, Y)$. L'application linéaire u est continue s'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq C \|x\| .$$

On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues.

On définit l'application $\|.\|$ de $\mathcal{L}(X, Y)$ dans $\mathbb{R}_+$ en posant

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|u(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |u(x)| .$$

On a aussi

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\| .$$

On a le résultat suivant sur l'espace des applications linéaires continues.

Théorème 1.2. *La quantité $\|u\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$. Si Y est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est aussi un espace de Banach.*

Définition 1.3 (*Dual topologique*)**.** Soit X un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note X^*, l'espace de Banach des formes linéaires continues sur X, i.e.,

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) .$$

Il est muni de la norme des opérateurs

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x^*(x)| = \sup_{\|x\| = 1} |x^*(x)| .$$

1.2 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

Ce théorème est dû aux mathématiciens Hans Hahn et Stefan Banach, est considèré comme un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle et sans lui beaucoup de résultats ne sont pas démontrés. Il existe deux formes de ce théorème, forme analytique et forme géométrique.

Théorème 1.4 (*Théorème de Hahn-Banach form analytique*)**.** *Soit X un espace de Banach, et X_0 un sous-espace. Soit $u_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire borneé. Aors, il existe une forme linéaire u définie sur X qui prolonge u_0, telle que $\|u\| = \|u_0\|$.*

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ i\uparrow & \overset{u}{\searrow} & \\ X_0 & \underset{u_0}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \end{array}$$

où $u_0 = u \circ i$ et i est l'injection canonique.

Pour la preuve du théorème de Hahn-Banach form analytique, le lecteur pourra consulter ([Bre87]).

Dans ce paragraphe on donnera les conséquences du théorème de Hahn-Banach form analytique

Corollaire 1.5. *Soit X un espace de Banach et $x \in X$. Alors il existe $u \in X^*$ tell que*

$$\|u\| = \|x\| \text{ et } u(x) = \|x\|^2.$$

Preuve

Soit $x \in X$. On pose $X_0 = \mathbb{R}x$ et on définit u_0 par

$$u_0(\alpha x) = \alpha \|x\|^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\|u_0\| = \sup_{\|\alpha x\| \leq 1} |u_0(\alpha x)| = \sup_{\|\alpha x\| \leq 1} \left|\alpha \|x\|^2\right| = \|x\|.$$

D'aprés le Théorème (1.4), il existe $u \in X^* : \|u\| = \|x\|$. Aussi $u(x) = u_0(x) = \|x\|^2$.
Ce qui termine la démonstration $\square$

Corollaire 1.6. *Pour tout $x \in X$, on a*

$$\|x\| = \sup_{\|u\|_{X^*} \leq 1} |u(x)| = \max_{\|u\|_{X^*} \leq 1} |u(x)|.$$

Preuve

II est clair que

$$\sup_{\|u\|_{X^*}\leq 1} |u(x)| \leq \|x\| \,.$$

Soit u_0 comme dans le Corollaire (1.5). On pose

$$u_1 = \frac{u_0}{\|x\|} \in X^*.$$

On a $\|u_1\| = 1$ et $|u(x)| = \|x\|$. $\square$

1.3 La topologie faible et $*-$faible

On définit les trois types de topologie, y compris la topologie de norme, largement untilisées en analyse fonctionnelle. Deux serons définies sur tout les espaces de Banach, la troisième aura lieu dans les espace de Banach ayant un prédual. Pour plus détails voir [Bre87] et [Cal08].

Définition 1.7. La topologie faible sur X, notée $\sigma(X, X^*)$ est la topologie la moins fine (i.e., ayant le moins d'ouverts) rendant continus les éléments de X^*. Cette topologie est engendrée par les ouverts de la forme $(x^*)^{-1}(O)$, où x^* est un élément de X et O un ouvert de $\mathbb{R}$.
Par opposition, la topologie originelle de X s'appelle topologie forte ou topologie de la norme.

Théorème 1.8. *Soient X un espace de Banach et C un sous-ensemble convexe de X. L'ensemble C est fermé en norme si, et seulement s'il est faiblement fermé.*

Pour la démonstration de ce théorème voir [Cal08].

Définition 1.9 (*topologie $*-$faible*)**.** La topologie $*-$faible sur X^*, notée $\sigma(X^*, X)$ est la topologie la moins fine (i.e., ayant le moins d'ouverts) rendant continus les formes linéaires

$$x : X^* \longrightarrow \mathbb{k} : x^* \longmapsto x^* (x) \, ; \text{où } x \in X.$$

Noter que cette topologie est moins fine que la topologie faible sur X.

Théorème 1.10 (*Krein-Smulian*)**.** *Soit X un espace de Banach et C un convexe de X^* tel que $C \cap B_{X^*}$ soit fermé pour la topologie $*-$faible alors C est fermé pour la topologie $*-$faible.*

Remarque 1.11. La topologie forte, la topologie $*-$faible $\sigma (X^*, X)$ et la topologie faible $\sigma (X, X^*)$ coïncident en dimension finie.

1.4 Suites faiblement convergentes

De la définition de topologie précédente, on peut introduire une définition de convergence de suites, une suite $(x_n) \subset X$ est faiblement convergente vers un vecteur $x \in X$ si

$$x^* (x) = \lim_n x^* (x_n) \, ,$$

pour tout $x^* \in X^*$ ou bien

$$x^* (x_n) \underset{n}{\longrightarrow} x^* (x) \, , \text{pour tout } x^* \in X^*.$$

Une suite $(x_n) \subset X$ est $*-$faiblement convergente vers un vecteur $x^* \in X^*$ si

$$x^* (x) = \lim_n x_n^*(x)$$

Pour tout $x \in X$

Lemme 1.12. *Dans un espace de Banach, toute suite faiblement convergente est bornée et toute suite* $*-$*faiblement convergente dans* X *est bornée.*

Preuve

voir ([Nad11]). $\square$

Nous terminons par la proposition suivante.

Proposition 1.13. *Soient* X *un espace de Banach et* (x_n) *une suite de* X *La convergence forte implique la convergence faible car on a toujours*

$$\left|x^*\left(x_n\right) - x^*\left(x\right)\right| \leq \left\|x^*\right\| \left\|x_n - x\right\|.$$

La réciproque n'est pas vrai en général.

Chapitre 2

Espace de Lipschitz

Dans ce chapitre on présentera les notion et les principes généraux de l'espace de Lipschitz. Pour cela, nous commencerons par rappeler les définitions et les propriétés relatives aux espaces métriques et les fonctions lipschitziennes. Ce chapitre peut être consideré comme une introduction pour le chapitre suivant et aussi, comme une base de ce travail pour ce mémoire.

2.1 Espace métrique

Un espace métrique est la donnée d'un ensemble dont les éléments sont considérés comme des points et d'une application qui permet de mesurer si deux points sont proches ou éloignés (voir [Dri03] et [SV06] pour plus de détails).

2.1.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. Soit X un ensemble quelconque. Soit $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application. On dit que d est une métrique (distance) sur X si

1) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y.x)$ (symétrie).

3) $\forall x, y, z \in X : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité du triangle).

Les propriétés suivantes sont vérifés

a) La distance entre les distances est plus petite que la distance $\forall x, y, z \in X : |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$ (*seconde inégalité triangulaire*).

b) $\forall x_1, ..., x_n \in X : d(x_1, x_n) \leq \sum_{1 \leq j \leq n-1} d(x_1, x_{n+1})$ (*Inégalité triangulaire généralisée*).

Définition 2.2. Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et d est une distance sur X.

Exemple 2.3.

(1) L'ensemble des réels muni de la distance $d(x,y) = |x - y|$ est un espace métrique.

(2) Soit X un ensemble arbitraire. On le munit de la distance suivante

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

on obtient évidement un espace métrique. Cet espace pourrait être appelé l'espace métrique discret.

On peut aussi définir une distance entre sous ensembles de X.

Définition 2.4. Soit (X, d) un espace métrique et A, B deux sous ensembles non vides de X. La distance de A a B est par définition :

$$d(A,B) = \inf \{d(x,y) \quad x \in X, y \in Y\}.$$

Si $x \in X$ on pose $d(x, A) = d(\{x\}, A)$.

Proposition 2.5. *Soient* (X, d_X) *un espace métrique,* $0 < \alpha < 1$ *alors* (X^α, d_X^α) *un espace métrique* ((X^α, d_X^α) *s'apelle espace métrique de Hōlder*).

Les espaces métriques de Hōlder ne jouent pas un rôle vraiment fondamental dans la théorie générale, mais ils sont d'un intérêt particulier en liaison avec les espaces de Lipschitz.

Théorème 2.6 (*Théorème de Bolzano-Weierstrass*)**.** *Un espace métrique est compact si et seulement si toute suite à valeurs dans X contient une sous-suite convergente.*

Notation. Soit (X, d_X, e) est un espace métrique pointé (i.e., e un élément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé). On note par
$\mathcal{M}_2 = \{$espaces métriques complets de diamètre au plus 2 $\}$ i.e.,

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} d_X(x, y) \leq 2.$$

$\mathcal{M}_0 = \{$espaces métriques complets pointés$\}$.

Remarque 2.7. Si $X \in \mathcal{M}_2$, alors on peut ajouter un point distingué e tel que $\forall x \in X : d_X(x, e) = 1$. On not par $X^+ = X \cup \{e\}$.

Proposition 2.8.
(a) *Soit $X \in \mathcal{M}_0$. Il existe une isométrie de X dans $\ell_\infty(X)$.*
(b) *Soit $X \in \mathcal{M}_2$. Il existe une isométrie de X dans la sphère unité de $\ell_\infty(X)$.*

Preuve
(a) Soit $x_0 \in X$. On définit la fonction $f(x) : X \longrightarrow \ell_\infty(X)$ par $f(x)(y) = d(x, y) - d(y, x_0)$. Comme $f(x) \in \ell_\infty(X)$ et $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$d(f(x_1), f(x_2)) = \sup_{y \in X} |d(x_1, y) - d(y, x_0) - d(x_2, y) + d(y, x_0)| \leq d(x_1, x_2)$$

D'autre part, si nous prenons $y = x_2$,

$$d(f(x_1), f(x_2)) \geq d(x_1, x_2).$$

Ce qui implique que $d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ donc f est une isométrie.

(b) Soit $x \in X$. On définit la fonction $f(x) : X \longrightarrow \ell_\infty(X)$ par $f(x)(y) = d(x, y) - 1$. Comme $f(x) \in \ell_\infty(X)$ et $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$d(f(x_1), f(x_2)) = \sup_{y \in X} |d(x_1, y) - d(x_2, y)| \leq d(x_1, x_2).$$

D'autre part, si nous prenons $y = x_2$, on a

$$d(f(x_1), f(x_2)) \geq d(x_1, x_2).$$

Ce qui implique que $d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ donc f est un isométrie de X dans la sphère unité de $\ell_\infty(X)$ car $d(x, y) - 1 \in [-1, 1]$ $(f(x)(x) = -1$ et $f(x)(y) \leq 1)$. $\square$

Pour terminer cette section on introduit une métrique sur les espaces produits.

2.1.2 Produit d'espaces métriques

On donnera le produit des espaces métriques qui est aussi un espace métrique.

Définition 2.9. Soit $\{(X_i, d_i)_{i \in I}\}$ une famille dans $\mathcal{M}_2$ on définit $(\prod X_i, d)$ par

$$d(x, y) = \sup_{i \in I} d_{X_i}(x_i, y_i).$$

Soit $\{(X_i, d_i, e_i)_{i \in I}\}$ une famille dans $\mathcal{M}_0$ on définit $(\prod^\infty X_i, d, e)$ par

$$\left\{ x : \quad \sup_{i \in I} d_{X_i}(x_i, e_i) \prec \infty \text{ avec } d(x, y) = \sup_{i \in I} d_{X_i}(x_i, y_i), \quad e = e_i \right\}.$$

Remarque 2.10.

(a) Soit $\{X_i : i \in I\}$ une famille des espaces métriques dans $\mathcal{M}_2$. Alors $\prod X_i$ appartient aussi à $\mathcal{M}_2$.

(b) Soit $\{X_i : i \in I\}$ une famille des espaces métriques dans $\mathcal{M}_0$. Alors $\prod^\infty X_i$ appartient aussi à $\mathcal{M}_0$.

Preuve

On pourra consulter ([Wea99]). $\square$

2.2 Les applications lipschitziennes

Le morphisme natural entre les espaces métriques est la fontion lipschitzenne comme les opérateurs linéaires dans les espaces normés.

2.2.1 Définitions et propriétés

On commence par quelques définitions puis des propriétés élémentaires et supplémentaires concernant les applications lipschitziennes.

Définition 2.11. Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite lipschitzienne, s'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x, y \in X : \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y) \tag{2.1}$$

On note par

$$\begin{aligned} \operatorname{Lip}(f) &= \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}. \\ &= \inf \{C : \quad \text{vérifié l'inégalité } (2.1)\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.12. On dit que f est *bi-lipschitzienne*, si c'est une bijection telle que f et f^{-1} sont lipschitziennes. On dit aussi un opérateur $f : X \longrightarrow Y$ entre deux espaces métriques est *bi-lipschitzien* s'il existe un constant $C \geq 1$ tel que

$$\forall x, y \in X : \quad \frac{1}{C} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y)$$

Dans ce cas X et Y sont lipschitz isomorphes (Kalton : lipschitz isomorphe ou lipschitz homéomorphe, Weaver : quasi-isométrique).

Exemples 2.13.

(1) la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est lipschitzienne.

(2) la fonction numérique f définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = 1/x$ n'est pas lipschitzienne.

(3) Soient $X_1 = \{(x, 0) : x \in [0, 1]\}, X_2 = \{(x, x^2) : x \in [0, 1]\}$ deux sous-ensembles fermés dans X,telle que $X = X_1 \cup X_2$. On définit f par

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } y = x^2, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases} \end{array}$$

la restriction de f dans X_1,X_2 est une fonction nonexpansive (i.e., $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$), mais f n'est pas lipschitzienne contrairement aux applications en continu. En effet,

$$\left| f(x, 0) - f(x, x^2) \right| = |x|$$

et

$$d((x, 0), (x, x^2)) = \sqrt{(x - x)^2 + (0 - x^2)^2} = x^2.$$

Il s'agit d'une contradiction, parce que si nous prenons $x = \dfrac{1}{n}$ on a $1 \leq \dfrac{1}{n}$.

Nous donnerons quelques propriétés classiques des applications Lipschitziennes.

Proposition 2.14. *Soit (X, d_X) un espace métrique, si C est une sous ensemble fermeé dans X alors $d(x, C)$ est une fonction lipschitzienne.*

Preuve

Soit $x \in X$. On définit la fonctions $f : X \longrightarrow Y$ par $f(x) = d_X(x, C)$. D'après la seconde inégalité triangulaire,

$$|f(x) - f(y)| = |d_X(x, C) - d_X(y, C)| \leq d_X(x, y).$$

Alors f est une fonction nonexpanssive (i.e., $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$). $\square$

Proposition 2.15. *Soit* (X, d_X) *un espace métrique, alors l'application définie comme suit*

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{d}_z : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \widetilde{d}_z\,(x) = d_X(x,z) - d_X\,(e,z)\,, \end{array}$$

est une application lipschitzienne.

Preuve

D'après la seconde inégalité triangulaire,

$$\forall x, y, z \in X \quad \left|\widetilde{d}_z\,(x) - \widetilde{d}_z\,(y)\right| = |d_X(x,z) - d_X\,(e,z) - d_X(y,z) + d_X\,(e,z)| \leq d_X\,(x,y)\,.$$

Alors f est une fonction nonexpanssive (i.e., $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$). $\square$

Remarque 2.16. Soit (X, d_X) un espace métrique. Une fonction f est constante sur X si et seulement si f est lipschitzienne et $\mathrm{Lip}(f)$ est nul.

Preuve

Si f est constante, on a quels que soient (x, y) dans X^2,

$$d\prime(f(x), f(y)) = 0 \leq \mathrm{Lip}\,(f)\, d(x, y).$$

Et il en résulte que $\mathrm{Lip}(f)$ est nul.

Réciproquement, si $\mathrm{Lip}(f)$ est nul, alors quels que soient (x, y) dans X^2,

$$d\prime(f(x), f(y)) \leq 0 = \mathrm{Lip}\,(f)\, d(x, y),$$

et donc $f(x) = f(y)$. Il en résulte que f est constante. $\square$

Proposition 2.17.

a) *Soient* X, X_i *des espaces métriques dans* $\mathcal{M}_2$ *pour tout* $i \in I$, $f_i : X \longrightarrow X_i$ *une fonction lipschitzienne alors le produit* $f : X \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ *satisfait*

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{i \in I} \mathrm{Lip}(f_i).$$

b) *Soient* X, X_i *des espaces métrique dans* $\mathcal{M}_0$ *pour tout* $i \in I$, $f_i : X \longrightarrow X_i$ *une fonction lipschitzienne qui préserve l'élément distingue* $(f(e) = e_i)$ *supossons que* $\sup_{i \in I} \mathrm{Lip}(f_i) < \infty$ *alors le produit* $f : X \longrightarrow \prod_{i \in I}^{\infty} X_i$ *satisfait*

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{i \in I} \mathrm{Lip}(f_i).$$

Preuve

a) Par définition de la distance sur l'espace produit on a

$$d\left(f(x), f(y)\right) = \sup_{i \in I} d_{X_i}(f_i(x), f_i(y)).$$

On divise par $d_X(x, y)$ alors

$$\forall x \neq y : \frac{d\left(f(x), f(y)\right)}{d_X(x, y)} = \sup_{i \in I} \frac{d_{X_i}(f_i(x), f_i(y)}{d_X(x, y)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sup_{x \neq y} \frac{d\left(f(x), f(y)\right)}{d_X(x, y)} &= \sup_{i \in I} \sup_{x \neq y} \frac{d_{X_i}(f_i(x), f_i(y)}{d_X(x, y)} \\ &= \sup_{i \in I} \mathrm{Lip}(f_i). \end{aligned}$$

De même façon que (a), mais il faut verifé le condition

On a

$$d_{X_i}(f_i(x), f_i(e)) \leq \mathrm{Lip}(f_i) d_X(x, e).$$

Alors

$$\begin{aligned}\sup_{i\in I} d_{X_i}(f_i(x), f_i(e)) &\leq \sup_{i\in I} \mathrm{Lip}(f_i) d_X(x,e) \\ &\leq \infty.\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition. $\square$

Proposition 2.18. *Soient X, Y et Z des espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux fonctions lipschitziennes, alors $g \circ f : X \longrightarrow Z$ est lipschitzienne et* Lip$(g \circ f)$ $\leq$Lip(g)Lip(f).

Preuve

Si f est lipschitzienne de X dans Y et g est lipschitzienne de Y dans Z, alors

$$\begin{aligned}d_Z(g\circ f(x_1), g\circ f(x_2)) &\leq \mathrm{Lip}(g) d_Y(f(x_1), f(x_2)) \\ &\leq \mathrm{Lip}(g)\mathrm{Lip}(f) d_X(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Alors $g \circ f$ est lipschitzienne et

$$\mathrm{Lip}(g\circ f) \leq \mathrm{Lip}(g)\mathrm{Lip}(f).$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

Proposition 2.19. *Soient $(X_0, d_{X_0}), (Y_0, d_{Y_0})$ des espaces métriques, X, Y leurs complétés et $f : X_0 \longrightarrow Y_0$ une fonction lipschitzienne. Alors f_0 a une unique extension lipschitzienne $f : X \longrightarrow Y$ telle que* Lip(f) =Lip(f_0). *(Nous pouvons définir $f(x) = \lim f_0\left(x_n\right)$).*

Preuve

Par densité, toute fonction lipschizienne f_0 définie sur X_0, se prolonge sur X tout entier. En effet, soit $f : X \longrightarrow Y$ on définit pour tout x de X

$$f\left(x\right) = \lim f_0\left(x_n\right),$$

où (x_n) est une suite de X_0 convergeant vers x.

Soient $x, y \in X$, alors

$$\begin{aligned}
d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) &= d\left(\lim f_0\left(x_n\right), \lim f_0\left(y_n\right)\right) \\
&= \lim d\left(f_0\left(x_n\right), f_0\left(y_n\right)\right) \\
&\leq \lim \mathrm{Lip}(f_0) d\left(x_n, y_n\right) \\
&\leq \mathrm{Lip}\left(f_0\right) d\left(x, y\right),
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Lip}(f) \leq \mathrm{Lip}(f_0)$.

D'autre par on a $\forall x, y \in X_0$ alors

$$d\left(f_0\left(x\right), f_0\left(y\right)\right) = d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq \mathrm{Lip}(f) d\left(x, y\right)$$

on obtient finalement que $\mathrm{Lip}(f_0) \leq \mathrm{Lip}(f)$.

Ce qui, avec l'inégalité inverse, prouve l'égalité. □

Corollaire 2.20. *Si X est un espace compact et $f : X \longrightarrow Y$ une application lipschitzienne inversible. Alors, f^{-1} est lipschitzienne.*

Proposition 2.21. *Soient X, Y des espaces métriques, f, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions lipschitziennes de X dans Y. Supposons que $f_n \xrightarrow{\text{C S}} f$ alors*

$$\mathrm{Lip}(f) \leq \sup_n \mathrm{Lip}(f_n).$$

Preuve

Soient f et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions lipschitziennes de X dans Y, on a $(x, y) \in X^2$

$$d_Y\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) = \lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f_n(y)).$$

En divisant par $d_X(x,y)$ et en prenant le supremum en x et y. $\square$

Proposition 2.22. *Soit X un espace métrique et soient f, g, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$. Alors*

(a) $\mathrm{Lip}(\lambda f) = |\lambda|\mathrm{Lip}(f)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathrm{Lip}(f+g) \leq \mathrm{Lip}(f) + \mathrm{Lip}(g)$.

(c) *Si* $\sum f_n$ *converge simplement alors* $\mathrm{Lip}(\sum f_n) \leq \sum \mathrm{Lip}(f_n)$.

Preuve

(a) Si λ est dans $\mathbb{R}$, pour tout (x,y) dans X^2

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}(\lambda f) &= \sup_{x\neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{d_X(x,y)} \\ &= \sup_{x\neq y} \frac{|\lambda|\,|f(x) - f(y)|}{d_X(x,y)} \\ &= |\lambda|\,\mathrm{Lip}(f).\end{aligned}$$

Donc λf est fonction lipschitzienne et

$$\mathrm{Lip}(\lambda f) = |\lambda|\,\mathrm{Lip}(f).$$

(b) Soient f et g des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$. On a, pour tout $(x,y) \in X^2$,

$$\begin{aligned}|(f+g)(x) - (f+g)(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq (\mathrm{Lip}(x) + \mathrm{Lip}\,(y))\, d_X(x,y)\end{aligned}$$

Donc $f+g$ est $f$onction lipschitzienne et

$$\mathrm{Lip}(f+g) \leq \mathrm{Lip}(f) + \mathrm{Lip}(g).$$

(c) Soit $g_n = \sum_1^n f_k$ et $f = \sum_1^\infty f_k$ alors $g_n \longrightarrow f$ converge simplement et $\mathrm{Lip}(g_n) \leq$

$\sum_1^n \mathrm{Lip}(f_k)$. Alors par la Proposition (2.21) on a

$$\mathrm{Lip}(f) \leq \sup \mathrm{Lip}(g_n) \leq \sum_1^\infty \mathrm{Lip}(f_k). \qquad \square$$

Proposition 2.23. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *un fonction lipschitzien borné. Si* $|f(x)| \geq \epsilon > 0$ *pour tout* $x \in X$ *on a*

$$\mathrm{Lip}\,(1/f) \leq \mathrm{Lip}\,(f)\,/\epsilon^2.$$

Preuve

Soient $x, y \in X$, on pose que $|f(x)| \geq \epsilon > 0$. Alors

$$|1/f(x) - 1/f(y)| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)f(y)|} \leq \frac{\mathrm{Lip}\,(f)\,d\,(x, y)}{\epsilon^2}.$$

Donc $\mathrm{Lip}(1/f) \leq \mathrm{Lip}(f)\,/\epsilon^2$. $\square$

2.2.2 Applications lipschitziennes différentiables

Dans cette sous-section, on étudie les conditions pour pouvoir différentier des applications lipschitziennes entre espaces de Banach.

Nous commençons par rappeler la définition suivante.

Définition 2.24. Soient X et Y des espaces vectoriels normés. Soit f une application $f : X \longrightarrow Y$, on dit que f est Fréchet-différentiable en x s'il existe une unique application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - L\,(h)\|}{\|h\|} = 0$$

L est appelée application Fréchet-différentielle de f en x.

Théorème 2.25. *Soit f une application différentiable d'un ouvert convexe U d'un espace normé X dans un espace normé réel Y. L'application f est lipschitzienne de U dans Y si et seulement si f' est bornée sur U et on a*

$$\mathrm{Lip}\,(f) = \sup_{x\in U} \|f'\,(x)\|\,.$$

Preuve

Si f' est bornée sur U, il résulte de l'inégalité des accroissements finis que, $\forall x, y \in U$, ona

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \sup_{z\in U} \|f'(z)\|$$

ce qui montre que f est lipschitzienne et que

$$\mathrm{Lip}\,(f) \leq \sup_{z\in U} \|f'(z)\|\,.$$

Réciproquement, supposons f lipschitzienne sur U. Comme f est différentiable, il existe une application linéaire continue g de X dans Y telle que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + g\,(h)$$

avec

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\|g(h)\|}{\|h\|} = 0$$

on a alors

$$\|f'(x)(h)\| \leq \|f(x+h) - f(x)\|\,\|g\,(h)\|\,.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|h\| \leq \eta$ entraîne

$$\|g(h)\| \leq \varepsilon\,\|h\|\,.$$

On aura dans ces conditions,

$$\|f'(x)(h)\| \leq (\mathrm{Lip}\,(f)+\varepsilon)\,\|h\|\,.$$

Soit t dans X. Il existe un entier n tel que

$$\left\|\frac{t}{n}\right\| \leq \eta.$$

Donc

$$\|f'(x)(t)\| \leq \left\|f'(x)(n\left(\frac{t}{n}\right))\right\| = |n|\left\|f'(x)\left(\frac{t}{n}\right)\right\| \leq |n|\,(\mathrm{Lip}\,(f)+\varepsilon)\left\|\frac{t}{n}\right\|.$$

Il en résulte que pour tout x de U, et tout t de X, on a

$$\|f'(x)(t)\| \leq (\mathrm{Lip}\,(f)+\varepsilon)\,\|t\|$$

et donc

$$\|f'(x)\| \leq \mathrm{Lip}\,(f)+\varepsilon.$$

Alors

$$\sup_{x\in U}\|f'\,(x)\| \leq \mathrm{Lip}\,(f)+\varepsilon.$$

Comme ce résultat a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient finalement que

$$\sup_{x\in U}\|f'\,(x)\| \leq \mathrm{Lip}\,(f)\,.$$

Ce qui, avec l'inégalité inverse, prouve l'égalité. $\square$

Théorème 2.26 (*Rademacher*). *Soient X un espace de Banach de dimension finie et une application lipschitzienne $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors f est différentiable presque partout,(c.-à-d. différentiable à chaque point sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle).*

On va présenter les conditions de rétraction des applications lipschitziennes entre des espaces métrique.

2.3 Rétracts lipschitziens absolus

Définition 2.27. Soit X un espace métrique et soit E un sous-ensemble de X. Une fonction lipschitzienne $p : X \longrightarrow E$ est appelé une rétraction lipschitzienne si $p/E = id_Y$. Dans ce cas, on dit que E est un rétract lipschitzien de X. Un rétract lipschitzien absolu est un espace métrique qui est un rétract de tout pour tous les espaces métriques qui le contient. On caractérise les rétracts lipschitziens absolus en terme d'extensions d'applications lipschitziennes.

On donne sans démonstration le Proposition suivant qui est une version du théoréme de Hahn Banach.

Proposition 2.28. *Soit E un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d) et $f : E \longrightarrow \ell_\infty(E)$ une fonction lipschitzienne. Alors f peut être étendue à une fonction lipschitzienne unique $\widetilde{f} : X \longrightarrow \ell_\infty(E)$ avec la même constante de Lipschitz* ($\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}\left(\widetilde{f}\right)$) *on dit que $\ell_\infty(E)$ est le 1-injectif).*

Preuve

Voir ([Mez12])

Proposition 2.29. *Soit Y un espace métrique. Alors les propriétés suivant sont équivalentes.*

(1) *L'espace Y est un espace absolu rétracte.*

(2) *Pour tout métrique X, pour tout sous-ensemble $E \subset X$ et pour toute fonctions lipschitzienne $f : E \longrightarrow Y$ peut être étendu à une fonction lipschitzienne $\widetilde{f} : X \longrightarrow Y$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ E \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(3) *Pour tout espace métrique Z contenant Y et pour chaque espace métrique F, alors toute fonction lipschitzienne $f : Y \longrightarrow F$ peut être étendue à une fonction lipschitzienne $\widetilde{f} : Z \longrightarrow F$.*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ Y \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

Preuve

(3) ou (2)$\Longrightarrow$ (1). Nous prenons $F = Y$ et $f = id_Y$ ou $E = Y$ et $f = id_Y$.

(1) $\Longrightarrow$ (3) $\widetilde{f} = f \circ p$ est l'extension par le diagrame ci-dessous

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "p"] \arrow[drr, "\widetilde{f}"] & & \\ Y \arrow[u, "i"] \arrow[r, "id"] & Y \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

(1) $\Longrightarrow$ (2). Par la Proposition (2.8) Y peut être considéré comme un sous-espace de $\ell_\infty(Y)$. Il y a donc une rétraction lipschitzienne $p : \ell_\infty(Y) \longrightarrow Y$. Soit $f : E \longrightarrow \ell_\infty(Y)$ une fonction lipschitzienne. D'après la Proposition (2.28), il existe une extension lipschitzienne $\widetilde{f} : X \longrightarrow \ell_\infty(y)$ Si nous prenons, $\widehat{f} = p \circ \widetilde{f}$

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ i\uparrow & \overset{\widetilde{f}}{\searrow} & & \overset{\widehat{f}}{\searrow} & \\ E & \xrightarrow{id} & \ell_\infty(Y) & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

nous prouvons cette implication et nous terminons la preuve de la proposition. □

2.4 Espaces de Lipschitz

Nous donnerons dans cette section quelques propriétés utiles concernant l'espace de tous les fonctions lipschitziens définit d'un espace métrique dans un espace de Banach.

2.4.1 Lip(X,Y)

Définition 2.30. Soit X un espace métrique et Y un espace de Banach. On note par $\mathrm{Lip}(X,Y)$ l'espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de X dans Y

$$\mathrm{Lip}(X,Y) = \{ \text{ fonctions lipschitziennes bornées } f : X \longrightarrow Y\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} = \max\{\|f\|_\infty, \mathrm{Lip}(f)\} \tag{2.2}$$

Si $Y = \mathbb{R}$ alors $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ =$\mathrm{Lip}(X)$.

Maintenant regardons un exemple de l'espace de Lipschitz, voir [Wea99]. Soient X un ensemble, on le munit de la distance discrète $d(x,y) = 2$ pour $x \neq y$. On a $\mathrm{Lip}(X) = \ell_\infty(X)$ et $\|f\|_{\mathrm{Lip}(X)} = \|f\|_\infty$, il est évident que $\mathrm{Lip}(X) \subset \ell_\infty(X)$ d'après la Proposition (2.28). D'autre part si $f \in \ell_\infty(X)$ alors

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{2} \leq \|f\|_\infty \qquad \forall x, y \in X.$$

Alors $\mathrm{Lip}(f) \leq \|f\|_\infty$. Donc $\|f\|_{\mathrm{Lip}(X)} \leq \|f\|_\infty$.

2.4.2 $\mathrm{Lip}_0(\mathbf{X,Y})$

Définition 2.31. Soit (X, d_X, e) un espace métrique pointé. Pour tout espace de Banach Y, nous désignons par $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ l'espace de toutes les applications lipschitziennes $f : X \longrightarrow Y$ nulles au point e

$$\mathrm{Lip}_0(X,Y) = \{ \text{ fonctions lipschitziennes } f : X \longrightarrow Y : \quad f(e) = 0\}$$

equipé de la norme

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d_X(x,y)}.$$

Si $Y = \mathbb{R}$ alors $\mathrm{Lip}_0(X,\mathbb{R})$ $=\mathrm{Lip}_0(X)$.

Exemple 2.32. Soit $[0,1]$ muni de la distance usuelle et l'élément distingué $e = 0$. Pour tout $f \in L^\infty [0,1]$, on définit $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. Alors pour tout $a, b \in [0,1]$, $a \leq b$, on a

$$|F(b) - F(a)| = \left| \int_a^b f(s)ds \right| \leq \|f\|_\infty (b-a),$$

donc F est lipschitzienne et $\mathrm{Lip}(F) \leq \|f\|_\infty$ .Comme, $F(0) = 0$, donc $F \in \mathrm{Lip}_0 [0,1]$.

Remarque 2.33. D'après la Proposition (2.22), $\mathrm{Lip}(X)$ et $\mathrm{Lip}_0(X)$ sont des espaces vectoriels normés et par la Remarque (2.16) $\mathrm{Lip}(f)$ est une semi-norme sur $\mathrm{Lip}(X)$.

Proposition 2.34.
(a) $\mathrm{Lip}(X)$ *est un espace de Banach par la norme* (2.2)*, pour tout espace métrique* X.
(b) $\mathrm{Lip}_0(X)$ *est un espace de Banach, pour tout espace métrique* X *pointé.*

Preuve
(a) Nous utilisons le fait suivant : pour montrer qu'un espace normé est complet il suffit de montrer que toute série absolument convergente est convergeante. Autrement dit, si (x_n) est une suite de X et $\sum ||x_n|| < \infty$, alors $\sum x_n$ converge dans X.
Soit (f_n) une suite dans $\mathrm{Lip}(X)$ telle que $\sum \|f_n\|_{\mathrm{Lip}(X)} < \infty$. Ceci implique que les deux

$\sum \|f_n\|_\infty < \infty$ et $\sum$Lip$(f_n) < \infty$. Donc $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f qui satisfait

$$\|f\|_\infty \leq \sum \|f_n\|_\infty \text{ et } \mathrm{Lip}(f) \leq \sum \mathrm{Lip}(f_n) \text{ (Proposition(2.22)).}$$

par conséquent $f \in$Lip(X). Aussi, si $g_n = \sum_1^n f_n$ est la somme n-partielle, alors

$$\|f - g_n\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ et } \mathrm{Lip}(f - g_n) \longrightarrow 0$$

parce que $f - g_n$ est le reste d'une série convergente pour les normes $\|.\|_\infty$ et Lip(.).Donc $\sum f_n \longrightarrow f \in \|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)}$.
(b) Pareil que le cas (a). $\square$

Espace dual

Définition 2.35 (*Dual de Lipschitz*)**.** Soit X un espace métrique pointé. On appelle dual de Lipschitz et on le note par $X^\#$, l'espace de Banach des formes lipschitziennes sur X, i.e.,

$$X^\# = \mathrm{Lip}_0\,(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Lip}_0(X)$$

muni de la norme

$$\mathrm{Lip}(x^\#) = \sup_{x \neq y} \frac{\left|x^\#\,(x) - x^\#\,(y)\right|}{d_X(x, y)}.$$

Le but de le théorème suivant est de répondre à deux questions évidentes : pourquoi la classe $\mathcal{M}_2$ Significative, et quelle est la relation entre les espaces Lip(X) et Lip$_0(X)$ pour plus de détails voir [LB03] et [Wea99].

Théorème 2.36 ([LB03])**.** *Soit $X \in \mathcal{M}_2$. Alors* Lip(X) *s'identifie naturellement avec* Lip$_0(X^+)$*.*

Preuve

On a

$$d_{X^+}(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \forall x,y \in X, \\ 1 & \forall x \in X, y = e. \end{cases}$$

Alors, on définit l'application

$$\begin{array}{rlll} \Psi : & \mathrm{Lip}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Lip}_0(X^+) \\ & f & \longmapsto & \Psi(f) \left(\Psi(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{si } x = e \end{cases} \right) \end{array}$$

évidement, Ψ est une isométrie bijective. Pour $f_0 := \Psi(f)$ on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Lip}(f_0) &= \sup_{x,y\in X^+} \frac{|f_0(x) - f_0(y)|}{d_{X^+}(x,y)} \\ &= \max\left\{ \sup_{x,y\in X} \frac{|f(x)-f(y)|}{d_X(x,y)}, \sup_{x\in X} \frac{|f(x)-f(e)|}{d_X(x,e)} \right\} \\ &= \max\left\{\mathrm{Lip}(f), \|f\|_\infty\right\} \\ &= \|f\|_{\mathrm{Lip}(X)}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

2.5 Composition des applications

La construction générale suivante des applications entre les espaces de Lipschitz est une base.

Définition 2.37. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_0$ et $g : Y \longrightarrow X$ une fonction lipschitzienne qui préserve le point de base. Nous définissons la composition d'application

$$\begin{array}{rlll} C_g : & \mathrm{Lip}_0(X) & \longrightarrow & \mathrm{Lip}_0(Y) \\ & f & \longmapsto & C_g(f) \ (C_g(f)(x) = f \circ g(x)). \end{array}$$

La définition a un sens par la Proposition (2.18).

Proposition 2.38. *Soient* $X, Y \in \mathcal{M}_0$ *et* $g : Y \longrightarrow X$ *une fonction lipschitzienne qui préserve le point de base. Alors* C_g *est un application linéaire borné et* $\|C_g\|$ =Lip(g).

Preuve

Par la Proposition (2.18), on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Lip}(C_g) &= \mathrm{Lip}(f \circ g) \\ &\leq \mathrm{Lip}(f)\mathrm{Lip}(g), \end{aligned}$$

et donc $\|C_g\| \leq$Lip(g). Pour l'inégalité inverse, fixons deux points distinctes x, $y \in Y$. Soit

$$f = \widetilde{d}_{g(y)} : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'application définie dans la Proposition (2.15). Alors Lip$(f) = 1$ et

$$\begin{aligned} \|C_g\| &\geq \mathrm{Lip}\left(C_g f\right) \\ &\geq \frac{\left|\left(C_g f\right)(x) - \left(C_g f\right)(y)\right|}{d(x,y)} \\ &\geq \frac{d\left(g(x), g(y)\right)}{d(x,y)}. \end{aligned}$$

En prenant le supremum sur x et y, on aura $\|C_g\| \geq Lip(g)$. $\square$

Proposition 2.39. *Soient* $X, X' \in \mathcal{M}_0$, *alors* Lip$_0(X)$ =Lip$_0(X')$ *si, et seulement si l'identité est une quasi-isométrique de* X *et* X'.

Chapitre 3

Prédual de $\mathbf{Lip}_0(X)$

Dans ce chapitre on va présenter le prédual de $\text{Lip}_0(X)$, c'est à dire il existe un espace de Banach Z telle que $\text{Lip}_0(X)$ est isométriquement isomorphe à Z^*. Dans un premier temps, on parlera de l'existence de cet espace. Dans un second commencera peut la construction de cet espace puis on montrera que son dual est isométriquement isomorphe à $\text{Lip}_0(X)$.

3.1 L'application de De Leeuw

Notre première preuve de l'existence d'un prédual utilise une application qui a été introduit dans l'article de [Lee61]. Plan De Leeuw est définie comme suit.

Définition 3.1. Soient (X, d_X) un espace métrique et $\widetilde{X}$ un ensemble défini par

$$\widetilde{X}=\left\{(x,y) \in X^2 : x \neq y\right\} = X^2 \backslash D_X.$$

Alors pour tout $f : X \longrightarrow \mathbb{K}\,(\mathbb{K} =\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ on définit l'application de De Leeuw par

$$\begin{array}{rlcl} \Phi : & \text{Lip}_0(X) & \longrightarrow & \ell_\infty(\widetilde{X}) \\ & f & \longmapsto & \Phi(f) \left(\Phi\,(f)\,(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{d_X(x,y)} \right). \end{array}$$

L'application Φ est une isométrie. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\|\Phi f\|_{\ell_\infty(\widetilde{X})} &= \sup_{(x,y)\in\widetilde{X}} |\Phi f(x,y)| \\
&= \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d_X(x,y)} \\
&= \mathrm{Lip}(f).
\end{aligned}$$

Lemme 3.2. *Soient $X \in \mathcal{M}_0$ et f, $(f_i)_{i\in I} \in Lip_0(X)$. Alors $f_i \xrightarrow{\text{C S}} f$ si et seulement si $\Phi f_i \xrightarrow{\text{C S}} \Phi f$.*

Preuve

Soit $(x,y) \in \widetilde{X}$. On a

$$\Phi\left(f_i\right)(x,y) = \frac{f_i(x)-f_i(y)}{d_X(x,y)} \longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{d_X(x,y)} = \Phi\left(f\right)(x,y)\,.$$

Pour l'inverse, supposons que $x \in X$, on a

$$f_i(x) = d_X(x,e)\Phi\left(f_i\right)(x,e) \longrightarrow d_X(x,e)\Phi\left(f\right)(x,e) = f(x).$$

d'où la preuve. $\square$

Dans le théorème suivant on donnera quelques propriétés de l'application de De Leeuw

Théorème 3.3. *Soit $X \in \mathcal{M}_0$.*

(a) Φ *est une application linéaire de $Lip_0(X)$ dans $\ell_\infty(\widetilde{X})$.*

(b) $\Phi\left(fg\right) = f\Phi\left(g\right) + \Phi\left(f\right)g$ *pour tout f, $g \in Lip_0(X) \cap \ell_\infty(\widetilde{X})$.*

(c) $\Phi\left(\mathrm{Lip}_0(X)\right)$ est *fermé pour la topologie $*-$faible dans $\ell_\infty(\widetilde{X})$.*

Preuve

(a) est triviale.

(b) $\forall\,(x,y) \in \widetilde{X}$, on a par définition

$$\begin{aligned}
\Phi(fg)(x,y) &= \frac{(fg)(x) - (fg)(y)}{d_X(x,y)} \\
&= \frac{f(x)\left(g(x) - g(y)\right)}{d_X(x,y)} + \frac{g(y)\left(f(x) - f(y)\right)}{d_X(x,y)} \\
&= f(x)\Phi(g)(x,y) + g(x)\Phi(f)(x,y).
\end{aligned}$$

(c) La preuve de cette partie utilise le Théorème (1.7)(*Théorème de Krein-Smulian*). □

Nous donnons quelques définitions préliminaires sur le espace de Arens-Eells et leurs propriétés essentielles.

3.2 Espace de Arens-Eells

Nous présenterons d'abord la construction de cet espace [AE56] (voir aussi [Wea99]).

3.2.1 L'espace des molécules

Définition 3.4. Soit (X, d_X) un espace métrique. Une molécule sur X est une fonction $m : X \to \mathbb{R}$ à support fini($\sigma(m) = \{x \in X : m(x) \neq 0\}$) qui satisfait $\sum_{x\in\sigma(m)} m(x) = 0$. Désignons par $M(X)$ l'espace des molécules sur X. On peut écrire

$$m = \sum_{x\in\sigma(m)} m(x)\mathbf{1}_{\{x\}} = \sum_{i=1}^{n} m(x_i)\mathbf{1}_{\{x_i\}}.$$

Où $\mathbf{1}_{\{x\}}$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $\{x\}$.

Remarque 3.5. On peut montrer que tout $m \in M(X)$ s'écrire sous la forme

$$m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mathbf{1}_{\{x_i'\}}\right).$$

et cette écriture n'est pas unique.

Proposition 3.6. *Soit (X, d_X) un espace métrique. Munissons l'espace des molécules $M(X)$ de la norme suivante*

$$\|m\|_{M(X)} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, d_X(x_i, x_i^{'}) : m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mathbf{1}_{\{x_i^{'}\}} \right). \right\}$$

Alors notons Æ(X) de la complèté de l'espace normé $(M(X),), \|.\|_{M(X)})$ et parfois l'espace Æ(X) s'appelle l'espace de Lipschitz libre de X (voir [Kal04] et on le note aussi par $\mathcal{F}(X)$).

3.2.2 propriétés

Théorème 3.7. *Soit X un espace métrique pointé (i.e., $X \in \mathcal{M}_0$). Alors* Æ$(X)^* =$ $\mathrm{Lip}_0(X)$.

Preuve

On définit la application suivante

$$\begin{array}{rlcl} S: & \text{Æ}(X)^* & \longrightarrow & \mathrm{Lip}_0(X) \\ & \varphi & \longmapsto & S(\varphi) \; \left(S\left(\varphi\right)\left(x\right) = \varphi\left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{e\}}\right)\right). \end{array}$$

$\forall x, y \in X$ on a

$$\begin{aligned} \left|S\left(\varphi\right)\left(x\right) - S\left(\varphi\right)\left(y\right)\right| &= \left|\varphi\left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{e\}}\right) - \varphi\left(\mathbf{1}_{\{y\}} - \mathbf{1}_{\{e\}}\right)\right| \\ &= \left|\varphi\left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}}\right)\right| \\ &= \|\varphi\| \, d_X(x, y). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Lip}(S\varphi) \leq \|\varphi\|$. D'autre par on a $(S\varphi)(e) = \varphi\left(0\right) = 0$, alors en effet $S\varphi \in \mathrm{Lip}_0(X)$. Nous concluons que S est une application linéaire nonexpanssive à partir de Æ$(X)^*$ à $\mathrm{Lip}_0(X)$.

Maintenant on définit l'application suivante

$$\begin{array}{llll} R: & \mathrm{Lip}_0(X) & \longrightarrow & Æ(X)^* \\ & f & \longmapsto & R(f)\left(R\left(f\right)\left(m\right)=\sum\limits_{x} m(x)f(x)\right). \end{array}$$

$\forall m \in Æ(X)$ on a

$$\begin{aligned} \left|R\left(f\right)\left(m\right)\right| &= \left|\sum_{x} m(x)f(x)\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mathbf{1}_{\{x_i'\}}\right)(x)\, f(x)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i\right| \left|f(x_i) - f(x_i')\right| \\ &\leq \mathrm{Lip}(f)\left\|m\right\|_{Æ}. \end{aligned}$$

Ainsi $Rf \in Æ(X)^*$ et $\|Rf\| \leq Lip(f)$. Alors nous concluons que R est une application linéaire nonexpanssive à partir de $\mathrm{Lip}_0(X)$ à $Æ(X)^*$.

Enfin, un simple calcul indique que S et R des inverses l'une de donc l'autre et donc $Æ(X)^* = \mathrm{Lip}_0(X)$. $\square$

Proposition 3.8. Soit X un espace métrique pointé. La topologie $*-$faible de $\mathrm{Lip}_0(X)$ (i.e., $(\mathrm{Lip}_0(X), \sigma\left(\mathrm{Lip}_0(X), Æ(X)\right))$) est coïncide avec la topologie de la convergence simple.

Preuve

Si f_i est $*-$faiblement convergente vers f dans $\mathrm{Lip}_0(X)$, alors $\forall x \in X$ on a

$$f_i\left(x\right) = R\left(f_i\right)\left(1_{\{x\}} - 1_{\{e\}}\right) \longrightarrow R\left(f\right)\left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{e\}}\right) = f\left(x\right).$$

Alors la convergence $*-$faible implique la convergence simple, et l'inverse est résultat classique $\square$

Corollaire 3.9. *Soit X un espace métrique pointé.*

(1) *Pour toute molécule m, nous avons*

$$\|m\|_{Æ} = \sup_{f \in B_{X^{\#}}} |\langle m, f \rangle| \, .$$

(2) $\|.\|_{Æ}$ *est une norme sur l'espace de molécules qui satisfait*

$$\forall x, y \in X : \left\| \mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}} \right\|_{Æ} = d_X(x, y).$$

(3) $\|.\|_{Æ}$ *est le plus grand semi-norme sur l'espace de molécules qui satisfait*

$$\forall x, y \in X : \left\| \mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}} \right\| \leq d_X(x, y).$$

Preuve

(1) Cela résulte de l'identification des $\mathrm{Lip}_0(X)$ avec $Æ(X)^*$et le théorème de *Hahn-Banach* (Corollaire (1.6)).

(2) Pour la démonstration on trouvera une dans([Wea99])

(3) Supposons que $\|.\|_0$ est une semi norme telle que

$$\forall x, y \in X : \left\| \mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}} \right\|_0 \leq d_X(x, y).$$

Alors, pour toute molécule $m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(1_{\{x_i\}} - 1_{\{x_i'\}} \right)$ nous avons

$$\begin{aligned} \|m\|_0 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mathbf{1}_{\{x_i'\}} \right) \right\|_0 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \left\| \mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mathbf{1}_{\{x_i'\}} \right\|_0 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, d_X(x_i, x_i'). \end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur toutes ces représentations de m on aura $\|m\|_0 \leq \|m\|_{Æ}$. $\square$

Remarque 3.10. Soit (X, d_X) un espace métrique. L'application $i_X : X \to Æ(X)$ définie par

$$i_X(x) = \left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{e\}}\right)$$

est un l'injection isométrique de X dans $Æ(X)$. En effet, d'aprés Corollaire (3.9 (2)) on a

$$\begin{aligned} \|i_X(x) - i_X(y)\|_{Æ} &= \left\|\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}}\right\|_{Æ} \\ &= d_X(x, y). \end{aligned}$$

Théorème 3.12 ([Wea99])**.** *Soient X un espace métrique pointé, Y un espace de Banach et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction lipschitzienne qui préserve le point de base (i.e., $f(e) = 0$). Alors il existe une unique opérateur linéaire borné $u : Æ(X) \longrightarrow Y$ telle que $f = u \circ i_X$ et $\|u\| = Lip(f)$.*

$$\begin{tikzcd} Æ(X) \arrow[dr, "u"] & \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Preuve

Chaque molécule m s'écrit d'une maniére unique

$$m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mathbf{1}_{\{e\}'}\right)$$

où les points x_i sont tous distincts et différents de e.

Alors nous définissons u par

$$u(m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Puisque u est une extension de f donc $f = u \circ i_X$ alors automatiquement $\|u\| \geq \mathrm{Lip}(f)$.

Pour le reste, il suffira de montrer que $\|u\| \leq$Lip(f) (en particulier, cela implique que u est borné, donc il s'étend à l'ensemble des Æ(X)).
On définit une semi-norme $\|.\|_0$ sur l'espace des molécules par

$$\|m\|_0 = \frac{\|u(m)\|}{\text{Lip}(f)}.$$

Alors $\forall x, y \in X$ on a

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}}\right\|_0 &= \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\text{Lip}(f)} \\ &\leq d_X(x, y). \end{aligned}$$

Alors d'aprés Corollaire (3.9 (3)) implique que $\|.\|_0 \leq \|.\|_{Æ}$.Ainsi $\|u(m)\| \leq$Lip$(f)\, \|m\|_{Æ}$ ce implique que $\|u\| \leq$Lip(f). $\square$

Chapitre 4

Adjoint d'opérateurs

Ce chapitre contient trois parties. La première concerne un rappel sur l'adjoint d'opérateurs linéaires bornés et ainsi que quelques propriétés fondamentales. Pour d'amples informations, consulter [Est04] et aussi [Gal08]. Dans la deuxième partie, nous étudions quelques définitions et propriétés qui concernent les opérateurs linéaires compacts, et nous terminerons ce chapitre par la troisième partie qui comporte l'adjoint d'opérateurs lipschitiziens.

4.1 Adjoint d'opérateurs linéaires bornés

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Nous allons maintenant expliquer l'adjoint d'opérateur linéaire borné entre Y^* et X^*.

Supposons que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un opérateur linéaire borné. Pour chaque $y^* \in Y^*$ on définit un opérateur linéaire $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ par

$$y^*\left(T(x)\right) = T^* y^*\left(x\right),$$

ou en utilisant la notation suivant

$$\langle T(x), y^* \rangle = \langle x, T^*(y^*) \rangle \quad \forall x \in X, y^* \in Y^*. \tag{4.1}$$

Définition 4.1. L'équation (4.1) est définie l'opérateur l'adjoint $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ associée à un opérateur linéaire borné $T : X \longrightarrow Y$.

Exemple 4.2. Soit $X = L_2([a, b])(a < b)$ l'espace des classes de fonctions $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de carré sommable et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue fixée. L'application T qui à la fonction $x \in L_2([a, b])$ fait correspondre la fonction T_x définie sur $[a, b]$ par

$$(T_x)(t) = f(t)x(t)$$

est un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, X)$ appelé opérateur de multiplication par f. L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(X, X)$ est alors l'opérateur de multiplication par la fonction f.

Théorème 4.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ alors T linéaire et $\|T\| = \|T^*\|$.*

Preuve

La linéarité est facile. Il est aussi borné puisque

$$\begin{aligned} |y^*(T(x))| &\leq \|y^*\|_{Y^*} \|T(x)\|_Y \\ &\leq \|y^*\|_{Y^*} \|T\| \|x\|_X, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \|T^* y^*\|_{X^*} &= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|T^* y^*(x)|}{\|x\|} \\ &\leq \|y^*\|_{Y^*} \|T\|, \end{aligned}$$

ce qui implique que $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$. Pour montrer l'inégalité inverse, nous prouvons que

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T^*\| \, \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

L'opérateur l'adjoint implique que

$$\begin{aligned} |y^*(T(x))| &\leq \|T^* y^*\|_{X^*} \|x\|_X \\ &\leq \|y^*\|_{Y^*} \|T^*\| \, \|x\|_X \,, \end{aligned}$$

et

$$\sup_{y^* \neq 0} \frac{|y^*(T(x))|}{\|y^*\|_{Y^*}} \leq \|T^*\| \, \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Ce qui termine la démonstration. □

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints.

Proposition 4.4 ([Gal08])**.** *Soient X, Y et Z des espaces normés alors*
(a) *Pour tout $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ et tout, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a*

$$(T_1 + \lambda T_2)^* = T^* + \lambda T^*.$$

(b) *Pour tout $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ alors $TS \in \mathcal{L}(X, Z), (TS)^* \in \mathcal{L}(Z^*, X^*)$ et*

$$(TS)^* = S^* T^*.$$

Preuve

(a) Par définition de l'adjoint, pour tous $x \in X, y^* \in Y^*, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ et tout, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$
\begin{aligned}
\langle x, (T_1+\lambda T_2)^*(y^*)\rangle &= \langle (T_1+\lambda T_2)(x), y^*\rangle \\
&= \langle T_1(x), y^*\rangle + \lambda\langle T_2(x), y^*\rangle \\
&= \langle x, T_1^*(y^*)\rangle + \langle x, \lambda T_2^*(y^*)\rangle \\
&= \langle x, (T_1^* + \lambda T_2^*)(y^*)\rangle.
\end{aligned}
$$

(b) Pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in X$ et $z^* \in Z^*$ on a $\langle (TS)^*(z^*), y^*\rangle = \langle S^*T^*(z^*), x\rangle$. Ona, par défintion de l'adjoint,

$$
\begin{aligned}
\langle (TS)^*(z^*), x\rangle &= \langle z^*, (TS)(x)\rangle \\
&= \langle T^*(z^*), S(x)\rangle \\
&= \langle S^*T^*(z^*), x\rangle.
\end{aligned}
$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

4.2 Opérateurs linéaires compacts

Dans cette section nous donnons quelques définitions, propriétés et notations qui concernent les opérateurs linéaires compacts. Pour plus de détails voir [Nad11] et [Chr04].

4.2.1 Définitions et propriétés

Définition 4.5. Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est compact si le sous ensemble $T(B_X)$ est relativement compact (i.e., $\overline{T(B_X)}$ est compact) dans Y. La collection de tous les opérateurs linéaires compacts de X dans Y sera notée $\mathcal{K}(X,Y)$, qui est un Banach pour norme des opérateurs. Si $X = Y$ on écrit simplement $\mathcal{K}(X)$.

Proposition 4.6(*Propriété d'idéal*). *Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Soient G, Z deux autres espaces de Banach et $V \in \mathcal{L}(G,X)$,$W \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Alors*

$$v \circ u \circ w$$

est compact.

On peut caractériser les opérateurs linéaires compacts comme suivant.

Proposition 4.7. *Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

a) *L'opérateur T est compact.*

b) *Pour toute suite bornée $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X, la suite $(u(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans Y.*

4.2.2 Relation avec l'opérateur adjoint

Théorème 4.8(*Schauder*). *Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Alors, nous avons l'équivalence suivante.*

a) *L'opérateur T est dans $\mathcal{K}(X,Y)$.*

b) *L'opérateur adjoint T^* est dans $\mathcal{K}(Y^*,X^*)$.*

Preuve

Si $T^* \in \mathcal{K}(Y^*,X^*)$, on déduit de ce qui précéde $T^{**} \in \mathcal{K}(X^{**},Y^{**})$ c'est-à dire que $T^{**}(B_{X^{**}})$ est relativement compact dans X^{**}. Comme $T(B_X) \subset T^{**}(B_{X^{**}})$ et X est fermé dans X^{**}, on en déduit bien que $T(B_X)$ est relativement compact dans Y.

Réciproquement, Pour démontrer que T^* est compact tel que $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ consulter [Chr04]. $\square$

4.3 Adjoint d'opérateurs lipschitiziens

On définit dans cette section un autre opérateur adjoint qui est appellé adjoint d'opérateur lipschitizien. Commençons par donner quelques définitions et propriétés.

Si X et Y sont des espaces réels normés, Sawashima [Saw75] a défini l'adjoint lipschitzien $T^{\#} : Y^{\#} \longrightarrow X^{\#}$ d'une application lipschitzienne $T \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$ par la formule

$$\begin{array}{rccl} T^{\#} : & Y^{\#} & \longrightarrow & X^{\#} \\ & g & \longmapsto & T^{\#}g = g \circ T \text{ (i.e., } \langle T(x), g\rangle = \langle x, T^{\#}(g)\rangle \text{).} \end{array}$$

Théorème 4.9. *Soit* $T \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$ *alors* T *linéaire* $\left\|T^{\#}\right\| = \mathrm{Lip}(T) = \left\|T^{\#}/Y^{*}\right\|.$

Lemme 4.10. *Si* X *est un espace de Banach alors il existe une projection* P *de* $X^{\#}$ *dans* X^{*} *(voir [Kal08] et [BL00] pour plus de détails).*

Preuve de théorème (4.9)

La linéarité est facile. Par conséquent (Proposition (2.18) et Définition (1.1)), on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Lip}(T^{\#}g) &= \mathrm{Lip}(g \circ T) \\ &\leq \mathrm{Lip}(T)\mathrm{Lip}(g) \end{aligned}$$

ce qui implique que $T^{\#} \in \mathcal{L}(Y^{\#}, X^{\#})$ *et* $\left\|T^{\#}\right\| \leq \mathrm{Lip}(T)$. Pour montrer l'inégalité inverse, fixons deux points distinctes x, $y \in X$. Soit

$$g = \widetilde{d}_{T(y)} : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'application définie dans la Proposition (2.15). Alors $\text{Lip}(g) = 1$ et

$$\begin{aligned}
\left\|T^{\#}\right\| &\geq \text{Lip}\left(T^{\#}g\right) \\
&\geq \frac{\left|\left(T^{\#}g\right)(x) - \left(T^{\#}g\right)(y)\right|}{d(x,y)} \\
&\geq \frac{|g \circ T(x) - g \circ T(y)|}{d(x,y)} \\
&\geq \frac{d\left(g(x), g(y)\right)}{d(x,y)}.
\end{aligned}$$

En prenant le supremum sur x et y, on aura $\left\|T^{\#}\right\| \geq \text{Lip}(T)$.

Pour montrer la seconde égalité on a besoin du lemme (4.10).

on a

$$\begin{tikzcd}
Y^* \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "id"'] & Y^{\#} \arrow[r, "T^{\#}"] \arrow[d, "P"] & X^{\#} \\
& Y^* &
\end{tikzcd}$$

alors,

$$\begin{aligned}
\left\|T^{\#}/Y^*\right\| &= \left\|T^{\#} \circ i\right\| \\
&= \sup_{\|y^*\|=1} \left\|T^{\#} \circ i\left(y^*\right)\right\|_{X^{\#}} \\
&= \sup_{\|y^*\|=1} \sup_{x \neq y} \frac{\left|iy^*\left(T\left(x\right)\right) - iy^*\left(T\left(y\right)\right)\right|}{\left|T(x) - T\left(y\right)\right|} \frac{\left|T(x) - T\left(y\right)\right|}{\|x-y\|} \\
&= \text{Lip}(T)\text{Lip}(iy^*) \\
&= \text{Lip}(T).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

L'adjoint lipschitzien a aussi certaines propriétés qui sont vérifable.

Théorème 4.11. *Soient X, Y et Z des espaces de Banach alors*

(a) *Pour tout* $T_1, T_2 \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$ *et tout,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a*

$$(T_1 + \lambda T_2)^{\#} = T^{\#} + \lambda T^{\#}.$$

(b) *Pour tout* $S \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$ *et* $T \in \mathrm{Lip}_0(Y,Z)$ *alors* $TS \in \mathrm{Lip}_0(X,Z), (TS)^{\#} \in \mathrm{Lip}_0(Z^{\#}, X^{\#})$ *et*

$$(TS)^{\#} = S^{\#}T^{\#}.$$

Preuve

(a) Par définition de l'adjoint, pour tous $x \in X, g \in Y^{\#}, T_1, T_2 \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$ et tout, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\langle x, (T_1 + \lambda T_2)^{\#}(g)\rangle &= \langle (T_1 + \lambda T_2)(x), g\rangle \\
&= \langle T_1(x), g\rangle + \lambda \langle T_2(x), g\rangle \\
&= \langle x, T_1^{\#}(g)\rangle + \langle x, \lambda T_2^{\#}(g)\rangle \\
&= \langle x, (T_1^{\#} + \lambda T_2^{\#})(g)\rangle.
\end{aligned}$$

(b) Pour vérifier que $(TS)^{\#} = S^{\#}T^{\#}$, il suffit de montrer que pour tous $x \in X$ et $h \in Z^{\#}$ on a $\langle (TS)^{\#}(h), x\rangle = \langle S^{\#}T^{\#}(h), x\rangle$. Ona, par défintion de l'adjoint,

$$\begin{aligned}
\langle (TS)^{\#}(h), x\rangle &= \langle h, (TS)(x)\rangle \\
&= \langle T^{\#}(h), S(x)\rangle \\
&= \langle S^{\#}T^{\#}(h), x\rangle.
\end{aligned}$$

d'où la preuve. $\square$

Proposition 4.12. *Soient X, Y sont des espaces réels normés, et $T : X \longrightarrow Y$ est un opérateur lipschitzien telle que $T(0) = 0$ alors*

1) *$T^{\#}$ est surjectif si, et seulement si $T : X \longrightarrow T(X)$ est une quasi-isométrique*

2) *$T^{\#}$ est injectif si, et seulement si $T(X)$ est dense dans Y*

3) *$T^{\#}$ est un isomorphisme de $Lip_0(Y)$ et $Lip_0(X)$ si, et seulement si T est un quasi-isométrique de X dans Y.*

Preuve

1) Supposons que $T^{\#}$ est surjective. Par le théorème de l'application ouverte, il existe $C > 0$ l'ensemble $T^{\#}(B_{Y^{\#}}(0, C))$ contient $B_{X^{\#}}$. Ainsi, pour toute $y \in X$ il existe $g \in Y^{\#}$ avec $\mathrm{Lip}(g) \leq C$ telle que $T^{\#}g = \widetilde{dy}$ (Proposition (2.15))alors

$$d_X(x, y) = \left|\widetilde{dy}(x) - \widetilde{dy}(y)\right| = |g(T(x)) - g(T(y))| \leq C d_Y(T(x), T(y))$$

pour tous $x \in X$. Puisque T est une application lipschitzienne par la Remarque (2.12), ce qui montre qu'il est quasi-isométrique.

Réciproquement, supposons T est une quasi-isométrie sur $T(X)$, alors Composition avec T^{-1} prend $\mathrm{Lip}_0(X)$ en $\mathrm{Lip}_0(T(X))$. Fixer $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ et soit $h_0 = f \circ T^{-1} \in \mathrm{Lip}_0(T(X))$. Par le Théorème (2.19) nous pouvons étendre h_0 à $h \in \mathrm{Lip}_0(Y)$. $T^{\#}h = f$, alors $T^{\#}$ est surjectif.

2) Voir [Wea99].

3) Il résulte de (1) et (2) ainsi que le théorème de l'application ouverte que $T^{\#}$ est un isomorphisme surjectif si et seulement si T est un quasi-isométrie de Y sur un sous-ensemble dense de X alors T est une quasi-isométrique de X dans Y. □

Lemme 4.13. *Soient X et Y des espaces de Banach , supposons $T : X \longrightarrow Y$ est une application lipschitzienne telle que $T(0) = 0$. Il existe une unique application linéaire $\widehat{T}$:Æ$(X) \longrightarrow$Æ(Y) telle que $\widehat{T} i_X = T i_Y$, i.e., diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} Æ(X) & \overset{\widehat{T}}{\longrightarrow} & Æ(Y) \\ i_X \uparrow & & \uparrow i_Y \\ X & \overset{T}{\longrightarrow} & Y \end{array}$$

et $\left\|\widehat{T}\right\| = \mathrm{Lip}(T)$.

Preuve

La application linéaire $T^{\#} : Y^{\#} \longrightarrow X^{\#}$ définie par $T^{\#}g = g \circ T$ est continu, donc il existe une application linéaire $\widehat{T}$ entre les préduals telle que $\widehat{T}^{*} = T^{\#}$. Il est clair que $\left\|T^{\#}\right\| = \mathrm{Lip}(T)$, et $\left\|\widehat{T}\right\| = \left\|\widehat{T}^{*}\right\| = \mathrm{Lip}(T)$. $\square$

le lemme suivant permet de considérer $Æ(X)$ est un sous-espace de $Æ(Y)$ à chaque fois X est un sous-espace de Y.

Lemme 4.14. *Si X est un sous-espace de Y et $i : X \to Y$ est l'injection canonique donc $\widehat{i} : Æ(X) \to Æ(Y)$ est l'injection isométrique.*

Preuve

Supposons m est une molécule sur X. On choisit $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$ avec

$$\|m\|_{Æ} = \sup_{f \in B_{X^{\#}}} |\langle m, f\rangle| ,$$

donc f présente un prolongement de $g \in \mathrm{Lip}_0(Y)$ avec $\mathrm{Lip}(g) = 1$. Il s'ensuit que $\left\|\widehat{i}m\right\|_{Æ(Y)} = \|m\|_{Æ(X)}$. $\square$

Théorème 4.15([Cob03]**).** *Soient $T \in Lip_0(X, Y)$, $\Phi = i_Y \circ u$ et $u : Æ(X) \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire continu tel que $u \circ i_x = T$. Alors, on a $T^{\#} = S_1 \circ \Phi(T)^{*} \circ R_2$ ou, de façon équivalente $\Phi(T)^{*} = R_1 \circ T^{\#} \circ S_2$ i.e., les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc} Æ(Y)^* & \overset{\Phi(T)^*}{\longrightarrow} & Æ(X)^* \\ R_2 \uparrow & & S_1 \downarrow \\ \mathrm{Lip}_0(Y) & \overset{T^\#}{\longrightarrow} & \mathrm{Lip}_0(X) \end{array}.$$

Ou

$$\begin{array}{ccc} Æ(Y)^* & \overset{\Phi(T)^*}{\longrightarrow} & Æ(X)^* \\ S_2 \downarrow & & R_1 \uparrow \\ \mathrm{Lip}_0(Y) & \overset{T^\#}{\longrightarrow} & \mathrm{Lip}_0(X) \end{array}.$$

Preuve

D'après les définitions des opérateurs R et S dans le Théorème (3.8), on a

$$\begin{aligned} (S_1\varphi)(x) &= \varphi\left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{0\}}\right), \ \varphi \in Æ(X)^* \\ ((R_2 g)(m)) &= \sum_y m(y)g(y), \ g \in \mathrm{Lip}_0(Y), \ m \in Æ(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{0\}}\right) &= i_Y\left(u\left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{0\}}\right)\right) \\ &= i_Y(T(x)) \\ &= \mathbf{1}_{\{T(x)\}} - \mathbf{1}_{\{0\}} \text{ (Remarque (3.11))} \end{aligned}$$

et on pose $F = S_1 \circ \Phi(T)^* \circ R_2$, donc par la Définition(4.1) $u^*(\Psi) = \Psi \circ u$, $\Psi \in Æ(Y)^*$, et

$$\begin{aligned}(Fg)(x) &= \left(S_1 \circ \Phi(T)^* \circ R_2\right)(g)(x) \\ &= S_1\left(u^*\left(R_2 g\right)\right)(x) \\ &= S_1\left(\left(R_2 g\right) \circ u\right)(x) \\ &= \left(\left(R_2 g\right) \circ u\right)\left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{0\}}\right) \\ &= \left(R_2 g\right)\left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{0\}}\right),\end{aligned}$$

on a donc

$$\left(R_2 g\right)\left(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{0\}}\right) = g(T(x)) = (g \circ T)(x) = T^{\#}(g)(x).$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

Yamamuro [Yam68] a défini un autre type d'adjoint d'une application Fréchet-différentielle et prouvé quelques théorèmes de type Schauder pour de tels adjoints. Yamamuro a défini l'adjoint d'une application Fréchet-différentielle comme suit.

Soit f une application différentiable d'un espace de Hilbert X dans lui-même alors il existe $g : X \longrightarrow X$ application différentiable telle que pour toute $x \in X$ on a

$$g'(x) = \left(f'(x)\right)^*$$

où $\left(f'(x)\right)^*$ l'adjoint d'un opérateur linéaire borné $f'(x)$ sur X.
Ou en utilisant la notation suivant

$$\langle g'(x)(y), z\rangle = \langle y, f'(x)(z)\rangle,$$

pour tout x, y et z dans X.

Conclusion

On termine ce mémoire, par poser quelques questions relatives à ce travail.

Une étude approfondie de la compacité pour l'opérateur non linéaire et son adjoint est faite par [Bat70] et [Cob01], mais ces résultats ne couvrent pas les opérateurs lipschitziens. Dans le cadre de théorème de Schauder nous obtenons les problèmes suivants.

Problème 1.

Quelles conditions sur un opérateur lipshitzien $T \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$ nécessitent la compacité de l'opérateur associé $\Phi(T) : \text{Æ}(X) \longrightarrow \text{Æ}(Y)$?

Problème 2.

Si $T \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$ est compact, est ce que $T^{\#}$ est compact ?

Bibliographie

[AE56] R. F. Arens and J. Eels. *On embedding uniform and topological space,* Pactific J.Math **6** (1956), 397-403.

[Bat70] J. Batt. *Nonlinear compact mappings and their adjoints*, Math. Ann. **189** (1970), 5-25.

[Ber04] C. Berger. *Topologie pour la Licence,* Universit´e de Nice-Sophia Antipolis, Laboratoire J.-A. Dieudonné, 06108 Nice Cedex.

[BL00] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss. *Geometric nonlinear functional analysis*, vol. 1, Amer. Mathe. Soc. Collo, Publ., Vol. 48, Amer. Math. Soc.,Providence, RI, 2000.

[Bre87] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[Cal08] G. Carlier. *Analyse fonctionnelle*, ENS, 2008.

[Chr04] S. Christian. *Analyse fonctionnelle,* université d'AIX-Marseillei I

[Cob03] S. Cobzas. *Adjoints of Lischitz mappings,* Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, (2003), 49-54.

[Cob01] S. Cobzas, *Compactness in spaces of Lipschitz functions*, Rev. Anal. Numér. Théor.Approx., **30**(2001), 9-14.

[Dri03] B. K. Driver. *Analysis Tools with Applications*, Springer Berlin Heidelberg New York Hong Kong London Milan Paris Tokyo(2003).

[Est04] D. J. Estep. *A Short Course on Duality, Adjoint Operators, Green's Functions,and A Posteriori Error Analysis,* Department of Mathematics Colorado State UniversityFort Collins, CO 80523 (2004) .

[Gal08] M. L. Gallardo. *Notes du cours sur les espaces de Hilbert,* Université de Tours, (2008).

[GK03] N. J. Kalton and G. Godefory, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math. **69**, (2003) , 121-141.

[Kal04] N. J. Kalton. *Spaces of Lipschitz and Hōlder functions and their applications*, Collect. Math. **55** (2004), no. 2, 171-217.

[Kal08] N. J. Kalton. The Nonlinear Geometry of Banach Spaces. Rev. Mat.Complut. **21** (2008), 7-60.

[LB03] U. Luxburg and O. Bousquet. *Distance-Based Classification with Lipschitz functions.* (2003).

[Lee61] K. de Leeuw. *Banach space of Lipschitz functions,* Studia Math. **21** (1961), 55-66.

[Mez12] L. Mezrag. *Linear and nonlinear geometry of spaces.* Cours de master 2012.

[Nac49] L. Nachbin. *On the Hahn-Banach theorem,* An. Acad. Bras. cienc. **21,** (1949), 151-154.

[Nad11] N. Nadjat. *Factorisation d'opérateurs multilinéaires faiblement compacts.* thése 2011.

[Saw75] I. Sawashima. *Methods of Lipschitz duals*, in Lecture Notes Ec. Math. Syst.,Vol. 419, Springer Verlag 1975, pp. 247-259.

[SV06] S. Shirali and H. L. Vasudeva. *Metric spaces*, Springer-Verlag London Limited (2006).

[Wea99] N. Weaver. *Lipschitz Algebras,* World Scientific, Singrapore 1999.

[Yam68] S. Yamamuro. *The adjoint of differentiable mappings,* J. Austral. Math. Soc. **8**, (1968),397-409.