

People's Democratic Republic of Algeria  
Ministry of Higher Education and Scientific Research  
Mohamed Boudiaf University of M'sila  
Faculty of Technology



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة المسيلة  
كلية التكنولوجيا

Département de Génie Mécanique

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du diplôme de :

### MASTER

En Génie Mécanique

Option : ENERGITIQUE

Présenté par :

RIZOUG ZEGHLACHE Samir & DIF Sami

### Thème

**SIMULATION NUMERIQUE DE LA CONDUCTION DE  
CHALEUR.**

Devant le jury composé de :

NOM et Prénom	Grade	Qualité
ZERGANE Said	MCA	Président
DJERAD Abdelkader	MCB	Encadreur
BAKRI Badis	MCB	Examineur

*Année Universitaire : 2021 / 2020*

N° d'ordre : GM/...../2021

## Remerciements

On vous remercie, monsieur Dr. **Abdelkader DJERAD** d'avoir accepté de diriger notre travail de thèse. On lui témoigne toute notre reconnaissance, entre autres, pour son appui efficace dont l'ensemble des démarches administratives.

On ne peut oublier de remercier tous les enseignants d'avoir contribué à notre formation, ainsi qu'à tous l'équipe du département de génie mécanique.

En fin, on remercie tous les amis qui nous ont aidés pour l'élaboration de notre travail.

## Dédicace

Cette thèse est dédiée à mes parents, ma  
famille et mes amis  
pour leur soutien sans fin  
et leurs encouragements.

*Sami D97*

# ***Dédicace***

***D'abord nous remercions le bon Dieu qui nous a donné la foi,  
le Courage et la patience pour bien mener ce travail.***

***Je dédie ce modeste travail***

***A qui je l préfère à moi-même, et pourquoi pas ; elle l'es  
sacrifié pour moi .elle n'as toujours ménagé aucun effort  
pour me rendre heureux Ma mère bien-aimée.***

***A ma très chère sœur, qui m'encourage***

***Dans les instants délicats***

***A mes frères***

***A mes sœurs***

***A ma fiancée***

***A toute ma famille***

***A tous mes amis***

RIZOUG ZEGHLACHE Samir

# Sommaire

Remerciements.....	i
Dédicace .....	ii
Sommaire .....	iv
Nomenclature.....	vi
Liste de figures.....	viii
Liste des tableaux .....	x
Introduction.....	xi
<b>Chapitre I:Équations de base de transfert thermique</b> .....	<b>1</b>
I-1 Définition.....	1
I -2 Equations du transfert thermique .....	2
I-3 Etablissement de l'équation différentielle.....	7
I-4 Conditions aux limites .....	12
<b>Chapitre II : Méthodes numériques</b> .....	<b>1</b>
II-1.Méthode des différences finies.....	15
II-1-a- Discrétisation de l'équation différentielle de la chaleur .....	16
II-2. Conduction de Chaleur en 2-Dimensions .....	19
II-2-1. Méthodes Numériques en Régime Permanent .....	19
II-2-2. Les Méthodes Numériques en Régime Variable (Instationnaire).....	24
II-3. Conduction de Chaleur en 3-Dimensions .....	27
II-3-1. Maillage numérique .....	27
II-3- 3. Bilans thermiques .....	33
II-4. Conduction de chaleur en coordonnées cylindriques .....	34
II-4. 1 Maillage en coordonnées cylindriques .....	34
II-4. 2. Résistances thermiques en coordonnées cylindriques .....	36
II-4. 3. Flux thermiques en coordonnées cylindriques .....	36
II-5. Les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques .....	37
II-2 Comparaison des différentes méthodes .....	37
II-3 Méthode de Gauss-Seidel:.....	38
II-3-1 Algorithme de Gauss-Seidel.....	39
II-3-2 Conditions de convergence.....	39

II-4 Méthode de relaxation .....	40
II-4-1 Conditions de convergence .....	40
II-4-2 Critères d'arrêts des itérations de Gauss-Seidel et de Relaxation.....	41
II-4 Avantages des méthodes numériques.....	41
II-5 Désavantages des méthodes numériques.....	41
<b>Chapitre III : Résolution numérique de l'équation de la chaleur .....</b>	<b>42</b>
III- 1 Cas bidimensionnel.....	42
III-1-1 Régime permanent .....	42
III-2 Régime non-permanent .....	47
III-2-1 Méthode explicite (FTCS).....	47
III-2-2 Méthode implicite (IFTCS) .....	48
III- 2 Cas tri-dimensionnel .....	49
III- 2-1 Nouvelles températures .....	50
III- 2- 1- a. Régime permanent .....	50
<b>Chapitre IV : Résultats et discussions .....</b>	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Introduction .....	56
IV- 1 Simulation .....	56
IV- 2 codes de simulation .....	57
IV-2.1 gambit .....	57
IV- 2.2 Fluent.....	59
IV- 2.3 Notice d'utilisation de fluent : .....	60
IV- 3 DESCRIPTION DU PROBLEME .....	62
IV- 4 Maillage .....	63
IV.5 Conclusion.....	66
Perspectives .....	67
Conclusion générale .....	68
Bibliographie.....	69
ANNEX .....	70
Résumé : .....	83

## Nomenclature

$A$	Aire de la section, ( $m^2$ )
$\alpha$	Diffusivité thermique, ( $m^2/s$ )
$c$	Chaleur spécifique, ( $J/kg^\circ C$ )
$C(i,j)$	Capacité thermique volumétrique, ( $J/(m^3^\circ C)$ )
$E_{deg}$	Énergie générée à l'intérieur du solide, (W)
$E_{ii}$	Énergie emmagasinée, (W)
$h$	Coefficient de convection, ( $W/m^2^\circ C$ )
$k$	Conductivité thermique, ( $W/m^\circ C$ )
$L$	Longueur du cylindre, (m)
$N$	Nombre de mailles
$q_c$	Flux de chaleur par convection, (W)
$q_r$	Flux de chaleur par rayonnement, (W)
$q_x$	Flux de chaleur suivant l'axe (x), (W)
$q_y$	Flux de chaleur suivant l'axe (y), (W)
$q_z$	Flux de chaleur suivant l'axe (z), (W)
$q$	Flux de chaleur généré par une source de chaleur, ( $w/m^3$ )
$R_i$	Rayon, (m)
$T$	Température, ( $^\circ C$ ou $^\circ K$ )
$t$	Temps, (s)
$T_h$	Température ambiante, ( $^\circ C$ ou $^\circ K$ )
$T_f$	Température d'un fluide, ( $^\circ C$ ou $^\circ K$ )
$T_r$	Température de rayonnement, ( $^\circ C$ ou $^\circ K$ )
$T_s$	Température de la surface, ( $^\circ C$ ou $^\circ K$ )
$V$	Volume, ( $m^3$ )
$\Delta x$	Le pas en espace suivant, (x) (m)
$\Delta y$	Le pas en espace suivant, (y) (m)
$\Delta z$	Le pas en espace suivant, (z) (m)
$\delta$	Épaisseur, (m)
$\rho$	Densité du corps, ( $kg/m^3$ )
$\varepsilon$	Facteur d'émission de la surface
$\varepsilon$	Erreur relative
$\sigma$	Constante de Stéphan-Boltzman, ( $kcal/hm^2$ )

$\omega$	Coefficient de relaxation
$\Delta t$	Le pas en temps, (s)
$x, y, z$	Coordonnées spatiales

## Liste des Figures

<i>Fig. I.1 Schéma du transfert de chaleur par convection</i> .....	01
<i>Fig. I.2 Schéma du transfert de chaleur conductif</i> .....	03
<i>Fig. I.3 Schéma du transfert de chaleur convectif</i> .....	04
<i>Fig. I.4 Schéma du transfert de chaleur radiatif</i> .....	05
<i>Fig. I.5 Schéma du transfert de chaleur radiatif</i> .....	05
<i>Fig. I.6 Schéma indiquant les notions pour l'établissement de l'équation différentielle</i> .....	08
<i>Fig. I.7 Système de coordonnées cylindriques</i> .....	11
<i>Fig. I.8 Système de coordonnées sphériques</i> .....	12
<i>Fig. II.1.(b) Modèle de différences finies pour un système unidimensionnel</i> .....	16
<i>Fig. II.1.(a) Barre unidimensionnelle divisée en éléments de différences finies</i> .....	16
<i>Fig. II. 2 Maillage de différences finies en trois dimensions</i> .....	17
<i>Fig. II-3 Représentation 2D d'un modèle simulé par la méthode des différences finies</i> .....	20
<i>Fig. II.4. Schéma de discrétisation avec la méthode des différences finies</i> .....	20
<i>Fig. II. 5 La conduction en un nœud</i> .....	21
<i>Fig. II. 6 L'histoire température-temps d'un point nodale</i> .....	25
<i>Fig. II. 7 Le changement en énergie interne d'un élément de volume entourant un nœud pendant un intervalle de temps <math>\Delta T</math></i> .....	26
<i>Fig. II-8 Représentation 3D d'un modèle simulé par la méthode des différences finies</i> .....	27
<i>Fig. II. 9 Volume d'élément de résistance en 3-D</i> .....	28
<i>Fig. II. 10 Résistances thermiques reliées au nœud (i, j, k)</i> .....	28
<i>Fig. II. 11 Nœud avec condition de convection en surface</i> .....	30
<i>Fig. II. 12 Nœud sur une surface isolée</i> .....	30
<i>Fig. II. 13 Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface</i> .....	31
<i>Fig. II. 14 Nœud sur une arête externe avec condition de convection en surface</i> .....	31
<i>Fig. II.15 Nœud sur une arête interne avec condition de convection en surface</i> .....	32
<i>Fig. II.16 Nœud sur un coin interne</i> .....	32
<i>Fig. II.17 Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface</i> .....	33
<i>Fig. II. 18 Maillage en sens radiale</i> .....	34

<i>Fig. II.19 Maillage en coordonnées cylindriques (r, z)</i> .....	35
<i>Fig. II.20 Maillage en coordonnées cylindriques (r, <math>\phi</math>)</i> .....	35
<i>Fig. II.21 Résistances thermiques autour du noeud (i, j)</i> .....	36
<i>Fig III. 1 Résistances thermiques entourant un noeud</i> .....	42
<i>Fig III. 2 Noeud interne</i> .....	50
<i>Fig III. 3 Noeud avec condition de convection en surface</i> .....	51
<i>Fig III. 4 Noeud sur une surface isolée</i> .....	52
<i>Fig III. 5 Noeud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface</i> .....	53
<i>Fig III. 6 Noeud sur une arête externe avec condition de convection en surface</i> .....	53
<i>Fig III. 7 Noeud sur une arête interne avec condition de convection en surface</i> .....	54
<i>Fig III. 8 Noeud sur un coin interne</i> .....	55
<i>Fig III. 9 Noeud sue un coin interne avec condition de convection en surface</i> .....	55
<i>Fig. IV. 1 Vue globale Après avoir lancé le logiciel</i> .....	58
<i>Fig. IV.2 Menu principale de Gambit</i> .....	59
<i>Fig. IV. 3: Entrée et le sortir de la chaleur dans le plaque</i> .....	62
<i>Fig. IV. 4: le maillage</i> .....	63
<i>Fig. IV. 5. contours de temperature total</i> .....	64
<i>Fig. IV. 6: contours de température static</i> .....	64
<i>Fig. IV. 7: energy total</i> .....	65
<i>Fig. IV. 8: histograme de température total</i> .....	65
<i>Fig.IV..9: histograme de temperature static</i> .....	66

## Liste des tableaux

<i>Tableau I: Conductivité thermique de certains matériaux.....</i>	<i>04</i>
<i>Tableau II. 1 Résumé de formules nodales calculées par des différences finis.....</i>	<i>23</i>
<i>Tableau II. 2 Les résistances thermiques pour noeuds internes dans différent systèmes de coordonnées.....</i>	<i>29</i>

## Introduction

Aujourd'hui on assiste à une demande très importante et généralisée, provenant de tous les secteurs industriels, de la qualité qui est un facteur vital pour les entreprises confrontées à la concurrence. Devant cette réalité l'assurance qualité s'est implantée dans les entreprises sous la forme d'une organisation visant à repartir et à minimiser les facteurs de non qualité. Les matériaux composés ont un intérêt important pour l'industrie et la connaissance de leurs caractéristiques est plus qu'indispensable. Souvent, une anomalie interne dans leurs structures modifie fortement leurs propriétés physiques. Le calcul thermique est capable de révéler la présence d'un défaut sur et/ou l'intérieur de la paroi de ces matériaux. Pour détecter un défaut, on a souvent recours aux méthodes de contrôle non destructif, qui consiste à analyser les diverses structures par l'étude de leurs réponses aux excitations thermiques, et établir des relations entre ces réponses et les imperfections qu'elles contiennent.

Le transfert thermique est la science qui tente à prédire le transfert d'énergie entre les molécules ou les particules de la matière à différentes températures. Le but est d'expliquer la manière et de prédire le taux d'échange de la chaleur sous certaines conditions spécifiques. Il complète les deux premiers principes de la thermodynamique par des lois expérimentales additionnels afin d'établir les proportions de transfert d'énergie.

Le transfert de chaleur peut être défini comme étant la transmission de l'énergie d'une région à une autre une fois la différence de température entre elles établi. Il est régi par une combinaison de lois physiques et de relations empiriques déduites de l'expérimentation. Dans la littérature relative à cette discipline, on reconnaît généralement trois modes distincts de transmission de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement.

Pour résoudre la plupart des problèmes de transfert de chaleur, que pose la technologie actuelle les équations différentielles relatives à la conductivité thermique, la plus utilisée est la méthode des différences finies. Ses différentes versions ont été élaborées dès les années 1930, mais leur vaste expansion ne date que de l'apparition des ordinateurs. Ces dernières années le progrès extraordinaire des ordinateurs à rendu même la méthode des différences finies comparable à celle des éléments finis.

En résolvant numériquement les problèmes par la méthode aux différences, il est impossible d'obtenir la solution pour tous les points d'un certain domaine de l'espace. Elle ne peut être qu'approchée, et ceci encore seulement pour un ensemble fini des points (noeuds) appelé maillage

L'objectif premier de ce travail est de modéliser le phénomène de conduction thermique en deux dimensions par l'application de la méthode des résistances thermiques et juger sa validité.

Notre travail est réparti comme suit :

Le premier chapitre résume une recherche bibliographique sur trois modes distincts de transmission de la chaleur en général. Dans le deuxième, nous proposons la solution numérique par la méthode des différences finies. Le troisième chapitre est réservé à la Résolution numérique de l'équation de la chaleur. Enfin, le quatrième chapitre est consacré sur la simulation ses résultats et discussions.

**Chapitre I:**  
**Équations de base de transfert  
thermique**

## I-1 Définition

Le transfert de chaleur est une science, qui étudie la façon de propagation thermique d'une région à une autre, sous l'influence d'une différence de température. Elle a subit une étude intensive pour satisfaire les exigences des autres technologies nucléaires, solaires...etc.

Le transfert thermique a lieu sous trois formes : Conduction, Convection et Radiation, avec le transfert conjuguée.

### a- Conduction thermique

Ce mode d'échange s'applique à un milieu immobile, c'est à dire dans la pratique, à des milieux solides. La convection, liée au mouvement de fluides à l'échelle macroscopique, est un mode de transfert plus rapide que la conduction. C'est pourquoi même si la conduction existe aussi dans les fluides, on ne s'intéressera à ce phénomène que dans les seuls cas où le mouvement du fluide est impossible (couche limite au voisinage d'un corps solide, fluide enfermé dans les petits pores d'un solide, etc.)

### b- Convection thermique .

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton. [1]

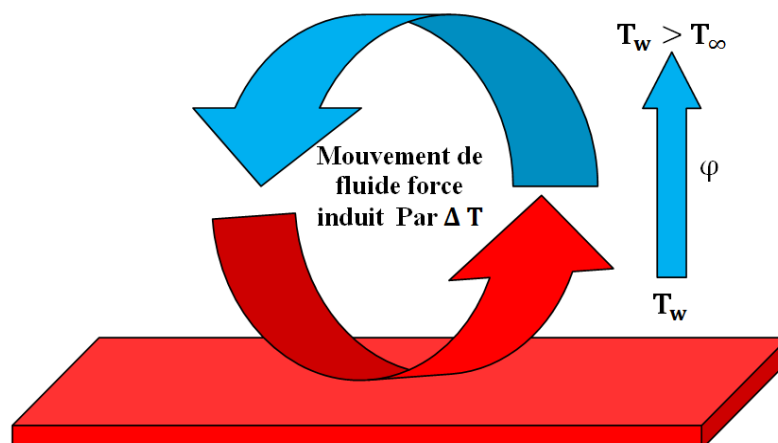


Fig .I.1 Schéma du transfert de chaleur par convection.

La convection est le mécanisme le plus important de transfert de chaleur entre une surface solide et un fluide. Deux types de convection sont généralement distingués :

- ❖ Convection naturelle
- ❖ Convection forcée

### **c- Le rayonnement**

Le rayonnement thermique est un phénomène se caractérisant par un échange d'énergie électromagnétique, sans que le milieu intermédiaire ne participe nécessairement à cet échange. Par exemple, le rayonnement solaire est capable d'échauffer la terre bien que le milieu traverse soit à une température plus basse que la terre. [2]

### **Combinaison des différents modes de transfert**

Il nous classe séparément dans les trois modèles de base de échangeurs de chaleur. En fait, quels sont les différents modèles Scientifiquement lié: transmission et rayonnement dans le cas de matériaux magnétiques irréguliers (verres, Plastique, ..... ) ou encore conduction, convection et rayonnement dans les liquides

## **I -2 Equations du transfert thermique**

Toute étude technique significative exige une réponse chiffrée. Pour réaliser une telle étude des problèmes de transmission de chaleur, on doit examiner les lois physiques et les relations régissant les différents mécanismes de l'écoulement de chaleur. [3]

### **a-Conduction**

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier :

La densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda S \vec{\text{grad}}(T)$$

Ou sous forme algébrique :

$$\varphi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$$

- $\varphi$  Flux de chaleur transmis par conduction (W)
- $\lambda$  Conductivité thermique du milieu (W m<sup>-1</sup> °C<sup>-1</sup>)
- $x$  Variable d'espace dans la direction du flux (m)
- $S$  Aire de la section de passage du flux de chaleur (m<sup>2</sup>)

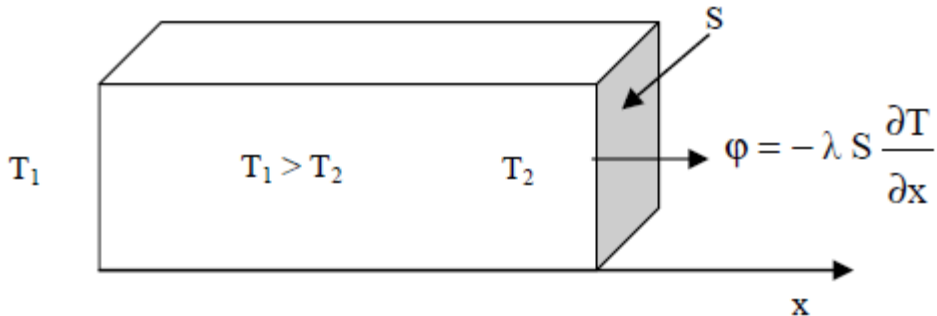


Fig. I.2 Schéma du transfert de chaleur conductif

On trouvera dans le tableau 1.1 les valeurs de la conductivité thermique  $\lambda$  de certains matériaux parmi les plus courants. Un tableau plus complet est donné en annexe A.1.1.

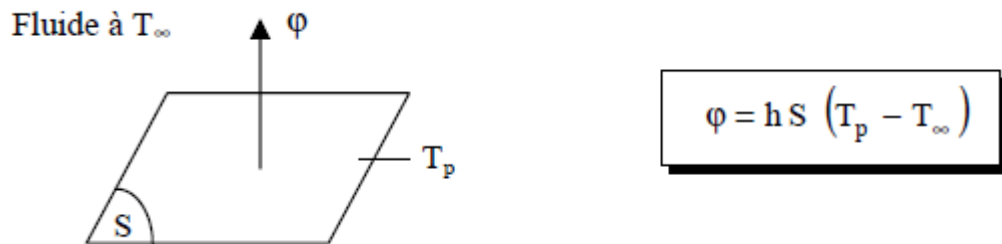
**Tableau I: Conductivité thermique de certains matériaux**

Matériau	$\lambda$ (W.m <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> )	Matériau	$\lambda$ (W.m <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> )
Argent	419	Plâtre	0,48
Cuivre	386	Amiante	0,16
Aluminium	204	Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	15	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Brique terre cuite	1,1	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045
Verre	1,0	Polystyrène extrudé	0,028
Eau	0,60	Air	0,026

### a- Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide.

Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :



*Fig. I.3 Schéma du transfert de chaleur convectif*

Avec :

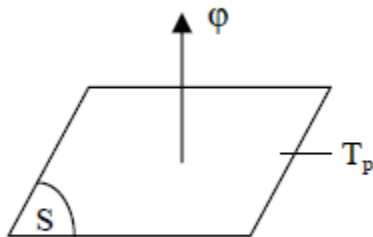
- $\phi$  Flux de chaleur transmis par convection (W)
- $h$  Coefficient de transfert de chaleur par convection (W m<sup>-2</sup> °C<sup>-1</sup>)
- $T_p$  Température de surface du solide (°C)
- $T_\infty$  Température du fluide loin de la surface du solide (°C)
- $S$  Aire de la surface de contact solide/fluide (m<sup>2</sup>)

Remarque : La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection  $h$  est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide

## b- Rayonnement

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation [3] :

Milieu environnant à  $T_\infty$



$$\phi = \sigma \epsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4)$$

Fig. I.4 Schéma du transfert de chaleur radiatif

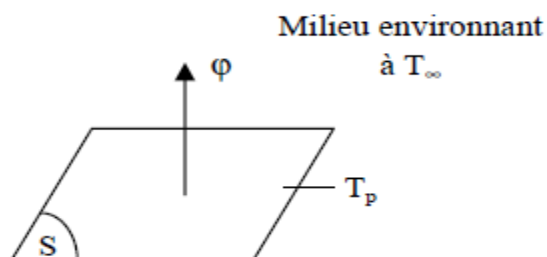
Avec :

$\phi$ Flux de chaleur transmis par rayonnement	(W)
$\sigma$ Constante de Stefan	(5,67.10-8 W m-2 K-4)
$\epsilon_p$ Facteur d'émission de la surface	
$T_p$ Température de la surface	(K)
$T_\infty$ Température du milieu environnant la surface	(K)
S Aire de la surface	(m2)

## c- Rayonnement

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide).

Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :



$$\phi = \sigma \epsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4)$$

Fig. I.5 Schéma du transfert de chaleur radiatif

Avec :

$\varphi$ Flux de chaleur transmis par rayonnement	(W)
$\sigma$ Constante de Stefan	(5,67.10 <sup>-8</sup> W m <sup>-2</sup> K <sup>-4</sup> )

4)

$\epsilon_p$ Facteur d'émission de la surface	
$T_p$ Température de la surface	(K)
$T_\infty$ Température du milieu environnant la surface	(K)
S Aire de la surface	(m <sup>2</sup> )

#### d- Flux de chaleur lié à un débit massique

Lorsqu'un débit massique  $\dot{m}$  de matière entre dans le système à la température  $T_1$  et en ressort à la température  $T_2$ , on doit considérer dans le bilan (1.5) un flux de chaleur entrant correspondant[3] :

$$\varphi_e = \dot{m} c_p (T_1 - T_2)$$

Avec :

$\varphi_e$	Flux de chaleur entrant dans le système	(W)
$\dot{m}$	Débit massique	(kg.s <sup>-1</sup> )
c	Chaleur spécifique	(J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )
$T_1, T_2$	Températures d'entrée et de sortie	(K)

#### e- Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante et en l'absence de changement d'état) :

$$\varphi_{st} = \rho V c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec :

$\varphi_{st}$	Flux de chaleur stocké	(W)
----------------	------------------------	-----

$\rho$	Masse volumique	(kg m <sup>-3</sup> )
V	Volume (m <sup>3</sup> )	
C	Chaleur spécifique	(J kg <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> )
T	Température	(°C)
t	Temps	(s)

Le produit  $\rho Vc$  est appelé la capacité thermique du corps

### **g-Génération d'énergie**

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme :

$$\Phi_g = \dot{q} V$$

Avec :

$\Phi_g$	Flux d'énergie thermique générée	(W)	
$\dot{q}$	Densité volumique d'énergie générée	(W m <sup>-3</sup> )	
V	Volume	(m <sup>3</sup> )	[3]

### **I-3 Etablissement de l'équation différentielle**

Avant d'entreprendre l'étude de problèmes particuliers, nous établirons l'équation différentielle définissant la répartition de la température dans un corps, puis en utilisant certaines hypothèses, nous transformerons cette équation après l'avoir simplifiée afin de mettre en forme les formes utilisées dans les cas qui font l'objet de cette étude.

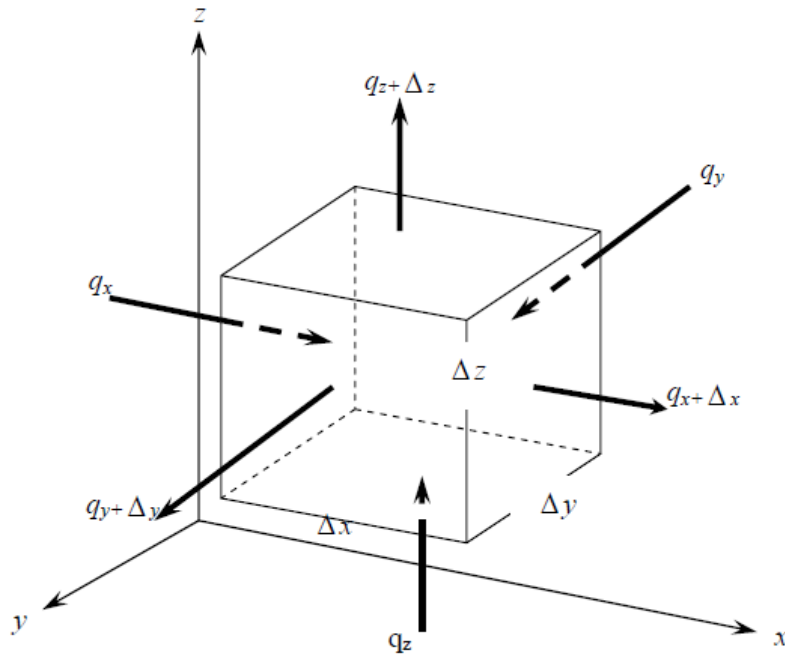


Fig.. I.6 Schéma indiquant les notions pour l'établissement de l'équation différentielle[4]

Considérons un petit parallélépipède, découpé dans un corps de coté dx, dy, dz.

L'équation définissant la répartition de température s'obtient en décrivant le principe de la conservation de l'énergie pour l'élément considéré pendant un temps dt.

Le bilan des énergies s'écrit littéralement, sous la forme:

<i>Chaleur qui entre pendant dt</i>	+	<i>Chaleur dégagée dans la masse par des sources internes pendant dt</i>	=	<i>Chaleur qui sort pendant dt</i>	+	<i>Chaleur due à la variation de l'énergie interne pendant dt</i>
-------------------------------------	---	--	---	------------------------------------	---	---

$$E_{in} + E_{deg} = E_{sort} + E_{ei}$$

$$(q_x + q_y + q_z)dt + q(d_x d_y d_z)dt = (q_{x+\Delta x} + q_{y+\Delta y} + q_{z+\Delta z})dt + c \cdot \rho dT(dx dy dz)$$

Où:

dt: est la variation du temps

qx, qy, qz: flux de chaleur qui entrent comme indiqué sur la fig. I-2

$q_{x+dx}$ ,  $q_{y+dy}$ ,  $q_{z+dz}$ : flux de chaleur qui sortent des faces comme indiqué sur la figure.

$c$ : chaleur spécifique du matériau

$\rho$ : densité du corps

$T$ : est la fonction de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et du temps  $t$ ;  $T=f(x, y, z, t)$

La quantité de chaleur qui entre dans la direction  $x$  est:

$$q_x = \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (\text{I. 9})$$

Celle qui sort s'écrit:

$$q_{x+\Delta x} = \left[ -k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] dydz \quad (\text{I. 10})$$

De même pour les directions  $y$  et  $z$ :

$$q_y - q_{y+\Delta y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (\text{I. 12})$$

$$q_z - q_{z+\Delta z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (\text{I. 13})$$

En substituant ces relations dans l'équation de conservation d'énergie, et en divisant chaque terme par  $dx dy dz$ , on obtient l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q = \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I. 14})$$

En supposant que  $c$  et  $\rho$  sont indépendantes de la température et que  $k$  est le même dans les trois directions  $x, y, z$ .

Cette équation s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I. 15})$$

Cette équation est dit l'équation générale de conduction.

Où:  $a = \frac{k}{\rho \cdot c}$ , la diffusivité thermique en (m<sup>2</sup>/h) du matériau.

Si le système ne contient aucune source de chaleur, l'équation ci-dessus est réduit à l'équation de **FOURIER**:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I. 16})$$

Dans le cas du régime permanent et en présence de source de chaleur, elle devient l'équation de **POISSON**:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = 0 \quad (\text{I. 17})$$

Et pour le régime permanent en l'absence de source de chaleur, la répartition des températures doit satisfaire l'équation de **LAPLACE**:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I. 18})$$

L'équation générale de conduction dans un système de coordonnées cylindriques s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I. 19})$$

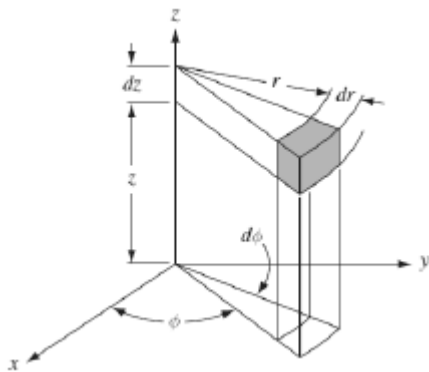


Fig. I-7 Système de coordonnées cylindriques [5]

L'équation générale de conduction dans un système de coordonnées sphérique s'écrit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I. 20})$$

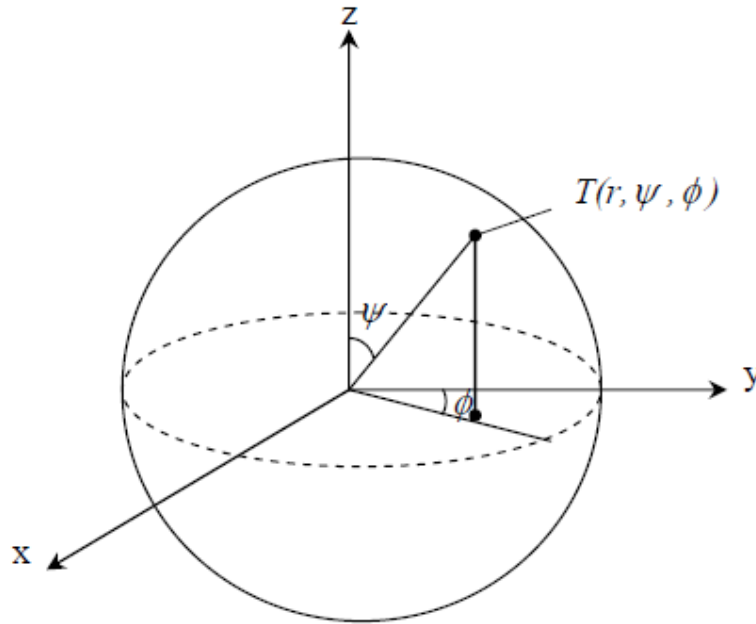


Fig. I-8 Système de coordonnées sphériques

#### I-4 Conditions aux limites

La solution analytique d'un problème de conduction en régime permanent s'exprime par une certaine fonction  $T(x, y, z, t)$  représentant la température qui devra satisfaire à l'équation différentielle propre du problème. Cette équation différentielle ne fait qu'exprimer comment les variations de température se font dans l'espace et le temps, mais pour que le phénomène soit décrit complètement, il faut que la solution trouvée satisfait aussi aux conditions aux limites (spatiales et temporelles).

##### a- Conditions initiales

Elles expriment dans les problèmes en régime non-permanent, la distribution spatiale des températures à un instant donné, le plus souvent pris comme origine de temps:

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \text{ à } t=0 \quad (\text{I. 21})$$

##### b- Conditions aux limites spatiales

Elles expriment comment, à partir de l'instant zéro, variant sur les frontières du corps étudié, la température ou sa dérivée, ou encore une combinaison des deux.

### **b-1 Condition de Dirichlet ou du premier type**

La distribution de la température à la surface frontière considérée est donnée en fonction du temps et pour tous les points de la surface:

$$T = f_1(x, y, z, t) \quad (\text{I. 21})$$

Souvent, on aura affaire à l'un des cas particuliers, où la température en surface ne dépend que de la position du point:

$$T = f_1(x, y, z) \quad (\text{I. 22})$$

Où du temps seulement, où cette température est constante dans le temps et uniforme sur la surface, c'est-à-dire une constante dans le sens mathématique du mot.

### **b-2 Condition de Neumann ou du deuxième type**

On impose la densité de flux à la surface, pour tous les points de la surface et en fonction du temps:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} = f_2(x, y, z, t) \quad (\text{I. 23})$$

### **b-3 Condition de Fourier ou du troisième type**

On impose au fluide ambiant une température  $T_\infty$  très loin et en outre un coefficient de convection  $h$  pour l'échange entre la paroi ( $x=L$  par exemple) et le fluide.

La condition s'exprimera par:

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h[T(L, t) - T_\infty(t)] \quad (\text{I. 24})$$

Souvent, la température  $T_s$  de la surface n'est pas connue et comme  $h$  dépend de  $T_s$ ,  $T_\infty$ , la vitesse,.....etc., on aura fréquemment recours aux approximations successives.

La formule la plus générale de la conduction de FOURIER sur la frontière s'écrit:

$$h(T) + k \frac{\partial T}{\partial n} = hT_{\infty} = f_3(x, y, z, t) \quad (\text{I. 25})$$

Où  $\frac{\partial T}{\partial n}$  est la dérivée effectuée le long de la normale extérieure à la surface.

## **Chapitre II :**

# **Méthodes numériques**

Lorsque la résolution analytique d'un système d'équations différentielles devient difficile, les méthodes numériques et analogiques fournissent les réponses nécessaires.

Maintenant, deux approches numériques principales sont utilisées dans la résolution équations différentielles partielles dans le transfert de chaleur; la méthode des différences finies (MDF) et la méthode des éléments finis (FEM). Chaque méthode a ses avantages qui dépendent de la nature du problème physique à résoudre. La méthode des différences finies est facile à formuler, peut être facilement étendue à des problèmes bidimensionnels et tridimensionnels. De plus avec l'arrivée des techniques de maillage automatique, le MDF est devenu comparable au MEF.

Dans ce chapitre, nous allons concentrer notre attention sur la solution numérique via la méthode de différence finie, un outil extrêmement utilisé dans le transfert thermique pour résoudre des problèmes de régimes et de variables permanents dans des corps de géométrie individuelle ou complexes avec des conditions non simples.

Les équations peuvent être obtenues à partir des différences finies avec l'utilisation du concept de résistance thermique. La méthode qui utilise ce concept peut avoir des avantages, par exemple pour faciliter la généralisation à des systèmes tridimensionnels spatiaux, ou lorsque les propriétés thermiques sont variables (1, 2, 13).

## **II-1.Méthode des différences finies**

La méthode de différence finie est la procédure numérique la plus ancienne et était la première qui a été utilisée pour résoudre des problèmes thermiques. Il est de diviser le volume d'espace dans lequel la solution est recherchée sur un réseau de points spatiale régulièrement ou irrégulièrement à ce qu'on appelle maille. La solution au problème est calculée à chaque point du réseau. L'approche est dans le remplacement de chaque dérivé de l'équation *POISSON/LAPLACE* de pêche par expression aux différences finies, dans laquelle la valeur de l'inconnu exprime à un point correspondant à sa valeur aux points adjacents. (fig. II-1).

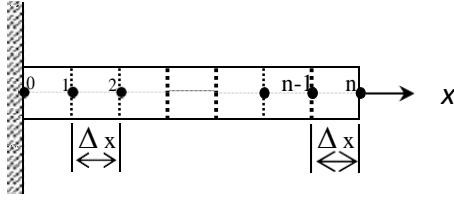


Fig. II.1.(a) Barre unidimensionnelle divisée en éléments de différences finies

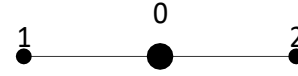


Fig. II.1.(b) Modèle de différences finies pour un système unidimensionnel

L'équilibre thermique permet d'écrire en 3-D : (Fig. I-2)

$$\frac{T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k}}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{T_{i,j-1,k} - T_{i,j,k}}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{T_{i,j,k-1} - T_{i,j,k}}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{R_z(i,j,k+1)} = 0 \quad (\text{II. 1})$$

$T_{i,j,k}$ ,  $T_{i,j-1,k}$ ,  $T_{i,j+1,k}$ ,  $T_{i-1,j,k}$ ,  $T_{i+1,j,k}$ ,  $T_{i,j,k-1}$  et  $T_{i,j,k+1}$  : sont des températures des nœuds  $(i,j,k)$ ,  $(i,j-1,k)$ ,  $(i,j+1,k)$ ,  $(i-1,j,k)$ ,  $(i+1,j,k)$ ,  $(i,j,k-1)$  et  $(i,j,k+1)$

$R_x(i-1,j,k)$  et  $R_y(i+1,j,k)$ : sont des résistances thermiques selon l'axe x.

$R_y(i,j-1,k)$  et  $R_x(i,j+1,k)$ : sont des résistances thermiques selon l'axe y

$R_z(i,j,k-1)$  et  $R_z(i,j,k+1)$ : sont des résistances thermiques selon l'axe z.

L'équation (II. 1) représente le cas en trois dimensions, mais est adaptable aux géométries monoet bi-dimensionnelles.

## II-1-a- Discrétisation de l'équation différentielle de la chaleur

Considérons un solide à trois dimensions (sans source de chaleur ) et dont la température  $T(x, y, z)$  satisfait l'équation de LAPLACE.

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II. 2})$$

Considérons un nœud intérieur  $P(x, y, z)$  entouré par les points 1, 2, 3, 4, 5 et 6 dont les coordonnées sont indiquées sur la figure suivante:

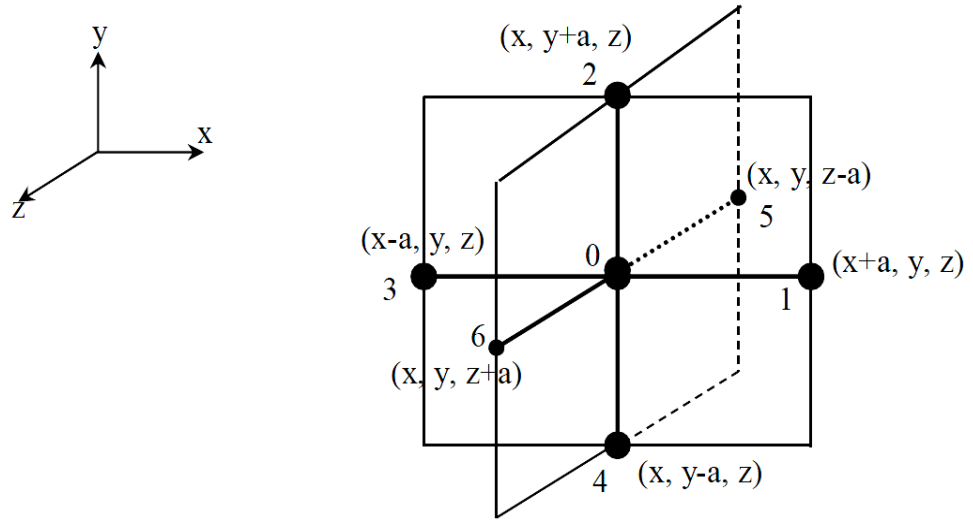


Fig. II. 2 Maillage de différences finies en trois dimensions

Exprimons au moyen de développement de Taylor les températures  $T_1$  et  $T_3$  en fonction de  $T_0$ .

$$T_1 = T_0 + a \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p + \frac{a^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p + \frac{a^3}{3} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_p + \dots$$

$$T_3 = T_0 + a \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p - \frac{a^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p + \frac{a^3}{3} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_p + \dots$$

En ajoutant membre à membre, on trouve:

$$T_1 + T_3 = 2T_0 + a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p + O(a^4) \quad (\text{II. 3})$$

En négligeant les termes d'ordre  $a^4$  ( $a^4$  est très petit du fait que le nombre de nœuds est suffisamment grand), on aura:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p = \frac{T_1 + T_3 - 2T_0}{a^2} \quad (\text{II. 4})$$

De même, on peut écrire un développement en série de Taylor pour  $T_2$  et  $T_4$ :

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_p = \frac{T_2 + T_4 - 2T_0}{a^2} \quad (\text{II. 5})$$

Et même chose pour  $T_5$  et  $T_6$ :

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_p = \frac{T_5 + T_6 - 2T_0}{a^2} \quad (\text{II. 6})$$

D'après les relations ci-dessus, on peut tirer facilement l'expression de  $T_0$  en fonction des températures avoisinantes et ce selon le cas:

**Cas unidimensionnel:**

$$T_0 = \frac{T_1 + T_3}{2} \quad (\text{II. 7})$$

**Cas bi-dimensionnel:**

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} \quad (\text{II. 8})$$

**Cas tri-dimensionnel:**

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6}{6} \quad (\text{II. 9})$$

Ainsi l'approximation par des différences finies de l'équation (II. 2) devient:

$$\frac{T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta z)^2} = 0$$

Si  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ , alors

$$T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} + T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} - 6T_{i,j,k} = 0$$

Si, on tient compte d'une source de chaleur, on ajoute le terme  $\frac{q}{k}$  dans l'équation générale et on obtient:

$$\frac{T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta z)^2} + \frac{q}{k} = 0$$

Et pour  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ,

$$T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} + T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} + \frac{q}{k}(\Delta x)^2 - 6T_{i,j,k} = 0$$

## II-2. Conduction de Chaleur en 2-Dimensions

### II-2-1. Méthodes Numériques en Régime Permanent

Les équations qui gouvernent le phénomène de conduction bidimensionnel en régime permanent pour  $T(x, y)$  sont :

Système sans source de chaleur (LAPLACE):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II. 10})$$

Système avec source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = 0 \quad (\text{II. 11})$$

Ici  $q$  ( $\text{W/m}^3$ ) est le flux apporté par une source de chaleur.

## II-2-1-1. Maillage Numérique

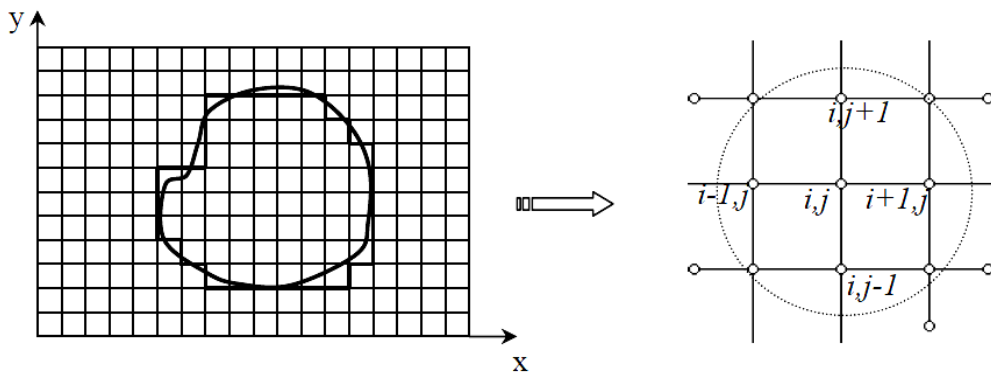


Fig. II-3 Représentation 2D d'un modèle simulé par la méthode des différences finies.

## II-2-1-2. Bilan thermique

D'après la figure ci-après en régime stationnaire sans source de chaleur, en reposant sur la loi des noeuds (KIRTCHOFF): la somme des courants vers un noeud est nulle. Par analogie, et pour un système bi-dimensionnel, on écrit:

$$q_{1-0} + q_{2-0} + q_{3-0} + q_{4-0} = 0 \quad (\text{II. 12})$$

$$-k(1.\Delta y) \frac{T_0 - T_1}{\Delta x} - k(1.\Delta y) \frac{T_0 - T_3}{\Delta x} - k(1.\Delta x) \frac{T_0 - T_2}{\Delta y} - k(1.\Delta x) \frac{T_0 - T_4}{\Delta y} = 0 \quad (\text{II. 13})$$

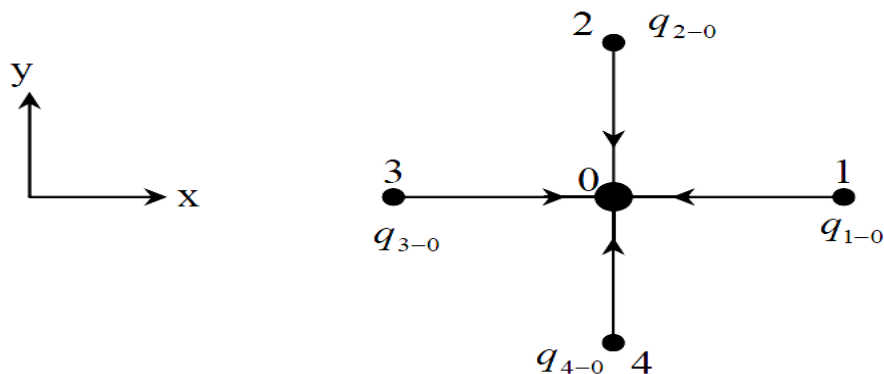


Fig. II.4. Schéma de discrétisation avec la méthode des différences finies.

### II-2-1-3. Concept de résistance thermique

Jusqu'à présent, nous montrons comment les troubles de la ligne peuvent être résolus à l'aide de différences finies dans des équations différentielles. Une équation est formulée pour chaque nœud et l'ensemble d'équations libérées pour des températures dans tout le corps. Lors de la formulation des équations, nous avons également pu utiliser un concept de résistance pour écrire la transmission thermique entre les nœuds (1). Il prend notre nœud d'intérêt avec (i) Nous nous sommes souscrits et cohérents avec l'indice (j), nous avons la situation générale d'un nœud pilote, qui est indiqué sur la figure suivante. Dans l'état d'équilibre, la vie nette devrait être nulle sur le nœud (i), où [2];

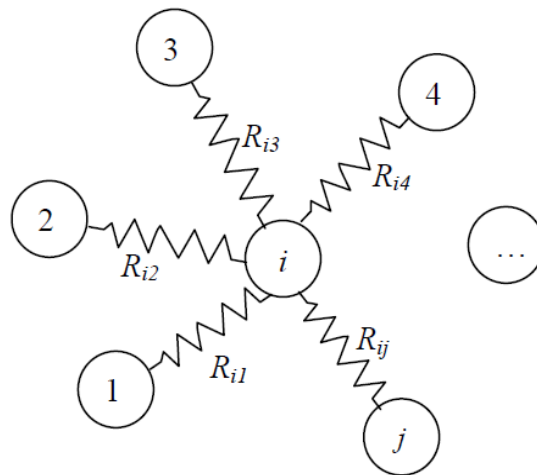


Fig. II. 5 La conduction en un nœud

$$q_i + \sum_j \frac{T_j - T_i}{R_{ij}} = 0 \quad (\text{II. 14})$$

Ce qui permet d'écrire :

$$T_i = \frac{q_i + \sum_j (T_j / R_{ij})}{\sum_j (1 / R_{ij})} \quad (\text{II. 15})$$

Où  $q_i$  représente le flux apporté à l'élément de volume en (i) par une source de chaleur interne, ou par des mécanismes autres que la conduction et la convection (ces deux derniers étant représentés par des résistances  $R_{ij}$ ).

$R_{ij}$  représente une résistance thermique entre deux nœuds:

Soit par *conduction* 
$$R_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{k \cdot A_{ij}}$$

Soit par *convection* 
$$R_{ij} = \frac{1}{h_{ij} \cdot A_{ij}}$$

$\delta_{ij}$  : est la distance franchie par la conduction entre les nœuds  $i$  et  $j$

$A_{ij}$  : est la surface normale à  $\delta_{ij}$ , c'est-à-dire aux lignes de flux conductif ou convectif.

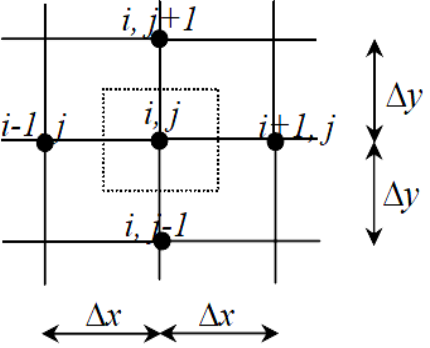
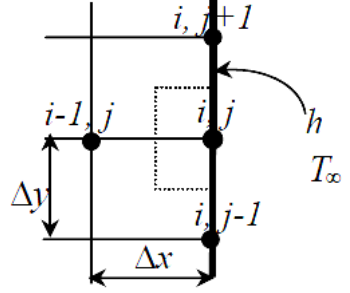
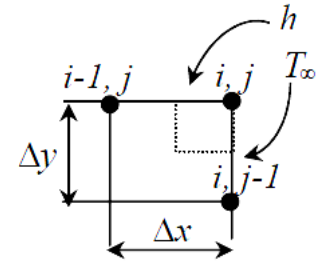
L'équation (II.14) ne fait que traduire thermiquement la loi des nœuds intérieurs:

$$\frac{T_1 - T_0}{R_x} + \frac{T_3 - T_0}{R_x} + \frac{T_2 - T_0}{R_y} + \frac{T_4 - T_0}{R_y} + q_0 = 0 \quad (\text{II. 16})$$

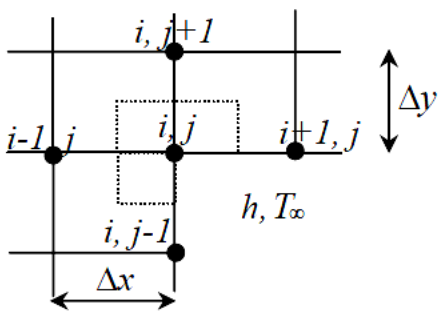
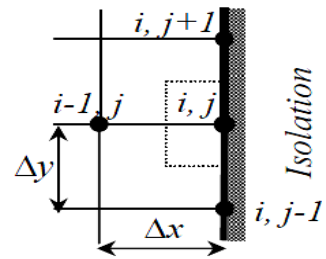
$$R_x = \frac{\Delta_x}{k(\Delta_y \cdot 1)} = \frac{\Delta_x}{k \cdot \Delta_y} ; \quad R_y = \frac{\Delta_y}{k(\Delta_x \cdot 1)} = \frac{\Delta_y}{k \cdot \Delta_x}$$

$\Delta_x$  : distance entre deux nœuds selon l'axe  $x$ .

$\Delta_y$  : distance entre deux nœuds selon l'axe  $y$ .

Position du nœud	Equation nodale & résistance thermique associée
<p>a) Nœud Interne</p> 	$\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} = 0$ <p>avec :</p> $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1}$ $R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1} ; R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1}$ <p><math>\Delta z = 1</math> (l'épaisseur selon (z) égale à l'unité)</p>
<p>b) Nœud avec condition de convection en surface</p> 	$\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + \frac{(T_\infty - T_{i,j})}{R_x(i+1,j)} = 0$ <p>avec ;</p> $R_x(i+1,j) = \frac{1}{h \Delta y \cdot 1} ; R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1}$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$
<p>c) Nœud sur un coin externe</p> 	$\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_\infty - T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + \frac{(T_\infty - T_{i,j})}{R_x(i+1,j)} = 0$ <p>avec ;</p> $R_x(i+1,j) = \frac{2}{h \cdot \Delta y \cdot 1} ; R_y(i,j+1) = \frac{2}{h \cdot \Delta x \cdot 1}$ $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$

**Table II. 1 (Suite)**

<p>d) Nœud sur un coin interne</p> 	$\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + h \cdot \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_{i,j}) + h \cdot \frac{\Delta y}{2} (T_\infty - T_{i,j}) = 0$ <p>avec ;</p> $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \cdot 1}$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$
<p>e) Nœud sur une surface isolée (h=0)</p> 	$\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} = 0$ <p>avec ;</p> $R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \infty$ $R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$

## II-2-2. Les Méthodes Numériques en Régime Variable

### (Instationnaire)

Du point de vue mathématique, il s'agit des méthodes numériques utilisées dans les équations dérivées partielles paraboliques, dans lesquelles sur la ligne, le temps alimente également les dimensions spatiales (1).

Le concept général de la méthode numérique appliquée aux problèmes d'instations est identique à celui que nous avons déjà trouvé pour les problèmes fixes: diviser les matières dans les régions du centre de laquelle on place un nœud; performer pour chacun des nœuds une évaluation. Pour chacun des nœuds thermiques lorsque la température du nœud a considéré celle de ses voisins et des propriétés thermiques du matériau. Au cas où il s'agit d'un terme capacitif qui représente l'augmentation de l'énergie interne pendant un intervalle de temps.

Les équations qui régissent le phénomène de la ligne bidimensionnelle dans le régime variable pour  $T(x, y, t)$  sont les suivantes

Système sans source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 17})$$

Système avec source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 18})$$

Ici ;

$q$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ) : est le flux apporté par une source de chaleur.

Est  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) la diffusivité thermique, ( $k$ ) est le coefficient de conductivité thermique, ( $\rho$ ) est la masse volumique et ( $c$ ) est la chaleur spécifique.

La variable temporelle est, de même que les variables spatiales, discrétisée en différences finies. La figure (II. 5) montre la relation température-temps d'un nœud ( $n$ ).

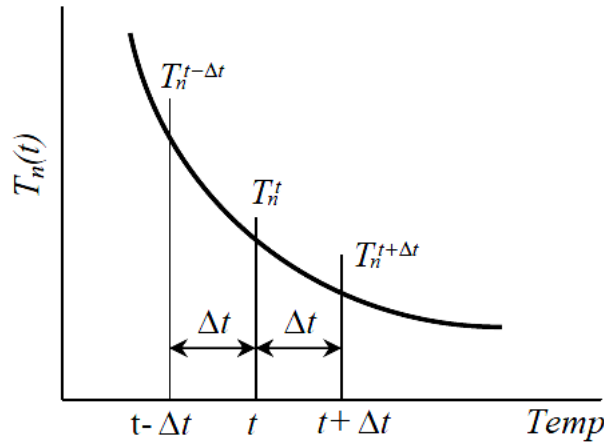


Fig. II. 6 L'histoire température-temps d'un point nodale

La dérivée première de la température par rapport au temps est discrétisée ainsi :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_n^{t+\Delta t} - T_n^t}{\Delta t} \quad (\text{II. 19})$$

La variable temps est discrétisée en des différences finies progressives.

Et par conséquent l'équation (II. 18) peut être discrétisée, ainsi :

$$\frac{T_{i+1,j,k}^t + T_{i-1,j,k}^t - 2T_{i,j,k}^t}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^t + T_{i,j-1,k}^t - 2T_{i,j,k}^t}{(\Delta y)^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j,k}^{t+\Delta t} - T_{i,j,k}^t}{\Delta t} \quad (\text{II. 20})$$

Ce schéma est dit explicite (EFTCS), ou :

$$\frac{T_{i+1,j}^{t+1} + T_{i-1,j}^{t+1} - 2T_{i,j}^{t+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1}^{t+1} + T_{i,j-1}^{t+1} - 2T_{i,j}^{t+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (\text{II. 21})$$

Le schéma ci-dessus est dit implicite (IFTCS).

Notre but est d'écrire nos équations en utilisant le concept de résistance thermique ce qui nous mène à réécrire l'équation (II. 14) comme suit [2] :

$$q_i + \sum_j \frac{T_j^{p+1} - T_i^{p+1}}{R_{ij}} = C_i \frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta t} \quad (\text{II. 22 a})$$

On remarque que les termes de gauche sont les mêmes que ceux de l'équation (II. 14).

Il faut noter que  $C_i$  : est la capacité thermique représentant l'augmentation d'énergie interne d'un nœud pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  [1].

$C_i = \rho \cdot c \cdot \Delta V_i$  ;  $\Delta V_i$  : est l'élément de volume.

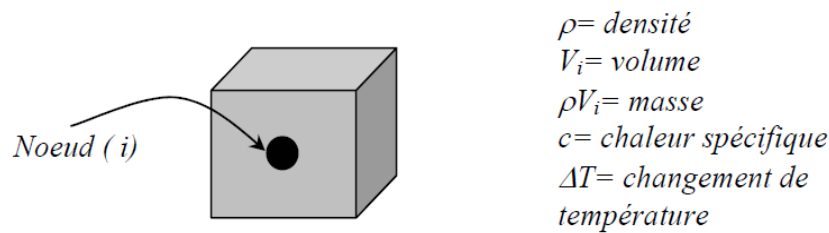


Fig. II. 7 Le changement en énergie interne d'un élément de volume entourant un nœud pendant un intervalle de temps  $\Delta T$  [24].

Le changement en énergie interne d'un élément de volume d'un nœud pendant un intervalle de temps est donné par la relation suivante :

$$\Delta U = \rho V_i c \Delta T = \rho V_i c (T_i^{t+1} - T_i^t) \quad (\text{II. 22 b})$$

Les résistances thermiques pour différentes géométries et conditions aux limites sont données au tableau (II. 1).

## II-3. Conduction de Chaleur en 3-Dimensions

Les équations qui gouvernent le phénomène de conduction tridimensionnel en régime variable pour  $T(x, y, z, t)$  sont :

Système sans source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 23})$$

Système avec source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 24})$$

Ici  $q$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ) est le flux apporté par une source de chaleur  $a = \frac{k}{\rho c}$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) est la capacité thermique volumétrique.

### II-3-1. Maillage numérique

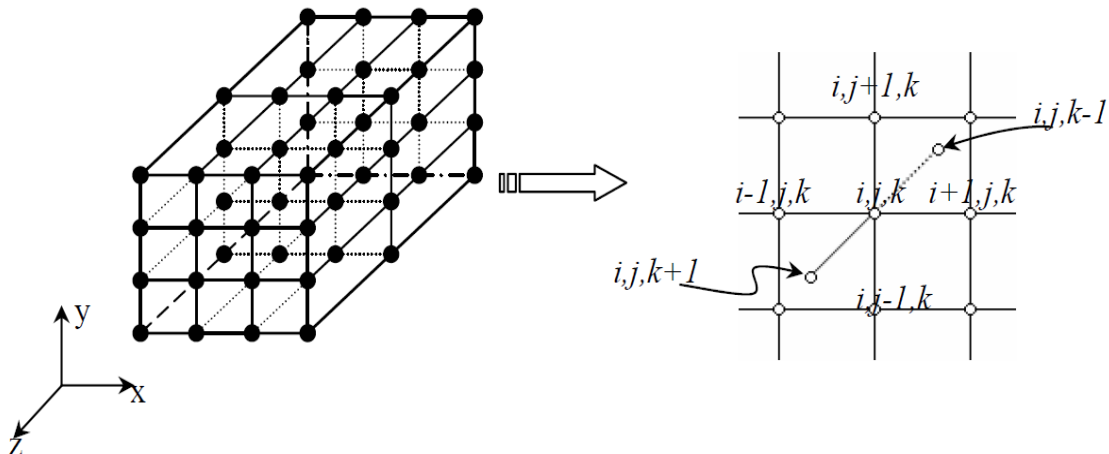


Fig. II-8 Représentation 3D d'un modèle simulé par la méthode des différences finies.

### II-3- 2. Résistances thermiques

L'élément volumique  $(x, y, z)$  est coupé en un réseau de mailles dans l'espace, où chaque nœud a six résistances thermiques, deux selon chaque axe.

Soit  $P(i, j, k)$  le nœud d'intérêt.

$R_x(i-1, j, k)$  : est la résistance thermique selon ( $x$ ) entre les nœuds ( $i, j, k$ ) et ( $i-1, j, k$ )

$R_x(i+1, j, k)$  : est la résistance thermique selon ( $x$ ) entre les nœuds ( $i, j, k$ ) et ( $i+1, j, k$ )

Même chose pour les autres axes ;

$R_y(i, j-1, k)$  et  $R_y(i, j+1, k)$  sont des résistances thermiques selon l'axe  $y$ .

$R_z(i, j, k-1)$  et  $R_z(i, j, k+1)$  sont des résistances thermiques selon l'axe  $z$ .

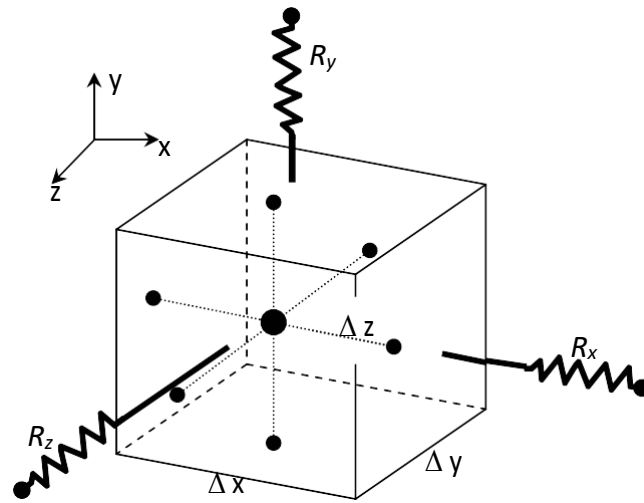


Fig. II. 9 Volume d'élément de résistance en 3-D [2].

On appelle :

$T(i, j, k)$ : température au nœud  $P(i, j, k)$

$R(i, j, k)$ : Résistance thermique du nœud  $P(i, j, k)$

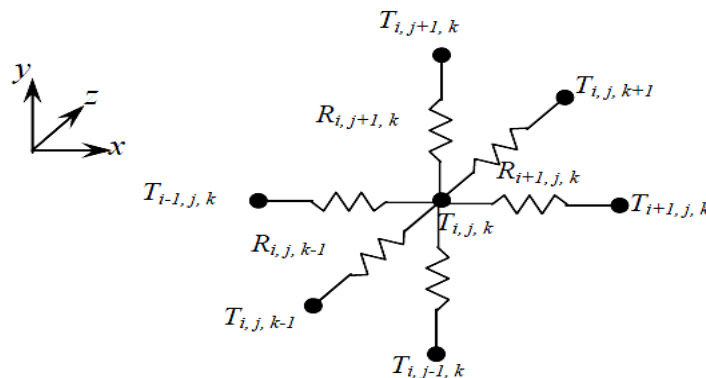


Fig. II. 10 Résistances thermiques reliées au nœud ( $i, j, k$ ).

En appliquant la loi des bilans thermiques ou l'équation des nœuds (II. 18), on

peut donner l'expression de résistance thermique du nœud  $(i, j, k)$  et les nœuds du voisinage.

**Tableau II. 2 Les résistances thermiques pour nœuds internes dans différent systèmes de coordonnées**

	Coordonnées <i>Cartésiennes</i>	Coordonnées <i>Cylindriques</i>	Coordonnées <i>Sphériques</i>
Nomenclature	$x, i$	$r, i$	$r, i$
Et indices	$y, j$ $z, k$	$\theta, j$ $z, k$	$\theta, j$ $\phi, k$
Élément de volume $\Delta V$	$\Delta x \Delta y \Delta z$	$r_m \Delta r \Delta \theta \Delta z$	$r_m^2 \sin \phi \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$
$R_x(i+1, j, k)$	$\frac{\Delta x}{\Delta y \Delta z \cdot k}$	$\frac{\Delta r}{(r_m + \Delta r / 2) \Delta \theta \Delta z \cdot k}$	$\frac{\Delta r}{(r_m + \Delta r / 2)^2 \sin \phi \Delta \theta \Delta \phi \cdot k}$
$R_x(i-1, j, k)$	$\frac{\Delta x}{\Delta y \Delta z \cdot k}$	$\frac{\Delta r}{(r_m - \Delta r / 2) \Delta \theta \Delta z \cdot k}$	$\frac{\Delta r}{(r_m - \Delta r / 2)^2 \sin \phi \Delta \theta \Delta \phi \cdot k}$
$R_y(i, j+1, k)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x \Delta z \cdot k}$	$\frac{r_m \Delta \theta}{\Delta r \Delta z \cdot k}$	$\frac{\Delta \theta \sin \phi}{\Delta r \Delta \phi \cdot k}$
$R_y(i, j-1, k)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x \Delta z \cdot k}$	$\frac{r_m \Delta \theta}{\Delta r \Delta z \cdot k}$	$\frac{\Delta \theta \sin \phi}{\Delta r \Delta \phi \cdot k}$
$R_z(i, j, k+1)$	$\frac{\Delta z}{\Delta x \Delta y \cdot k}$	$\frac{\Delta z}{r_m \Delta \theta \Delta r \cdot k}$	$\frac{\Delta \phi}{\sin(\phi + \Delta \phi / 2) \Delta r \Delta \theta \cdot k}$
$R_z(i, j, k-1)$	$\frac{\Delta z}{\Delta x \Delta y \cdot k}$	$\frac{\Delta z}{r_m \Delta \theta \Delta r \cdot k}$	$\frac{\Delta \phi}{\sin(\phi + \Delta \phi / 2) \Delta r \Delta \theta \cdot k}$

Les équations indiquées dans le tableau ci-dessus sont valables pour tous **les nœuds internes**. Pour les nœuds frontaliers, les équations sont modifiées comme le cas échéant. Considérez les cas les plus pratiques:

## 1/ Nœud avec condition de convection en surface

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h\Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}$$

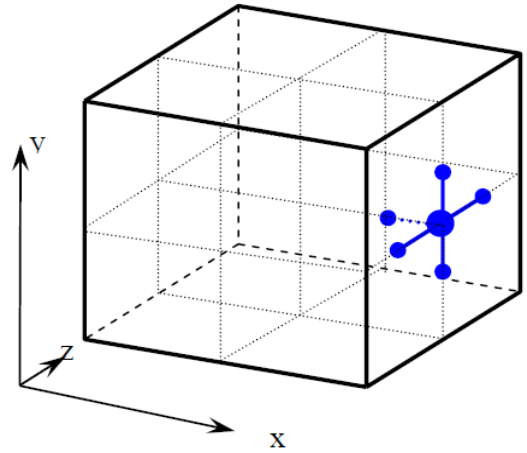


Fig. II. 11 Nœud avec condition de convection en surface

## 2/ Nœud sur une surface isolée

$$R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i+1,j,k) = \infty$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}$$

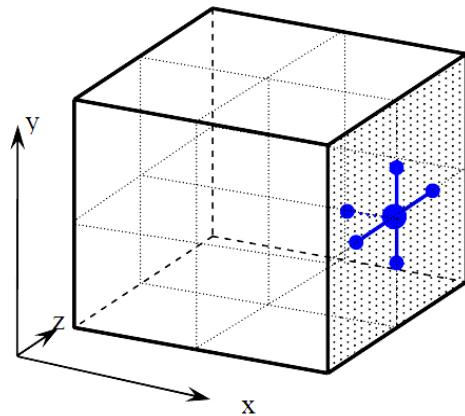


Fig. II. 12 Nœud sur une surface isolée

**3/ Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \frac{\Delta z}{2}} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta z}{2}} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}}$$

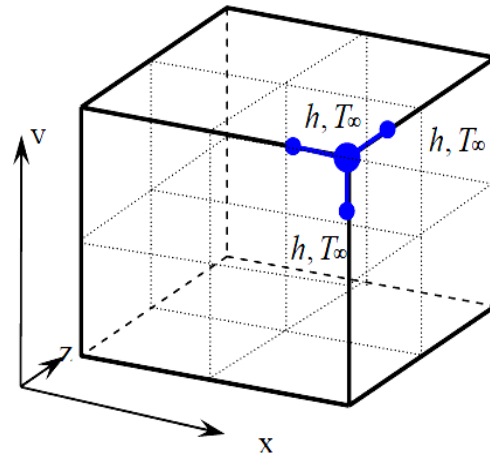


Fig. II. 13 Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface

**4/ Nœud sur une arrête externe avec condition de convection en surface**

$$R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z} ; R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}}$$

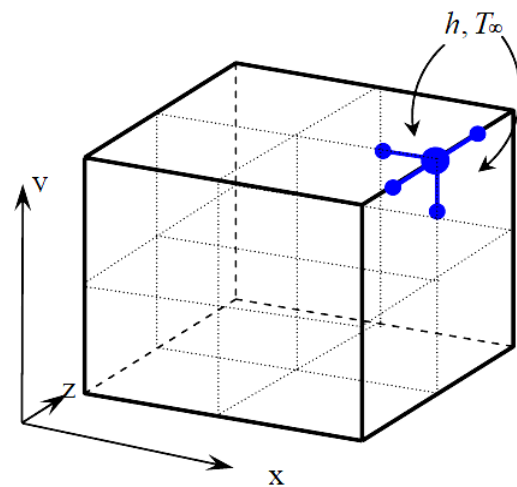


Fig. II. 14 Nœud sur une arrête externe avec condition de convection en surface

**5/ Nœud sur une arête interne avec condition de convection en surface**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h\Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k\Delta x \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k\Delta x \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\Delta x \cdot \Delta y}$$

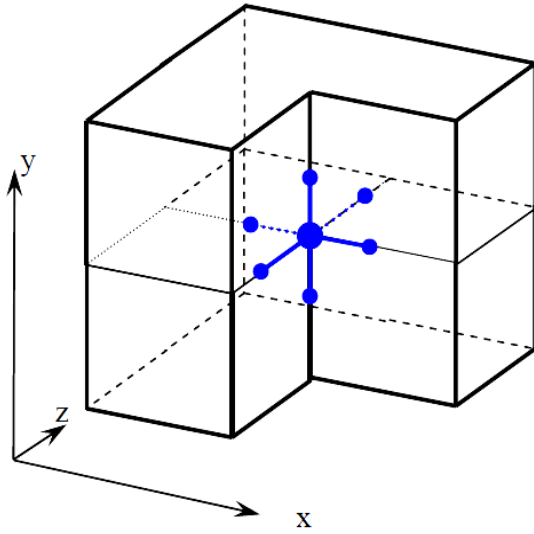


Fig. II. 15 Nœud sur une arête interne avec condition de convection en surface

**6/ Nœud sur un coin interne**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{4\Delta x}{3 \cdot k\Delta y \cdot \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\Delta x \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k\Delta x \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{4 \cdot \Delta z}{3 \cdot k\Delta x \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\Delta x \cdot \Delta y}$$

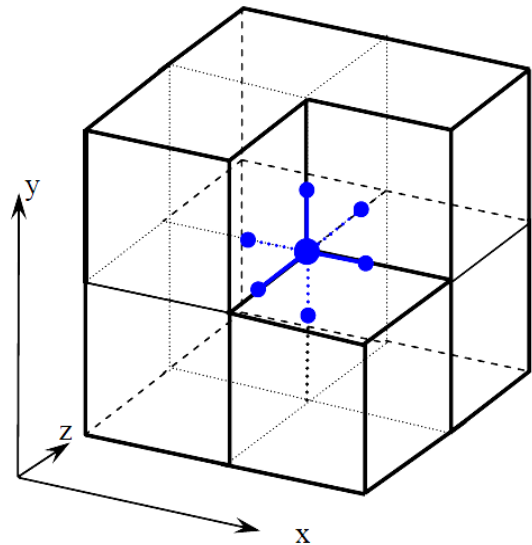


Fig. II. 16 Nœud sur un coin interne

## 7/ Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \cdot \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{4}{3 \cdot h \Delta x \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k \Delta x \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \Delta x \cdot \frac{\Delta y}{2}}$$

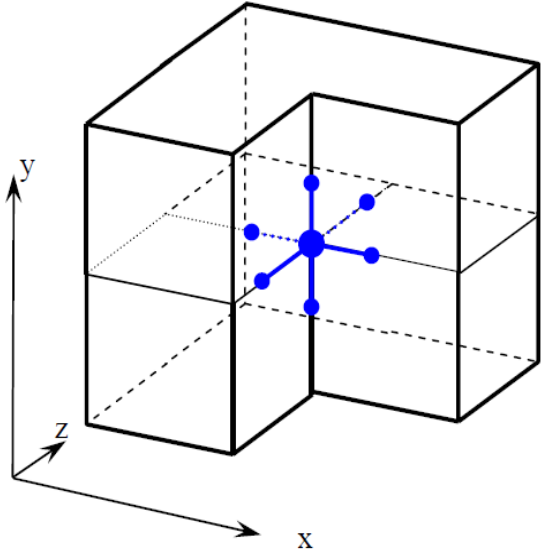


Fig. II. 17 Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface

### II-3- 3. Bilans thermiques

Un équilibre thermique est calculé pour chaque nœud. Le flux thermique total au nœud  $(i, j, k)$  depuis les six nœuds du voisinage est  $Q_{i,j,k}$  (W) :

$$Q_{i,j,k} = R_x(i-1,j,k) \cdot (T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k}) + R_x(i+1,j,k) \cdot (T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}) + R_y(i,j-1,k) \cdot (T_{i,j-1,k} - T_{i,j,k}) + R_y(i,j+1,k) \cdot (T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}) + R_z(i,j,k-1) \cdot (T_{i,j,k-1} - T_{i,j,k}) + R_z(i,j,k+1) \cdot (T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}) \quad (\text{II. 25})$$

ou :

$$Q_{i,j,k} = q_{i-1,j,k} + q_{i+1,j,k} + q_{i,j-1,k} + q_{i,j+1,k} + q_{i,j,k-1} + q_{i,j,k+1} \quad (\text{II. 26})$$

Le changement d'énergie d'un nœud est de variations telles que celles relatives aux sources de chaleur ou à d'autres mécanismes. Ce changement est effectué en ajoutant ou en soustrayant dans la variable.  $Q_{i,j,k}$  comme le terme  $q^m \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$ .

Un autre avantage de l'introduction de  $(Q_{i,j,k})$  est que moins de données doivent être attribuées à la mémoire de l'ordinateur.

## II-4. Conduction de chaleur en coordonnées cylindriques

L'équation générale de la conduction dans un système de coordonnées cylindriques est :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 28})$$

### II-4. 1 Maillage en coordonnées cylindriques

Dans cette étude, nous nous concentrerons sur des systèmes symétriques de l'axe et, par conséquent, un processus thermique radial et vertical, rotatif et symétrique est pris en compte par l'axe ( $z$ ). La température le long du rayon  $r$  et dans la distance verticale  $z$  dans le temps  $t$  est notée par  $T(r, z, t)$ .

Dans la direction radiale, la radio  $R$  est divisée en intervalles d'épaisseur  $\Delta r$  et dans la direction verticale la distance  $z$  est divisée en intervalles d'épaisseur  $\Delta z$ .

Dans le sens radiale, on a :

$$r_1 = r_{\text{int}} + \Delta r ; r_i = r_{i-1} + \Delta r ; r_{\text{ext}} = r_i + n\Delta r$$

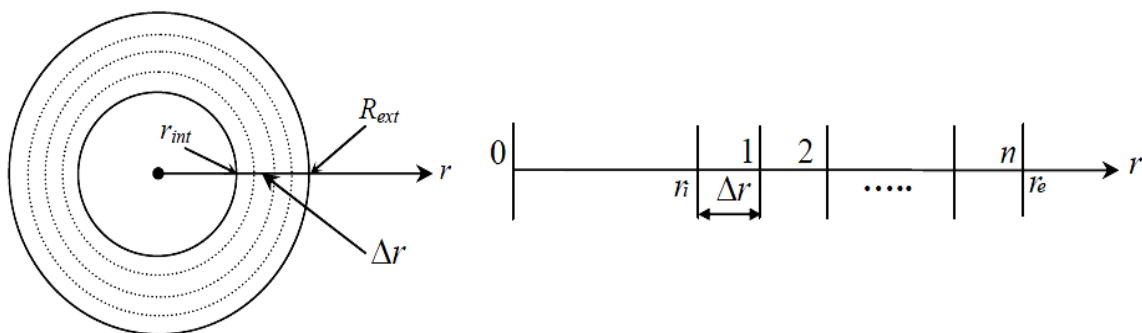


Fig. II. 18 Maillage en sens radiale

Dans la direction verticale ( $z$ ), le maillage peut être conduit comme étant en 2-D:

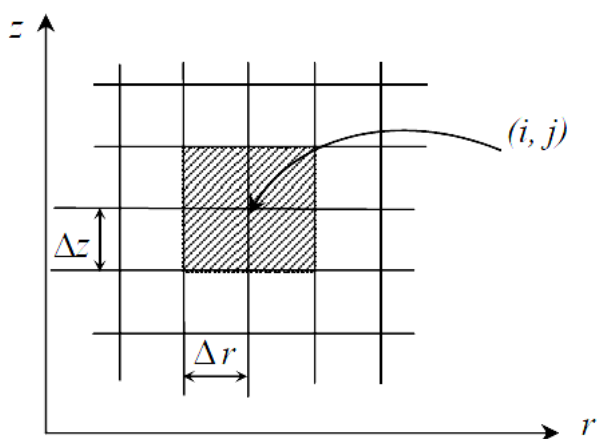


Fig. II. 19 Maillage en coordonnées cylindriques ( $r, z$ )

Pour le cas des cylindres courts et pleins et si le problème admet une conversion en 2-D, le maillage le plus utilisé est celui en ( $r, \phi$ ).

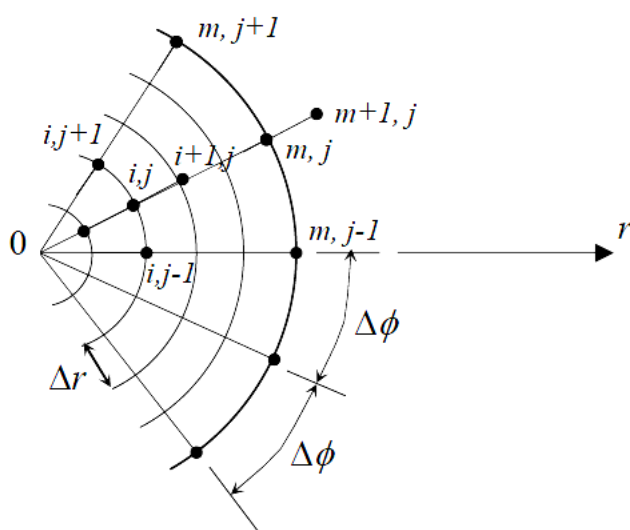


Fig. II. 20 Maillage en coordonnées cylindriques ( $r, \phi$ ) [17].

## II-4. 2. Résistances thermiques en coordonnées cylindriques

La résistance thermique selon ( $z$ ) est donnée par :

$$R_z(i, j-1) = \frac{\Delta z}{2\pi \cdot k \cdot r_i \cdot \Delta r} = R_z(i, j+1)$$

La résistance thermique selon ( $r$ ) est donnée par :

$$R_r(i-1, j) = \frac{1}{2\pi \cdot k \cdot \Delta z} \ln \frac{R_i}{R_{i-1}}$$

$$R_r(i+1, j) = \frac{1}{2\pi \cdot k \cdot \Delta z} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}$$

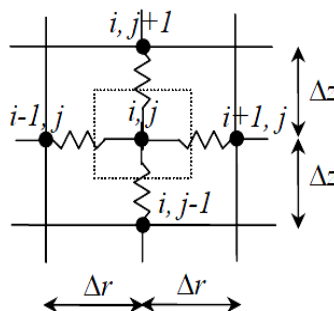


Fig. II. 21 Résistances thermiques autour du nœud ( $i, j$ )

## II-4. 3. Flux thermiques en coordonnées cylindriques

Sur la base du paragraphe précédent, on peut écrire :

$$q_{i-1, j} = \frac{\Delta T}{R_r(i-1, j)} = \frac{(T_{i-1, j} - T_{i, j})}{\frac{1}{2\pi \cdot k \cdot \Delta z} \ln \frac{R_i}{R_{i-1}}} = \frac{2\pi \cdot k \cdot \Delta z (T_{i-1, j} - T_{i, j})}{\ln \frac{R_i}{R_{i-1}}} \quad (\text{II. 29})$$

$$q_{i, j-1} = \frac{\Delta T}{R_z(i, j-1)} = \frac{(T_{i, j-1} - T_{i, j})}{\frac{\Delta z}{2\pi \cdot k \cdot r_i \cdot \Delta r}} = \frac{2\pi \cdot k \cdot r_i \cdot \Delta r (T_{i, j-1} - T_{i, j})}{\Delta z} \quad (\text{II. 30})$$

L'équation d'équilibre thermique devient pour le cas général :

$$(q_{i-1, j} + q_{i+1, j} + q_{i, j-1} + q_{i, j+1}) \Delta t = C_{i, j} \cdot 2\pi \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta z \cdot (T_{i, j}^{t+\Delta t} - T_{i, j}^t) \quad (\text{II. 31})$$

## II-5. Les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques

Par conséquent, le problème est discrètement dans un système d'équations pouvant être résolues numériquement. Le succès considérable de cette méthode a largement répondu et joue toujours un rôle important dans lequel l'analyse numérique est, en fait, avec sa simplicité, en particulier pour la conception du maillage et la vitesse de résolution du système d'équations. Il existe plusieurs méthodes de résolution numérique des systèmes d'équations. Le choix du processus du système d'équation à traiter dépend de la structure de la matrice et de la taille du problème.

Il existe deux méthodes numériques:

**Méthode directe:** qui se définit sous la forme d'équation de récurrence et conduit à la solution en un nombre fini d'étapes.

**Méthode indirecte (itérative):** qui évalue la solution exacte du problème par approximations successives de celle-ci.

## II-2 Comparaison des différentes méthodes

Les deux facteurs de comparaison à considérer lorsqu'ils ont le choix entre plusieurs méthodes pour résoudre un système d'équations sont la quantité de mémoire occupée et le calcul du temps de l'ordinateur.

Les méthodes directes de solution d'un système de  $N$  équations linéaires, avec une largeur de bande de la matrice de  $(2n+1)$  exigent au moins  $N(2n+1)$  emplacements de mémoire tandis que le temps de calcul est en gros égal à  $N.n^2$ .

Les méthodes indirectes (répétées) ont besoin d'un principal espace mémoire, car elles ne participent pas uniquement aux coefficients non nuls des matrices. Ils sont particulièrement indiqués lorsque les équations sont non linéaires ou lorsque l'espace mémoire est fortement limité.

À la fin, les évaluations lorsqu'elles sont meilleures ou meilleures ou des méthodes sont les meilleures, dépendent non seulement des caractéristiques intrinsèques du problème étudié, mais également des possibilités de l'ordinateur utilisé. C'est pourquoi ces appréciations peuvent varier rapidement avec le temps.

Jusqu'à récemment, la position généralement acceptée était la suivante,  $N$  désigne le nombre d'équations de système: - les méthodes directes sont les plus appropriées pour les petites valeurs et une matrice (qui est formée par des coefficients denses) (c'est-à-dire qu'il a peu d'éléments zéro) .

- Les méthodes indirectes sont plus appropriées pour les grandes valeurs et une matrice dispersée (c'est-à-dire qu'ils ont de nombreux éléments zéro).

- La préférence est administrée à des méthodes indirectes pour de très grandes valeurs de  $N$  et aussi pour les grandes valeurs de  $N$  avec des matrices dispersées mais non diagonales.

Les problèmes conducteurs ne correspondent pas normalement à de telles matrices (tri-diagonale).

### **II-3 Méthode de Gauss-Seidel:**

Parmi les méthodes itératives, qu'on va utiliser pour résoudre un système d'équation linéaires la méthode de **GAUSS-SEIDEL**, qui ne diffère pas beaucoup des autres méthodes, que par l'emploi immédiat de  $X(k)$  qui fait de nouvelles estimations  $X^{(k+1)}$  à l'itération  $(k+1)$ .

## II-3-1 Algorithme de Gauss-Seidel

Algorithme de Gauss-Seidel pour la résolution d'un système d'équations linéaires  $AX = B$

$$\begin{array}{l}
 0/ \text{ Étant données } A, B, X^{(0)}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, K_{\max} \\
 1/ x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}} \\
 2/ \text{ Arrêter Si } |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon_1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0/ \\ 1/ \\ 2/ \end{array}} \right\} K=1, \dots, K_{\max}$$

$$\text{Où } \frac{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{|x_i^{(k+1)}|} < \varepsilon_2$$

## II-3-2 Conditions de convergence

On montre que pour qu'il y ait convergence de cette méthode, il faut et il suffit que la matrice soit diagonale strictement dominante.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (i \neq j), i=1, n$$

L'algorithme de **GAUSS-SEIDEL** est comme suit:

1. Résoudre chaque équation pour l'inconnu diagonal principal.
2. Faites une estimation initiale pour tous les inconnus.
3. Les calculs commencent avec l'usage de l'estimation initiale pour calculer une première approximation pour chacun des inconnus diagonaux principaux.
4. Dans chaque calcul, les valeurs les plus récentes (avant dernière itération) sont utilisées pour déterminer les valeurs dans la dernière itération. Et le calcul itératif se poursuit de cette manière.
5. La procédure est continuée jusqu'à un critère de la convergence spécifié est satisfait pour tous les inconnus.

Le cas général de  $N$  équation, la  $(k+1)$  ième itération peut être écrite

$$T_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ d_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} T_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} T_j^{(k)} \right\} \quad \text{pour } i=1, N \quad (\text{II. 32})$$

## II-4 Méthode de relaxation

Cette méthode de répétition dans les mêmes avantages que la méthode Gauss-Seidel, mais converge plus rapidement. Pour cela introduisons le paramètre  $\omega \neq 0$ .

Dans cette méthode, la procédure itérative s'écrit:

$$T_i^{(k+1)} = \omega \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{terme à droite de Gauss-Seidel} \\ \text{équation (II. 32)} \end{array} \right\} + (1-\omega) \cdot T_i^{(k)} \quad \text{pour } i=1, N \quad (\text{II. 32})$$

Ici,  $\omega$  est le paramètre de relaxation.

Il est clair que, le cas  $\omega=1$  correspond à l'itération de Gauss-Seidel. Le choix de ce paramètre influe sur la vitesse de convergence, mais la détermination de sa valeur optimale est difficile. Une expérience en numérique est nécessaire pour choisir la valeur de  $\omega$  pour un problème donné. Le choix optimal de  $\omega$  permet de réduire nettement le temps de calcul surtout dans le cas d'un grand nombre d'équations [17].

Si  $\omega < 1$ , on détermine la méthode de sous-relaxation.

Si  $\omega > 1$ , on détermine la méthode de sur-relaxation.

### II-4-1 Conditions de convergence

On cherche les limites de  $\omega$  entre lesquelles on est sûr de la convergence de la méthode. On étudiera brièvement 3 cas :

#### 1°/ Cas d'une matrice quelconque

**Théorème :** On montre que pour toute matrice  $A$  une condition nécessaire de convergence est que :  $0 < \omega < 2$ .

#### 2°/ Cas d'une matrice à diagonale dominante

**Théorème :** Une condition suffisante de convergence est que  $A$  soit à diagonale dominante avec :  $0 < \omega \leq 1$ .

### 3°/ Cas d'une matrice symétrique définie positive

**Théorème :** Pour une matrice symétrique, définie positive la méthode de relaxation est convergente si et seulement si :  $0 < \omega < 2$ .

## II-4-2 Critères d'arrêts des itérations de Gauss-Seidel et de Relaxation

Il est rappelé que la méthode *Gauss-Seidel* est un cas particulier de la méthode de relaxation  $\omega=1$ . On arrête le calcul itératif si l'une des conditions suivantes est vérifiée.

$$1^\circ/ \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon_1$$

$$2^\circ/ \frac{\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|}{\left| x_i^{(k+1)} \right|} < \varepsilon_2 \quad \text{pour } i=1, n$$

## II-4 Avantages des méthodes numériques

- 1- Faible coût
- 2- Rapidité de calcul
- 3- Information complète
- 4- En calcul numérique, les conditions réelles peuvent être simulées facilement, et on a pas besoin d'avoir recours à des prototypes à petites échelles.
- 5- Simulation des conditions idéales.

## II-5 Désavantages des méthodes numériques

- 1- Si les résultats qu'on veut obtenir sont limités, les calculs coûteront plus chers que l'expérimentation, il est difficile d'obtenir une solution numérique pour des géométries complexes, des non linéarités, des pertes, des variations sensibles de propriétés des fluides.....
- 2- Quand un problème mathématique admet plus d'une solution, ce n'est pas facile de déterminer la valeur réelle.
- 3- L'inexistence d'équations mathématiques adéquates pour la description des phénomènes (tels que les écoulement turbulents complexes ou certains écoulements non Newtoniens, .....).

## **Chapitre III :**

# **Résolution numérique de l'équation de la chaleur**

Dans le présent chapitre, on va discrétiser les équations différentielles de la chaleur et les conditions aux limites associées, vu au chapitre précédent par la méthode des différences finies en un système d'équations algébriques et ce pour faciliter leurs résolution.

### III- 1 Cas bidimensionnel

#### III-1-1 Régime permanent

De l'équation (II. 11) comme suit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \quad (\text{III. 1})$$

avec :

$$R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1}$$

$$R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1} ; R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1}$$

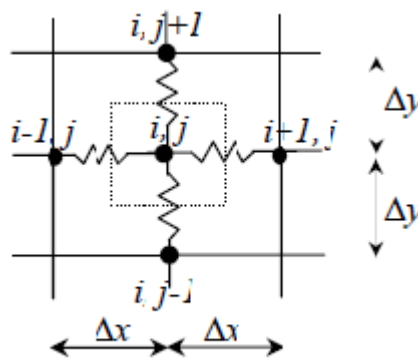


Fig. III. 1 Résistances thermiques entourant un nœud

On appelle :

$T(i, j)$  : température au nœud  $P(i, j)$

$R(i, j)$  : résistance thermique du nœud  $P(i, j)$

Avec :

$$R(i,j) = \frac{1}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}} \quad (\text{III. 3})$$

### III-1-1-1 Equation des nœuds intérieurs et aux frontières

#### a) Nœuds internes

Equations aux différences finies pour les nœuds du domaine Elle peut être obtenue en écrivant l'équation de la résistance thermique d'un élément Le volume ( $\Delta x, \Delta y$ ) et l'épaisseur de l'unité entourant le nœud P (i, j) (figure III.1).

$$\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + q''' = 0$$

Cette formule exprime que la somme algébrique des densités des flux traversant la limite de cet élément et de la puissance due aux sources internes est nulle De l'équation précédente, on tire :

$$T_{i,j} = \frac{q'''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}}{R_y(i,j+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}} \quad (\text{III. 4})$$

Où :  $q'''(i, j)$  (W/m<sup>3</sup>) est le flux fourni par une source de chaleur

#### b- Conditions aux limites

Le tableau suivant regroupe les différentes équations d'un nœud soumis à des conditions aux limites variables

##### b-1 Température imposée

Cette condition n'introduit pas d'équations supplémentaires, il suffit de reporter dans le système des équations relatives aux noeuds internes, les valeurs des températures imposées aux noeuds appartenant à la frontière.

## b-2 Conditions aux limites diverses

### a) Noeud Interne

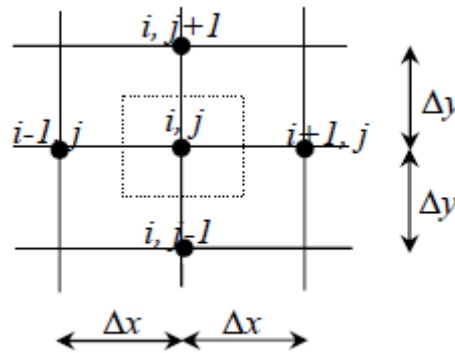
$$\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} = 0$$

avec :

$$R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1}$$

$$R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1} ; R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \cdot \Delta x \cdot 1}$$

$\Delta z = 1$  (l'épaisseur selon (z) égale à l'unité)



Température recherchée :

$$T_{i,j} = \frac{q^m(i,j) + \frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}}{R_y(i,j+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}}$$

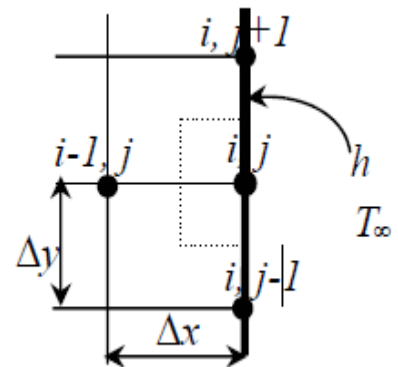
**b) Noeud avec condition de convection en surface**

$$\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + \frac{(T_\infty-T_{i,j})}{R_x(i+1,j)}=0$$

avec ;

$$R_x(i+1,j) = \frac{1}{h\Delta y.1} ; \quad R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k\Delta y.1}$$

$$R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2}.1} ; \quad R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2}.1}$$



Température recherchée :

$$T_{i,j} = \frac{q^m(i,j) + \frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_\infty}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}}{R_y(i,j+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}}$$

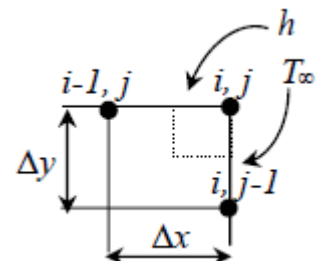
**c) Noeud sur un coin externe**

$$\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_\infty-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + \frac{(T_\infty-T_{i,j})}{R_x(i+1,j)}=0$$

avec :

$$R_x(i+1,j) = \frac{2}{h.\Delta y.1} ; \quad R_y(i,j+1) = \frac{2}{h.\Delta x.1}$$

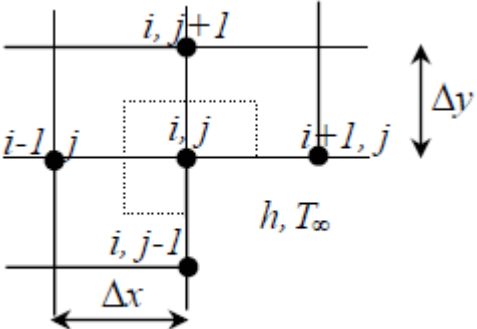
$$R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k\frac{\Delta y}{2}.1} ; \quad R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2}.1}$$



Température recherchée :

$$T_{i,j} = \frac{q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_\infty}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_\infty}{R_y(i,j+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}}$$

d) Noeud sur un coin interne

$$\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} + h \cdot \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_{i,j}) + h \cdot \frac{\Delta y}{2} (T_\infty - T_{i,j}) = 0$$


avec ;

$$R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \cdot 1} ; R_c(i) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2}}$$

$$R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \Delta x \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; R_c(j) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2}}$$

Température recherchée

$$T_{i,j} = \frac{q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}}{R_y(i,j+1)} + h \left( \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2} \right) T_\infty}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} + \frac{h \cdot \Delta x}{2} + \frac{h \cdot \Delta y}{2}}$$

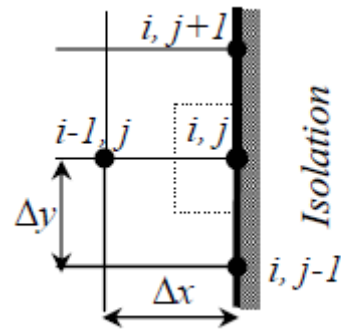
e) Noeud sur une surface isolée ( $h=0$ )

$$\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{R_y(i,j+1)} = 0$$

avec ;

$$R_x(i-1,j) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot 1} ; R_x(i+1,j) = \infty$$

$$R_y(i,j+1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1} ; R_y(i,j-1) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot 1}$$



Température Recherchée

$$T_{i,j} = \frac{q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}}{R_x(i-1,j)} + 0 + \frac{T_{i,j-1}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}}{R_y(i,j+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + 0 + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)}}$$

### III-2 Régime non-permanent

L'équation générale de la de la chaleur en régime variable s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q''}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

#### III-2-1 Méthode explicite (FTCS)

En terme de résistances thermiques l'équation s'écrit :

$$q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}^t - T_{i,j}^t}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^t - T_{i,j}^t}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^t - T_{i,j}^t}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^t - T_{i,j}^t}{R_y(i,j+1)} = C(i,j) \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (\text{III. 5})$$

avec :

$C(i,j)$ : capacité thermique ( $J/m^3K$ ).

La capacité thermique du noeud  $(i,j)$  est égale à :  $Ci, j\Delta x\Delta y$  par unité de longueur perpendiculaire au plan  $(x, y)$ .

De l'équation (III. 5), on peut tirer l'expression finale de la nouvelle température d'un noeud  $(i, j)$  en temps  $(t+\Delta t)$ .

$$T_{i,j}^{nsw} = T_{i,j} + \frac{\Delta t}{C(i,j)} (q_{i-1,j} + q_{i+1,j} + q_{i,j-1} + q_{i,j+1} + q^m(i,j)) \quad (\text{III. 6})$$

En terme de résistances thermiques, s'écrit ;

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{C(i,j)} \left[ q^m(i,j) + \frac{T_{i-1,j}^t - T_{i,j}^t}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^t - T_{i,j}^t}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^t - T_{i,j}^t}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^t - T_{i,j}^t}{R_y(i,j+1)} \right] + \frac{C(i,j)}{\Delta t} T_{i,j}^t$$

Où :

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{C(i,j)} \left[ q^m(i,j) + \frac{T_{i-1,j}^t}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^t}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^t}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^t}{R_y(i,j+1)} \right] + \left[ 1 - \frac{\Delta t}{C(i,j)} \left( \frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} \right) \right] T_{i,j}^t \quad (\text{III. 7})$$

L'avantage de cette technique est que chaque équation ne contient qu'une seule inconnue, par contre n'importe quelle valeur du paramètre  $M$  ;

$$M = \frac{\Delta t}{C(i,j)} \left( \frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} \right) \quad (\text{III. 8})$$

### III-2-2 Méthode implicite (IFTCS)

En terme de résistances thermiques l'équation (II.20), s'écrit :

$$q^m(i,j) + \frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} = C(i,j) \frac{T_{i,j}^{t+\Delta t} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (\text{III. 9})$$

et par conséquent la nouvelle température au temps  $(t + \Delta t)$  est donnée par :

$$T_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{q''(i,j) + \frac{T_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j)} + \frac{T_{i+1,j}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j)} + \frac{T_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1)} + \frac{T_{i,j+1}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t} \cdot T_{i,j}^t}{\frac{1}{R_x(i-1,j)} + \frac{1}{R_x(i+1,j)} + \frac{1}{R_y(i,j-1)} + \frac{1}{R_y(i,j+1)} + \frac{C(i,j)}{\Delta t}} \quad (\text{III. 10})$$

Comme le montre cette équation, la méthode implicite est stable pour toute valeur du paramètre  $M$ .

### III- 2 Cas tri-dimensionnel

#### 2-1 Nouvelles températures

##### 1/ pour les Noeuds internes

A partir de la relation (III. 9) . On remarque que cette formulation peut être généralisée facilement à un problème multidimensionnel.

$$q_i'' + \sum_j \frac{T_j^{t+\Delta t} - T_i^{t+\Delta t}}{R_{ij}} = C_i \frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^t}{\Delta t} \quad (\text{III. 11})$$

On peut donc déduire l'expression donnant la température d'un noeud sous plusieurs conditions aux limites.

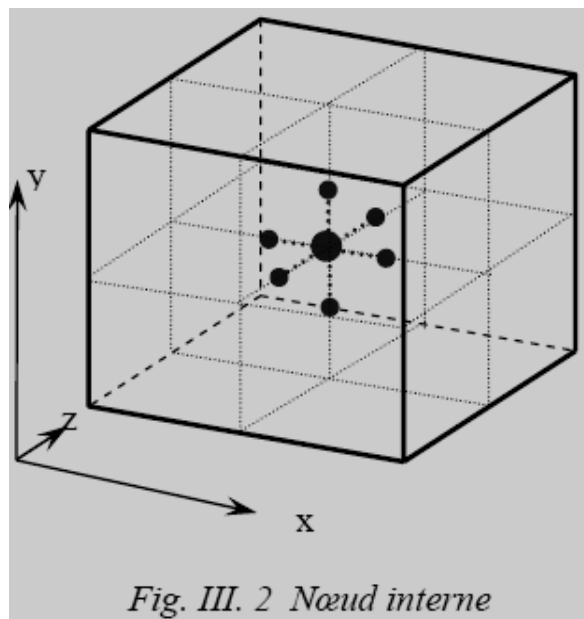
$$T_i^{t+\Delta t} = \frac{q_i'' + \sum_j (T_j^{t+\Delta t} / R_{ij}) + (C_i / \Delta t) T_i^t}{\sum_j (1/R_{ij}) + C_i / \Delta t} ; \quad \text{en régime transitoire} \quad (\text{III. 12})$$

Les résistances thermiques entourant un nœud internes sont tirées du table (II. 2) ;

$$R_x(i+1,j,k)=\frac{\Delta x}{k\Delta y.\Delta z} ; R_x(i-1,j,k)=\frac{\Delta x}{k\Delta y.\Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k)=\frac{\Delta y}{k\Delta x.\Delta z} ; R_y(i,j-1,k)=\frac{\Delta y}{k\Delta x.\Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1)=\frac{\Delta z}{k\Delta x.\Delta y} ; R_z(i,j,k-1)=\frac{\Delta z}{k\Delta x.\Delta y}$$



### III- 2-1 Nouvelles températures

#### III- 2- 1- a. Régime permanent

D'après l'équation (II. 15), la température recherchée d'un noeud interne est

Généralement donnée par :

$$T_{i,j,k} = \frac{q^m(i,j,k) + \frac{T_{i-1,j,k}}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{T_{i+1,j,k}}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{T_{i,j-1,k}}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{T_{i,j+1,k}}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{T_{i,j,k-1}}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{T_{i,j,k+1}}{R_z(i,j,k+1)}}{\frac{1}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{1}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{1}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{1}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{1}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{1}{R_z(i,j,k+1)}} \quad (\text{III. 13})$$

### III- 2- 1- b. Régime non-permanent

La nouvelle température pour un nœud interne est déduite de l'équation générale (III. 11) ;

$$T_{i,j,k}^{t+\Delta t} = \frac{q^m(i,j,k) + \frac{T_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{T_{i+1,j,k}^{t+\Delta t}}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{T_{i,j-1,k}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{T_{i,j+1,k}^{t+\Delta t}}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{T_{i,j,k-1}^{t+\Delta t}}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{T_{i,j,k+1}^{t+\Delta t}}{R_z(i,j,k+1)} + \frac{C(i,j,k)}{\Delta t} \cdot T_{i,j,k}^t}{\frac{1}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{1}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{1}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{1}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{1}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{1}{R_z(i,j,k+1)} + \frac{C(i,j,k)}{\Delta t}} \quad (\text{III. 14})$$

#### 1/ Nœud avec condition de convection en surface

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h\Delta y \cdot \Delta z} ; \quad R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z} ; \quad R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y} ; \quad R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}$$

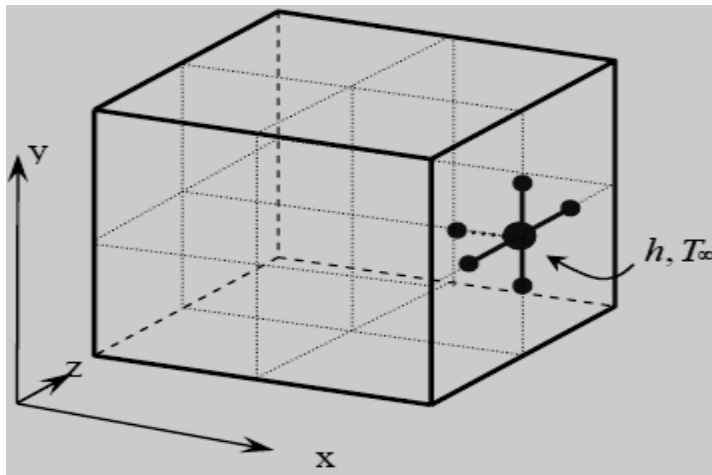


Fig. III. 3 Nœud avec condition de convection en surface

## 2/ Noeud sur une surface isolée

$$R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \Delta y \cdot \Delta z} ; R_x(i+1,j,k) = \infty$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}$$

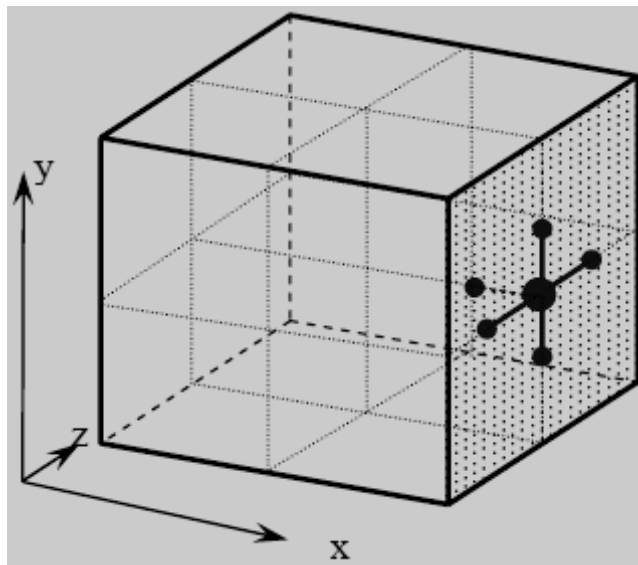


Fig. III. 4 Noeud sur une surface isolée

## 3/ Noeud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \frac{\Delta z}{2}} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta z}{2}} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}}$$

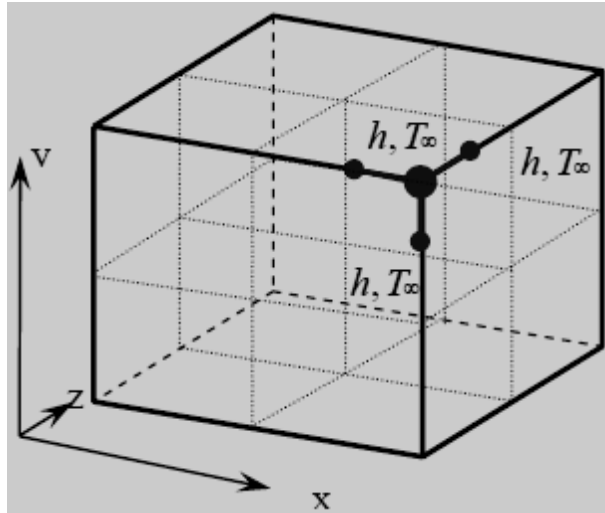


Fig. III. 5 Noeud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface

**4/ Noeud sur une arrête externe avec condition de convection en surface**

$$R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \cdot \Delta z} ; R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2}}$$

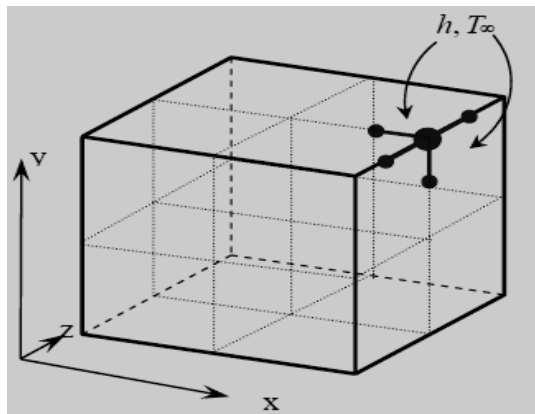


Fig. III. 6 Noeud sur une arrête externe avec condition de convection en surface

**5/ Noeud sur une arrête interne avec condition de convection en surface**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h\Delta y.\Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y.\frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{4.\Delta y}{3.k\Delta x.\Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4.\Delta y}{3.k\Delta x.\Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2}.\Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\Delta x.\Delta y}$$

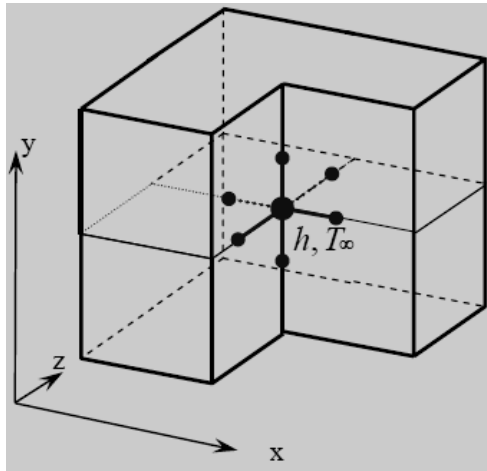


Fig. III. 7 Noeud sur une arrête interne avec condition de convection en surface

**6/ Noeud sur un coin interne**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y.\Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{4\Delta x}{3.k\Delta y.\Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\Delta x.\Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4.\Delta y}{3.k\Delta x.\Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{4.\Delta z}{3.k\Delta x.\Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\Delta x.\Delta y}$$

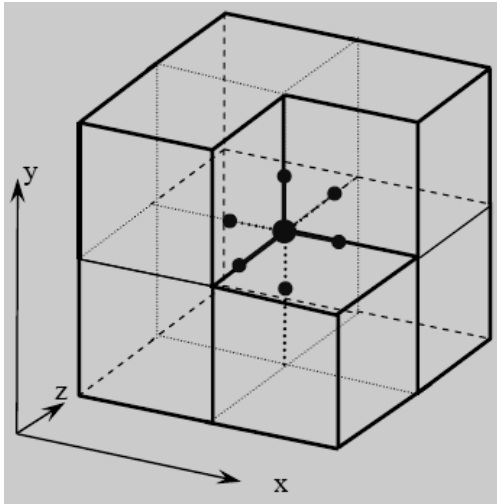


Fig. III. 8 Noeud sur un coin interne

**7/ Noeud sur un coin interne avec condition de convection en surface**

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{4}{3 \cdot h \Delta x \cdot \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k \Delta x \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2}} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \Delta x \cdot \frac{\Delta y}{2}}$$

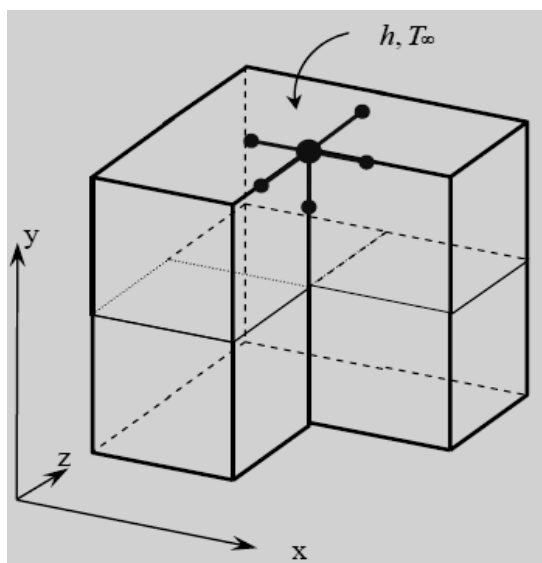


Fig. III. 9 Noeud sur un coin interne avec condition de convection en surface

# **Chapitre IV :**

## **Résultats et discussions**

## **Introduction**

Les outils de simulation numérique occupent une place prépondérante dans les études en physique du bâtiment. La démarche de conception optimale qui résulte de l'épuisement des ressources énergétiques et du souci de préservation de l'environnement, n'a fait qu'amplifier leur utilisation.

La simulation se définit comme l'utilisation ou la résolution de modèles correspondant à un système donné pour étudier le comportement de ce dernier dans un contexte précis. Elle est la suite logique de la modélisation qui est la première approche d'une simulation.

De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur cette méthode : Fluent, StarCD, CFX, FineTurbo.....

## **IV- 1 Simulation**

Les étapes nécessaires pour réussir une simulation d'un problème en mécanique des fluides à l'aide du code Fluent est:

Choix du solveur

Choix du modèle de turbulence

Définition des caractéristiques du fluide

Operating conditions

Conditions aux limites

Choix des critères de convergence

Initialisation des calculs

Sauvegardes

Lancement de la simulation

## **IV- 2 codes de simulation**

### **IV-2.1 gambit**

Le logiciel commercial Gambit est un pré processeur intégré dédié à la conception géométrique et à la construction et génération du maillage approprié en plusieurs options du 2D et du 3D des configurations a étudiées et a analysées en CFD (computation fluide Dynamiques). Les options de génération de maillage de GAMBIT offrent une flexibilité de choix. La géométrie peut être décomposé en plusieurs parties pour générer un maillage structuré, sinon GAMBIT génère automatique un maillage non structure adapté au type de géométrie construite. Les défauts sont détectés à l'aide de son interface comportant plusieurs fenêtres d'outils de création, génération, vérification du maillage du modèle étudié et l'incorporation des conditions aux limites

#### **Construction d'un maillage**

Pour construire un maillage, il est bon de suivre la démarche suivante:

- définir la géométrie.
- réaliser le maillage.
- définir les paramètres des zones de calcul.

La géométrie comprend les positions physiques de points caractéristiques définissent la zone que l'on a à mailler: coordonnées spatiales des quatre sommets d'un carré; du point de départ et du point d'arrivée d'une ligne; du centre et de l'ouverture angulaire d'un arc de cercle. Il faut pouvoir représenter la zone à étudier par un ensemble de figures géométriques simples raccordées les unes aux autres. Pour des maillages structurés, on peut faire la liaison entre la géométrie et le maillage, Aussi, avant de réaliser le maillage, il faut spécifier par écrit d'une part la géométrie adoptée pour définir la zone à mailler, d'autre part les numéros des mailles correspondant aux points caractéristiques de la géométrie. Un noeud pourra alors être repéré par ces coordonnées physiques x et y ou indices I et J.

Par ailleurs, il peut être avantageux de définir des points intermédiaires qui ne sont pas indispensables à la définition de la géométrie mais qui permettent de délimiter les zones dans lesquelles les mailles seront adaptées pour raffiner le maillage près des parois par exemple ou bien pour épouser au mieux la forme des obstacles, parois ou autres...

## Notice d'utilisation de gambit

Ce logiciel est utilisé pour définir et créer le modèle d'étude (surface ou volume) et de le mailler suivant le bon vouloir de l'utilisateur. Les différentes étapes d'utilisation de GAMBIT sont définies dans la notice suivante.

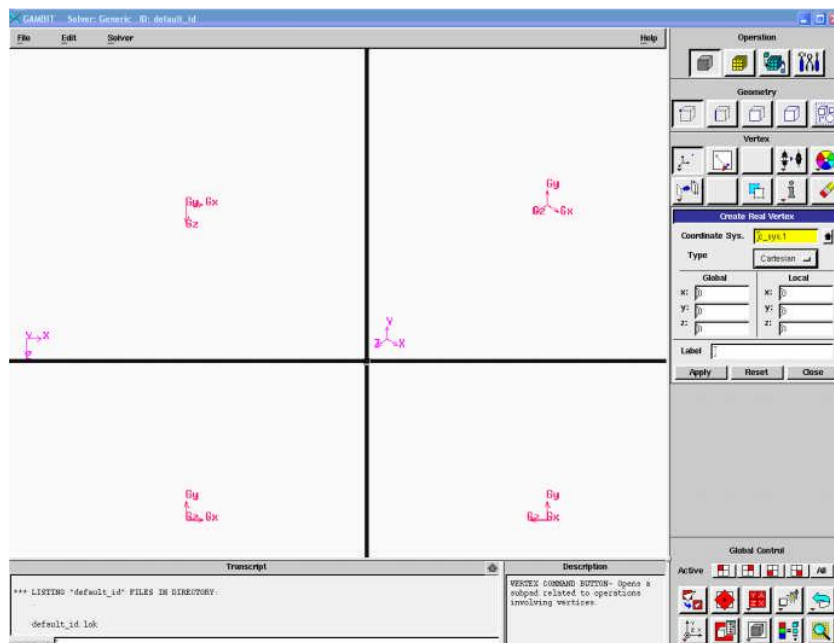


Fig. IV. 1 Vue globale Après avoir lancé le logiciel

Astuce La première chose à faire quand on entre sur Gambit est de nommer le système qu'on va construire de telle manière de ne pas le perdre bêtement.

L'utilisation de Gambit est simple : principalement il faut prendre les menus en haut à droite et effectuer les tâches en partant du menu de gauche pour aller jusqu'à celui de droite (où normalement on doit avoir fini notre maillage).

Important Avant même de créer la géométrie il faut choisir le type de solver ; c'est-à-dire le type de logiciel (ici fluent) qu'on va utiliser par la suite (choisir la bonne version du logiciel dans notre cas choisir Fluent 5/6)

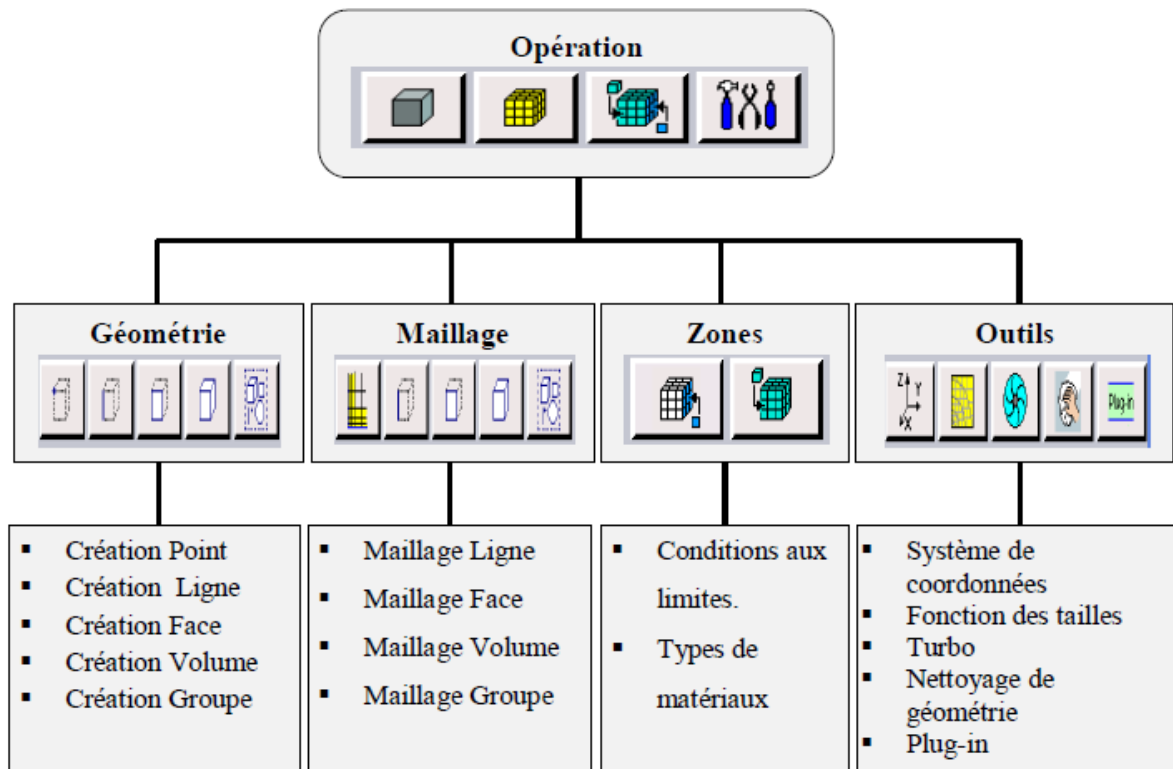


Fig. IV.2 Menu principale de Gambit.

## IV- 2.2 Fluent

La simulation en Mécanique des Fluides Numérique (Computational Fluid Dynamics : CFD), est utilisée pour la modélisation, la visualisation et l'analyse des écoulements fluides et transferts thermiques. Elle permet aux utilisateurs d'optimiser les performances des nouveaux concepts, tout en réduisant le cycle de commercialisation, les risques associés et les coûts.

Depuis plus de 10 ans, Fluent, leader mondial en Simulation numérique des écoulements Fluides logiciels et services. S'emploie à offrir la solution de simulation la plus adaptée, que ce soit pour l'ensemble de l'industrie, la recherche ou la formation des ingénieurs de demain. Cette solution passe par des services d'assistance technique, d'études à façon, et par des formations personnalisées.

Le siège du groupe Fluent est situé à Lebanon, New Hampshire, USA, et compte des filiales en Belgique, Angleterre, France, Allemagne, Inde, Italie, Japon et Suède. Ses logiciels sont aussi vendus à travers le monde grâce à des joint-ventures, des

partenariats et des distributeurs en Corée, Australie, Brésil, Chine, Taïwan, République Tchèque, Moyen Orient et dans la plupart des pays européens.

#### **IV- 2.3 Notice d'utilisation de fluent :**

Fluent est un code **CFD** commercial très utilisé dans l'industrie. Il permet de résoudre les écoulements fluides (champs de vitesses, de température...), c'est la raison pour laquelle on la choisi pour réalisé notre simulation.

Ensuite l'utilisation de Fluent est simple, il suffit de suivre l'ordre des menus en partant de la gauche pour aller vers la droite. Le premier menu que nous allons étudier est le menu **GRID**. La première chose à faire est d'utiliser l'option check afin de vérifier si le maillage importé comporte des anomalies comme des problèmes de jointure entre les différentes surfaces du maillage. Pour choisir l'échelle d'étude du maillage et par conséquent réfléchir en nombres adimensionnels, il faut utiliser l'option **scale** (choix est très important car souvent suivant les dimensions du domaine, les phénomènes mis en jeu ne sont pas les même).

Remarque : il est possible de vérifier tout de suite la forme de la grille en cliquant sur **DISPLAY** et ensuite sur **grid**. On peut de cette façon vérifier que la géométrie correspond bien à ce que l'on veut.

Le second menu que l'on va utiliser est le menu **DEFINE**. La démarche à suivre est de partir des options du haut du menu secondaire et de descendre au fur et à mesure. Nous trouvons donc l'option Models qui se décompose aussi en un autre menu. solve permet de choisir le type de solveur que l'on souhaite utiliser (implicite, explicite, stationnaire, 2D...). viscous permet de choisir le modèle de turbulence que l'on va prendre pour résoudre le problème (laminaire, k- $\epsilon$ , k- $\omega$ , LES...). Energy permet de choisir si oui ou non on doit faire intervenir l'équation de l'énergie dans la résolution du système (dès qu'un gradient de température intervient dans les phénomènes il faut utiliser cette équation pour d'une part observer une solution réaliste mais aussi souvent pour faciliter la convergence).

Dans le menu Models radiation qui sont à utiliser en fonction de l'énoncé du problème. Vient ensuite le sous menu Matériels qui permet de choisir le fluide gravity et entrer la valeur voulue de la gravité. On peut aussi entrer, et cela est souhaitable, la valeur initiale de la densité et lui donner une valeur sous Fluent (ceci montre que

même si l'on a fait une erreur de condition sous Gambit, on peut encore tout modifier sous Fluent).

Pour une entrée de fluide, on fixe la vitesse ainsi que le niveau de turbulence ; pour un mur on peut fixer soit un flux constant, soit une température constante et bien d'autres possibilités (telles que la rugosité du mur par exemple).

Maintenant que la géométrie est en place, nous pouvons paramétrer et initialiser le solveur de Fluent dans le menu suivant : le menu **SOLVE**. Le premier sous-menu est le menu Control qui comprend tout d'abord l'option solution. C'est grâce à cette option que l'on va pouvoir entrer les différents facteurs de sous-relaxation du système : pression, température etc.... Ces facteurs peuvent être modifiés au cours de la résolution. Leur principal intérêt est de forcer la solution à converger : en les baissant, on diminue la vitesse de convergence mais on l'améliore (encore que ces constatations soient valables en générales, mais pas nécessairement dans tous les cas). Dans ce menu, on peut à la façon de discrétiser chaque variable (pression, moment...). d'autre sous-menu de **SOLVE** est Initialise. Ce menu permet de fixer les conditions initiales du système d'itérations que l'on veut faire pour résoudre le système et aussi la valeur limite des résidus que l'on veut se fixer.

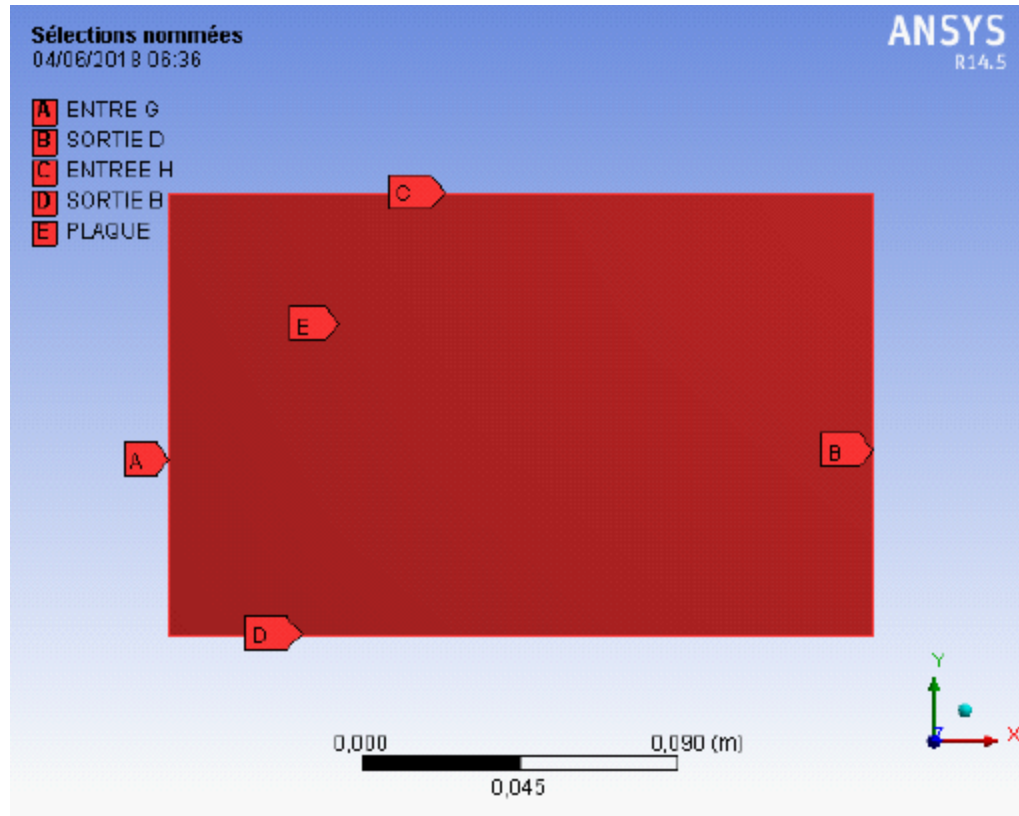
Une fois que l'on estime que la convergence est atteinte, on peut visualiser les résultats grâce au post-traitement de **Fluent**. Principalement, on utilise le menu **DISPLAY** et les sous-menus contours et velocity vectors. Dans le premier, on observe les variations des variables (vitesse, température...) avec les iso-surfaces. Dans le second, les valeurs sont traduites par des vecteurs ; ceci est surtout utile pour la visualisation des vecteurs vitesses. Il est également possible dans ces menus d'observer les résultats sur les faces de la géométrie et pour les vecteurs de faire des projections.

Pour visualiser des zones précises du maillage (lignes, plans...), le menu **SURFACE** permet de créer des lignes ou de plans dans la géométrie à partir de points. Ensuite on peut pour les plans, les choisir pour visualiser les contours ou les vecteurs, et pour les lignes, on utilise le menu **PLOT**, qui offre la possibilité de faire des graphes en 2D de toutes les variables sur les lignes créées par l'utilisateur. Pour exporter des images, on peut, soit faire une copie d'écran (de loin le plus simple), soit cliquer dans FILE, hardcopy et choisir **TIFF** pour créer une image Tiff de la fenêtre actuellement affichée (l'utilisateur peut choisir diverses options comme couleur ou noir et blanc...)

## IV- 3 DESCRIPTION DU PROBLEME

Nous étudierons numériquement la convection naturelle dans une plaque rectangulaire de

longueur  $L = 0,20\text{m}$  et largeur  $h = 0,125\text{m}$



*Fig. IV. 3: Entrée et le sortir de la chaleur dans le plaque*

A: entre à gauche ( $T(0; y) = 373:15\_K$ )

B: sortie à droite ( $T(0:20; y) = 293:15\_K$ )

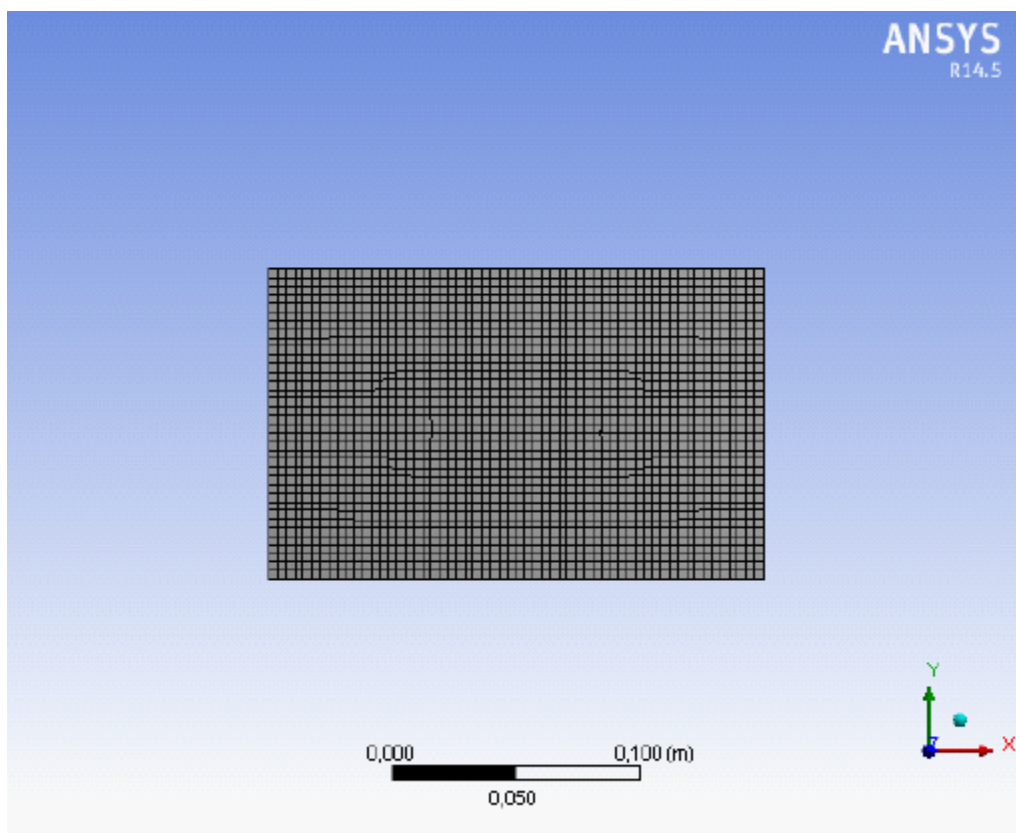
C: Entrer du haut ( $T(x; 0:125) = 293:15\_K$ )

D: Entrer du bas ( $T(x; 0) = 293:15\_K$ )

E: la plaque

## IV- 4 Maillage

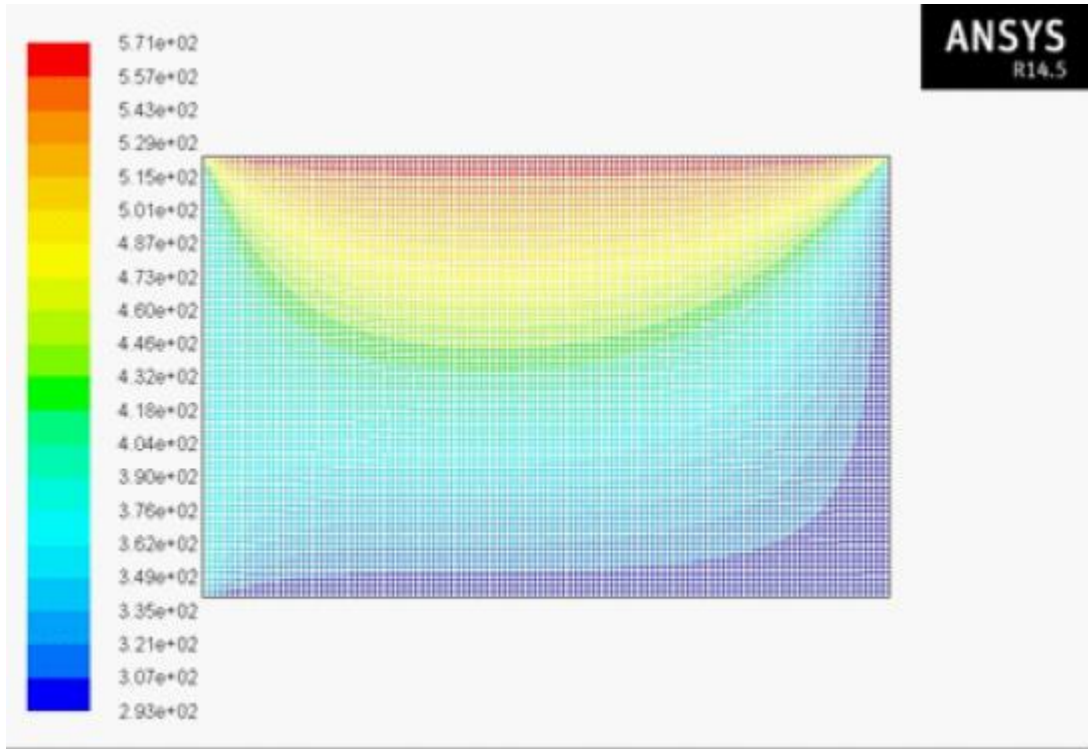
La seule manière d'établir l'indépendance des solutions du maillage est de faire plusieurs maillages pour voir s'il y a des différences majeures dans les résultats obtenus. Pour ce faire, plusieurs maillages sont faits afin de chercher la limite de l'indépendance de la solution par rapport au raffinement du maillage. Après chaque simulation, on contrôle l'un des paramètres qui nous intéresse le plus, la vitesse par exemple. Donc, le maillage utilisé est raffiné avec un nombre des noeuds variable de 33785 ..



*Fig. IV. 4: le maillage*

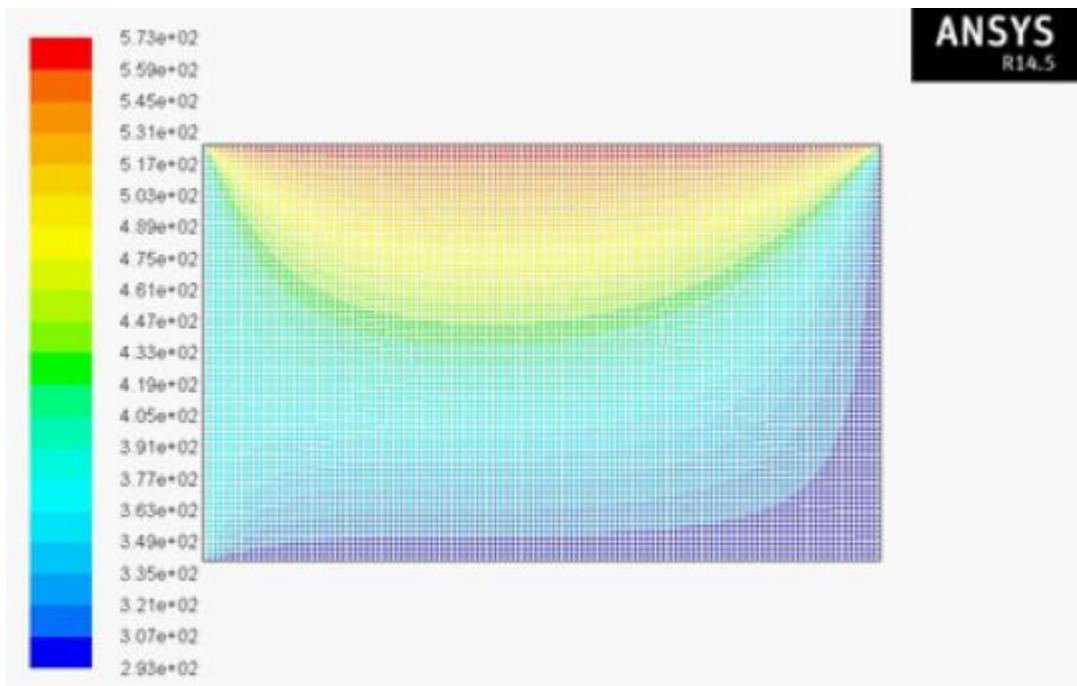
Les résultats obtenus pour :

Température



*Fig. IV. 5. contours de température total*

Température Total



*Fig. IV. 6: contours de température static*

Température static

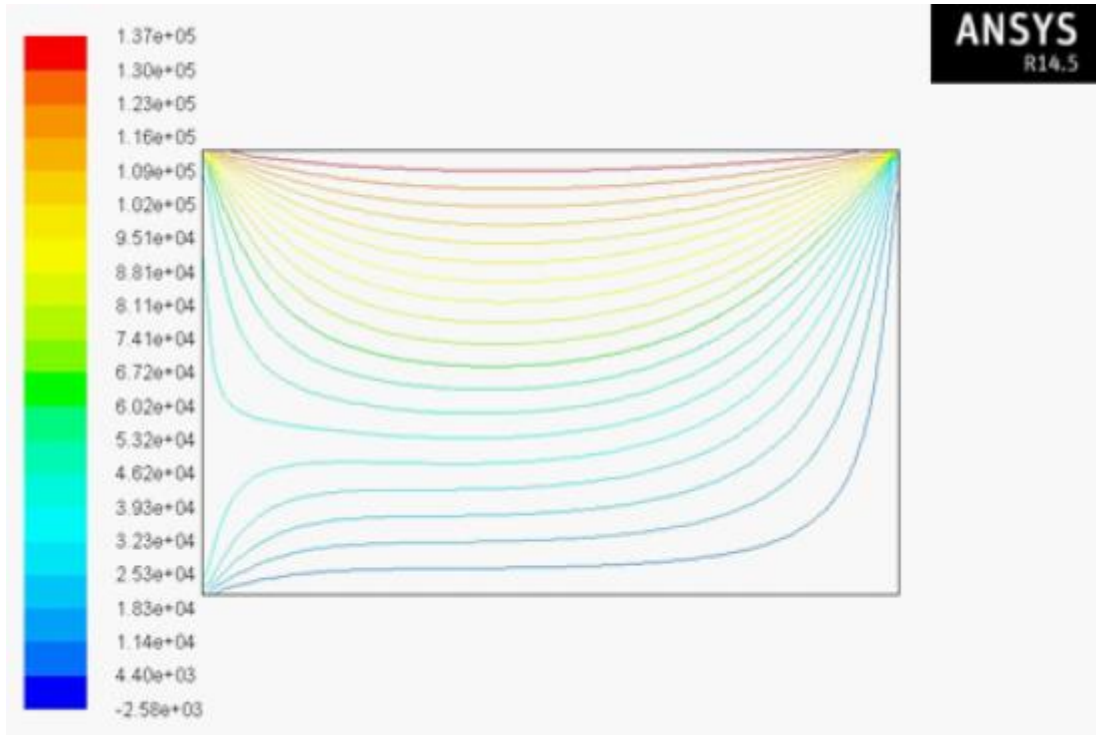


Fig. IV. 7: energy total

Energy total

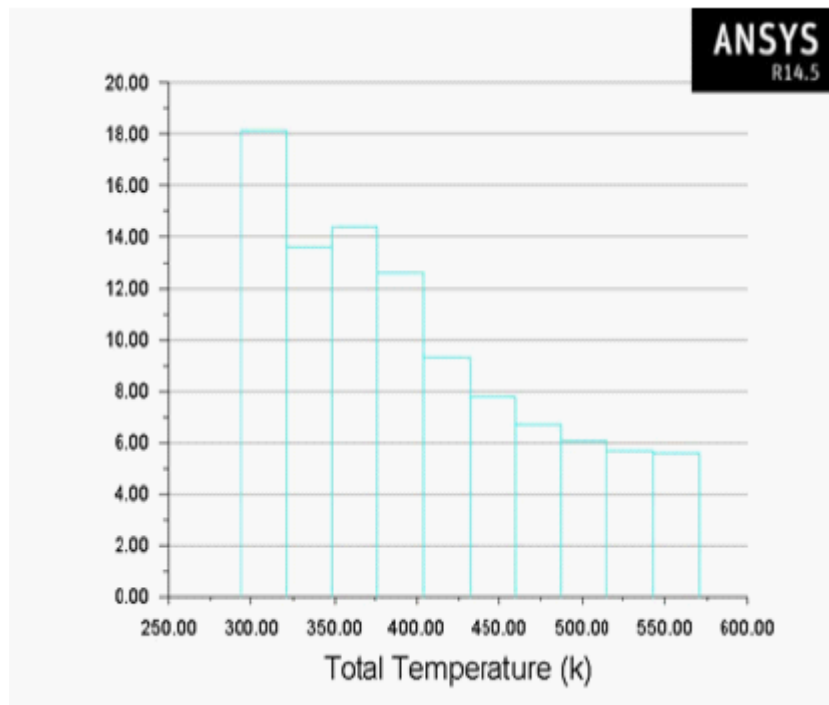
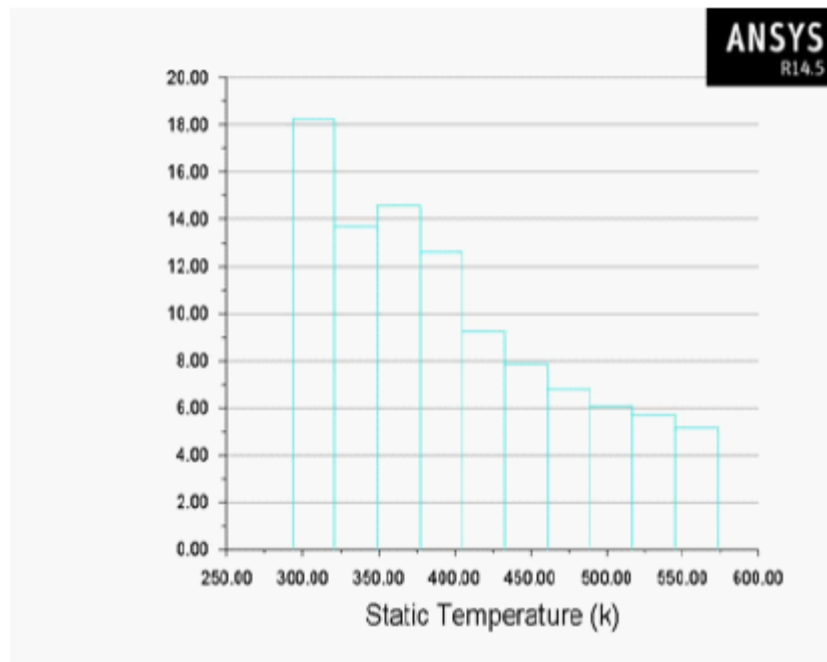


Fig. IV. 8: histrame de température total

## Histogramme de température



*Fig. IV..9: histograme de temperature static*

## IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les codes de simulation **GAMBIT** et **FLUENT** et le résultat de simulation obtenue

## **Perspectives**

Pour les travaux futurs, on suggère les propositions suivantes :

\_ Une étude tridimensionnelle expérimentale et numérique de ce phénomène, avec changement de métal d'aluminium afin de réaliser une comparaison générale entre la conductivité sur les différents métaux.



# **Conclusion générale**

## **Conclusion générale**

On a obtenu une solution numérique d'un problème thermophysique très général englobant un grand nombre de cas de conduction de la chaleur. Appliquant la méthode des volumes finis, on a intégré une équation de conduction thermique.

Des conditions aux limites homogènes et une condition initiale exprimant la non uniformité spatiale de la température sont appliquées à différentes géométries.

En utilisant une approche généralisée, on a mis au point un modèle mathématique pour la détermination du champ de température en régime stationnaire et de la durée de refroidissement (ou de chauffage) de corps de diverse configuration. L'étude porte sur le corps bidimensionnel classiques (plaque finie). (Comme il est accepté dans la théorie de transfert thermique, le corps ayant un champ de température bidimensionnel.).

Le résultat obtenu montre la distribution des températures initiale et la température de la plaque sont considérées comme des fonctions arbitraires de la variable d'espace et du temps. On a proposé un algorithme effectif destiné à un logiciel de simulation numérique Fluent. Le modèle est également applicable à d'autres processus de transfert, on conclure que grâce à l'approche de la méthode des volumes finie, le code de calcul peut donner des résultats fiables avec la possibilité de faire des changements rapides à fin d'entamer notre but.

# Bibliographie

- [1] **Yves Jannot**, Transferts thermiques, Cours 2eme année, Ecole des Mines Nancy, 2011.
- [2] **Olivier Perrot**, Cours de rayonnement 3eme semestre, I.U.T. de Saint-Omer Dunkerque, 2010-2011
- [3] **Cours** Transferts thermiques 2ème année Ecole 10 des Mines Nancy
- [4] **El-Wakil M. M** "Nuclear Heat Transport", International Textbook Company, 1971.
- [5] Ce polycopie est destiné aux étudiants de Licence LMD, Energétique et Construction Mécanique
- [7] **Gourdin A. Boumahrat M.** "Méthodes Numériques Appliquées", OPU Alger, 1991.
- [8] **Patankar S. V.** "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing,
- [9] **Léontiev A.** "Théorie des échanges de chaleur et de masse", éditions MIR, Moscou, 1979.
- [10] **Incropera F. P., DeWitt D. P.** "Fundamentals of Heat Transfer", John Wiley & Sons, 1985
- [11] **Chapman A. J.** "Heat Transfer", The Macmillan Co., 1960.
- [12] **Schneider P. J.** "Conduction Heat Transfer", Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1957.
- [13] **Rohsenow W. M., Choi H. Y** "Heat, Mass and Momentum Transfer", Prentice-Hall, Inc., 1963.
- [14] **L.C.demartni, h.a.vielmo and S.V.MOLLER**, « Numeric and experimental analysis of the turbulent flow through a channel with baffle plates », J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. Eng., Vol. XXVI, No. 2, p (153-159), 2004.
- [15] **Sacadura J. F.** "Initiation aux transferts thermiques", Tec. et Doc., Lavoisier, 1982.
- [16] **Özişik M. N.** "Heat Conduction" 2nd Edition, John Wiley & Sons,

## ANNEX

### Architecture de logiciel

Comme tout logiciel de CFD, il est composé de trois éléments :

le préprocesseur, le solveur et le postprocesseur.

La définition du problème à résoudre s'effectue à l'aide du préprocesseur GAMBIT. Il permet de représenter la géométrie du système, de définir le type de conditions limites aux frontières du domaine, de spécifier le type de matériau (fluide ou solide). Il fournit aussi la possibilité de discrétiser le domaine.

Le solveur permet de définir numériquement les conditions opératoires (gravité, pression) dans lesquelles est effectuée la simulation, ainsi que la spécification des conditions aux limites. Enfin, il permet de choisir le processus itératif, en proposant notamment plusieurs schémas numériques pour la discrétisation spatiale et temporelle, et pour le couplage de la vitesse et de la pression. Il offre également une interface permettant de contrôler à tout moment l'état d'avancement des calculs.

Le postprocesseur est l'élément qui permet de visualiser la géométrie et le maillage du domaine, mais surtout d'afficher les résultats obtenus. Il est ainsi possible de visualiser les champs du vecteur de vitesse, les champs de pression, de turbulence ainsi que toutes les autres grandeurs calculées sur un segment, une section du domaine ou sur tout le volume. Il offre aussi la possibilité de tracer des courbes et de visualiser les lignes de courant ou la trajectoire de particules [14].

#### **Préprocesseur GAMBIT:**

C'est un préprocesseur intégré pour l'analyse en CFD (Computational Fluid Dynamics). Il peut être utilisé pour construire une géométrie et lui générer un maillage. Eventuellement, une géométrie d'un autre logiciel de CAO peut être importée dans ce préprocesseur. Les options de génération de maillage de gambit offrent une flexibilité de choix. On peut décomposer la géométrie en plusieurs parties pour générer un maillage structuré. Sinon, gambit génère automatiquement un maillage non structuré adapté au type de géométrie construite.

Avec les outils de vérification du maillage, les défauts sont facilement détectés [14].

## Procédure de Résolution:

### Créer la Géométrie dans GAMBIT




#### Étape 1:

- Choix du solveur

Préciser que le maillage à être créé est destiné à être utilisé avec FLUENT 6:

**Menu > Solver> FLUENT 5 / 6**

- Création des points

Geometry Command Button  > Vertex Command Button  > Create Vertex  Créer le premier point (0,0,0)

Suite à x:, entrez la valeur 0. Suite à y:, entrez la valeur 0. Suite à z:, entrez la valeur 0(ces valeur doivent être par défaut). Cliquez sur Apply. Cela crée le point (0,0,0) qui est affiché dans la fenêtre graphique.

Répétez ce processus pour créer les points restants.

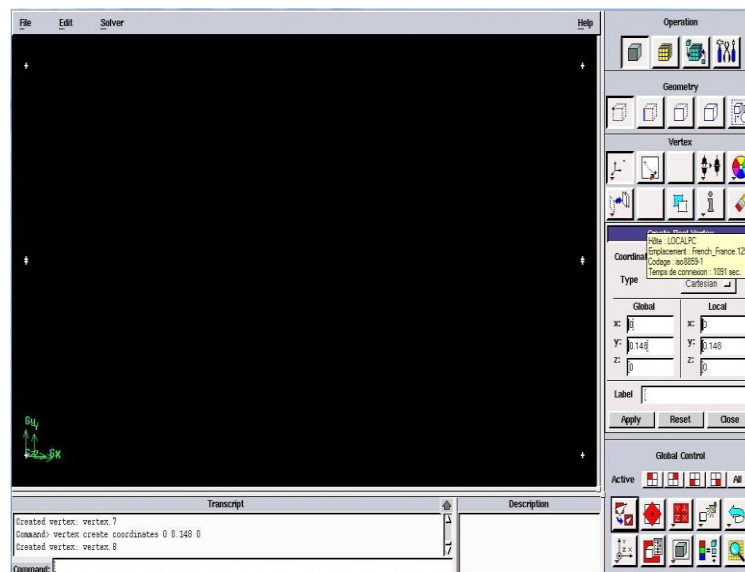


Figure A.1 : Création des points

- Création des lignes

Geometry Command Button  > Edge Command Button  > Create Edge 

Sélectionnez deux points en maintenant enfoncée la touche Shift et en cliquant sur les points. Comme chaque point est choisi, il apparaîtra en rouge dans la fenêtre graphique. Ensuite, relâchez la touche Shift et cliquez sur Apply dans la partie Créer Straight Edge fenêtre pour créer cette ligne.

Répétez ce processus pour créer les lignes restantes

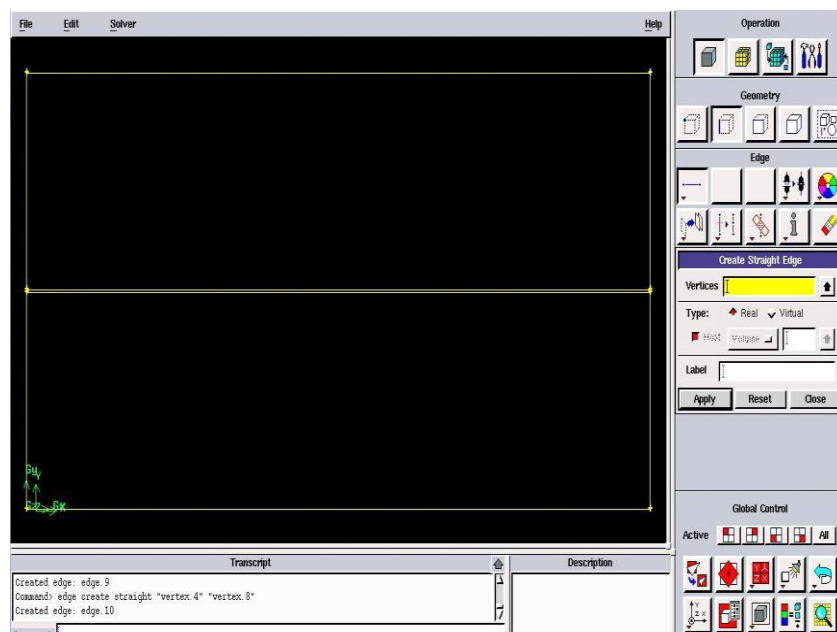


Figure A.2 : Création des ligne

- Création les faces

Geometry Command Button  > Face Command Button  > Form Face 

On a trois faces : absorbeur, isolant et la face intermédiaire (air) Pour former une face de l'absorbeur, nous avons besoin pour sélectionner les lignes qui entourent ce domaine. Cela peut se faire en maintenant la touche Shift, en cliquant sur chaque ligne (notez que la ligne actuellement sélectionnée apparaît en rouge), puis relâcher la touche Shift après tous les lignes ont été sélectionnées et cliquez sur Apply. Répétez ce processus pour créer les faces restantes [14].

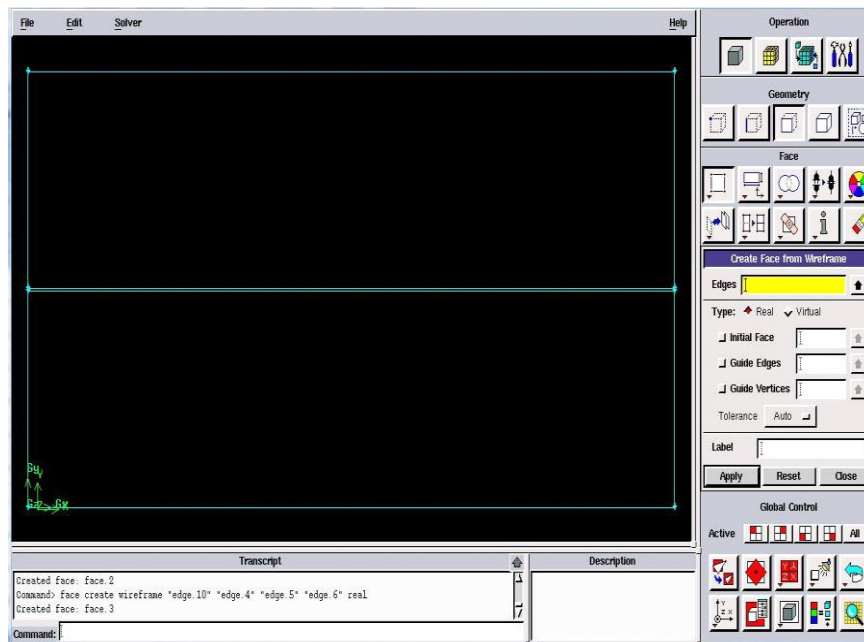


Figure A.3 : Création des faces

Étape 2 :

### Maillage géométrie dans GAMBIT

Mesh Command Button  > Edge Command Button  > Mesh Edges



Sélectionnez les lignes verticales, sélectionnez Interval count dans la liste découlant qui dit Interval Size du maillage des bords de fenêtres, entre les nombres des noeuds pour l'intervalle compter et cliquez sur Apply. Répétez le même processus pour les lignes horizontales.

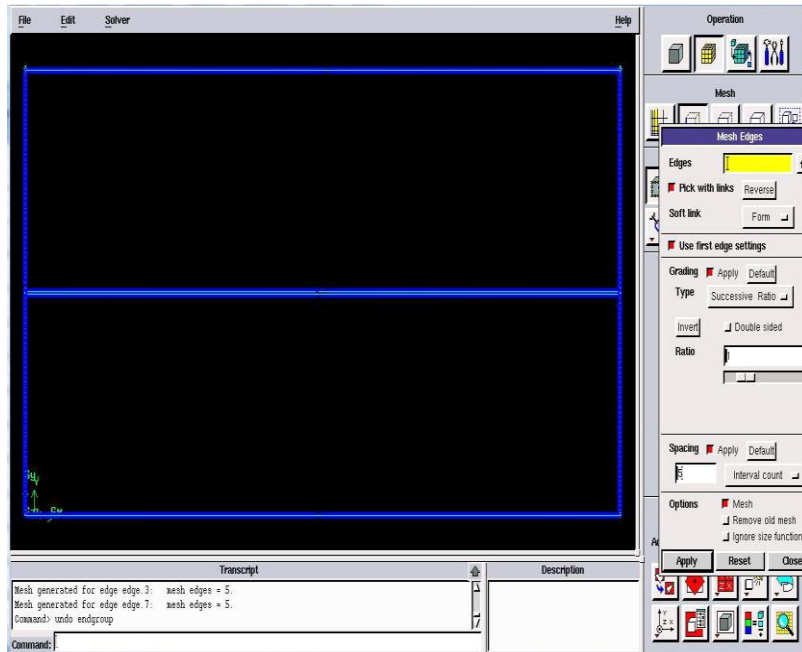


Figure A.4 : Maillage des parois

- Maillage des surfaces

Mesh Command Button  > Face Command Button  > Mesh Faces 

Sélectionnez la première surface et cliquez sur Apply. Répétez le même processus pour les autres surfaces

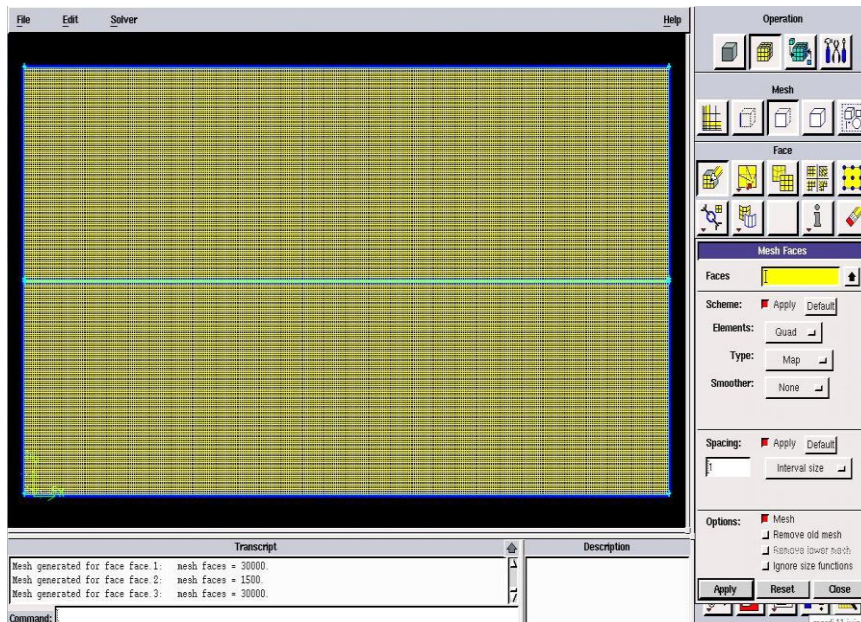


Figure A.5 : Maillage des surfaces

Étape 3 :

### les conditions aux limites dans GAMBIT

Zones Command Button  > Specify Boundary Types Command Button 

Sélectionnez la ligne gauche (entré de fluide). Ecrire à côté de Nom:, entrer Pour le type: sélectionnez Mass\_Flow\_Inlet. Cliquez sur Apply. Répétez le même processus pour les autres lignes.

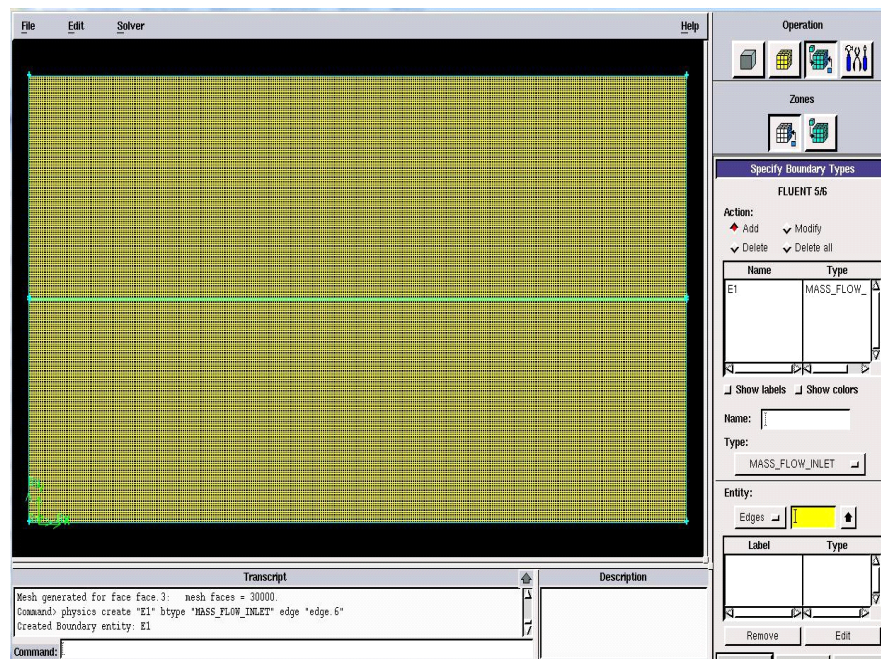


Figure A.6: les conditions aux limites

Exporter le maillage et sauvegarder le fichier

Une fois que la géométrie a été créée, que les conditions aux limites ont été définies, il faut exporter le maillage, en point .msh (mesh = maillage en anglais) pour que Fluent soit capable de le lire et de l'utiliser.

On peut ensuite fermer Gambit et lancer Fluent.

**File> Export> Mesh**

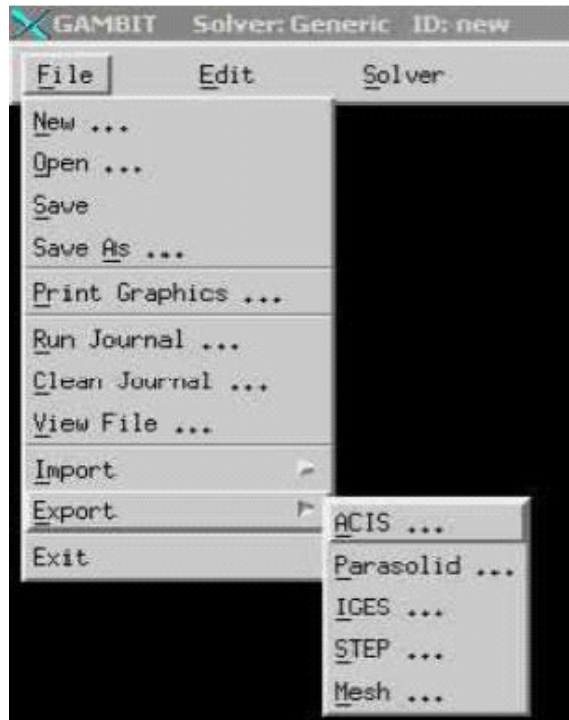


Figure A.7 : Exporter le maillage

## Code FLUENT :

Fluent est un programme informatique conçu pour la simulation des écoulements de fluide et du transfert de chaleur dans des géométries complexes. Il présente une grande flexibilité d'adaptation avec n'importe quel type de maillage. Il permet le raffinement du maillage en fonction des conditions aux limites, des dimensions et même des résultats déjà obtenus. Cela est très utile dans les régions à gradients importants (couches limites, couches à cisaillement libre).

Fluent est écrit en langage C. il emploie toute la flexibilité et la puissance qu'offre ce langage. Il a une architecture serveur client nécessaire au calcul parallèle sur plusieurs machines.

Fluent dispose d'un outil de graphisme pour l'affichage des résultats et leur exploitation.

On peut aussi exporter les résultats vers un autre logiciel de graphisme

Étape 4 :

### Mise en place problème dans FLUENT :

- Démarrer la version 2ddp de FLUENT
- Lire le fichier échangeur.msh

**File > Read > Case**

- Vérifier maillage

**Grid > Check**

- Contrôler la taille

**Grid > Info > Size**

- Vérifier unité

**Grid > Scale**

- Afficher le maillage

**Display > Grid**

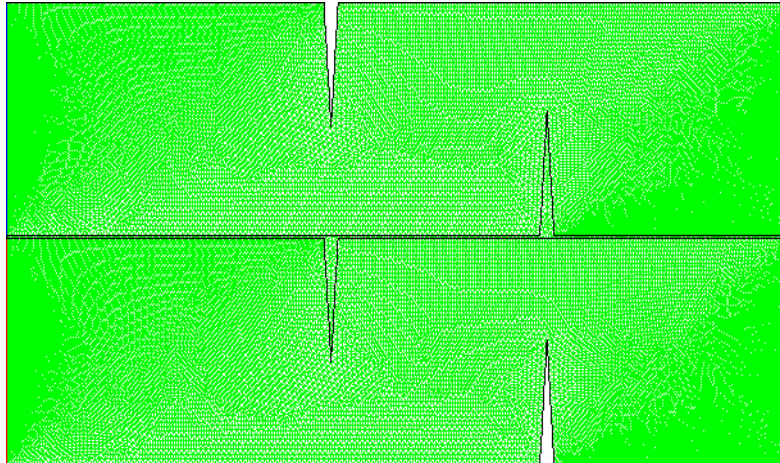


Figure A.8: Affichage du maillage

- Préciser le solveur de propriétés

**Define > Models > Solver**

Pour notre cas, c'est un solveur découplé avec une formulation implicite pour un cas 2D et un écoulement stationnaire et une vitesse absolue, valider en cliquant sur OK.

D'autres équations peuvent être rajoutées selon les phénomènes étudiés (transfert de chaleur, combustion, multi phases ...).

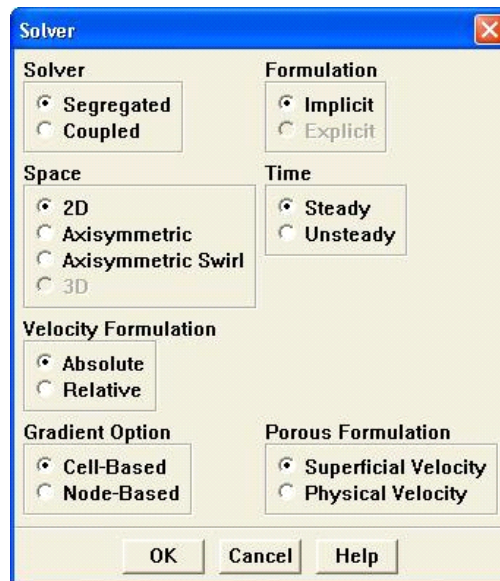


Figure A.9 : Définition du modèle.

### Define > Models > Energy

Formulation de l'équation d'énergie.

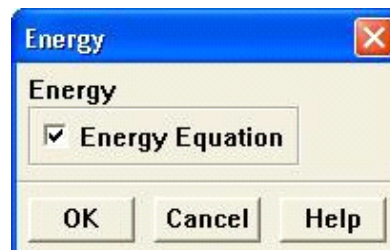


Figure A.10: Définie équation d'énergie

À flux laminaire est l'option par défaut. Nous n'avons donc pas besoin de changer quoi que ce soit dans ce menu. Cliquez sur Cancel.

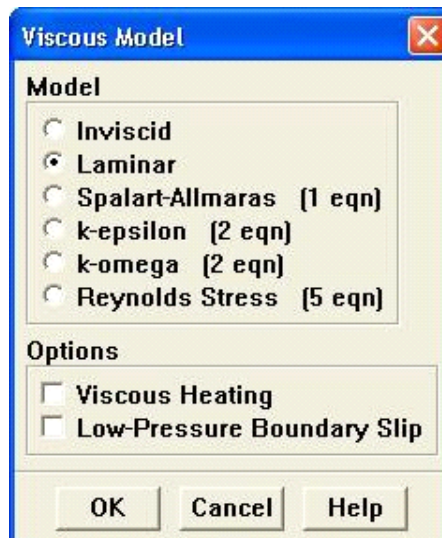


Figure A.11 :Définition le model d'écoulement

- Définir les propriétés des matériaux

### Define > Materials...

C'est le choix du fluide ou solide utilisé avec l'introduction des données concernant les propriétés physiques.

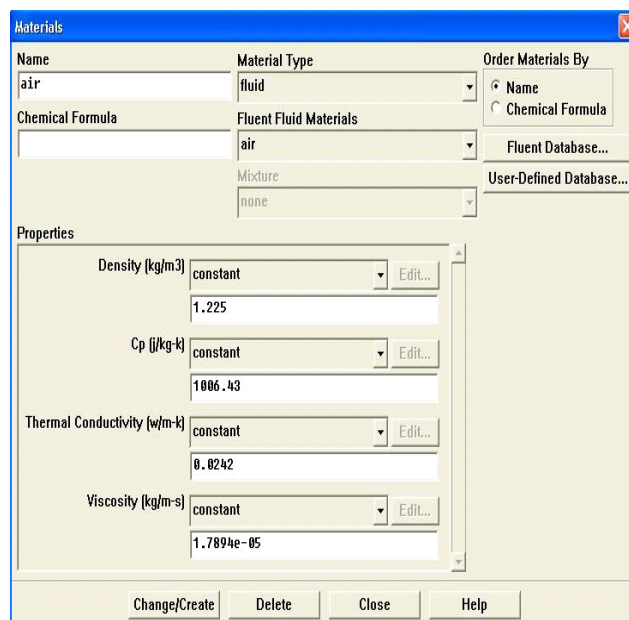


Figure A.12: Définition des propriétés des matériaux

- Définir les conditions aux limites:

### Define > Boundary Conditions...

Les conditions aux limites pour chaque frontière seront définies avec la fenêtre Boundary condition, après avoir sélectionné chaque fois, la frontière concernée et faire rentrer les conditions aux limites de cette dernière ensuite valider.

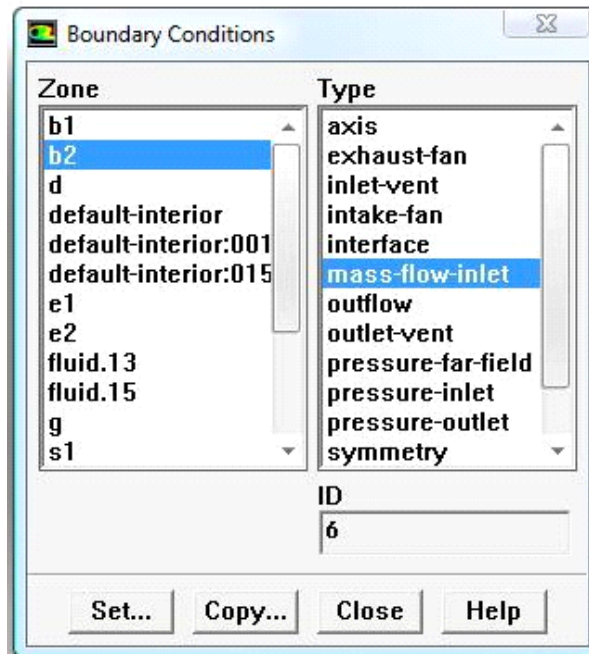


Figure A.13: Définition des conditions aux limites

## Étape 5 : solution

### Solve > Controls > Solution...

On doit choisir les équations à résoudre, les schémas de discrétisation, les facteurs de sous relaxations, les critères de convergence et les algorithmes pour le couplage pression-vitesse.

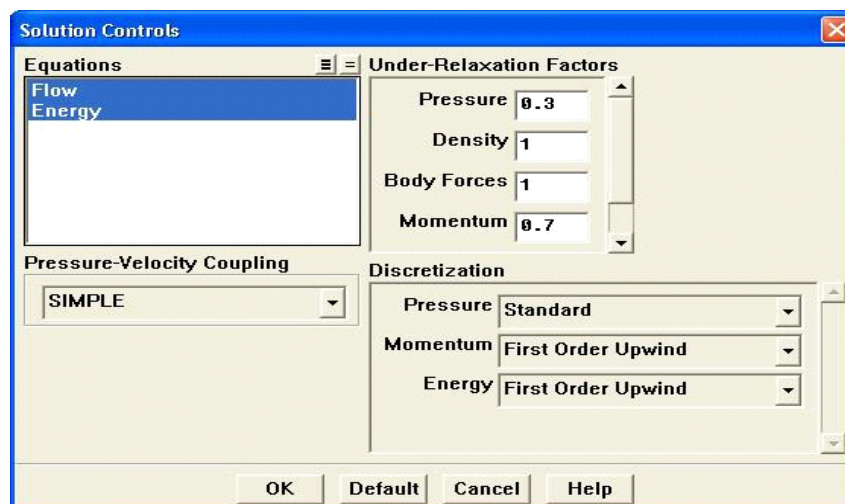


Figure A.14: Control la solution

**Solve > Initialize > Initialize...**

Initialiser le champ d'écoulement pour la valeur à l'entrée :

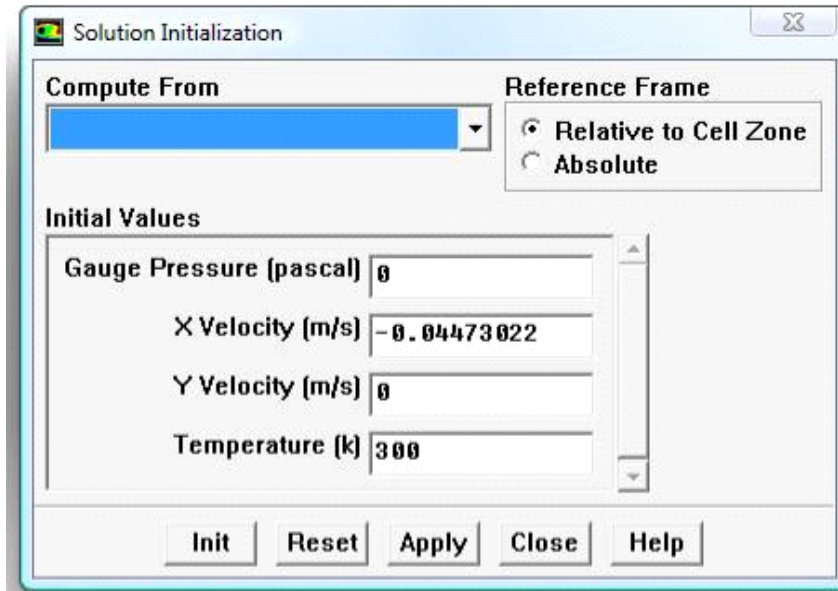


Figure A.15 : Initialisation la vitesse et la température à l'entrée

**Solve > Monitors > Residual...**

Faire activer l'option plot dans la fenêtre residual monitor. Lancement des itérations jusqu'à la convergence (Solve > Iterate...), enregistrer les résultats pour entamer en suite la phase sortie graphique

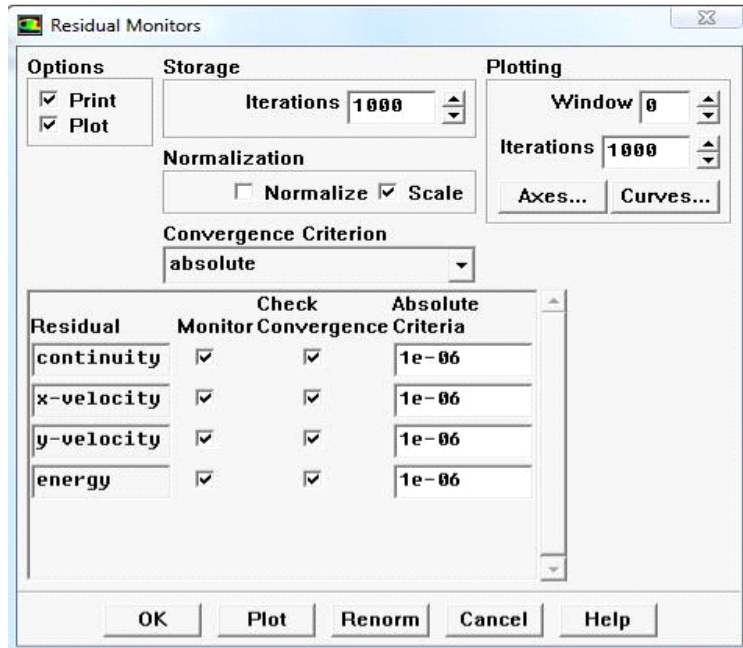


Figure A.15 : Initialisation la vitesse et la température à l'entrée

**Solve > Monitors > Residual...**

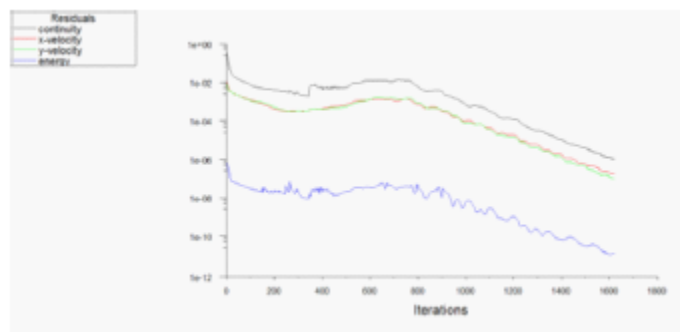


Figure A.17: Tracé des courbes des résidus cas simple

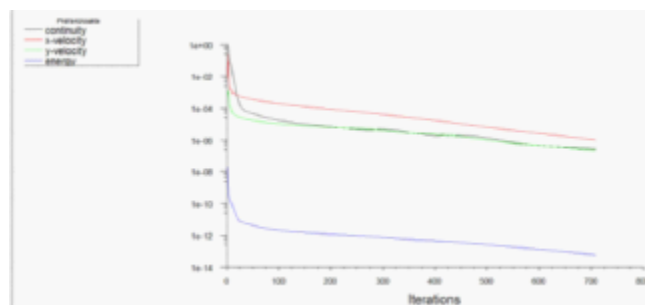


Figure A.18 : Tracé des courbes des résidus cas avec ailettes.

## Résumé :

L'objectif principal de cette étude est focalisé sur l'application de la méthode des résistances thermiques, sous exploitée en thermique en la modélisation de la conduction de chaleur à 2-D.

Ce travail présente une étude détaillée sur le concept de résistance thermique peu connu en calcul conductif à plusieurs dimensions.

La méthode numérique choisie pour la discrétisation des EDP est celle des différences finies. Le système d'équations algébriques qui en découlent est résolu ensuite par la méthode de Gauss-Seidel et de relaxation.

Le second objectif de ce travail est d'établir un ensemble de programmes de calcul numérique simulant le phénomène et servant à déterminer la distribution de température et le flux thermique pour des corps à géométrie multidimensionnelle (2-D) soumises à des conditions aux limites diverses et ce en régimes permanent et variable.

Mots clés : Conduction thermique, flux, simulation, différences finies, maillage, Gauss-Seidel, température.

### ملخص :

يتركز الهدف الرئيسي من هذه الدراسة على تطبيق طريقة المقاومة الحرارية ، غير المستغلة بشكل كاف في الحرارية في نمذجة التوصيل الحراري ثنائي الأبعاد.

يقدم هذا العمل دراسة تفصيلية لمفهوم المقاومة الحرارية غير المعروفة في الحسابات الموصلية ذات الأبعاد المتعددة.

الطريقة العددية المختارة لتقدير أجهزة PDE هي طريقة الفروق المحدودة. يتم بعد ذلك حل نظام المعادلات الجبرية الناتج بطريقة Gauss-Seidel وطريقة الاسترخاء.

الهدف الثاني من هذا العمل هو إنشاء مجموعة من برامج الحساب العددي التي تحاكي الظاهرة وتعمل على تحديد توزيع درجات الحرارة و

المعرضة لظروف حدودية مختلفة وهذا في أنظمة (D-التدفق الحراري للأجسام ذات الهندسة متعددة الأبعاد 2) دائمة ومتغيرة

الكلمات المفتاحية: التوصيل الحراري ، التدفق ، المحاكاة ، الفروق المحدودة ، الشبكة ، Gauss-Seidel ، درجة الحرارة

### Abstract :

The main objective of this study is focused on the application of the thermal resistance method, underexploited in thermics in the modeling of 2-D heat conduction.

This work presents a detailed study on the concept of thermal resistance little known in conductive calculation with several dimensions.

The numerical method chosen for the discretization of the PDEs is that of finite differences. The resulting system of algebraic equations is then solved by the Gauss-Seidel and relaxation method.

The second objective of this work is to establish a set of numerical calculation programs simulating the phenomenon and serving to determine the temperature distribution and the thermal flux for bodies with multidimensional geometry (2-D) subjected to various boundary conditions and this in permanent and variable regimes.

**Keywords:** Thermal conduction, flux, simulation, finite differences, mesh, Gauss-Seidel, temperature.