

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Par

CHIKHI Hadjer

Sujet

Application du théorème de Krasnoselski

Dirigé par :

Mostefa NADIR

Promotion: 2012/2013

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à **Mr, Mostefa NADIR** professeur à l'université de M'sila qui m'a constamment guidé et m'a encouragé tout au long de ce projet et pour la confiance

Je remercie aussi tous les membres du Jury **Mr, Abdelkader GASMI** professeur à l'université de M'sila et **Mr, Bachir GAGUI** prof à l'université de M'sila pour l'honneur qu'ils m' ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

Je tiens à exprimer tous mes respects à ma familles qui ont eu un rôle essentiel et continu dans notre réussite et qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie à tous les professeurs du départements de Mathématique.

Notations

A	Opérateur compact.
I	Opérateur identité.
H	Espace de Hilbert.
k	Constante de Lipschitz.
$[a, b]$	Intervalle réel.
$C([a, b])$	L'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$.
B	La boule ouvert.
$B(0, 1)$	La boule unité.
B_n	La boule unité fermée de \mathbb{R}^n .
φ	Fonction inconnue.
$K(x, y)$	Noyau de l'intégrale.
$K_n(x, y)$	Noyau itéré d'ordre n donné par $K_n(x, y) = \int_y^x K(x, z)K_{n-1}(z, y)dz$.
$EILV$	Équations intégrales linéaire de Volterra.
$EINLV$	Équations intégrales non linéaire de Volterra.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels et Notions Fondamentales	3
1.1 Espaces fonctionnels	4
1.2 Opérateur compact	5
1.3 Opérateur contractant	8
1.4 Équations intégrales	9
2 Quelques résultats sur la théorie du point fixe	13
2.1 Théorème du point fixe de Banach	14
2.2 Théorème du point fixe de Brouwer	17
2.3 Théorème du point fixe de Schauder	18
2.4 Théorème du point fixe de Schaefer	22
2.5 Théorème du point fixe de Krasnoselski	22
3 Applications	25
3.1 Équations intégrales linéaires de <i>Volterra</i>	26
3.1.1 Existence et unicité de la solution de EILV	26
3.2 Équations intégrales non linéaires de Volterra	28
3.2.1 Existence et unicité de la solution de EINLV	28
Conclusion générale	31
Bibliographie	33

Introduction

En mathématiques, pour une application f d'un ensemble E dans lui-même, un élément x de E est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Il existe plusieurs théorèmes permettant de déterminer qu'une application satisfaisante à certains critères possède un point fixe. Le plus connu est le suivant :

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité.

Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach (par exemple, l'identité).

Le théorème de Schaefer fut d'abord démontré par Schauder dans des cas particuliers, comme celui des espaces de Banach. Ce théorème est particulièrement utile pour prouver l'existence des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires.

En 1955, et pour la première fois, Krasnoselski a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est compact et l'autre contractante admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

Dans cette mémoire, on étudie quelques théorèmes du point fixe et quelques applications sur les équations intégrales de Volterra, où on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré d'une part, à quelques notions et définitions des espaces fonctionnels, et d'autre part, les théories des opérateurs compacts et contractants et on va traiter l'introduction à la théorie des équations intégrales.

Le deuxième chapitre présente quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder, Schaefer et de Krasnoselski .

Le troisième chapitre, on va montrer l'existence et l'unicité des solutions des équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra par l'application des théorèmes du point fixe dans l'espaces des fonctions continues.

Chapitre 1

Rappels et Notions Fondamentales

Ce chapitre est présenter quelques définitions des espaces fonctionnels, la théorie des opérateurs compacts, contractants et après les équations intégrales.

Les équations intégrales jouent un rôle très important dans l'analyse fonctionnelle, ainsi que dans la résolution des problèmes de la physique. Et les principaux fondateurs de la théorie d'équations intégrales sont Vito Volterra (1860,1940) ainsi que Ivar Fredholm (1866-1927).

En 1887, Volterra a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie d'équations intégrales aux équations intégrales différentielles et aux équations intégrales singulières.

Fredholm a étudié la méthode pour résoudre l'équations intégrales de deuxième espèce.

La théorie des équations intégrales intervient dans plusieurs domaines des mathématiques, beaucoup de problèmes dans le domaine des équations différentielles ordinaires et partielles, la physique mathématique et les problèmes de contacts peut être formulée comme une équation intégrale.

1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.1.1 (Espace métrique)

Une espace métrique (E, d) est un ensemble E muni d'une application

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R},$$

appelée distance ou métrique, qui satisfait les propriétés suivantes:

- $\forall x, y \in E, d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),
- $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.1.2 (Espace métrique complet)

On dit que l'espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

Définition 1.1.3 (Espace vectoriel normé)

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} , E est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme, c'est à dire d'une fonction $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R} , telle que

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité),
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Proposition 1.1.1

Les espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} sont des Banach.

Définition 1.1.4 (Convexités)

Soit E un espace vectoriel et $G \subset E$, ($G \neq \emptyset$) est convexe si seulement si $\forall x, y \in G$, $\forall \lambda \in [0, 1]$. On a

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in G.$$

1.2 Opérateur compact

Définition 1.2.1 (Relativement compact)

$A(G)$ est relativement compact signifie $\overline{A(G)}$ est compact, $\overline{A(G)}$ est la fermeture de $A(G)$.

Définition 1.2.2 (Totalelement borné)

Soit G un sous ensemble de l'espace normé E . On dit que G est un ensemble totalement borné si pour tous $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini des éléments $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ dans G , tel que

$$G \subset \bigcup_{j=1}^n B(\varphi_j, \varepsilon).$$

Définition 1.2.3 (ε - réseau)

Soit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ ensemble des éléments finies de l'espace normé E . On dit que ε -réseau de G ($G \subset E$).

$\forall \psi \in G, \exists \varphi_j$ tel que

$$\|\psi - \varphi_j\| < \varepsilon.$$

Définition 1.2.4 (Opérateur compact)

Soient E et F deux espaces normés et l'opérateur

$$A : E \longrightarrow F,$$

est linéaire. On dit que A est un opérateur compact si l'image par A de tout sous ensemble borné de E est relativement compact dans F .

Théorème 1.2.1

Tout opérateur compact est continue.

Preuve.

Comme A est compact, alors $\overline{A(B(0,1))}$ est compact donc $A(B(0,1))$ est borné, tel que $B(0,1)$ est la boule unité de l'espace E .

Alors,

$$\|A\varphi\| \leq C, \forall \varphi \in B(0,1) \implies \|A\varphi\| \leq C \|\varphi\|$$

d'où la continuité de A . ■

Théorème 1.2.2

Soient E et F deux espaces normés et l'opérateur

$$A : E \rightarrow F,$$

est compact alors, pour toute suite bornée $\{\varphi_n\} \subset E$, on peut extraire de la suite $\{A\varphi_n\} \subset F$ une sous suite $\{A\varphi_{n_k}\} \subset F$ qui converge dans F .

Preuve.

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée dans E , comme A est compact alors, $\{A\varphi_n\}$ est relativement compact dans F . Cette propriété nous donne que $\{A\varphi_n\}$ contient une sous suite convergente dans F .

Inversement, prenons un sous-ensemble borné dans E , et soit $\{\psi_n\}$ une suite dans $A(G)$.

Alors, il existe une suite bornée $\{\varphi_n\}$ dans G , telle que

$$\psi_n = A\varphi_n.$$

Par hypothèse $A\varphi_n = \psi_n$ contient une sous suite convergente $\{\psi_{n_k}\}$ dans F .

Donc, $A(G)$ est relativement compact, car pour toute suite bornée $\{\psi_n\}$ dans $A(G)$ il existe une sous-suite convergente $\{\psi_{n_k}\}$ dans F . Autrement dit, pour toute ensemble borné $G \subset E$, l'ensemble $A(G)$ est relativement compact dans F , d'où A est compact. ■

Théorème 1.2.3

Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des deux opérateurs compacts A_1 et A_2 est un opérateur compact, pour tous les scalaires α et β .

Preuve.

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , et soit $\{A\varphi_n\}$ une suite dans F , alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha A_1\varphi_n(x) + \beta A_2\varphi_n(x), \text{ avec } \varphi_n \in E, n \in \mathbb{N}.$$

Comme A_1 et A_2 sont compacts, on peut extraire de la suite $\{A_1\varphi_n\}$ une sous suite convergente de même de la suite $\{A_2\varphi_n\}$ une sous suite convergente qui donne par leurs somme une sous suite de $\{A\varphi_n\}$ convergente, donc A est compact. ■

Théorème 1.2.4

Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des deux opérateurs A ou B est compact.

Preuve.

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné, la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A , il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autre part, si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que l'opérateur AB est compact. ■

Théorème 1.2.5

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F , i.e.

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

A est compact.

Définition 1.2.5 (Opérateur de rang fini)

L'opérateur linéaire A de l'espace normé E dans l'espace normé F est de rang fini si la dimension de l'image de A est finie.

Résultat immédiat

Si la dimension de F est finie, alors l'opérateur A est de dimension finie.

Théorème 1.2.6 (Rang de dimension finie)

Soit A un opérateur borné de E dans F . Si le rang de A est de dimension finie; $\dim A(E) < \infty$, alors l'opérateur A est compact.

Preuve.

Comme A est borné, il transforme tout ensemble borné $G \subset E$ en un ensemble borné $A(G)$, et l'ensemble borné dans un espace de dimension finie est relativement compact, d'où A est compact. ■

Théorème 1.2.7 (Domaine de dimension finie)

Soit A un opérateur borné de E dans F avec le domaine E est de dimension finie; $\dim E < \infty$, alors l'opérateur A est compact.

Théorème 1.2.8

L'opérateur identique I d'un espace normé E dans lui même est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Proposition 1.2.1

La boule unité $B(0, 1)$ de l'espace normé E n'est pas compact si E est de dimension infinie.

Théorème 1.2.9 (Arzela-Ascoli)

Soit l'ensemble $G \subset C(K)$ est relativement compact si et seulement si

- bornée, i.e. s'il existe une constante M telle que

$$|\varphi(x)| \leq M \quad \forall x \in K \text{ et } \forall \varphi \in G.$$

- équicontinu, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que $\forall \varphi \in G$, nous avons

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in K \text{ et } |x - y| < \delta.$$

1.3 Opérateur contractant

Théorème 1.3.1 (Théorème de l'application contractante)

Soit (E, d) un espace métrique complet et l'application

$$T : E \rightarrow E.$$

On dit que T est une application lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de E , l'inégalité:

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, y)).$$

- Si $k = 1$, k est appelé non expansive.
- Si $k < 1$, k est appelé contraction.

Définition 1.3.1

Soit H est un espace de Hilbert et T un opérateur borné, l'opérateur T est dit opérateur contractant s'il existe une constante k telle que

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H$ et $0 \leq k < 1$,

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq k\|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

1.4 Équations intégrales**a- Introduction à la théorie des équations intégrales****Définition 1.4.1**

On appelle équation intégrale toute équation de la forme

$$\int_E K(x, y, \varphi(y))dy = \lambda\varphi(x) + f(x), \quad x \in E \quad (1.4.1)$$

où :

- E espace mesuré,
- x et y des points de E ,
- $f(x)$ une fonction mesurable donnée sur E ,
- λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe,
- $K(x, y, \varphi(y))$ une fonction mesurable $E \times E$ appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation (1.4.1).

Remarque 1.4.1

i) Si $K(x, y, \varphi(y)) = K(x, y)\varphi(y)$, l'équation (1.4.1) devient

$$f(x) = \int_E K(x, y)\varphi(y)dy - \lambda\varphi(x)$$

est dite équation intégrale linéaire.

Si non, l'équation (1.4.1) est dite équation intégrale non linéaire.

ii) Le type le plus général d'une équation intégrale est

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E K(x, y, \varphi(y))dy$$

tel que la fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation.

iii) Notons que l'équation peut être écrite sous forme d'opérateur

$$T\varphi = \lambda\varphi + f,$$

où l'opérateur T s'écrit comme

$$T\varphi(x) = \int_E K(x, y, \varphi(y))dy.$$

Définition 1.4.2

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.

b- Classification des équations intégrales

1- Équations intégrales linéaires

Les équations intégrales linéaires sont classées par :

i) Équation intégrale de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm toute équation intégrale à limites constantes et à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy, \quad (1.1)$$

où $f(x)$, $K(x, y)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

1. On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce, si $h(x) = 0$.

L'équation (1.1) devient:

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0.$$

2. On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce, si $h(x) = c$ (constante).

L'équation (1.1) devient:

$$c\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy.$$

3. Si $h(x) \neq 0$, on appelle (1.1) équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

ii) Équation intégrale de Volterra

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra toute équation intégrale de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy. \quad (1.2)$$

telle que la fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

Remarque 1.4.2

Si l'un des deux limites d'intégration d'équation intégrale de Fredholm est variable, l'équation devient une équation de Volterra.

2- Équations intégrales non linéaires

Les équations intégrales non linéaires sont classées par :

i) Équation intégrale de Fredholm

L'équation intégrale non linéaire de Fredholm est une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y, \varphi(y))dy. \quad (2.1)$$

1. L'équation intégrale de Fredholm de premier espèce si $h(x) = 0$, est de la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y, \varphi(y))dy = 0.$$

2. L'équation intégrale de Fredholm de second espèce si $h(x) = c$ (constante), est de la forme

$$c \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y, \varphi(y))dy.$$

3. Et de troisième espèce. si $h(x) \neq 0$.

ii) Équation intégrale de Volterra

L'équation intégrale non linéaire de Volterra est une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, \varphi(y))dy. \quad (2.2)$$

Et,

1. L'équation intégrale de Volterra de première espèce si $h(x) = 0$, est de par la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, \varphi(y))dy = 0.$$

2. L'équation intégrale de Volterra de second espèce si $h(x) = c$ (constante), est de la forme

$$c \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, \varphi(y))dy.$$

3. Si $h(x) \neq 0$, L'équation (2.2) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

Remarque 1.4.3

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $K(x, y) = 0$ pour $x < y$.

Remarque 1.4.4

- Si $f(x) = 0$, l'équation intégrale est une équation intégrale homogène.
- Sinon, cette équation est dite équation intégrale non homogène.

Chapitre 2

Quelques résultats sur la théorie du point fixe

En analyse, le théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques théorèmes du point fixe

Théorème du point fixe de Banach (Banach-Picard) donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tende vers un point fixe. Très différent, le théorème du point fixe de Brouwer n'est pas constructif, il garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue. Et après le théorème du point fixe de Schauder est une prolongation du théorème du point fixe de Brouwer aux espaces de vecteur topologique, qui peuvent être de dimension infinie. Une conséquence, appelée le théorème du point fixe de Schaefer, celui le théorème du point fixe de Krasnoselski est toute application de la forme $T + A$, où T une contraction et A est compact.

Définition 2.0.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I .

On dit que α est un point fixe de f , alors que $f(\alpha) = \alpha$.

En d'autre terme, les points fixes de f sont les solutions lorsqu'elles existent de l'équation $f(x) = x$.

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 2.1.1 (Banach)

Soient (E, d) un espace métrique complet et l'application

$$T : E \rightarrow E,$$

est contractante. Alors, T admet un unique point fixe $x \in E$.

De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$x_{n+1} = T(x_n),$$

converge vers le point fixe x (c.-à-d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$).

Preuve.

On montre d'abord l'unicité d'un point fixe, puis son existence.

L'unicité:

Supposons qu'il existe $x, y \in E$, $x \neq y$, tels qu'on ait $T(x) = x$ et $T(y) = y$.

Alors on a

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(T(x), T(y)) \\ &\leq kd(x, y), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$d(x, y) = 0 \text{ i.e. } x = y \text{ (puisque } T \text{ application contractante et } k < 1)$$

L'existence:

Soit $y \in E$ un point arbitraire dans E . Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par

$$\begin{cases} x_0 &= y \\ x_{n+1} &= T(x_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans E .

Pour $p < q$ on utilise l'inégalité triangulaire

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q)$$

puisque T est une contraction, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n), \quad \text{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

En répétant cette inégalité, on obtient:

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq (k^p + k^{p+1} + \dots + k^{q-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^p(1 + k + \dots + k^{q-p-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^p}{(1-k)}d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans E .

Par ailleurs puisque T est continue, on a

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1}\right) = T(x)$$

donc x est un point fixe de T (i.e. $T(x) = x$). ■

Remarque 2.1.1

- Supposons que l'application T admet un point fixe dans E , alors l'application T^p , $p \in \mathbb{N}$ admet le même point fixe.
- Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T admet encore un seul point fixe.

En effet, soit x l'unique point fixe de T^p . On a

$$T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x),$$

ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$.
Donc ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

• Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace E mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.1.1

Soit (E, d) un espace métrique complet et l'application

$$T : B(x_0, r) \rightarrow E,$$

est contractante telle que

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in B(x_0, r) \text{ et } k < 1,$$

avec

$$B(x_0, r) = \{x \in E, d(x, x_0) < r\}, \text{ où } x_0 \in E \text{ et } r > 0,$$

en plus, on suppose que

$$d(T(x_0), x_0) < (1 - k)r,$$

alors T possède un unique point fixe $x \in B(x_0, r)$.

Preuve.

On choisit $\varepsilon < r$ de telle sorte que

$$d(T(x_0), x_0) \leq (1 - k)\varepsilon < (1 - k)r$$

Soit $x \in D$, avec

$$D = \{x / d(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} d(T(x), x_0) &\leq d(T(x), T(x_0)) + d(T(x_0), x_0) \\ &\leq kd(x, x_0) + (1 - k)\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où

$$T : D \rightarrow D,$$

de plus, D est complet.

Appliquons le théorème de Banach, il en résulte que T admet un point fixe. ■

Théorème 2.1.2

Soit H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné dans H avec la propriété suivante

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq k \|\varphi - \psi\|$$

alors l'équation suivante

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

admet une solution unique pour toute $f \in H$ à condition que $|\lambda|$ est petit.

La signification du théorème de point fixe de Banach

L'application de ce théorème nous donne des résultats qui sont d'une importance fondamentale dans l'analyse non linéaire. Comme

- Existence de la solution.
- Unicité de la solution.
- Stabilité de la solution sous une petite perturbation de l'équation.
- Existence de la convergence des méthodes d'approximation.
- Stabilité des méthodes d'approximation.

2.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il existe plusieurs formes du théorème et le plus simple est donnée sous la forme suivante :

Théorème 2.2.1 (Brouwer)***Dans le plan***

Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe.

Il est possible de généraliser à toute dimension finie.

Dans un espace Euclidien

Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Il peut encore être un peu plus général

Convexe compact

Soit G une partie non vide convexe et compact de \mathbb{R}^n . Toute application continue

$$T : G \rightarrow G,$$

admet un point fixe.

Remarque 2.2.1

- *Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le théorème de Brouwer du fait que chaque point de G est un point fixe de l'application identité.*
- *Nous allons donner le résultat de Brouwer qu'on aura besoin dans la démonstration de théorème de Schauder.*

Définition 2.2.1

On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute application continue

$$T : E \longrightarrow E,$$

possède un point fixe. On note par B_n la boule unité fermée de \mathbb{R}^n .

On a le résultat suivant:

Théorème 2.2.2

La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.3.1 (Schauder)

Soit G un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach E et supposons

$$T : G \rightarrow G,$$

une application continue. Alors T admet un point fixe.

Preuve.

Soit l'application

$$T : G \rightarrow G,$$

est continue. Comme G est compact, T est uniformément continue.

Donc,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x, y \in G$, on a

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon \text{ tel que } \|x - y\| \leq \delta.$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset G$ tel que les boules ouvertes de rayon δ et des centres x_j recouvrent de G , i.e.

$$G \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} B(x_j, \delta).$$

Si on désigne L par

$$L = \text{Vect}(T(x_j))_{1 \leq j \leq n},$$

alors L est de dimension finie, et

$$G^* = G \cap L$$

est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq n$, on définit la fonction continue

$$\psi_j : E \rightarrow \mathbb{R},$$

par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta}, & \text{sinon} \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc,

$$\sum_{j=1}^n \psi_j(x) > 0, \quad \forall x \in G.$$

Donc, on peut définir sur G les fonctions continues positives φ_j par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^n \psi_k(x)},$$

pour lesquelles on a

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) = 1, \text{ pour tout } x \in G.$$

On pose alors, pour $x \in G$.

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)T(x_j).$$

La fonction f est continue (car f est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans G^* (car $f(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction

$$f|_{G^*} : G^* \rightarrow G^*,$$

par le théorème 2.2.1, f possède un point fixe $y \in G^*$.

De plus:

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - f(y) \\ &= \sum_{j=1}^n \varphi_j(y)T(y) - \sum_{j=1}^n \varphi_j(y)T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \varphi_j(y)(T(y) - T(x_j)). \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$, alors

$$\|y - x_j\| < \delta, \text{ et } \|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon.$$

Donc, on a

$$\|\varphi_j(y)(T(y) - T(x_j))\| \leq \varepsilon \varphi_j(y), \forall j$$

et donc

$$\begin{aligned} \|T(y) - y\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_j(y)(T(y) - T(x_j)) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier m , on peut trouver un point $y_m \in G$ tel que

$$\|T(y_m) - y_m\| < 2^{-m}.$$

Et puisque G est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous suite (y_{m_K}) qui converge vers un point $y^* \in G$. Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_K}))$ converge vers $T(y^*)$ et on conclut que

$$T(y^*) = y^*,$$

i.e. y^* est un point fixe de T sur G . ■

Remarquons ce théorème ne dit rien sur l'unicité de point fixe et qu'en général l'unicité n'a pas lieu (penser à l'application identité).

De plus, le fait que l'application T envoie l'ensemble G dans lui-même.

Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}$, on retrouve un résultat élémentaire qui dit qu'une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui envoie un intervalle compact $[a, b]$ dans lui-même admet un point fixe dans cet intervalle.

Notons que ce résultat se démontre en appliquant le théorème intermédiaires à la fonction

$$x \rightarrow f(x) - x,$$

ce qui correspond tout à fait à l'esprit des méthodes, plus générales de degré topologique.

Théorème 2.3.2

Soit G un sous-ensemble convexe, fermée, bornée, non vide d'un espace de Banach E .

$$T : G \rightarrow G,$$

est une application continue et $T(G)$ relativement compact. Alors, T admet au moins un point fixe.

Théorème 2.3.3

Soit B une boule ouverte d'un espace de Banach E et l'application

$$T : B \rightarrow B,$$

est compact et continu, alors T admet un point fixe.

2.4 Théorème du point fixe de Schaefer

Ce théorème est particulièrement utile pour prouver l'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Théorème 2.4.1 (Schaefer)

Soit E un espace de Banach et l'opérateur

$$T : E \rightarrow E,$$

est complètement continu (i.e. T est un opérateur continu et compact). Alors

i) l'équation opérateur $x = \lambda Tx$ admet une solution pour $\lambda = 1$.

Ou bien,

ii) l'ensemble $S = \{x \in E : x = \lambda Tx, \lambda \in]0, 1[\}$ est non borné.

2.5 Théorème du point fixe de Krasnoselski

Nous donnons un théorème d'existence du point fixe concernant les applications de la forme $T + A$, où T une contraction et A est compact.

Théorème 2.5.1 (Krasnoselski)

Soit E un espace de Banach et G un ensemble non vide de E , fermé, borné et convexe.

T, A deux applications de G dans E telles que:

- T est une contraction,
- A est compact et continue.

$$Tx + Ay \in G, \quad \forall x, y \in G.$$

Alors, il existe $x \in G$ tel que

$$Tx + Ax = x.$$

Preuve.

Soit y fixé dans G et comme T est une application contraction, l'équation

$$x = Tx + Ay,$$

admet une solution unique x dans G .

On définit l'application

$$\begin{aligned} L : G &\rightarrow G \\ y &\rightarrow Ly = x, \end{aligned}$$

alors,

$$Ly = TLy + Ay. \tag{2.5.1.1}$$

On a $LG \subset G$.

On montre que L est compact et continu.

► D'après le théorème de Schauder, qu'il existe $y \in G$ tel que

$$Ly = y,$$

d'où

$$Ty + Ay = y.$$

Soit y_n un point arbitraire de G , alors l'équation (2.5.1.1) devient

$$Ly_n = TLy_n + Ay_n,$$

alors,

$$Ly - Ly_n = TLy - TLy_n + Ay - Ay_n,$$

et

$$\|Ly - Ly_n\| \leq \|TLy - TLy_n\| + \|Ay - Ay_n\|$$

puisque T est une contraction on a

$$\begin{aligned} \|Ly - Ly_n\| &\leq k\|Ly - Ly_n\| + \|Ay - Ay_n\| \\ &\leq \frac{1}{(1-k)}\|Ay - Ay_n\|. \end{aligned} \tag{2.5.1.2}$$

D'où la continuité de L .

► Il reste à montrer que LG est relativement compact.

En effet, comme AG est relativement compact,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (1 - k)\varepsilon - \text{réseau } Ay_1, \dots, Ay_n,$$

c.-à-d. les boules

$$B(Ay_k, (1 - k)\varepsilon), \quad (1 \leq k \leq n)$$

telle que

$$AG \subset \cup_{k=1}^n B(Ay_k, (1 - k)\varepsilon).$$

Alors, de (2.5.1.2) Ly_1, \dots, Ly_n est un $\varepsilon - \text{réseau}$ de LG . ■

Chapitre 3

Applications

Ce chapitre représente le but de ce mémoire, où on va montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire et non linéaire de *Volterra* par l'utilisation de quelques théorèmes du point fixe.

3.1 Équations intégrales linéaires de Volterra

3.1.1 Existence et unicité de la solution de EILV

Théorème 3.1.1

Soit $K(x, y)$ est une fonction continue pour $x, y \in [a, b]$, alors l'équation de Volterra

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.1.1.1)$$

admet une solution unique $\varphi(x)$ pour toute f dans $L^2([a, b])$ et λ dans \mathbb{R} .

Preuve.

Pour l'équation intégrale de Volterra nous considérons l'opérateur

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda A\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy$$

avec

$$A\varphi(x) = \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy$$

et nous essayons de prouver que l'opérateur T^n est une contraction pour un certain $n \in \mathbb{N}$, donc $T\varphi$ admet un point fixe, qui doit être une solution de l'équation (3.1.1.1)

$$\begin{aligned} T\varphi &= f + \lambda A\varphi \\ T^2\varphi &= T(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda A(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2\varphi \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ T^n\varphi &= f + \lambda Af + \lambda^2 A^2f + \dots + \lambda^{n-1}A^{n-1}f + \lambda^n A^n\varphi \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \|T^n\varphi_2 - T^n\varphi_1\| &= \|\lambda^n A^n\varphi_2 - \lambda^n A^n\varphi_1\| \\ &= |\lambda|^n \left\| \int_a^x K_n(x, y)(\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy \right\| \end{aligned}$$

Rappelons que les $K_n(x, y)$ sont les noyaux itérés d'ordre n définis par la relation de récurrence suivante

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= K(x, y), \\ K_n(x, y) &= \int_y^x K(x, z)K_{n-1}(z, y)dz. \end{aligned}$$

Puisque on a par hypothèse

$$|K(x, y)| \leq M$$

alors

$$|K_n(x, y)| \leq \frac{M^n(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad a \leq y \leq x \leq b. \quad (3.1.1.2)$$

- Pour $n = 1$ l'expression (3.1.1.2) est évidente.
- Supposons qu'elle est vraie pour $m \in \mathbb{N}$,

$$|K_m(x, y)| \leq \frac{M^m(x-y)^{m-1}}{(m-1)!},$$

alors,

$$\begin{aligned} |K_{m+1}(x, y)| &= \left| \int_y^x K(x, z)K_m(z, y)dz \right| \\ &\leq \int_y^x |K(x, z)K_m(z, y)| dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{(m-1)!} \int_y^x (x-z)^{m-1} dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{m!} (x-y)^m \end{aligned}$$

tel que

$$\|T^n \varphi_2 - T^n \varphi_1\| \leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand on obtient

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

ainsi que l'opérateur T^n est contractant ce qui implique que T admet un point fixe, on écrit

$$T\varphi = \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy$$

■

3.2 Équations intégrales non linéaires de Volterra

3.2.1 Existence et unicité de la solution de EINLV

Théorème 3.2.1

On considère l'équation intégrale non linéaire suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x, y, \varphi(y)) dy, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.2.1)$$

Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

- i) $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$, est continue.
- ii) $K : [0, L] \times [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue et Lipschitzienne

$$|K(x, y, \varphi_1) - K(x, y, \varphi_2)| \leq k |\varphi_1 - \varphi_2|,$$

tel que $x, y \in [0, L]$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

Alors, l'équation (3.2.1) admet une solution unique $\varphi \in C([0, L])$.

Preuve.

Soit E est l'espace de Banach de $C([0, L])$ muni de la norme

$$|g| = \max_{0 \leq x \leq L} |g(x)| \exp(-kx)$$

cette norme est équivalente à la norme sup.

En effet

$$\exp(-kx) \|g\| \leq |g| \leq \|g\|$$

de plus elle est complète.

On définit

$$T : E \longrightarrow E,$$

par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x, y, \varphi(y)) dy$$

A fin de prouver que l'équation (3.2.1) admet une solution, il faut montrer que T admet un point fixe.

En effet T est contractante c.-à-d.

$$T\varphi = \varphi,$$

alors

$$\begin{aligned} |T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| &\leq \max_{0 \leq x \leq L} \exp(-kx) \int_0^x |K(x, y, \varphi_1(y)) - K(x, y, \varphi_2(y))| dy \\ &\leq k \max_{0 \leq x \leq L} \exp(-kx) \int_0^x |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy \\ &= k \max_{0 \leq x \leq L} \exp(-kx) \int_0^x \exp(-ky) \exp(ky) |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy \\ &\leq k |\varphi_1 - \varphi_2| \max_{0 \leq x \leq L} \exp(-kx) \int_0^x \exp(ky) dy \\ &= k |\varphi_1 - \varphi_2| \max_{0 \leq x \leq L} \exp(-kx) \frac{\exp(kx) - 1}{k} \\ &\leq (1 - \exp(-kT)) |\varphi_1 - \varphi_2| \end{aligned}$$

Puisque

$$(1 - \exp(-kt)) < 1,$$

alors T est contractante, d'après le principe de Banach T admet un point fixe unique φ . ■

De plus la suite $\{\varphi_n\}$ définie ci-dessus converge uniformément vers le point fixe φ pour la norme $|g|$ ainsi que pour la norme sup $\|g\|$.

Théorème 3.2.2

Soit l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy. \quad a \leq x \leq b \quad (3.2.2)$$

Telle que $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifie les conditions suivantes:

1. $K(x, y, 0) = 0, \quad \forall x, y \in [a, b]$

2. $\frac{\partial K(x, y, z)}{\partial z} < \left| \frac{1 - \|f\|}{b - a} \right|$

alors pour tout $f \in C([a, b])$ telle que $\|f\| < 1$ l'équation (3.2.2) admet une solution unique $\varphi \in C([a, b])$.

Preuve.

On va montrer que $T(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$. i.e. pour si

$$\|\varphi\| \leq 1, \text{ alors } \|T\varphi\| \leq 1.$$

En effet

$$\begin{aligned} \|T\varphi\| &= \left\| f(x) + \int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy \right\| \\ &\leq \|f(x)\| + \left\| \int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy \right\| \\ &\leq \|f(x)\| + \int_a^x |K(x, y, \varphi(y))| dy \\ &\leq \|f(x)\| + \int_a^x |K(x, y, \varphi(y)) - K(x, y, 0)| dy \\ &\leq \|f(x)\| + \int_a^x \left| (\varphi - 0) \frac{\partial K(x, y, \varphi(y))}{\partial \varphi} \right| dy \\ &< \|f(x)\| + \|\varphi\| \frac{1 - \|f(x)\|}{b - a} (b - a) < 1 \end{aligned}$$

D'après le Théorème Schauder, T admet un point fixe, d'où l'équation admet une solution unique. ■

Conclusion générale

Dans ce mémoire on a étudié la théorie du point fixe en particulier le théorème de Krasnoselski, ou l'idée est trouver le point fixe pour la somme de deux opérateurs l'un contractant et l'autre compact.

On a commencé par une introduction sur les notions fondamentales d'analyse fonctionnelle avec les propriétés des opérateurs compacts et leur relations avec les équations intégrales en particulier celle de Volterra.

Après le deuxième chapitre présente quelques résultats de la théorie du point fixe tels que les théorèmes de Banach, Brouwer, Schauder, Schaefer et Krasnoselski; pour le premier l'opérateur contractant admet un point fixe, le second est l'image d'une doit être dans le même boule, le troisième est doit envoyer le compact convexe dans lui-même, pour le quatrième l'opérateur compact a deux possibilités l'ensemble admet un point fixe ou il est non borné enfin le cinquième est la somme d'une opérateur contractant et un compact.

Et enfin dans le troisième chapitre nous avons appliquées les théorèmes du point fixe sur les équations intégrales de Volterra, pour démontrer l'existence des solutions des équations integrales de Volterra.

Bibliographie

- [1] AGARWAL, R.P, MEEHAN, M et O'REGAN, D. Fixed point theory and applications, Cambridge tracts in mathematics, 2001.
- [2] BOYER, F et FABIE, P. Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressible, mathematics subject classification(2000).
- [3] GAGUI, B. Résolution des Equations Intégrales par les Méthodes Adaptatives, Mémoire de MAGISTER université de M'sila 2006.
- [4] GUESBA, M. Sur quelques équations intégrales non linéaires, Mémoire de magister université de Ouargla 2012.
- [5] HOCHSTADT, H. Integral equations. John Wiley and Sons. New York 1989.
- [6] KARAUOI, A. On the existence of continuous solutions of nonlinear integral equations, University of Carthage, Department of Mathematics, Faculty of Sciences of Bizerte, Jarzouna 7021, Tunisia. Appl.18(2005) 299-305.
- [7] KHIRANI, A. Résolution des équations intégrales non linéaire type Volterra, Mémoire de magister Université de M'sila 2011.
- [8] MINAZZO, C et RIDER, K. Théorèmes du point fixe et applications aux équations différentielles, Mémoire de master 1 de mathématiques Université de Nice-Sophia Antipolis 2006-2007.
- [9] NADIR, M. Cours d'analyse fonctionnelle, Université de M'sila 2004.

- [10] NADIR, M. Cours sur les équations intégrales, Université de M'sila 2008.
- [11] SMART, D.R. Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974
- [12] ZEIDLER, E. Nonlinear functional analysis and its applications fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985