UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M’SILA

Faculté des Mathématiques et de l’Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par

DEBABE NADIA

Sujet

Quelques Caractérisations des polynômes m-homogènes faiblement compacts

Devant le jury :

Mr. **M. BELAALA**	M. C. B. Univ de M'sila	Président
Mr. **A. BELAADA**	M. C. B. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. **N. DECHOUCHA**	M. A. A. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Je remercie avant tous **ALLAH** qui nous guident pour terminer ce travail humble.

Je tiens à remercier mon Directeur de ce mémoire, **Abdelaziz BELAADA** pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et dirigé tout le long de mon travail, ses critiques, ses encouragements et ses conseils m'ont été précieux.

puis je remercie beaucoup les parents, la famille et tous tous mes amis.

Je remercie ceux qui m'ont aidé et dirigé les professeurs et les étudiants : Dr. Abdellatif Bettayeb, Mr. Khalil saadi, ahlem, ramzi, idriss...

J'exprime aussi mes remerciements aux honorables membres du jury de soutenance: Belaala Maatougi, Dechoucha Nourddine.

Également, un remerciement à tous mes collègues de promotion 2019 pour les bons moments qui nous avons passé ensemble.

الاهداء

بسم الله الرحمان الرحيم والصلاة والسلام على رسول الله

الى قرة عيني و من كان دعائها سر نجاحي **امي الغالية**

الى حبيب القلب وبر الامان الذي غادر الحياة **ابي الغالي**

اللهم ارحمهما كما ربياني صغيرة

الى سندي وحصني المتين اخوتي : **محمد, لعيد, فواز, سيف الدين**

الى بهجتي ورفيقتي الغالية اختي :**سعدية**

الى **زوجات اخواني**

واولادهم من كبيرهم **سليم** الى صغيرهم **خليل**

الى كل صديقاتي

الى كل اساتذة وطلبة جامعة محمد بوضياف ... خصوصا طلبة واساتذة كلية الرياضيات

اهدي لهم ثمرة جهدي

Table des matières

Notations

J_X	**Application canonique.**
$\sigma(X, X^*)$	**La topologie faible.**
$\sigma(X^*, X)$	**La topologie $*$-faible.**
X^*	**Le dual topologique de X.**
$L(X;Y)$	**Ensemble des application linéaires.**
$\mathcal{W}(X;Y)$	**Espace d'opérateurs linéaires faiblement compacts.**
B_X	**Boule unité fermée de l'espace X.**
$\mathcal{B}(X;Y)$	**Espace d'opérateurs linéaires bornes.**
$\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$	**Espace d'opérateurs m-linéaires.**
$\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m\right)$	**Espace des formes m-linéaires bornés.**
$\mathcal{K}(X_1, ..., X_m; Y)$	**Espace de tous les opérateurs multilinéaires compacts.**
$\mathcal{L}_s\ \left({}^m X; Y\right)$	**Espace d'opérateurs m-linéaires bornés symétriques.**
$\mathcal{M}$	**Idéal d'opérateurs multilinéaires.**
$\widetilde{T}$	**Linéarisation de l'opérateur m-linéaires$T$.**
$\mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$	**Espace des polynômes homogènes de degré m.**
$\mathcal{W}$	**Idéal d'opérateurs linéaires faiblement compacts.**
$\widehat{P}$	**Opérateur multilinéaire symétrique.**
$X_1 \otimes ... \otimes X_m$	**Produit tensoriel algébrique de $X_1, ..., X_m$.**
$X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$	**Le produit tensoriel projectif.**
$\widetilde{P}$	**Linéarisation de polynôme P.**
P^*	**Opérateur adjoint de P.**
$\mathcal{P}_{\mathcal{W}}\left({}^m X; Y\right)$	**Espace de tous les polynômes m-homogènes.**
$\mathcal{L}\left(\mathcal{W}\right)\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$	**Espace de Banach d'opérateurs multilinéaire.**
$\mathcal{W} \circ \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$	**Classe d'opérateurs multilinéaires de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$.**
$\mathcal{W} \circ \mathcal{P}\left({}^m X, Y\right)$	**Espace des polynômes homogènes de degré m de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$**

Introduction

Le travail de ce mémoire de Master, s'inscrit dans le cadre de la théorie d'opérateurs non linéaires. Son but essentiel est d'étudier les polynômes m-homogènes engendrés par les opérateurs faiblement compacts et de donner quelques caractérisations de cette classe en utilisant la méthode de composition de Pietsch. La naissance de la théorie des idéaux multilinéaires était en 1983 par le mathématicien **A. Pietsch**, il a proposé des méthodes permettant d'obtenir des idéaux multilinéaires à partir d'un idéal linéaire, à savoir les méthodes de compositions et de factorisations, certaines classes d'opérateurs multilinéaires peuvent être interprétées par ces méthodes, les opérateurs faiblement compacts et compacts. On note que tout polynôme de dégré m admet un multilinéaire symétrique tel que:

$$P(x) = \widehat{P}(\underbrace{x, ..., x}_{m}).$$

Depuis cette date, beaucoup de chercheurs sont intéressés par ce domaine et les idées de Pietsch ont été généralisées aux polynômes homogénes. Un idéal des polynômes homogénes $\mathcal{Q}$ est une sous ensemble de tous les polynômes homogénes continus tels que pour tous X et Y des espaces de Banach on a : $\mathcal{Q}(^m X; Y)$ est un sous espace linéaire de $\mathcal{P}(^m X; Y)$ qui contient les polynômes m-homogénes de rang fini. Dans le cas multilinéaire: on factorise les opérateurs multilinéaires en deux classe auteur d'un seul espace de Banach réflexif, les deux classes de ces opérateurs sera notées $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ et $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$. Dans les polynômes homogénes de dégré m, on introduit deux classes de factorisation qui seront notées $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ et $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$. On dit que P est de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ s'il exist un espace de Banach G, un opérateur linéaire

$u \in \mathcal{W}(G, Y)$ et un polynôme $Q \in \mathcal{P}(^m X\ ; G)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{P}{\rightarrow} & Y \\ & \searrow Q & \uparrow u \\ & & G \end{array}$$

Aussi Y est réflexif si, et seulement si pour tout espace de Banach X et tout polynôme homogéne de degré m, $P : X \longrightarrow Y$, on a $P = u \circ Q$ avec u est faiblement compact et $Q \in \mathcal{P}(^m X\ ; G)$ est un polynôme.

Ce travail est divisé en trois chapitres :

Dans le chapitre 1, nous présentons tout d'abord quelques rappels et définitions essentielles, ainsi que qeulques propriétés. Ensuite, nous définissons les idéaux des polynômes homogènes multilinéaires. A la fin de ce chapitre, nous étudions quelques définitions relatives à un idéal des polynômes homogénes de dégré m.

L'object du chapitre 2, on étudie les polynômes homogènes faiblement compacts. on commence par l'idéal des polynômes. On donnera quelques propriétés élémentaires et le théoréme de caractérisation de cette classe, on discute les classes d'idéaux d'opérateurs multilinéaires et leurs méthodes de constructions introduites par Pietsch. aussi on définit la classe d'opérateurs multilinéaires de type $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ et des polynômes m-homogènes de type $\mathcal{P}(\mathcal{W})$. En second lieu, on introduira la classe d'opérateurs multilinéaires de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$.

Dans le troisiéme chapitre et en premier lieu, on commence par la défintion de l'espace des polynômes m-homogènes de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ et leurs propriétés. En second, on introduira le résultat suivant:
un polynôme homogène de degré m est faiblement compact si, et seulement si s'il se factorise par un espace réflexif, i.e. il existe un espace de Banach G réflexif et $u \in \mathcal{B}(G; Y)$ et un polynôme $Q \in \mathcal{P}(^m X\ ; G)$ tels que

$$P = u \circ Q.$$

En d'autre termes

$$\mathcal{P}_w(^m X; Y) = \mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^m X; Y).$$

Enfn, on terminera ce chapitre on présentant quelques caractérisations des polynômes m-homogénes de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$, en utilisant le produit tensoriel projectife et de leurs propriétés.

Chapitre 1

Préliminaires

Tout d'abord, on va rappeler quelques résultats de base á propos les espaces de Banach et l'ensenble compact et faiblement compact ainsi que certains théorémes dans les espaces de Banach. Ensuite, On introduit sur les classes des opérateurs linéaires et multilinéaires quelques notions qu'on a besoin. Ce chapitre s'inspire de nombreuses références **[10], [6], [15],** [3], [5].

1.1 Notions générales

Définition 1.1.1 (Espace séparé) *On dit que X est un espace topologie séparé si pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il exist $V \in \mathcal{V}(x)$,$W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.*

Ensenble compact [**10**] Soit X un espace topologique séparé et un sous ensemble A est dit compact si tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un sous recouvrement fini. Cela veut dire que, $A \subset X$ est compact si pour tout famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ telle que $A \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i$ il exist une partie fini J de I telle que $A \subset \underset{i\in J}{\cup} O_i$.

Proposition 1.1.1 *Soient X un espace de Banach, A un sous ensemble de X.*
(1) *Un sous ensemble A est compact si seulement si pour toute suite de A on peut extraire une sous suite convergente.*
(2) *Un sous ensemble A est relativement compact dans X si l'adérence $\overline{A}$ est compact*$\blacksquare$.

Proposition 1.1.2 1. *Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.*

2. *Toute rénion de parties compacts est une partie copmacte.*

3. *Toute intersection de parties compactes est une partie copmacte fini.*

Ensenble faiblement compact. Soient X un espace de Banach et $A \subset X$. On munit pour la topologie faible de X. Alors, l'ensemble A est dit faiblement compact s'il est compact pour la topologie faible de X.
De plus, A est relativement faiblement compact si son adérence $\overline{A}$ faiblement compact.

Corollaire 1.1.1 *La boule unité de X est faiblement compacts si X est réflexif.*

Définition 1.1.2 (Espace réfléxif) *[6] Soit X un espace de Banach est dit réflexif si l'application canonique $J_X : X \to X^{**}$, est bijective.*
Autrement dit, X s'identifié isométriquement à X^{**}. X est réflexif lorsque toute forme linéaire continue x^{**} sur le dual X provient d'un vecteur x de X de la façon expliquée précédement

$$\forall x^* \in X^* : x^{**}(x^*) = x^*.$$

Le théoreme suivant montre que cette propriété caractérise les espaces réflexif.

Théorème 1.1.1 *Soit X un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de X est faiblement compact si et seulement si X est réflexif.*

Corollaire 1.1.2 *Si X est réflexif, les convexes fermés bornés de X sont faiblement compacts.*

Définition 1.1.3 (Espace de Banach) *Soit X un espace vectoriel normé, est dit de Banach (complet), si tout suite de Couchy de X est convergente dans X. De plus tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach, tout sous espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.*

Exemple 1.1.1 *l'espace l_∞ est un espace de Banach.*

1.2 La topologie faible et $*-$faible

On s'intéresse essentiellement dans ce paragraphe aux topologies faible et $*-$faible dans les espaces normés.

Topologie faible [6] Soit X un espace de Banach, on note X^* l'espace dual ($X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{k})$, où $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

La topologie faible, noté $\sigma(X, X^*)$, sur un espace de Banach X est la plus petite topologie sur X rendent continue tous les élement $x^* \in X^*$.

Théorème 1.2.1 *Les sous espaces vectoriels fermés de X sont les mêmes pour les deux topologies (forte et faible). Il en est même plus généralement des partie fermées convexes.*

Définition 1.2.1 (Suite faiblement convergente) *Une suite $(x_n)_{x\in\mathbb{N}} \subset X$ est faiblement convergente vers un vecteur x si*

$$\langle x^*, x_n\rangle \xrightarrow{n} \langle x^*, x\rangle \text{ , pourtout } x^* \in X^*.$$

Bien entendu, dans un espace de Banach, la convergente forte (en norme) implique la convergente faible, car on a toujours

$$|\langle x^*, x_n\rangle - \langle x^*, x_n\rangle| \leq \|x^*\|\|x_n - x\|.$$

La réciproque n'est pas vraie en général.

Théorème 1.2.2 *Si X est réflexif, toute suite bornée dans X admet une sous suite faiblement convergente.*

Topologie $*$- faible [6] La topologie $*$-faible, notée $\sigma(X^*, X)$ sur un espace de Banach X est la moins finie rendent continue les element $x \in X$

$$x : X^* \longrightarrow \mathbb{R} : x^* \mapsto x^*(x); \text{ où } x \in X.$$

Notons que cette topologie est moins fine que la topologie faible de X^*.

Lemme 1.2.1 *Dans un espace de Banach, toute suite faiblement convergente est bornée et toute suite $*$-faiblement convergente dans X^* est bornée.*

Définition 1.2.2 (Prédual) *L'espace de Banach X posséde un prédual s'il existe un prédual s'il existe un espace de Banach G tel que $X = G^*$. Dans le cas des espaces de Banach qui possédent un prédual, on peut définir les trois types de topologies (forte, faible et $*$-faible). L'espace X^*posséde l'espace X comme un prédual.*

Théorème 1.2.3 (1) *L'espace X est réflexif si et seulement si son prédual est X^**
(2) *L'espace X est réflexif si et seulement si la topologie faible et $*$-faible dans X^*sont coïncides.*

Définition 1.2.3 (Dual topologique) *Soit X un espace vectoriel normé. L'espace de Banach des formes linéaires continus sur X est dit le dual topologique de X, on note par X^*. i.e., $X^* = \mathcal{L}(X;Y)$ il muni de la norme des opérateurs*

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x^*; x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x^*; x\rangle| \,,$$

pour $x^* \in X^*$ et $x \in X$ on note $\langle x^*; x\rangle = x^*(x)$.

Exemple 1.2.1 *Soit $1 < p < +\infty$. On a $(L_p)^* = L_{p*}$, avec p^*est le conjugué de p (i.e.,$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).*

Définition 1.2.4 (Bidual d'un espace normée) *Soit X un espace normée. Le dual du dual X^*de X , s'appelle le bidual de X et on note X^{**}. Pour tout x de X notons*

$$J_X(x) : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

la forme linéaire sur X^*définie par

$$\forall x^* \in X^* : J_X(x)(x^*) = x^*(x).$$

Pour tout $x^* \in X^*$, on a

$$|J_X(x)(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\|\|x\|,$$

donc $J_X(x) \in X^{**}$. L'application $J_X \in \mathcal{L}(X; X^{**})$ est isométrique. Elle s'appelle l'isométrie canonique l'application est toujours injective. En général, elle n'est pas surjective.

1.3 Opérateurs linéaires

Définition 1.3.1 *Soit $u : X \longrightarrow Y$ une application et X, Y deud espaces de Banach. Elle est linéaire si*

$$\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} : u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

On note $L(X;Y)$ l'ensemble des application linéaires, on le muni de deux opérations algebriques suivantes

1. $\forall x \in X : (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$.
2. $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{k} : (\lambda u) = \lambda u(x)$, *(* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *)* .

Définition 1.3.2 (Opérateur adjoint) *Soit $u : X \to Y$ une application linéaire. L'opérateur adjoint de u est l'unique opérateur linéaire borné $u^* : Y^* \longrightarrow X^*$définie par*

$$u^*(y^*) : X \longrightarrow \mathbb{R}; x \longrightarrow u^*(y^*)(x) = y^*(u(x)).$$

On note u^*l'adjoint de u, on a $\|u\| = \|u^*\|$.

Définition 1.3.3 (Opérateur linéaire faiblement compact) *Soient X et Y deux espace de Banach. On dira que $u : X \longrightarrow Y$ est faiblement compact si le sous ensemble $u(B_X)$ est relativement faiblement compact (i.e.,$\overline{u(B_X)}$ est faiblement compact de Y). On note $\mathcal{W}(X;Y)$tous les opérateurs linéaires faiblement compacts de X dans Y, qui est un Banach pour norme d'opérateurs. Si $X = Y$ on écrit simplement $\mathcal{W}(X)$*

Proposition 1.3.1 *[5, Proposition 4] Soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire borné. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) L'opérateur u est faiblement compact.

b)Pour tout suite borné $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans X, la suite $(u(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite faiblement convergent dans Y.

c) L'opérateur adjoint $u^* : Y^* \to X^*$ est faiblement compact.

d) L'opérateur u^{**}est à valeurs dans Y, i.e.; $u^{**}(X^{**}) \subseteq Y$.

e) Il exist un espace réflixif G et deux opérateurs $v : X \to G$ et $w : G \to Y$ tel que $u = w \circ v$.

1.4 Opérateur multilinéaires

Commençons cette section par quelques préliminaires nécessaire des définitions avec quelques propriétés des opérateurs multilinéaires.

Définition 1.4.1 (Opérateur multilinéaire) *[3] Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach et $m \in \mathbb{N}$. Une application $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est dit multilinéaire (ou m-linéaire) s'il est linéaire par rapport à chaque composante. Il est borné (continu)s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, ..., x_m) \in X_1 \times ... \times X_m$, on a*

$$\|T(x_1, ..., , x_m)\|_Y \leq C\|x_1\|_{X_1}...\|x_m\|_{X_m}.$$

On note $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateursm-linéaires bornée qui est Banach dont sa norme est la plus petite constante vérifiant l'inégalité précidente. Elle peut s'exprimer aussi par

$$\|T\| = \sup_{\|x_j\| \leq 1, 1 \leq j \leq m} \|T(x_1, ..., , x_m)\|.$$

Si $Y = \mathbb{k}$, on écrit simplement $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; \mathbb{k}) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$.

Exemple 1.4.1

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{k} \times ... \times \mathbb{k} & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ (\ \lambda_1, ..., \lambda_m) & \longrightarrow & \lambda_1 ... \lambda_m \end{array}$$

T est une application multilinéaire.

Opérateur multilinéaire compacts

Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Une application $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est dit compact s'il envoie tout ensemble borné sur un ensemble relativement compact. On note $\mathcal{K}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de tous les opérateurs multilinéaires compacts.

Opérateur multilinéaire faiblement compact.

Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Une application $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est dit faiblement compact s'il envoie tout ensemble borné sur un ensemble relativement faiblement compact. Autrement dit si $T(B_{X_1} \times ... \times B_{X_m})$ est relativement faiblement compact dans Y.

On note $\mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de tous les opérateurs multilinéaires faiblement compacts, c'est un espace de Banach avec la norme des opérateurs.

1.5 Idéaux d'opérateurs multilinéaire

L'idée a été inspirée de l'article de A. Pietsh intitulé "Ideals of multilinear functions"[**13**], le succés de la théorie des idéaux linéaires a une influence considérable sur le développement des idéaux des opérateurs multilinéaires et polynomes homogénes entres espaces de Banach.

Opérateur de rang fini [**15**] Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de rang fini s'il est somme finie d'opérateurs de la forme

$$T_{y \otimes_{j=1}^{m} x_j^*} = x_1^* \otimes ... \otimes x_m^* \otimes y : (x^1, ..., x^m) \longrightarrow x_1^* \left(x^1\right) ... x_m^* \left(x^m\right) y,$$

où $x_j^* \in X_j^* (1 \leq j \leq m)$ et $y \in Y$. L'espace des opérateurs m-linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$.

Idéal des opérateurs multilinéaires [5, Définition 8]Un idéal des opérateurs multilinéaires(ou multi-idéal) $\mathcal{M}$ est une classe d'opérateurs multilinéaires bornés tels que pour tout $X_1, ..., X_m$ et Y des espaces de Banach, les composants $\mathcal{M}(X_1, ..., X_m, Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m, Y) \cap \mathcal{M}$ satisfait:

1. L'ensemble $\mathcal{M}(X_1, ..., X_m, Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m, Y)$ qui contient les opérateurs m-linéaires de rang fnis.

2. Propriété d'idéal : si $T \in \mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y)$, $u_j \in \mathcal{B}\ (E_j; X_j)$ et $v \in \mathcal{B}(Y; F)$, alors $v \circ T \circ (u_1, ..., u_m)$ est dans $\mathcal{M}(E_1, ..., E_m; F)$.

De plus, si $\| \cdot \|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait:

1. $(\mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y), \| \cdot \|_{\mathcal{M}})$ est un espace normé (Banach, quasi-Banach).

2. $\|A^n : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k};\ A^n(x_1, ..., x_m) = x_1 ... x_m\|_{\mathcal{M}} = 1$.

3. Si $T \in \mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y)$, $u_j \in \mathcal{B}(E_j; X_j)$ et $v \in (Y; F)$, alors

$$\|v \circ T \circ (u_1, ..., u_j)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{M}} \prod_{j=1}^{m} \|u_j\|,$$

alors $(\mathcal{M}; \| \cdot \|_{\mathcal{M}})$ s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs m-linéaires.

Exemple 1.5.1

i) L'espace $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m, Y)$ est un idéal multilinéaire normé.

ii) Les opérateurs multilinéaires faiblement compacts $\mathcal{W}(X_1, ..., X_m, Y)$ est un idéal multilinéaire de Banach.

3i) Les opérateurs multilinéaires de rang finis $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$ est un idéal multilinéaire n'est pas de Banach.

A chaque opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ on peut lui associer un opérateur linéaire, appelé linéairisation de T.

Définition 1.5.1 (Opérateur linéairisé) *[3] Si $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ un opérateur multilinéaire. On définit sa linéairisation de T, $\widetilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_m X_m \longrightarrow Y$ défini par*

$$\widetilde{T}(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i^1, ...x_i^m),$$

Cet opérateur linéaire est bien défni, car il ne dépend pas de repésentation choisie (voir[14]). On a aussi, $\widetilde{T}$ est unique et

$$T \text{ est borné } \Leftrightarrow \widetilde{T} \text{ est borné}$$

De plus,

$$\|\widetilde{T}\| = \|T\|.$$

Définition 1.5.2 (Opérateur adjoint) *[3] Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Pour tout opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, on associe l'opérateur adjoint suivant $T^* : Y^* \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$, qui est définie par $y^* \longrightarrow T^*(y^*) : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow \mathbb{R}$, par*

$$T^*(y^*)(x^1, ..., x^m) = y^*(T(x^1, ..., x^m)).$$

Opérateurs diagonaux [15] Les plongements naturels de X dans $\underbrace{X \times ... \times X}_{m}$ et dans $\widehat{\otimes}_\pi^m X$, notés Δ_m et δ_m respectivement, sont défnis par

$$\begin{array}{rccc} \Delta_m : & X & \longrightarrow & X \times ... \times X \\ & x & \longrightarrow & (x, ..., x) \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} \delta_m : & X & \longrightarrow & \widehat{\otimes}_\pi^m X \\ & x & \longrightarrow & x \otimes ... \otimes x \end{array}$$

Il est claire que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \Delta_m \downarrow & \searrow \delta_m & \\ \underbrace{X \times ... \times X}_{m} & \underset{i_m}{\longrightarrow} & \widehat{\otimes}_\pi^m X \end{array}$$

i.e.,

$$i_m \circ \Delta_m = \delta_m,$$

où i_m est l'opérateur multilinéaire canonique, de $X_1 ... X_m$ dans $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ défni par

$$i_m(x^1, ..., x^m) = x^1 \otimes ... \otimes x^m \ .$$

On a aussi le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} X_1 ... X_m & & \\ i_m \downarrow & \searrow T & \\ X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m & \underset{\widetilde{T}}{\longrightarrow} & Y \end{array}$$

i.e.,

$$T = \widetilde{T} \circ i_m. \tag{1.5.1}$$

Maintenant, on présent la défintion des opérateurs multilinéaire symétrique

Définition 1.5.3 (Multilinéaire symétrique) *[15] Soient X, Y deux espaces de Banach. Soit $T : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \longrightarrow Y$ un opérateur multilinéaire continue. On dit que T est symétrique si il est invariant à toutes permutations de ses composantes, i.e.,*

$$T \circ \sigma(x_{1,...,}x_m) = T(x_{\sigma(1)}, ...x_{\sigma(m)}) = T(x_{1,...,}x_m),$$

pour tout permutation σ. On note $\mathcal{L}_s \left({}^m X; Y\right)$ l'espace des opérateurs m-linéaires bornés symétriques.

1.6 Polynome homogéne de degré m

Définition 1.6.1 *[1] Fixon $m \in \mathbb{N}^*$. Soient X, Y deux espaces de Banach. L'application $P : X \longrightarrow Y$ est un polynôme homogène de degré m, s'il existe un opérateur multilinéaire* *symétrique $\widehat{P} \in \mathcal{L}(^m X\ ;\ Y)$ tel que $P(x) = \widehat{P}(x, \overset{m}{\dots}, x)$. On note $\mathcal{P}(^m X; Y)$, l'espace des polynômes homogènes de degré m de X dans Y. On le munit de norme suivante*

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \inf\{C : \|P(x)\| \leq C\|x\|^m, \forall x \in X\}. \end{aligned}$$

Si $Y = \mathbb{k}$, on écrit simplement $\mathcal{P}(^m X)$.

Proposition 1.6.1 *(formule de polarisation). Nous avons pour tout $\widehat{P} \in \mathcal{L}(^m X; Y)$ multi-linéaire symétrique*

$$\widehat{P}(x^1, ..., x^m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \mp 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_{1\dots}\varepsilon_m P(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j x^j),$$

où $\widehat{P}$ est le polynôme associe à P. De plus, P est borné sur la boule unité de X SSi $\widehat{P}$ est borné. Les deux normes vérifient l'inégalité suivante (cf.[12, Théoréme2.2])

$$\|P\| \leq \|\widehat{P}\| \leq \frac{m^m}{m!}\|P\|.$$

Exemple 1.6.1 *L'opérateur $P : X \longrightarrow Y$ défini par*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)^m y_i,$$

où $\varphi_i : X \longrightarrow \mathbb{k}$ est une forme linéaire et $y_i \in Y$ $(1 \leq i \leq n)$ est le polynôme homogène de degré m associé à l'opérateur multilinéaire symétrique

$$T(x^1, ..., x^m) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x^1)...\varphi_i(x^m) y_i.$$

Remarque 1.6.1 *La corresepondance $P \longleftrightarrow \widehat{P}$ établit un isomorphisme entre l'espace de Polynômes homogènes de degré m et l'espace des opérateurs m-linéaires symétriques.*

Définition 1.6.2 (Produit Tensoriel) *[15] Soient $X_1, ..., X_m$ des espace de Banach. On note $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ le produit tensoriel algébrique de $X_1, ..., X_m$. On définit la norme projective par*

$$\|v\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\|x_i^j\|\right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de v de la norme

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m.$$

Le complété de $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ pour cette norme sera noté $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$, qui s'appel le produit tensoriel projectif des espaces $X_1, ..., X_m$. Si $X_1 = ... = X_m = X$, on écrit simplement $\widehat{\otimes}_\pi^m X$

.

Chapitre 2

Polynômes m-homogènes faiblement compacts

En premier lieu, Commençons par définira les polynôme de rang fni, l'idéal des polynômes m-homogénes, le polynôme linéarisé et le polynôme adjoint. Ensuit, on discute les classes d'idéaux polynomials et leurs méthodes de constructions introduites par Pietsch en 1983, on s'intéressera aux classes $\mathcal{P}(\mathcal{W})$, $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ et la définition des polynômes homogènes de degré m faiblement compacts. Enfin en donnant la définition et les propriétés trés important de la classe $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$ des polynômes homogènes faiblement compacts. Pour plus de détails sur polynômes homogènes faiblement compacts voir [5], [11], [3].

2.1 Idéal des polynômes

On commence ce paragraphe par donnée la définition des idéaux des polynômes m-homogènes. De plus l'idéal de polynômes à été étudié par plusieurs chercheurs par exemple l'article de G. Botelho en 2006 intitulé "Ideals of polynomials generated by weakly compact operators"[5].

Définition 2.1.1 (Polynôme de rang fni) *[11] Soit $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ un polynôme homogène de degré m. On dit que P est de rang fni s'il écrit sous la forme*

$$P_{y\otimes x^*} = x^{*m} \otimes y : x \longrightarrow x^*(x)^m y,$$

oú $x^* \in X^*$ et $y \in Y$. On note $\mathcal{P}_f({}^mX;Y)$ l'espace des polynômiales m-homogénes de rang fni.

Définition 2.1.2 *[5] Un idéal des polynômes m-homogénes $\mathcal{Q}$ est une sous ensemble de tout les polynôme homogénes continus entre espaces de Banach tels que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout X et Y deux espaces de Banach, le composants $\mathcal{Q}({}^mX;Y) = \mathcal{P}({}^mX;Y) \cap \mathcal{Q}$ satisfait:*

1. *L'ensemble $\mathcal{Q}({}^mX;Y)$ est un sous espace linéaire de $\mathcal{P}({}^mX;Y)$ qui contient les polynômes m-homogénes de rang finis.*

2. *Propriété d'idéal : Si $P \in \mathcal{Q}({}^mX;Y)$, $u \in \mathcal{B}(E;X)$ et $v \in (Y;F)$, alors $v \circ P \circ (u_1, ..., u_m)$ est dans $\mathcal{Q}({}^mE;F)$.*

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait:

1. $(\mathcal{Q}({}^mX;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ est un espace normé (Banach) pour tout X, Y et $m \in \mathbb{N}$

2. $\|P^n : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}; P^n(x) = x\|_{\mathcal{Q}} = 1$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

3. Si $P \in \mathcal{Q}({}^mX;Y)$, $u \in \mathcal{B}(E;X)$ et $v \in (Y;F)$, alors

$$\|v \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leq \|v\|\|P\|_{\mathcal{Q}}\|u\|^m,$$

alors $(\mathcal{Q}; \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ s'appelle idéal normé (de Banach) des polynômes.

Définition 2.1.3 (Polynôme linéarisé) *[3] Si $P \in \mathcal{P}\ ({}^mX;Y)$, on définit sa linéairisation $\widetilde{P} : \widehat{\otimes}_s^m X \longrightarrow Y$ par*

$$\widetilde{P}(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i),$$

où :

$$\widehat{\otimes}_\pi^m X = \left\{ u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i \ ,\ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in X \right\},$$

où δ_m est l'application multilinéaire canonique de X dans $\widehat{\otimes}_{\pi,s}^m X$ défni par

$$\delta_m(x) = x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x\ .$$

Nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \underset{\longrightarrow}{P} & Y \\ & \searrow \delta_m & \uparrow \widetilde{P} \\ & & \widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X \end{array}$$

En d'autre termes

$$P = \widetilde{P} \circ \delta_m \tag{2.1.1}$$

Définition 2.1.4 (Polynôme adjoint) *Soient X, Y deux espace de Banach et si $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$. L'application $P^* : Y^* \longrightarrow \mathcal{P}(^m X)$ par $P^*(y^*)(x) = y^*(P(x))$, est appelé l'adjoint de P on la note P^*.*

Opérateur multilinéaire canonique.

Considérer l'application multilinéaire canonique

$$\begin{array}{rcl} i_m : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} & \longrightarrow & \underbrace{X \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X}_{m} \\ (x^1, ..., x^m) & \longrightarrow & x^1 \otimes ... \otimes x^m. \end{array}$$

Nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{X \times ... \times X}_{m} & \underset{\longrightarrow}{P} & Y \\ & \searrow i_m & \widetilde{P} \uparrow \\ & & \underbrace{X \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X}_{m} \end{array}$$

$$P = \widetilde{P} \circ i_m \tag{2.1.2}$$

2.2 Polynômes homogènes faiblement compacts

Dans cette section on défnit des polynômes m-homogènes faiblement compacts est une extension naturelle de celle de cas linéaire et multilinéaire. La défnition a été introduite par G. Botelho en 2006 [5].

Polynômes homogènes faiblement compacts. Soient X,Y deux espaces de Banach et $P \in \mathcal{P}(^m X\ ;\ Y)$. Le polynôme P est faiblement compact si $P(B_x)$ est relativement faiblement compact dans Y(i.e., $\overline{P(B_x)}$ est faiblement compact dans Y).
On note $\mathcal{P}_w(^m X\ ;\ Y)$ l'espace de tous les polynômes homogènes de degré m faiblement compacts, c'est un espaces de Banach avec la norme de polynômes .

Proposition 2.2.1 *[5, Proposition 13]Soit $P \in \mathcal{P}\ (^m X\ ;\ Y)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes .*

a) Le Polynôme P est faiblement compact .

b) Pour toute suite bornée $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X , la suite $(P\ (x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ posséde une sous suite faiblement convergente .

c) L'opérateur $\widehat{P}$ est faiblement compact.

d) L'opérateur adjoint P^*est faiblement compact.

e) $P^{**}(\mathcal{P}(^m X)^*) \subset Y$.

2.2.1 Les polynômes faiblement séquentielement continus et approximables

Le sous espace de $\mathcal{L}(^m X;Y)$ engendré par l'application $A\,(x_1,...,x_m) = \varphi_1\,(x_1)\,...\varphi_m\,(x_m)\,b$, où $\varphi_j \in X^*$et b, est noté par $\mathcal{L}_f(^m X;Y)$ les opérateurs m-linéaires de rang fini.
Le sous espace de $\mathcal{P}(^m X;Y)$ engendré par l'application $P\,(x) = \varphi\,(x)^m\,b$, où $\varphi \in X^*$ et $b \in Y$, est noté par $\mathcal{P}_f(^m X;Y)$ dans $\mathcal{P}\ (^m X;Y)$ par $\mathcal{P}_A(^m X;Y)$, et ce sont les approximables polynomiales. Un polynôme $P \in \mathcal{P}\ (^m X;Y)$ est dit séquentiellement faiblement continu, dans des symboles $P \in \mathcal{P}_{wsc}\ (^m X;Y)$, si P envoie des séquences faiblement convergentes sur la norme séquences convergentes. Il est facile de voir que $\mathcal{P}\ (^m X;Y) \subseteq \mathcal{P}_{wsc}\ (^m X;Y)$. (Pour plus de détails voire [5])

Théorème 2.2.1 *Soit $m,\ n \in \mathbb{N},\ m \leq n$. Alors l'espace $\mathcal{P}\ (^m X)$ est isomorphe à un sous espace complémenté de $\mathcal{P}\ (^m X)$.*

2.3 Polynôme de type $\mathcal{P}(\mathcal{W})$

On commence ce paragraphe par rappelant la méthode de factorisation

2.3.1 La méthode de factorisation

Définition 2.3.1 *[15] Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Un m-linéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de type $\mathcal{L}(\mathcal{I})$, et on écrit*

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})\ (X_1, ..., X_m; Y)$, s'il existe des espaces de Banach $G_1, ..., G_m$des opérateurs linéaires $u_j \in \mathcal{I}(X_j; G_j)$, $j = 1...m$, et un opérateur multilinéaire borné $A \in \mathcal{L}(G_1...G_m; Y)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \times ... \times & X_m & \underrightarrow{T} & Y \\ \downarrow u_1 & & \downarrow u_m & A \nearrow & \\ G_1 & \times ... \times & G_m & & \end{array}$$

en d'autres termes $T = A \circ (u_1, ..., u_m)$. Si $\mathcal{I}$ est normé on définit pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = \inf \|A\| \|u_1\|_{\mathcal{I}} ... \|u_m\|_{\mathcal{I}},$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles de $T = A \circ (u_1, ..., u_m)$ avec $u_j \in \mathcal{I}$.

Proposition 2.3.1 *[15] Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Alors,*

1. L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ est un idéal des opérateurs multilinéaires.

2. Si $\mathcal{I}$ est un idéal de Banach, alors $\left(\mathcal{L}(\mathcal{I}); \|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}\right)$ est un idéal quasi Banach des opérateurs multilinéaires.

Notation 2.3.1 *Soient $\mathcal{I}_j$, $1 \leq j \leq m$ des idéaux d'opérateurs linéaires. On note $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)$ l'idéal des opérateurs multilinéaires construit par la méthode de factorisation, i.e., dans la factorisation*

$$T = A \circ (u_1, ..., u_m)$$

on a

$$u_j \in \mathcal{I}_j(X_j; G_j), \quad j = 1, ..., m.$$

Dans cette partie, nous présentons les opérateurs multilinéaires de type $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ et les polynôme homogéne de dégré m de type $\mathcal{P}(\mathcal{W})$.

2.3.2 Multilinéaire de type $\mathcal{L}(\mathcal{W})$

Dans cette section on défnit les opérateurs multilinéaires de type $\mathcal{L}(\mathcal{W})$.

Définition 2.3.2 *Soient $X_1, ..., X_m$des espaces de Banach, Y un espaces de Banach et un opérateur multiliéaire A. On dit que l'opéraeur multilinéaire $T : X \times ... \times X \longrightarrow Y$ est de type $\mathcal{L}(\mathcal{W})$. On note $\mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs multilinéaire, pour tout $i = 1, ..., m$ on suppoera qu'il existe des espaces de Banach K_i, des opérateurs linéaires $u_i \in \mathcal{W}(K_i; Y)$ et $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; K)$ tel que*

$$T = A \circ (u_1, ..., u_m).$$

l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, ..., X_m; Y)$ muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W})} = \inf_{T = A \circ (u_1, ..., u_m)} \|A\| \prod_{i=1}^{m} \|u_i\|_{\mathcal{W}}.$$

2.3.3 Polynôme de type $\mathcal{P}(\mathcal{W})$

Dans cette paragraphe, nous présente polynôme homogéne de dégré m de type $\mathcal{P}(\mathcal{W})$.

Définition 2.3.3 *Soient X, Y des espace des Banach et $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$. On dit que P est de type $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ polynôme homogéne de dégré m s'il existe un espace de Banach G, un opérateur linéaire faiblement compact $u \in \mathcal{W}(X; G)$ et $Q \in \mathcal{P}(^m G; Y)$ tels que*

$$P = Q \circ u. \tag{2.3.1}$$

En d'autre termes le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & Y \\ u \downarrow & \nearrow Q & \\ G & & \end{array}$$

On note $\mathcal{P}(\mathcal{W})(^m X; Y)$ l'espace de Banach des polynôme homogéne de dégré m de type $\mathcal{P}(\mathcal{W})$, muni de la norme

$$\|P\|_{\mathcal{P}(\mathcal{W})} = \inf_{P = Q \circ u} \|Q\| \|u\|_{\mathcal{W}}^m.$$

Proposition 2.3.2 *Soient $P \in \mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$ et son opérateur multilinéaire symétrique $\widehat{P}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *Le polynôme $P \in \mathcal{P}\left(\mathcal{W}\right)\left({}^m X; Y\right)$.*

2. *L'opérateur multilinéaire $\widehat{P} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{W}\right)\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$.*

Proposition 2.3.3 *Soit X un espace de Banach. L'espace X est réflexif si et seulement si, pour tout espace de Banach Y on a*

$$\mathcal{P}\left({}^m X; Y\right) = \mathcal{P}\left(\mathcal{W}\right)\left({}^m X; Y\right).$$

Remarque 2.3.1 *Si X est réflexif, alors $\mathcal{P}\left({}^m X; Y\right) = \mathcal{P}_{\mathcal{W}}\left({}^m X; Y\right)$ pour chaque espace Banach Y.*
Si X est réflexif, alors $\mathcal{P}\left({}^m X; Y\right) = \mathcal{P}\left(\mathcal{W}\right)\left({}^m X; Y\right)$ pour chaque espace Banach X.

Exemple 2.3.1 *L'implication n'est pas toujours vraie, on présente un contre exmple. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, considérons le polynôme m-homogène*

$$P : \ell_2 \longrightarrow \ell_1 : P\left((a_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \left((a_i)\right)_{i=1}^{\infty}, P \in \mathcal{P}\left({}^m \ell_2; \ell_1\right)$$

ℓ_2 est réflexif, mais P n'est pas faiblement compact car $\left(P\left(e_j\right)\right)$ n'a pas de sous suite faiblement convergente, (e_j) est la base canonique de ℓ_p pour plus détails voirs G. Botelho en 2006 [5].

2.4 Opérateur multilinéaire de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$

2.4.1 La méthode de composition

Définition 2.4.1 *[15] Soit $\mathcal{I}$ un idéal linéaire. Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de type $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$, et on écrit $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, s'il existe un espace de Banach G, un opérateur linéaire $u \in \mathcal{I}(G; Y)$ et opérateur multilinéaire borné $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ tels que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} X_1 \times ... \times X_m \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "A"'] & Y \\ & G \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

En d'autres termes $T = u \circ A$. Si $\mathcal{I}$ est normé, on définie pour $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$

$$\|T\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}} = \inf \|u\|_{\mathcal{I}} \|A\|,$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles de $T = u \circ A$ avec $u \in \mathcal{I}$.

Proposition 2.4.1 *[15] Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'opérateurs linéaires. Alors,*

1. *L'espace $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ est un idéal des opérateurs multilinéaires.*
2. *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de Banach, alors il en est de même pour ($\mathcal{I} \circ \mathcal{L}; \|\cdot\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}}$).*

Proposition 2.4.2 *[15] Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Pour $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *L'opérateur $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.*
2. *L'opérateur $\widetilde{T} \in \mathcal{I}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$.*

Preuve. Soit $T = u \circ A$ avec $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ et $u \in \mathcal{I}(G; Y)$ Il est clair que

$$u \circ \widetilde{A} = \widetilde{T} \text{ où } \widetilde{A},$$

$\widetilde{T}$ sont les opérateurs linéarisés de A et T respectivement. Donc, (1) implique (2) par la propriété d'idéal de $\mathcal{I}$. Pour la seconde implication, d'après(1.5.1)

$$T = \widetilde{T} \circ i_m$$

et par (2) on a $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. De plus, pour tout $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ on a

$$\|T\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}} = \|\widetilde{T}\|_{\mathcal{I}}.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 2.4.1 *Cette technique permet de construire les espaces $\mathcal{K}(X_1, ..., X_m; Y)$ et $\mathcal{W}$ $(X_1, ..., X_m; Y)$. En effet, on peut facilement vérifier que : un opérateur multilinéaire T*

est compact (faiblement compact) si, et seulement si, $\widetilde{T}$ est compact (faiblement compact). Dans ce cas, on écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(X_1, ..., X_m; Y) &= \mathcal{I}_{\mathcal{K}} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) \\ \mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y) &= \mathcal{I}_{\mathcal{W}} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)\end{aligned}$$

où $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{W}}$ sont les idéaux d'opérateurs linéaires compacts et faiblement compacts respectivement, i.e., un opérateur multilinéaire T entre espaces de Banach est compact (faiblement compact) si, et seulement si, il peut s'écrire

$$T = u \circ B$$

où B est un opérateur multilinéaire borné et u est un opérateur linéaire compact (faiblement compact).

Remarque 2.4.2 *Si $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$sont deux idéaux de Banach et $\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ alors on a $\mathcal{I}_1(X_j; Y) \subseteq \mathcal{I}_2\ (X_j; Y)$ pour tout $1 \leq j \leq m$. En particulier, si*

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$$

on a $\mathcal{I}(X_j; Y) = \mathcal{L}(X_j; Y)$ pour tout j. La réciproque est en général fausse, pour plus de détails voir [4, lemme 3.4] .

Nous introduisons une définition similaire dans la catégorie des application multilinéaires. Appelée idéal de composition permettant engendré par les idéaux multilinéaires à partir d'un idéal linéaire donné.

2.4.2 Opérateur multilinéaire de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$

L'objectif de ce paragraphe on présente l'espace des opérateurs multilinéaires faiblement compacts de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$.

Définition 2.4.2 *[5] Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espace de Banach. Soit $T : X_1, ..., X_m \longrightarrow Y$ un opérateur multilinéaire borné. On dit que T est de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$ s'il exist un espace de Banach G, un opérateur linéaire borné $u \in \mathcal{W}(G, Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ tel que T s'ecrit*

$$T = u \circ A. \tag{2.4.1}$$

En d'autre termes, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \times ... \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ & A \searrow & & & u \uparrow \\ & & & & G \end{array}$$

On note $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}\ (X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateurs multilinéaires faiblement compacts. On muni de la norme suivante

$$\|T\|_{\mathcal{W}\circ\mathcal{L}} = \inf_{T=u\circ A} \|u\|_{\mathcal{W}} \|A\|$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles de $T = u \circ A$ avec $u \in \mathcal{W}(G; Y)$. On montre que la classe $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$ est coincide avec la classe des opérateurs multilinéaires faiblement compacts. D'aprés (2.4.1) on aura.

$$\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{W}\circ\mathcal{L}}.$$

Théorème 2.4.1 *[5] Soit $T \in \mathcal{L}\ (X_1, ..., X_m; Y)$ un opérateur multilinéaire. les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) Un opérateur multilinéaire T est faiblement compact

ii) L'opérateur T se factorise par un espace réflexif, i.e.il exist G espace de Banach réflexif et $A : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ un opérateur multilinéaire et $u \in \mathcal{B}(G; Y)$ tels que $T = u \circ A$.

En d'autres termes

$$\mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y).$$

Preuve. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* : Supposons que $T \in \mathcal{W}\ (X_1, ..., X_m; Y)$. Alors d'aprés (1.5.1) nous avons $T = \widetilde{T} \circ i_m$, $\widetilde{T}$ est faiblement compact , i.e., il se factorise par un espace réflexif et un espace de Banach G réflexif, deux opérateur linéaire $u \in \mathcal{B}(G; Y)$ et $w \in \mathcal{L}$ $(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; G)$. Nous avons

$$T = \widetilde{T} \circ i_m = v \circ w \circ i_m$$

ce qu'il confirme que $T \in \mathcal{W} \circ \mathcal{L}\ (X_1, ..., X_m; Y)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Soit $T \in \mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, alors se factorise par un espace réfléxif G tel que

$$T = u \circ A,$$

Nous avons dans ce cas

$$\widetilde{T} = u \circ \widetilde{A},$$

,i.e., $\widetilde{T}$ se factorise par un espace réfléxif, finalement $\widetilde{T}$ est faiblement compact, donc T est faiblement compact d'aprés (1.5.1) ■

Chapitre 3

Quelques caractérisations des polynômes m-homogènes faiblement compacts

Dans ce dernier chapitre est consacré à étudier quelques caractérisations des polynômes m-homogènes faiblement compacts. En commence par la défininition des polynômes homogènes de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ et leurs propriétés.

3.1 Polynômes homogènes de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$

Définition 3.1.1 *Soit $P \in \mathcal{P}(^m X\ ; Y)$. On dit que P est de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ s'il exist un espace de Banach G, un opérateur linéaire $u \in \mathcal{W}(G, Y)$ et polynôme $Q \in \mathcal{P}(^m X\ ; G)$ tel que*

$$P = u \circ Q \tag{3.1.1}$$

En d'autres termes, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & Y \\ & \searrow Q & \uparrow u \\ & & G \end{array}$$

On note $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ $(^m X\ ; Y)$ l'espace des polynômes homogènes de degré m de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ $(^m X\ ; Y)$. On muni cette classe de norme suivante

$$\|P\|_{w\circ\rho} = \inf_{P=u\circ Q} \|u\|_w \|Q\|.$$

Lemme 3.1.1 *[3] Soit $P \in \mathcal{P}(^m X\ ; Y)$ et $\widetilde{P}$ sa linéairisation. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *Le polynôme P est faiblement compact .*
2. *L'opérateur linéairisé $\widetilde{P} : \widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X \longrightarrow Y$ est faiblement compact .*

En effet dans le théoréme suivant, on montre comme dans le cas multilinéaire que la classe $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ coincide avec la classe des polynômes faiblement compacts.

Théorème 3.1.1 *Un polynôme homogène de degré m faiblement compact si, et seulement s'il se factorise par un espace réflexif, i.e., il existe un espace de Banach G réflexif et $u \in \mathcal{B}(G; Y)$ et un polynôme $Q \in \mathcal{P}(^m X\ ; G)$ tels que $P = u \circ Q$.*

En d'autre termes

$$\mathcal{P}_w(^m X; Y) = \mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^m X; Y).$$

Preuve. $(\Rightarrow)$ Soit $P \in \mathcal{P}_w\,(^m X; Y)$ de la proposition 2.2.1 nous avons que l'opérateur linéaire

$$P^* : Y^* \longrightarrow \mathcal{P}(^m X),$$

est faiblement compact et que $P^{**}(\mathcal{P}(^m X\ )^*) \subseteq Y$. Alors

$$P^{**} : \mathcal{P}(^m X)^* \longrightarrow Y,$$

est un opérateur faiblement compact, et par la proposition 1.3.1 savoir qu'il existe un espace réflexif G et les opérateurs linéaires $v \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^m X\ )^*; G)$, $u \in \mathcal{L}\,(G; Y)$ tels que

$$P^{**} = uv.$$

Soit $\delta_m : X \longrightarrow \mathcal{P}(^m X\ )^*$. Est le polynôme homogène de dégée m défini par

$$\delta_m(x)(P) = P(x)$$

$\delta_m \in \mathcal{P}(^m X \ , \mathcal{P}(^m X)^*)$. On donne $\varphi \in Y^*$, et $x \in X$

$$P^{**}(\delta_m(x))(\varphi) = \delta_m(x)(P^*(\varphi)(x) = \varphi(P(x))$$

Ce qui montre que $P^{**} \ \delta_m(x) = P(x)$ pour le chaque $x \in X$. Puisque

$$P = P^{**}\delta_m(x) = uv\delta_m.$$

Soient $\varphi = v \ \delta_m$, $P = u\varphi$. Donc $P \in \mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^m X; Y)$.

($\Leftarrow$) Soit $Q(^m X)$ le dual de $\mathcal{P}(^m X \ )$ en ce qui cocerne la topologie ouvert compacte, par Mujica [12, theorem2.4] nous avons que il existe un polynôme $q_m \in \mathcal{P}(^m X \ , Q(^m X \ ))$, tels que pour le chaque Y et chaque $P \in \mathcal{P}(^m X \ ; \ Y)$ il existe opérateur

$$T_p : Q(^m X) \longrightarrow Y,$$

tel que

$$P = T_p q_m$$

D'ailleurs si $P \in \mathcal{P}_w(^m X \ ; \ Y)$ par Mujica [12, proposition 3.4] il suit cela T_p est faiblement compact. La Prposition (2.2.1)[$(a) \Longleftrightarrow (e)$] accomplit la preuve . ∎

Lemme 3.1.2 *Si $\mathcal{W}_1$,$\mathcal{W}_2$ sont des idéaux d'opérateurs faiblement compact et $\mathcal{W}_1 \circ \mathcal{P}(^m X; Y)$ $\subseteq \mathcal{W}_2 \circ \mathcal{P}(^m X; Y)$ alors on a $\mathcal{W}_1(X; Y) \subseteq \mathcal{W}_2(X; Y)$ pour tout $1 \leq j \leq m$.*

En particulier, si $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^m X; Y) = \mathcal{P}(^m X; Y)$ alors $\mathcal{W}_1(X; Y) = \mathcal{L}_2(X; Y)$.

Proposition 3.1.1 *Soient $\mathcal{W}$ un idéal d'opérateurs faiblement compacts et Y espace de Banach. les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) L'opérateur identité $id_Y \in \mathcal{W}\,(Y; Y)$.

b) Pour tout espace de Banach, on a $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}\ (X_1, ..., X_m, Y) = \mathcal{P}\,(X_1, ..., X_m, Y)$.

Preuve. $(a) \Rightarrow (b)$ évident.

$(b) \Rightarrow (a)$ suivent de le lemme 3.1.2. ∎

3.2 Quelques caractérisations des polynômes m-homogènes egendrés par les opérateurs faiblement compacts

Dans cette section, on donne quelques caractérisations des polynômes m-homogènes de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ avec certains résultats.

Proposition 3.2.1 *Soit $P \in \mathcal{P}(^m X\ ;\ Y)$ et $\widehat{P}$ son multilinéaire symétrique. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *Le polynôme P est dans $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^m X\ ;\ Y)$.*
2. *L'opérateur multilinéaire $\widehat{P}$ est dans $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X...X; Y)$.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : Si $P \in \mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^m X\ ;\ Y)$, alors $P = u \circ Q$ avec $u \in \mathcal{W}(G; Y)$ et $Q \in \mathcal{P}(^m X\ ;\ G)$ ses multilinéaire symétrique $\widehat{Q} \in \mathcal{L}(^m X; G)$. Alors

$$\widehat{P} = u \circ \widehat{Q}.$$

par conséquent $\widehat{P} \in \mathcal{W} \circ \mathcal{L}(^m X; Y)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : On suppose que $\widehat{P} \in \mathcal{W} \circ \mathcal{L}(^m X; Y)$, d'aprés (2.4.1) d'où $\widehat{P} = u \circ \widehat{Q}$ avec $u \in \mathcal{W}(G; Y)$ et $\widehat{Q} \in \mathcal{L}(^m X\ ;\ G)$. Donc $Q \in \mathcal{P}(^m X\ ;\ G)$, d'aprés (3.1.1) alors $u \circ Q \in \mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^m X\ ;\ Y)$. En déduit $P = u \circ Q \in \mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^m X\ ;\ Y)$. ■

Théorème 3.2.1 *Soit Y un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *L'espace Y est réflexif.*
2. *Pour tout X espace de Banach, on a*

$$\mathcal{P}(^m X; Y) = \mathcal{P}_w(^m X; Y).$$

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : D'aprés (1), l'opérateur $\widetilde{P}$ est faiblement compact. On conclut par le lemme 3.1.1

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $id_Y : Y \longrightarrow Y$ l'identité de Y. On va montrer que id_Y est faiblement compact. On fixe $y^0 \in B_Y$ et $y_0^* \in B_{Y^*}$ tels que $y_0^*(y^0) = 1$. D'aprés (2), le polynôme

$$P = (y_0^*)^{m-1} id_Y : Y \longrightarrow Y$$

est faiblement compact. Son multilinéaire associé $\widehat{P}$ est donné par

$$\widehat{P}(y^1,...,y^m) = id_Y(y^1)y_0^*(y^2)...y_0^*(y^m).$$

Posons $v : \mathcal{P}(^{m-1}Y \ ; \ Y) \longrightarrow Y$, définie par

$$v(\psi) = \psi\left(y^0\right).$$

Nous avons $id_Y = v \circ \overline{P}$, avec

$$\begin{array}{rccc} \overline{P}: & X & \longrightarrow & \mathcal{P}(^{m-1}X;X) \\ & x & \longmapsto & \overline{P}(x)(y) = \widehat{P}(x,y...,y). \end{array}$$

En effet, soit $y \in Y$

$$\begin{aligned} v \circ \overline{P}(y) &= \overline{P}(y)(y^0) \\ &= \widehat{P}(y,y^0...,y^0) \\ &= id_Y(y)y_0^*(y^0)...y_0^*(y^0) \\ &= y \end{aligned}$$

alors, id_Y est composé de deux opérateurs dont $\overline{P}$ est faiblement compact. Finalement, Y est réflexif. ■

Proposition 3.2.2 *Soient $X_1,...,X_m$ des espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}\ (X_1,...,X_m;Y)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *L'opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{W} \circ \mathcal{L}\ (X_1,...,X_m;Y)$*
2. *L'opérateur linéairisée $\widetilde{T} \in \mathcal{W}(X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m;Y)$*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $T \in \mathcal{W} \circ \mathcal{L}\ (X_1,...,X_m;Y)$ d'aprés (2.4.1)on a $T = u \circ A$ avec $A \in \mathcal{L}\ (X_1,...,X_m;G)$ et $u \in \mathcal{W}(G;Y)$. Pour tout $x_j \in X_j$, $j = 1,...,m$

$$\begin{aligned} u \circ \widetilde{A}(x_1 \otimes ... \otimes x_m) &= u(\widetilde{A}(x_1 \otimes ... \otimes x_m)) \\ &= u(A(x_1,...,x_m)) \\ &= T(x_1,...,x_m) \\ &= \widetilde{T}(x_1 \otimes ... \otimes x_m). \end{aligned}$$

d'où $\widetilde{T} = u \circ \widetilde{A}$ (A rappelez vous que les deux u et u e A sont linéaires). Donc $\widetilde{T} \in \mathcal{W}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$ par la propriété d'idéale.

(2) $\Rightarrow$ (1) On suppose que (2) est vraie. D'après, on ecrit

$$T = \widetilde{T} \circ i_m,$$

puisque $\widetilde{T} \in \mathcal{W}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$ et $i_m \in \mathcal{L}\ (X_1, ..., X_m; Y)$. En déduit $T \in \mathcal{W} \circ \mathcal{L}$ $(X_1, ..., X_m; Y)$. ∎

D'après les définitions 2.4.2 et 3.1.1 on obtient une autre version définition des polynômes m-homogènes de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$.

Définition 3.2.1 *Soit $P \in \mathcal{P}(^m X\ ;\ Y)$. On dira que P est de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ s'il exist un opérateurs m-linéaire symétrique $\widehat{P}$ de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$.*

En d'autre termes

$$\|P\|_{\mathcal{W} \circ \mathcal{P}} = \|\widehat{P}\|_{\mathcal{W} \circ \mathcal{L}}.$$

Théorème 3.2.2 *Soit X un espace de Banach. On suppose que $P \in \mathcal{P}(^m X\ ;\ Y)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes .*

1. *Le polynome $P \in \mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^m X; Y)$.*
2. *L'opérateur linéairisé $\widetilde{P} \in \mathcal{W}\left(\widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X; Y\right)$.*

Preuve. On suppose que $P \in \mathcal{W} \circ \mathcal{P}$. Alors, d'aprés la proposition 3.2.1, alors $\widehat{P}$ est de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$. d'aprés le théoreme 3.2.2, on aura

$$\widetilde{P}_L \in \mathcal{W}\left(\widehat{\otimes}^m_\pi X; Y\right)$$

l'opérateur $\widetilde{P}_L$ est un opérateur linéairisé de $\widehat{P}$, ainsi $\widetilde{P} \in \mathcal{W}\left(\widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X, Y\right)$. Maintenant, on suppose que la deuxiéme est vraie d'aprés (2.1.2), on écrit

$$P = \widetilde{P} \circ \delta_m$$

puisque $\widetilde{P} \in \mathcal{W}\left(\widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X, Y\right)$ et $\delta_m \in \mathcal{P}(^m X; \widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X)$. En déduit $P \in \mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^m X; Y)$. ∎

Bibliographie

[1] D. ACHOUR, K. SAADI. *A polynomial characterization of Hilbert spaces, collectanea mathematica,(2010).*

[2] F. ALBIA,N. J. KALTON. *Topics in Banach space theory*, 233 Springer Verlag 2006.

[3] A. BELAADA. *Ideals of non-linear operators and factorization theorems.* Thèse de doctorat en science, Université de M'sila (2018).

[4] G. BOTELHO, *D. Pellegrino, P. Rueda, On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials.* Publ.RIMS,KYOTO UNIV 43 (2007) , 1139–1155.

[5] G. BOTELHO. *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators, Note di Matematica, (2006).*

[6] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson paris new york barcelone milan mexico sao poulo 1987.

[7] A. BELACEL. *Opérateurs sommants et factorisation par les espaces de Köthe.* Thèse de doctorat en science, Université de M'sila (2014).

[8] S. BANACH. *Théorie des opérateurs linéaires*" Réédition de la version originale de 1932, Editions Jacques Gabay, Sceaux, 1993.

[9] S. DINEEN. *complex analysis on infinite dimentional spaces.* Université de college dublin belfied dublin4 ireland (1999).

[10] N. El HAGE HASSAN. *Topologie générale et espaces normés.*-Dunod (2011)

[11] M. GUECHI. *Opérateurs multilinéaires semi-intégrales et polynômes m-homogènes. Mémoire de magister,* Université de M'sila 2010.

[12] J. MUJICA. *complex analysis in Banach space Theory. Math. Studies*, vol. 120, North Holland, Amsterdam, (1986).

[13] A. PIETSCH. *Ideals of multilinear functionals* (designs of a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, 185-199. Leipzig. Teubner-Texte,1983.

[14] A. RYAN. *Introduction to tensor products of Banach spaces.* Springer Monographs in Mathematics. (2001).

[15] K. SAADI. *Les opérateurs multi p-sommants et leurs applications*, Thèse de doctorat en science, Université de Batna (2010).

[16] M. TALAGRAND. *Espaces de Banach faiblement k-analytiques.* Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978).

الملخص

ينـدرج عمل هذه المذكرة في إطار نظرية المؤثرات غير الخطية. الهدف من هذا العمل هو دراسة كثيرات الحدود المتجانسة من الدرجة m المولدة بواسطة التطبيقات الضعيفة المتراصة وإعطاء بعض خصائص هذه الفئة باستخدام طريقة التركيب ل pietsh.

الكلمات المفتاحية: فضاء بناخ، متعددة الحدود المتجانسة من الدرجة m ، مثالية التطبيقات المتعددة الخطية، نظرية التركيب، التطبيقات الضعيفة المتراصة.

Résumé : Les travaux de ce mémoire s'inscrivent dans le cadre de la théorie des opérateurs non linéaires. Le but de ce travail est d'étudier les polynômes m-homogènes engendrés par les opérateurs faiblement compacts et de donner quelques caractérisations de cette classe en utilisant la méthode de composition de Pietsch.

Mots clés Espace de Banach, polynôme m-homogène, idéal des opérateurs multilinéaires, méthode de compositon , opérateur faiblement compact.

Abstract : The work of this memory is situated within the framework of the non-linear operators theory. The objective of this work is to study m-homogeneous polynomials generated by weakly compact operator and to give some characterizations to this class using the composition method.

Key words : Banach space, m-homogeneous polynomials, the ideal of multilinear operators, the compostion method , weakly compact operator.