REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématiques et numérique

Titre

Les valeurs propres des opérateurs compacts auto-adjoints et ses applications aux EDP.

Présentée par :

Neghza Rabah

Soutenu publiquement le : 04/06/2024

Devant le jury composé de :

Saadi Abdeerachid	**MCA**	**Université de M'sila**	**Président**
Bougherara Brahim	**MCA**	**Université de M'sila**	**Encadreur**
Benmeddour Mohamed ourabah	**MCB**	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Année universitaire 2023/2024.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATION

symbole	**signification**
dx	Mesure de Lebesgue de dimension N.
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue.
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω, à Support compact dans Ω.
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	La fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, c-à-d : $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω.
$u^+ = max\{u, 0\}$	
$u^- = max\{-u, 0\}$ $p.p.$	Presque partout tous les points.
$J'(u)$	Dérivée au sens de Fréchet.
$J'_G(u)$	Dérivée au sens de Gâteaux.
$s.c.i$	Semi continue inférieurement.
$f.s.c.i$	Faiblement semi continue inférieurement.
u	Fonction mesurable définie de Ω dans $\mathbb{R}$.
$Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, .., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradient de u.
Δu	Laplacien de u.
$\Delta_p = div(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u)$	P Laplacien de u.
$\partial\Omega$	La Frontière de Ω.
$C^1(X, \mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions différentiables et la dérivée est continue.
$C^K(\Omega)$	Fonctions de classe K dans Ω.
$C^{0,\alpha}$	Espace de Hölder.
$C^\infty(\Omega)$	Fonctions indéfiniment différentiables dans Ω.
$C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Fonctions de $C^\infty(\Omega)$ a Support compact.
$H^{-1}(\Omega)$	Espace dual de $H_0^1(\Omega)$.
E'	Est le dual topologique de E ou l'espace des formes linéaires et continues sur E.
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels.

$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension N.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.
$\overline{\Omega}$	La frontière de Ω.
p'	Conjugué de Hölder de p, $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$.
p^*	L'exposant se Sobolev telle que : $p^* = \frac{Np}{N-p}$.
$Suppf$	Support des fonctions.
$H^1(\Omega)$	$u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$	$\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.
$E \hookrightarrow F$	E s'injecte continûment dans F.
$E \hookrightarrow_c F$	E s'injecte d'une manière compacte dans F.
$\rightharpoonup$	Converge faiblement.
$\longrightarrow$	Converge fortement.
(u, v)	Est la produit scalaire.
$f.s.c$	Faiblement séquentiellement continue.

INTORDUCTION

Les opérateurs elliptiques interviennent dans plusieurs problèmes d'équations aux dérivées partielles modélisant des phénomènes physiques bien connus comme la diffusion de la chaleurs, la propagation des ondes, l'écoulement des fluides...etc. L'existence des valeurs propres des ces opérateurs joue un rôle important dans l'étude de ces équations et notamment dans la construction et la régularité des solutions, l'existence des sous et sur solutions. Dans ce mémoire, on s'intéresse à étude d'existence des valeurs et vecteurs propres des opérateurs compacts auto adjoint et ses propriétés essentielles, et en particulier on s'intéresse à l'étude bien précis de la première valeur propre. Nous avons divisé ce travail en trois chapitres comme suit :

Le premier chapitre est est un rappel sur l'analyse fonctionnelle, principalement espaces de Banach, espaces de Lebesgue L^p et espaces de Sobolev et certaines propriétés de base de ces espaces, présentés sans démonstration. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la théorie des opérateurs compacts et auto-adjoints et compacts, commençant par le célèbre théorème de Lax-Milgram suivi par les propriétés essentielles de ces opérateur concernant le spectre d'un opérateur compact auto-adjoint, l'existence d'une base hilbertienne formé des vecteurs propres de ces opérateurs...etc.

Dans troisième chapitre, on donne quelques applications aux problèmes elliptiques aux valeurs propres, faisant des opérateurs bien connus comme l'opérateur de Laplace et des opérateurs uniformément elliptique.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \ \ dans\ \Omega \\ u = 0 \ \ sur\ \partial\Omega \end{cases}, \qquad \begin{cases} Lw = \lambda w & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{xi})_{xj}, \qquad \textbf{le cas symétrique},$$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{xi})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{xi} + cu, \qquad \textbf{le cas non symétrique}.$$

L'objective de ce chapitres est de montrer que la première valeur propre de ces opérateurs est toujours réelle et simple ainsi la fonction propre associée est de signe constante et si les opérateurs elliptiques sont symétriques alors toutes les valeurs propres sont réelles.

CHAPITRE 1

RAPPEL SUR QUELQUES ESPACES FONCTIONNELLE

1.1 Préliminaires

Définition 1.1 *Soit X un espace vectoriel normé. Une forme linéaire continue sur X est une application linéaire continue de X dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des formes linéaire et continues définie un espace vectoriel qui s'appelle l'espace dual de X et noté X'*

Remarque 1.1 *L'espace dual X' muni de la norme suivante :*

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle|, \quad \forall f \in X'.$$

est un espace vectoriel normé.

Définition 1.2 *Soit X un espace de Banach. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge faiblement vers x, si pour tout $f \in X'$*

$$\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle.$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$

Définition 1.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés.*

- *On dit que E s'injecte de manière continue dans F si $E \subset F$ et l'injection canonique $j : E \to F$ est continue : c-à-d,*

  $$\exists c > 0 : \|x\|_F \leq c\,\|x\|_E\,,\ \forall x \in E.$$

  et on note $E \hookrightarrow F$

— *On dit que E s'injecte de manière compacte dans F, Si $E \subset F$ et l'injection $j : E \to F$ est compact c'est à dire toute suite bornée dans E admet une sous-suite convergente dans F et on le note par $E \hookrightarrow_c F$.*

1.2 Espaces de Lebesgue

Définition 1.4 *(L'espace L^p) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et p un nombre réel supérieur ou égal à 1. On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad mesurable, \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right) < \infty \right\},$$

Définition 1.5 (L'espace L^∞) *On défini l'espace $L^\infty(\Omega)$ par :*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \quad est \quad mesurable, \exists c > 0 \ tellque \ |f(x)| \leq c \quad p.p.x \in \Omega \}.$$

Remarque 1.2 — *L'espace L^p munit de la norme suivante :*

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

est un espace vectoriel normé. Quand $p = 2$, cette norme provient d'un produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2}(\Omega) = \int_\Omega f(x) g(x) dx.$$

— *$L^\infty(\Omega)$ est un espace normé avec la norme :*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ c \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq c \quad p.p.sur \Omega \}.$$

Théorème 1.1
- *L'espace $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p})$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*
- *L'espace $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p})$ est un espace de séparable pour $1 \leq p < \infty$.*
- *L'espace $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p})$ est un espace de réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Notation 1.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p défini par :*
Si $p = 1$ on note $p' = +\infty$
Si $p = +\infty$ on note $p' = 1$
Si $1 < p < +\infty$ on note $p' = \frac{p}{p-1}$ et on a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

1.3 Espaces de Sobolev

1.3.1 Définitions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ et à support compact inclus dans Ω .

Définition 1.6 *1. Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega),\ pour\ tout\ i = 1, \cdots, N,\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens faible par rapport à x_i de u et elle est définie comme suivant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

En particulier, pour $p = 2$,on note

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad et \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

2. Plus général, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, est définie par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m\}.$$

où $D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_n}}$. En particulier, pour $p = 2$,on note

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.3 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est une espace vectoriel normé avec les deux normes équivalentes suivants :*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}.$$

$\left(\|u\|_{W^{1,p}} = [\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}} \right)$*. L'espace H^1 est une espace de Hilbert avec le produit scalaire suivant*

$$(u, v)_{H^1} = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx.$$

est la norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.1 .

- *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*
- *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 \leq p < \infty$ et Séparable pour $1 \leq p < \infty$.*
- *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

1.3.2 Injections de Sobolev

Notation 1.2 *Si $1 \leq p < n \leq \infty$, l'exposante de Sobolev est définie par :*

$$p^* = \frac{np}{n-p},$$

Ou

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

Théorème 1.2 (Injection Continue) *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on suppose que Ω est un ouvert de classe C^1, borné, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^n_+$*

- *Si $1 \leq p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.*
- *Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\ q \in [1, +\infty[$.*
- *Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Théorème 1.3 ***(Rellich-Kondrachov) (Injection Compact)*** *On suppose que Ω borné de classe C^1. On a*

- *Si $1 \leq p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$.*
- *Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.*
- *Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c \mathbb{C}(\overline{\Omega})$.*

1.3.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.7 *Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, c-à-d :*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Ou de manière équivalente :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \quad u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \quad (ou \quad sens \quad de \quad trace) \right\}.$$

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega),$$
$$H_0^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega); D^\alpha f \in L^2(\Omega); u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \right\}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire induit par $H^1(\Omega)$

Proposition 1.2 *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable,il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert Séparable.*
Le résultat suivante fournit une caractérisation essentielle de base des fonctions dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Définition 1.8 *On définit l'espace $W^{-1,p'}(\Omega)$ comme l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ autrement dit un élément f de$W^{-1,p'}(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et on note par $\langle , \rangle$le crochet de dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$et $W_0^{1,p}(\Omega)$,et rappelons que*

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\langle f, v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)=1}} \langle f, v\rangle$$

et

$$\langle f, v\rangle \leq \|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ pour tout} v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

1.4 Quelques résultats utiles sur les problèmes aux limites

Soit L un opérateur elliptique de la forme suivante

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{xi}) xj + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{xi} + cu$$

On suppose que l'opérateur L est uniformément elliptique, c'est à dire

$$\exists \theta > 0 : \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

1.4.1 Principe de maximum

Théorème 1.4 (Principe du maximum faible) *Supposons $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et*

$$c \geq 0 \text{ dans } \Omega$$

1. *Si*

$$Lu \leq 0 \text{ dans } \Omega$$

alors

$$\max_{\bar{\Omega}} u \geq - \max_{\partial\Omega} u^+ \tag{1.2}$$

où $u^+ = max\{u, 0\}$

2. *De même si*

$$Lu \geq 0 \text{ dans } \Omega$$

alors

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^- \tag{1.3}$$

où $u^- = max\{-u, 0\}$.

Remarque 1.4 *Donc en particulier, si* $Lu = 0$ *dans* Ω *,alors*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| \tag{1.4}$$

Lemme 1.1 (Lemme de Hopf) *Supposons que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *et*

$$c = 0 \text{ sur } \Omega$$

Supposons aussi

$$Lu \leq 0 \quad \text{sur } \Omega$$

et il existe $x_0 \in \partial\Omega$ *tel que*

$$u(x_0) > u(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Supposons que Ω *satisfait la condition de la boule intérieur en* x_0*, c'est à dire il existe une boule* $B \subset \Omega$ *telle que* $x_0 \in \partial B$*. Alors*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

où ν *est le vecteur normal unitaire et extérieur de* B *en* x_0*.*

Si de plus $c \geq 0$ *sur* Ω*, alors on a le même conclusion si* $u(x_0) \geq 0$*.*

Théorème 1.5 (Principe du maximum fort) *Supposons* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *et*

$$c \geq 0 \text{ dans } \Omega$$

1. *Si*

$$Lu \leq 0 \text{ dans } \Omega$$

et si u *atteint son maximum dans* Ω *alors elle est constante.*

2. *De même si*

$$Lu \geq 0 \text{ dans } \Omega$$

et si u *atteint son minimum dans* Ω *alors elle est constante.*

1.4.2 Régularité des solutions faible

On définit maintenant la notion d'une solution faible du problème suivant

$$\begin{cases} Lu = f & \text{d}ans\ \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 1.9 *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème aux limites ci-dessus si*

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.5}$$

où

$$a(u,v) = (Lu,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{xi} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{xi} v_{x_i} + cuv \right) \mathrm{d}x,$$

$$(f,v) = \int_\Omega fv\mathrm{d}x$$

. Cette équation s'appelle formulation variationnelle associée au problème précédent.

Théorème 1.6 *Supposons que*

$$a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), b^i, c \in L^\infty(\Omega) \quad (i,j = 1, \cdots, n) \tag{1.6}$$

et

$$f \in L^2(\Omega) \tag{1.7}$$

On suppose que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème

$$\begin{cases} Lu = f & dans \quad \Omega \\ ,u = 0 & sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

où $\partial\Omega$ est de classe C^2. Alors $u \in H^2(\Omega)$, et on a l'estimation suivante

$$\|u\|_{H^2(\Omega} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

où constante $C > 0$ est une constante dépends seulement de f et les coefficients de L.

Théorème 1.7 *Soit $m \in \mathbb{N}$ et supposons que*

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{1+m}(\bar{\Omega}\ )(i,j = 1, \cdots, n) \tag{1.9}$$

et

$$f \in L^m(\Omega). \tag{1.10}$$

On suppose que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de problème

$$\begin{cases} Lu = f & dans \quad \Omega, \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

où $\partial\Omega$ est C^{m+2}. Alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$ et on a l'estimation suivante

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega} \leq C \left(\|f\|_{H^m(\Omega} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

où constante $C > 0$ est une constante dépends seulement de f et les coefficients de L.

1.5 Quelques inégalités utiles

On donne quelques inégalités utiles que seront utilisé dans ce mémoire

Proposition 1.3 (Inégalité de Cachy-Schwartz) *Soit H un espace de Hilbert. Alors ,pour tout $x, y \in H$, on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \tag{1.12}$$

Proposition 1.4 (Inégalité de Holder) *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ où $p, p' \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a l'inégalité suivant :*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)}\mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{1.13}$$

Proposition 1.5 (Inégalité de Young) *Soient $p, p' \geq 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$*

$$a.b \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^{p'}}{p'} \tag{1.14}$$

Proposition 1.6 (Inégalité de Young avec epsilon) *Soient $p, p' \geq 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c > 0, ab \leq \varepsilon |a|^p + c|b|^{p'} \tag{1.15}$$

et pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.7 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un domaine (ouvert connexe) borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < \infty$. Alors ,il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.16}$$

.

CHAPITRE 2

THÉORIE DES OPÉRATEURS AUTO-ADJOINTS ET COMPACTS

2.1 Thèorème de Lax-Milgram

Nous commençons par rappeler ce célèbre théorème d'analyse fonctionnelle :

Théorème 2.1 (de Riesz-Fréchet) *Soit H un espace de Hilbert réel (ou complexe) muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et soit H' son dual topologique. Pour toute forme linéaire continue $g \in H'$, il existe un unique vecteur $f \in H$ tel que :*

$$\langle g, v\rangle = (f, v) \quad \forall v \in H$$

De plus, on a l'égalité des normes :

$$\|f\|_H = \|g\|_{H'}$$

où $\|f\|_H = \sqrt{(f,f)}$ est la norme hilbertienne et $\|g\|_{H'} = \sup_{\|v\|_H=1} |\langle g, v\rangle|$ est la norme duale.

On démonter le résultat suivant :

Théorème 2.2 (Lax-Milgram) *Soit H un espace de Hilbert. Supposons que*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

est une application bilinéaire (forme bilinéaire), vérifiant les deux conditions suivantes

i) a est continue, c'est à dire :

$$\exists \alpha > 0 : |a(u, v)| \leq \alpha\|u\|\|v\|.$$

ii) a est coercive (ou elliptique) sur H, c'est à dire

$$\exists \beta > 0 : a(u,u) \geq \beta \|u\|^2.$$

Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un élément unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in H \tag{2.1}$$

Preuve. Pour tout élément fixé $u \in H$, l'application $v \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur H, D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $w \in H$ tel que $a(u,v) = (u,v)$ $(v \in H)$. Notons $Au = w$ alors,

$$a(u,v) = (Au, v), \ \forall v \in H. \tag{2.2}$$

Donc l'application $A : H \to H$, qui à u associe Au est bien définie. En plus elle est linéaire et continue. En effet, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u_1, u_2 \in H$, on a

$$\begin{aligned} (A(\lambda u_1 + \mu u_2), v) &= a(\lambda u_1 + \mu u_2), v) \text{ par } (2.2) \\ &= \lambda a(u_1, v) + \mu a(u_2, v) \\ &= \lambda (Au_1, v) + \mu (Au_2, v) \text{ de nouveau par}(2.2) \\ &= (\lambda Au_1 + \mu Au_2, v) \end{aligned}$$

Cette égalité est obtenu pour tout $v \in H$, d'où $A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda Au_1 + \mu Au_2$. Pour la continuité, on a

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = a(u, Au) \leq \alpha \|u\| \|Au\|.$$

Par conséquent $\|Au\| \leq \alpha \|u\|$, pour tout $u \in H$. d'où A est continue. Maintenant, on montre que A est bijective. On commence par l'injectivité. Comme A est linéaire, il suffit de montrer que si $Au = 0$ alors $u = 0$. On a

$$\beta \|u\|^2 \leq a(u,u) = (Au, u) \leq \|Au\| \|u\|,$$

d'où $\beta \|u\| \leq \|Au\|$, il vient que si $Au = 0$ alors $u = 0$.

Montrons que A est surjective c'est à dire l'image de $A : Im(A) = H$. On montre d'abord que $Im(A)$ est fermé et puis on montre qu'il est dense dans H. Soit $(u_n)_n$ une suite dans H telle que $(Au_n)_n$ converge vers $w \in H$, alors pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\beta \|u_p - u_q\|^2 \leq a(u_p - u_q, u_p - u_q) = (A(u_p - u_q), u_p - u_q) \leq \|Au_p - Au_q\| \|u_p - u_q\|.$$

D'où $\|u_p - u_q\| \leq \frac{1}{\beta} \|Au_p - Au_q\|$. Comme $(Au_n)_n$ est convergente, on en déduit que $(u_n)_n$ est de Cauchy. D'où la suite $(u_n)_n$ converge vers un élément $u \in H$. On a par continuité de A,

$$\|Au - w\| = \lim_{n \to \infty} \|A(u - u_n)\| \leq \lim_{n \to \infty} (\alpha \|u - u_n\|) = 0,$$

d'où $Au = w$ et donc $w \in Im(A)$.

On montre que $Im(A)$ est dense dans H. Soit $v \in (Im(A))^{\perp}$. Alors $(Av, v) = 0$, ce qui implique que $\beta\|v\|^2 \leq a(v, v) = (Av, v) = 0$ et donc $v = 0$. Il vient que $(Im(A))^{\perp} = \{0\}$. Donc $Im(A)$ est dense dans H. L'image de A est fermé et dense dans H, d'où $Im(A) = H$ et la surjectivité de A.

Ensuite, d'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $w \in H$ tel que

$$\langle f, v\rangle = (w, v),\ \forall v \in H.$$

Grâce à la bijectivité de A en en déduit qu'il existe un élément unique $u \in H$ tel que $Au = w$ et par conséquent

$$a(u, v) = (Au, v) = (w, v) = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in H.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Remarque 2.1 *Si la forme bilinéaire B est symétrique, c'est à dire si*

$$a(u, v) = a(v,),$$

pour tout $u, v \in H$ alors on peux simplifier la preuve du théorème de Lax-Milgram en tenant compte que $a(\cdot, \cdot)$ définie un nouveau produit scalaire sur H et le théorème de Riesz implique le résultat.

2.2 Opérateurs compacts

Soient E et F deux espaces de Banach. $\mathscr{L}(E, F)$ est l'espace des opérateurs linéaires continues de E dans F

$\mathscr{L}(E)$ est l'espace des opérateurs linéaires continues de E dans E

Définition 2.1 *On dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(E, F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte. c'est à dire toute suite bornée $(x_n)_n$ de E,on peut extraire une sous suit $(x_{kn})_n$ tels que la suit image (Tx_{kn}) est convergent dans F. On désigne par $\mathscr{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $\mathscr{K}(E) = \mathscr{K}(E, E)$.*

Théorème 2.3 *L'ensemble $\mathscr{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de$\mathscr{L}(E, F)$(pour la norme $\|\|_{\mathscr{L}(E,F)}$)*

Définition 2.2 *On dit qu'un opérateur$T \in \mathscr{L}(E, F)$ est de rang fini si dim $R(T) < \infty$. Il est clair qu'un opérateur continu de rang fini est compact.*

Corollaire :Soit (T_n) une suite d'opérateurs continus de rangs finis de E dans F et soit $T \in \mathscr{L}(E, F)$ tels que $\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \longrightarrow 0$. Alors $T \in \mathscr{K}(E, F)$

2.3 Spectre d'un opérateur compact

Définition 2.3 *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Le noyau de T, noté $N(T)$, est l'ensemble des vecteurs u tels que $Tu = 0$. C'est à dire :*

$$N(T) = \{u \in E : T(u) = 0\}$$

Définition 2.4 *Soit $T \in \mathscr{L}(E)$.*

- *L'ensemble résolvant de T est défini par*

$$p(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) \ est\ bijectif\ deE\ \ surE\}$$

- *Le spectre $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant :*

$$\sigma(T) = \mathbb{R} \backslash \rho(T)$$

- *On dit que λ est valeur propre de T si*

$$N(T - \lambda I) \neq \{0\}$$

  et on note $VP(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T, $N(T - \lambda I)$ est l'espace propre associé à λ et ses élément s'appellent vecteurs propres associés à λ.

Il est important de retenir que si $\lambda \in \rho(T)$ alors $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathscr{L}(E)$

2.4 Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints compacts

Définition 2.5 *Soient H un espace de Hilbert muni de produit scalaire $(.,.)$, et $T : H \longrightarrow H$ un opérateur. On identifie H avec H'. L'adjoint de Tnoté T^*, est un opérateur défini par*

$$T^* : H \longrightarrow H$$

$$(Tu, v) = (u, T^* v) \ pourtout\ u, v \in H.$$

Remarque 2.2 *Il est facile de voir que*

1. *Si $T \in \mathscr{L}(H)$ alors $T^* \in \mathscr{L}(H)$.*
2. *Si $T \in \mathscr{K}(H)$ alors $T^* \in \mathscr{K}(H)$.*

Définition 2.6 *On dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ est autoadjoint (ou symétrique) si $T^* = T$, c'est-á-dire*

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in H$$

Proposition 2.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur autoadjoint. On pose*

$$m = \inf_{u \in H, |u|=1} (Tu, u) \quad et \quad M = \sup_{u \in H, |u|=1} (Tu, u)$$

Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ et $M \in \sigma(T)$.

Preuve. Soit $\lambda > M$; montrons que $\lambda \in \sigma(T)$. On a

$$(Tu, u) \leq M|u|^2 \quad \forall u \in H,$$

et par conséquent

$$(\lambda u - Tu, u) \geq (\lambda - M)|u|^2 = \alpha|u|^2 \quad \forall u \in H, \quad avec \quad \alpha > 0.$$

Appliquant le théorème de Lax-Milgram on voit que $\lambda I - T$ est bijectif.
Montrons que $M \in \sigma(T)$. La forme $a(u, v) = (Mu - Tu, v)$ est bilinéaire, symétrique et $a(v, v) \geq 0, \forall v \in H$. Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme $a(u, v)$ il vient

$$|Mm - Tu,| \leq (Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}}(Mv - Tv, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H.$$

D'où il résulte en particulier que

$$|Mu - Tu| \leq C(Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H. \tag{2.3}$$

Soit (u_n) une suite telle que : $|u_n| = 1$ et $(Tu_n, u_n) \to M$. Grâce à (2.3) on voit que $|Mu_n - Tu_n| \longrightarrow 0$, et donc $M \in \sigma(T)$ (car si $M \in \rho(T)$, alors

$$u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \longrightarrow 0)$$

Les propriétés de m s'obtiennent en remplaçant T par $-T$.
■

Corollaire 2.1 .
Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur autoadjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors $T = 0$.

Preuve. D'après la proposition 2.1 on sait que

$$(Tu, u) = 0 \quad \forall u \in H$$

Il en résulte que

$$2(Tu, v) = (T(u + v), u + v) - (Tu, u) - (Tv, v) = 0 \quad \forall u, v \in H.$$

Donc $T = 0$. ■

Lemme 2.1 *Soit $(\lambda_n)_n$ une suite de réels tous distincts telle que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ et $\lambda_n \in \sigma(T)/\{0\}, \forall n$ alors $\lambda = 0$. Autrement dit, tous les points de $\sigma(T)/\{0\}$ sont isolés.*

Preuve. On sait que $\lambda_n \in VP(T)$, soit $e_n \neq 0$ tels que $(T - (\lambda_n))(e_n) = 0$ soit (E_n) l'espace vectoriel engendré par $e_1, e_1, ...e_n$ montrons que $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout n. Il suffit de vérifier que, pour tout n, les vecteurs $e_1, e_1, ...e_n$ en sont linéairement indépendants. Raisonnons par récurrence sur n. Admettons le résultat à l'ordre n et supposons que $e_{n+1} = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i e_i$ alors

$$Te_{n+1} = \textstyle\sum_{n=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1} e_i$$

Par suite $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ pour tout $i = 1, 2, ...n$ et donc $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, 2...n$ et c'est une contradiction. Donc $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout n. D'autre part, il est clair que $(T - \lambda_n)E_n \subset E_{n-1}$. Appliquant le lemme de Riesz on construit une suite $(u_n)_n$ tels Que $u_n \in E_n, \|u_n\| = 1$ et dist $(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ pour $n \geq 2$.

soient $2 < m < n$ de sort que $E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$ on a

$$\|\tfrac{Tu_n}{\lambda_n} - \tfrac{Tu_m}{\lambda_m}\| = \|\tfrac{(Tu_n - \lambda_n u_n)}{\lambda_n} - \tfrac{(Tu_m - \lambda_m u_m)}{\lambda_m} + u_n - u_m\| > dist(u_n, E_{n-1} > \tfrac{1}{2}$$

Si $\lambda_n \longrightarrow \lambda \neq 0$ on aboutit à une contradiction puisque (Tu_n) admet une sous-suite convergente.

■

Définition 2.7 *On appelle base Hilbertienne (ou simplement base s'il n'y a pas de confusion possible une suite $(e_n)_n$ d'éléments de H tels que*

1. *$|e_n| = 1 \; \forall n, (e_m, e_n) = 0 \; \forall m, n, m \neq n$*
2. *L'espace vectoriel engendré par les $(e_n, n \in N)$ est dense dans H.*

si (e_n) est une base Hilbertienne alors tout $u \in H$ s'écrit

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n \quad avec \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2$$

Inversement étant donnée une suite $(\alpha_n) \in l^2$,alors la série$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge vers un élément noté u ; on a

$$(u, e_n) = \alpha_n \quad et \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$$

Théorème 2.4 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.*

Preuve. La preuve procède en plusieurs étapes :

1. Séparabilité implique l'existence d'un ensemble dense dénombrable. Par hypothèse, il existe un sous-ensemble dénombrable $D = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ tel que $\overline{D} = H$.

2. Construction par le procédé de Gram-Schmidt : Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à D :
   — Posons $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ si $x_1 \neq 0$ (sinon on passe au premier x_n non nul)
   — Pour $n \geq 2$, définissons récursivement :

   $$f_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k$$

   puis normalisons :

   $$e_n = \frac{f_n}{\|f_n\|} \quad \text{si } f_n \neq 0$$

   (sinon on omet e_n)

   Ce procédé construit une famille orthonormale $(e_n)_{n \in I}$ (où $I \subseteq \mathbb{N}$).
3. Totalité de la famille orthonormée Montrons que $\overline{\text{span}\{e_n\}_{n \in I}} = H$:
   — Tout $x \in H$ peut être approché par des éléments de D (par densité).
   — Chaque élément de D est dans $\text{span}\{e_n\}_{n \in I}$ par construction
   — Donc $\text{span}\{e_n\}_{n \in I}$ est dense dans H
4. Conclusion La famille $(e_n)_{n \in I}$ ainsi construite est :
   — Orthonormale (par construction)
   — Totale (d'après l'argument de densité).

C'est donc bien une base hilbertienne de H. ■

Théorème 2.5 *On suppose que H est séparable. Soit T un opérateur autoadjoint et compact sur H. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Preuve. Soit $(\lambda_n)_{(n \geq 1)}$ la suite des valeurs propres distinctes de T, excepté 0 ; on note $\lambda_0 = 0$. On pose $E_0 = N(T)$ et $E_n = N(T - \lambda_n I)$; rappelons que

$$0 \leq dim\ E_0 \leq \infty \ et\ que\ 0 < dim\ E_n < \infty.$$

Montrons d'abord que H est somme Hilbertienne des $(E_n)_n > 0$:

1. Les $(E_n)_{n>0}$ sont deux à deux orthogonaux. En effet si $u \in E_m$ et $\nu \in E_n$ avec $m \neq n$ alors

   $$Tu = \lambda_m u, \quad T\nu = \lambda_n \nu$$

   et

   $$(Tu, \nu) = \lambda_m(u, \nu) = (u, T\nu) = \lambda_n(u, \nu).$$

   Donc

   $$(u, \nu) = 0$$

2. Soit F l'espace vectoriel engendré par les $(E_n)_{n>0}$. Vérifions que F est dense dans H. Il est clair que $T(F) \cap F$. Il s'en suit que $T(F^\perp)F^\perp$; en effet si $u \in F^\perp$ et $\nu \in F$, alors $(Tu, \nu) = (u, T\nu) = 0$. L'opérateur $T_0 = T_{F^\perp}$ est autoadjoint compact. D'autre part $\sigma(T_0) = 0$; en effet si
$$\lambda \in \sigma(T_0)\backslash 0, \quad alors \ \lambda \in VP(T_0)$$
et donc il existe $u \in F^\perp$, $u \neq 0$ tel que $T_0 u = \lambda u$. Par conséquent λ est l'une des valeurs propres λ_n de T et $u \in F^\perp \cap E_n$. Donc $u = 0$, et c'est une contradiction.
Il résulte du corollaire VI. 10 que $T_0 = 0$; par suite
$$F^\perp \subset N(T) \subset F \ \ et \ \ F^\perp = 0.$$
Donc F est dense dans H. Enfin on choisit dans chaque E_n une base Hilbertienne. La réunion de ces bases est une base Hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.

■

CHAPITRE 3

APPLICATIONS AUX PROBLÈMES AUX LIMITES

3.1 Opérateur de Laplacien

3.1.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^n$. On considère le problème à valeurs propres suivant

$$(\mathrm{P}_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 3.1 *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème aux limites (P_λ) si*

$$a(u,v) = (\lambda u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.1}$$

où $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$, $\quad (\lambda u, v) = \lambda \int_\Omega uv dx$. Cette équation s'appelle formulation variationnelle associée au problème On définie l'opérateur $T := (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ qui à f associe $Tf := u$ la solution faible du problème

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \textit{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 3.2 *Si u est une solution faible non nulle du problème (P_λ),alors λ s'appelle valeur propre de l'opérateur de Laplace et u s'appelle fonction propre associé à la valeur λ.*

3.1.2 Résolution du problème P_λ

On applique le théorème 2.5. On a les propriétés suivants concernant l'opérateur T.

Proposition 3.1 *T est bien défini, linéaire, continue et auto-adjoint*

Preuve.

1. Montrons que T est bien définie. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors $Tf := u$ satisfaite la formulation variationnelle suivante :
$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$
La forme bilinéaire associé est définie sur H_0^1 par
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x$$
On a a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz
$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$
Et on a a est coercive, car
$$a(u,u) = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$
Et on a la forme linéaire $v \mapsto \int fvdx$ est continue car
Donc d'après le théorème 2.1,la formulation faible (3.2) admet une solution unique $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$.D'où T est bien défini
2. Montrons que T est linéaire, continue et symétrique.
   — La linéarité : $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g) \;\; \forall \alpha, \beta \in R, \; \forall\; f, \mathbf{g} \in L_0^2(\Omega)$ on pose $w = T(\alpha f + \beta g)$
   $$\begin{cases} -\Delta w = \alpha f + \beta g & \text{dans} \quad \Omega \\ w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$
   on pose $u = T(f), v = T(g)$ d'ou
   $$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$
   $$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{dans} \quad \Omega \\ v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$
   par addition :
   $$\begin{cases} -\alpha\Delta u - \beta\Delta v = \alpha f + \beta g & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0, v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} -\Delta(\alpha u+\beta v)=\alpha f+\beta g & \text{dans} \quad \Omega \\ u=0, v=0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

par unicité de la solution $w=\alpha u+\beta v=T(\alpha f+\beta g)=\alpha T(f)+\beta T(g)$

— La symétrie : Soient $f,g\in L^2(\Omega)$. On pose $Tf=u$ et $Tg=v$. D'où

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\phi \mathrm{d}x=\int_\Omega f\phi \mathrm{d}x, \qquad \int_\Omega \nabla v.\nabla\phi \mathrm{d}x=\int_\Omega g\phi \mathrm{d}x, \quad \forall\phi\in H_0^1(\Omega).$$

En remplaçant ϕ par v et u dans les deux équations, on obtient

$$\int_\Omega fv\mathrm{d}x=\int_\Omega gu\mathrm{d}x$$

ce qui implique $\langle Tf,g\rangle=\langle f,Tg\rangle$

— La continuité : On multiplie l'équation de (P) par u et on intègre par parties on obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de Poincaré :

$$\|Tf\|^2_{H_0^1(\Omega)}=\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega fu\mathrm{d}x\le\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.3}$$

et par conséquent

$$\|Tf\|_{L^2(\Omega)}\le c\|Tf\|_{H_0^1(\Omega)}\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc T est continue.

■

Proposition 3.2 *T est est compact*

Preuve. Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans $L^2(\Omega)$. D'après l'inégalité (3.3), $(Tf_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et grâce à l'injection compacte de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous suite convergente dans $L^2(\Omega)$. Donc T est compact. ■

Maintenant on est prêt de démontrer le résultat principale de ce chapitre

Théorème 3.1 1. *Le problème (P_λ) admet une suite croissante des valeurs propre et fonctions propres $(\lambda_n,\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

2. *La première valeur propre λ_1 est strictement positive et simple et elle caractérisée par :*

$$\lambda_1=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{3.4}$$

De plus, les fonctions propres associées sont de signe constantes.

Preuve.

1. Comme T est compacts, symétriques,alors d'après le théorème 2.5, il admet une suite positive et décroissant des valeurs propres $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ telle que $\mu_k \longrightarrow 0$. On note par w_k la fonction propre associée à μ_k, i.e. $Tw_k = \lambda_k w_k$. C'est à dire

$$(\mathrm{P}_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta(\mu_k w_k) = w_k & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Ce qui implique w_k est solution faible de (P_{λ_k}) avec $\lambda_k := \frac{1}{\mu_k} \longrightarrow +\infty$.

2. La preuve de simplicité et la positivité de la première fonction propres se démontre dans le cas générale dans le théorème 3.3 ci-dessous. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n w_n.$$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \|w_n\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2$$

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \|w_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \lambda_n \geq \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 = \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et donc

$$\lambda_1 \leq \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{\|w_1\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{\|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}} = \lambda_1$$

D'où

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

■

3.2 Opérateur elliptique symétrique

3.2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^n$. On considère le problème à valeurs propres suivant

$$(\mathrm{P}_\lambda) \qquad \begin{cases} Lw = \lambda w & \text{dans} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Pour simplifier, nous considérons maintenant un opérateur elliptique ayant la forme de divergence

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{xi})_{xj} \tag{3.6}$$

ou $a \in C^{\infty}(\bar{U}), (i, j = 1, \cdots, n)$Nous supposons que la condition d'ellipticité uniforme habituelle est vérifiée et comme d'habitude. Supposons

$$a^{i,j} = a^{j,i} \quad (i, j = 1, \cdots, n) \tag{3.7}$$

L'opérateur L est donc symétrique, et en particulier la forme bilinéaire associée $a(,)$est donné par

$$a(v, u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)).$$

Cette forme bilinéaire est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

3.2.2 Résolution du problème P_λ

On définit l'opérateur $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ par $Sf = u$, où u est l'unique solution faible du problème

$$(\mathrm{P}_\lambda) \qquad \begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

C'est à dire

$$a(u, v) = (f, v) = \int_{\Omega} f v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Alors, on a les propriétés suivantes

Proposition 3.3 *S est bien défini, linéaire, continue et symétrique.*

Preuve. On montre juste que S est symétrique. La preuve des autres propriétés est similaire avec la preuve proposition 3.1. Soient $f, g \in L^2(U)$. Alors $Sf = u$ signifie que $u \in H_0^1(\Omega)$ est la solution faible de

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

et de même $Sg = u$ signifie que $v \in H_0^1(\Omega)$ résulte

$$\begin{cases} Lv = g & \text{dans} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

au sens faible. Ainsi

$$(Sf, g) = (u, g) = a(v, u),$$

et

$$(f, Sg) = (f, v) = a(u, v).$$

Puisque $a(u, v) = a(v, u)$, on voit $(Sf, g) = (f, Sg)$ pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$ Donc S est symétrique Notez également

$$(Sf, f) = (u, f) = a(u, u) \geq 0 \ (f \in L^2(\Omega))$$

■

Proposition 3.4 *S est est compact*

Preuve. Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans $L^2(\Omega)$. $(Sf_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et grâce à l'injection compacte de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous suite convergente dans $L^2(\Omega)$. Donc S est compact. ■

Concernant les valeurs propres, on a

Théorème 3.2 *1. Chaque valeur propre de L est réelle*

2. De plus, si l'on répète chaque valeur propre en fonction de sa multiplicité (finie),on a

$$\sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$$

ou

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$$

et

$$\lambda_k \to \infty \quad comme \quad k \to \infty$$

3. Enfin, il existe une base orthonormée $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$ou $w_k \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre correspondant à λ_k

$$\begin{cases} Lw_k = \lambda_k w_k & dans\Omega \\ w_k = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.11}$$

pour $k = \{1, 2, \cdots\}$.

Preuve.

1. On considérons l'opérateur S défini ci-dessus ($S = L^{-1}$). D'après la proposition 3.3 et 3.4, S est un opérateur linéaire, continu, compact et symétrique de $L^2(\Omega)$ sur lui même. Par conséquent, la théorie des opérateurs compacts et symétriques (voir Théorèmes 2.1, 2.5) implique que toutes les valeurs propres de S sont réelles, positives, et qu'il existe des fonctions propres correspondantes qui constituent une base orthonormale de $L^2(U)$. Mais observons aussi que pour $\eta \neq 0$ on a $Sw = \eta w$ SSI $Lw = \lambda w$ pour $\lambda = \frac{1}{\eta}$, Ce qui finit la preuve.

■

Nous examinons ensuite plus attentivement la première valeur propre λ_1 de L.

Théorème 3.3 *1. Nous avons*

$$\lambda_1 = min\{a(u,u)|u \in H_0^1(U), \|u\|_L^2 = 1\} \tag{3.12}$$

2. De plus, le minimum ci dessus est atteint pour une fonction w_1 positive dans U qui résout

$$\begin{cases} Lw_1 = \lambda_1 w_1 & dans \quad U \\ w_1 = 0 & sur \quad \partial U \end{cases} \tag{3.13}$$

3. Enfin, si $u \in H_0^1(U)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & dans \quad U \\ u = 0 & sur \quad \partial U \end{cases} \tag{3.14}$$

Alors u est un multiple de w_1

Remarque 3.1 *1. L'assertion (1)et (3) dit que la valeur propre principale λ_1 est simple. En particulier*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$$

2. L'expression3.12 est la forme de Rayleigh et est équivalente à l'énoncé

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(u) u \neq 0} \frac{a(u,u)}{\|u\|_{L^2(U)}^2}$$

Preuve.

1. D'après de 3.11 on trouve :

$$a(w_k, w_k) = \lambda_k \|w_k\|_{L^2}^2 = \lambda_k, \tag{3.15}$$

et

$$a(w_k, w_l) = \lambda_k (w_k, w_l) = 0, \tag{3.16}$$

pour $k, l = 1, 2, \cdots, k \neq l$.

2. comme $\{w_k{}_{k=1}^{\infty}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\Omega)$, si $u \in H_0^1(\Omega)$et $\|u\|_{L^2}(\Omega) = 1$ on peut ecrire

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k, \tag{3.17}$$

pour $d_k = (u, w_k)_{L^2(\Omega)}$ la série convergeant en $L^2(\Omega)$ in outre

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1. \tag{3.18}$$

3. De plus, d'après 3.15 et 3.16, nous voyons que $\{\frac{w_k}{\lambda_k^{\frac{1}{2}}}{}_{k=1}^{\infty}\}$ est un ensemble orthonormal de $H_0^1(\Omega)$, doté du nouveau produit interne $a(,)$. Nous affirmons en outre qu'il $\{\frac{w_k}{\lambda_k^{\frac{1}{2}}}{}_{k=1}^{\infty}\}$ s'agit en fait d'une base orthonormée de $H_0^1(\Omega)$, avec ce nouveau produit sclaire. Pour s'en rendre compte, il suffit de vérifier que

$$a(w_k, u) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

implique $u = 0$. Mais cette affirmation est clairement vraie, puisque les identitée .

$$a(w_k, u) = \lambda_k(w_k, u) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

force $u = 0$, car $\{w_k\} = 1$ est une base de $L^2(\Omega)$ Par conséquent

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \frac{w_k}{\lambda_k^{\frac{1}{2}}}$$

pour $\eta_k = a(u, \frac{w_k}{\lambda_k^{\frac{1}{2}}})$ la série convergeant dans $H_0^1(\Omega)$.Mais alors selon 3.17 $\eta_k = d_k \lambda_k^{\frac{1}{2}}$ et la série 3.17 converge en fait aussi dans $H_0^1(\Omega)$

4. Ainsi 3.15 et 3.17 impliquent

$$a(u, u) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \geq \lambda_1 \quad by(9).$$

Comme l'égalité est vraie pour $u = w_1$ nous obtenons la formule 3.7

5. nous affirmons ensuite que si $u \in H_0^1(U)$ et $\|u\|_{L^2(U)} = 1$ alors u est une solution faible de

$$\begin{cases} Lw_1 = \lambda_1 w_1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.19}$$

ne serait -ce que si

$$a(u, u) = \lambda_1. \tag{3.20}$$

évidemment 3.19 implique 3.20 d'un autre coté ,supposons que (3.21) soit valide. alors en écrivant $d_k = (u, w_k)$comme ci-dessus, nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_1 = \lambda_1 = a(u, u) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k,$$

ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_1) d_k^2 = 0,$$

consequently

$$d_k = (u, w_k) = 0 \quad si\ \lambda_k > \lambda_1.$$

puisque λ_1 a une multiplicité finie ,il s'ensuit que

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w_k) w_k. \tag{3.21}$$

pour certains m ou $Lw_k = \lambda_1 w_k$donc

$$L(u) = \sum_{k=1}^{m} (u, w_k) L w_k = Lu \tag{3.22}$$

cela prouve(10)

6. Nous montrerons ensuite que si $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution faible de 3.19, $u \neq 0$ alors soit

$$u > 0 \quad dans\Omega \tag{3.23}$$

ou sinon

$$u < 0 \quad dans\Omega \tag{3.24}$$

pour voir cela, supposons que $\|u\|_{L^2} = 1$ et notons

$$\alpha + \beta = 1$$

pour

$$\alpha = \int_\Omega (u^+)^2 dx, \quad \beta = \int_\Omega (u^-)^2 dx$$

de plus, on a $u^\pm \in H_0^1(\Omega)$ avec

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & p.p.\ sur \quad \{u > 0\} \\ 0 & p.p.\ sur \quad \{u < 0\} \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & p.p.\ sur \quad \{u > 0\} \\ -\nabla u & p.p.\ sur \quad \{u < 0\} \end{cases}$$

On a $a(u^+, u^-) = 0$ par conséquent

$$\begin{aligned} \lambda_1 = a(u,u) = a(u^+,u^+) = a(u^-,u^-) \\ \geq \lambda_1 \|u^+\|_{L^2}^2 + \lambda_1 \|u^-\|_{L^2}^2 \\ = (\alpha + \beta)\lambda_1 = \lambda_1 \end{aligned}$$

Mais alors nous voyons que l'inégalité ci-dessus doit en fait être une égalité, et donc

$$a(u^+, u^+) = \lambda_1 \|u^+\|_{L^2}^2, a(u^-, u^-) = \lambda_1 \|u^-\|_{L^2}^2.$$

Par conséquent, d'après l'étape 5, on a

$$\begin{cases} Lu^+ = \lambda_1 u^+ & \text{dans} \quad \Omega \\ u^+ = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.25}$$

et

$$\begin{cases} Lu^- = \lambda_1 u^- & \text{dans} \quad \Omega \\ u^- = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.26}$$

au sens faible

7. Ensuite, puisque les coefficients a^{ij}sont réguliers . on déduit de 3.25 que $u^+ \in C^\infty(\Omega)$ et $Lu^+ = \lambda_1 u^+ \ \ dans\ \Omega$ la fonction u^+ est donc une supersolution. Ainsi le principe du maximum fort implique soit $u^+ > 0$ dans Ω, soit $u^+ \equiv 0\ dans \Omega$. Des arguments similaires s'appliquent à u ,et donc (3.23) et (3.24) sont valables

8. Supposons enfin que u et $\tilde{u}$ sont deux solutions faibles non triviales de3.19 au vu des étapes 6 et 7 ci-dessus

$$\int_U \tilde{u}dx \neq 0$$

et donc il existe une constante réelle χ telle que

$$\int_U u_\chi \tilde{u} dx = 0 \tag{3.27}$$

mais puisque $u_\chi \tilde{u}$ est aussi une solution faible de 3.19 ,les étapes 6 est 7 et l'égalité 3.27 impliquent $u = \chi\tilde{u}$ dans Ω la valeur propre λ_1 est simple

■

3.3 Opérateur elliptiques non symétriques

Dans cette section, on étudier un problème aux valeurs propre avec un opérateur non symétrique. L'hypothèse de la symétrie est nécessaire pour que les valeurs propres d'un opérateur linéaire soient réelles. Cependant, la première valeur propre reste réelle et simple avec certains type des opérateurs linéaire non symétrique, comme on le verra avec l'opérateur ci-dessous.

3.3.1 Position du problème

On considère le problème suivant :

$$(Q_\lambda) \begin{cases} Lu = \lambda u & dans\ \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Considérons maintenant un opérateur elliptique L sous la forme de non-divergence où Ω est ouvert, borné, connexe et régulière, $\lambda > 0$ et L est un opérateur non symétrique linéaire défini par

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{xi})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{xi} + cu$$

Supposons pour simplifier que $a, b, c \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on suppose aussi $a^{ij} = a^{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ et

$$b_i \geq 0, , \ \forall i = 1, ..., n, \qquad c \geq 0 \qquad dans\ \Omega.$$

On suppose que l'opérateur L est uniformément elliptique, c'est à dire

$$\exists \theta > 0 : \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \tag{3.28}$$

On définit maintenant la notion d'une solution faible du problème (Q_λ)

Définition 3.3 *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème aux limites (Q_λ) si*

$$a(u, v) = (\lambda u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.29}$$

où

$$a(u, v) = (Lu, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{xi} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{xi} v_{x_i} + cuv \right) \mathrm{d}x, \tag{3.30}$$

$$(\lambda u, v) = \int_\Omega \lambda uv \mathrm{d}x.$$

Cette équation s'appelle formulation variationnelle associée au problème .

3.3.2 Résolution du problème

On s'intéresse à l'existence de la première valeur propre et la fonction propre associée pour l'opérateur L. On commence par démontrer les résultats suivants

Lemme 3.1 *Soient $f \in L^2(\Omega)$, $b_i, c \geq 0$, pour tout $i = 1, \cdots, n$. Alors le problème*

$$\begin{cases} Lu = f & dans \quad \Omega \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.31}$$

admet une solution faible unique dans $H_0^1(\Omega)$

Preuve. On va applique le theorem La- Milgram 2.2 sur la Forme variationnelle associée au problème 3.31 :

$$a(u, v) = (f, v) = \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

où a est défini par 3.30.

— **Continuité de** a **:** On a

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n |a^{ij} u_{x_i} v_{x_j}| \mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i=1}^n |b^i u_{x_i} v| \mathrm{d}x + \int_\Omega |cuv| \mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u||v| \mathrm{d}x \\
&\qquad + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u||v| \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Pour majorer le premier terme à gauche, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\int_\Omega |\nabla u||\nabla v| \mathrm{d}x \leq C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Pour le deuxième et le troisième termes, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et Poincaré :

$$\int_\Omega |\nabla u||v| \mathrm{d}x \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\int_\Omega |u||v| \mathrm{d}x \leq C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \left(C_1 \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} + C_2 \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(\Omega)} + C_3 \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Ce qui donne la continuité de a.

— **Coercivité de** a Pour montrer la coercivité de a, on utilise la condition d'ellipticité (3.28). On a

$$\begin{aligned}
\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \mathrm{d}x \\
&= a(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} u \mathrm{d}x - \int_\Omega cu^2 \mathrm{d}x \\
&\leq a(u,u)
\end{aligned}$$

Ce qui donne la coercivité de a. D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (3.31), admet une solution faible unique dans $H_0^1(\Omega)$.

■

Pour la preuve du résultat principal, on a besoin de ces résultats concernant l'existence des point fixe.

Théorème 3.4 (de point fixe de Schauder) *Soient X un espace de Banach, $K \subset X$ un compact et convexe et supposons également que*

$$A : K \to K$$

est continue. Alors A a un point fixe dans K

Théorème 3.5 (de point fixe de Schaefer) *Soit $A : X \to X$ un opérateur linéaire et compact. Supposons que l'ensemble*

$$S = \{u \in X, \exists \lambda \in [0,1] .u = \lambda A(u)\}$$

est borné. Alors A admet un point fixe

Preuve.

1. On choisit une constante M assez grand tel que

$$\|u\| < M \quad si\ u = \lambda A(u)\ pourcertains\ 0 \le \lambda \le 1 \tag{3.32}$$

   On définit alors

$$\tilde{A}(u) = \begin{cases} A(u) & si \quad \|A(u)\| \le M \\ \frac{MA(u)}{\|A(u)\ |} & si \|A(u)\| \ge M \end{cases} \tag{3.33}$$

   Observons que $\tilde{A} : B(0, M) \to B(0, M)$. Maintenant, on note par K l'enveloppe convexe fermé de $\tilde{A}(B(0, M))$. Alors puisque A et donc $\tilde{A}$ sont des applications compact,K est application compact, alors K est un sous-ensemble compact de X. De plus $\tilde{A} : K \to K$

2. En utilisant le théorème du point fixe de Schauder 3.4, nous déduisons l'existence d'un point $u \in K$ tel que

$$\tilde{A}(u) = u \tag{3.34}$$

   Nous affirmons maintenant en plus que u est un point fixe de A. Sinon, d'après (3.33) et (3.34), nous aurions

$$\|A(u)\| > M$$

   et

$$u = \lambda A(u) \quad pour \quad \lambda = \frac{M}{\|A(u)\|} < 1 \tag{3.35}$$

   Mais $\|u\| = \|\tilde{A}(u)\| = M$, qui est une contradiction avec (3.32) et (3.35).

■

Maintenant, on démontre le résultat principale de ce paragraphe :

Théorème 3.6 (Valeur propre principale) *1. Il existe une valeur propre réelle λ_1 pour l'opérateur L, prise avec des conditions aux limites nulles. De plus, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une autre valeur propre, nous avons*

$$Re(\lambda) \geq \lambda_1$$

2. Il existe une fonction propre correspondante w_1, qui est positive dans u .

3. La valeur propre λ_1 est simple ;autrement dit, si u est une solution de (1),alors u est un multiple de w_1 .

Preuve. La preuve se décompose en plusieurs étapes

1. Soit $m = 3 + [\frac{n}{2}]$.On considère l'espace $X = H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ D'après le théorème d'injection de Sobolev (voir théorème 1.2. On a

$$X \hookrightarrow \mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$$

   On défini maintenant l'opérateur

$$A : X \longrightarrow X$$

$$Af = u$$

   où u est l'unique solution faible du problème (3.31)
   D'après le lemme 3.1 précédente A est bien défini

2. Montrons que A est compact
   Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans X
   D'après le théorème de régularité des problème aux limites 1.7, on a $u_n = Af_n \in H^{m+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,et comme $H^{m+2} \hookrightarrow_c H^m$, alors on peut extraire une sous suite de $(u_n)_n$ converge dans H^m et dense dans X
   D'où A est compact.
3. On définit maintenant

$$C = \{u \in X | u \geq 0 \ dans \ \Omega\}$$

   D'après le principe de maximum 1.5, on a si $f \in X \ \ et \ \ f \geq 0$ alors $u = Af \geq 0 \ \ et \ \ u \in X$. Donc

$$A \ C \longrightarrow C$$

   Soit $w \in C$ avec $w \neq 0$. D'après le principe de Maximum 1.5 et le lemme de Hopf 1.1 On a

$$v > 0 \ dans \ \Omega \ et \ \frac{\partial v}{\partial \nu} < 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega \tag{3.36}$$

pour $v = Aw$ Rappelons que $w = 0$ sur $\partial\Omega$,D'après (3.36),il existe $\mu > 0$ t.q

$$\mu v \geq w \quad dans \quad \Omega \tag{3.37}$$

Fixons $\varepsilon > 0, \eta > 0$ .On considère l'équation

$$u = \eta A(u + \varepsilon w) \tag{3.38}$$

4. On montrons que si u satisfait (3.38),alors

$$\eta < \mu.$$

Soit u la solution de (ref26) et $u \in C$, alors

$$\begin{cases} -\delta u = \eta u + \eta \varepsilon w & \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.39}$$

et rappelons que $v = Aw$ d'oú

$$\begin{cases} -\delta u = w & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

d'oú

$$\begin{cases} -\delta(\varepsilon\eta v) = \varepsilon\eta w & \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.40}$$

de (3.39)et(3.40) on remarque que

$$-\delta u \geq -\delta(\varepsilon\eta v)$$

d'après le principe de maximum faible 1.5

$$u \geq \varepsilon\eta v \geq \frac{\eta}{\mu}\varepsilon w$$

D'autre part $-\delta u \geq \eta u = \eta(-\delta A(u))$
Donc par le principe de maximum on a

$$u \geq \eta A(u) \geq \eta\frac{\eta}{\mu}\varepsilon w \geq (\frac{\eta}{\mu})^2 \varepsilon w$$

En repetant ce procedure on obtient

$$u \geq (\frac{\eta}{\mu})^k \varepsilon w, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

D'oú si $\eta > \mu$ alors, en passont à la limite quand $k \to +\infty$,on obtient $u = +\infty$ contradiction donc

$$\eta \leq \mu$$

5. On définit l'ensemble suivant

$$S_\varepsilon = \{u \in C, \exists 0 \leq \eta \leq \varepsilon\mu : u = \eta A(u + \varepsilon w)\}$$

On montre que S_ε est borné dans X On pose $\lambda = \frac{\eta}{2\mu}, Bu = 2\mu A(u + \varepsilon w)$ D'oú $u = \eta A(u + \varepsilon w) \Leftrightarrow u = \lambda Bu$

et $S_\varepsilon = \{u \in C, \exists \lambda \in [0, 1],\ u = \lambda Bu\}$

Si S_ε est borné alors d'après le théorème de point fixe de Schaefer 3.5, l'opérateur B admet un point fixe u C-à-d $u = Bu$. D'oú $u = 2\mu A(u + \varepsilon w)$ contradiction avec l'étape précédent, donc l'ensemble S_ε n'est pas borné.

6. Comme S_ε n'est pas borné alors il existe une suite $(\eta_\varepsilon, v_\varepsilon)$ telle que

$$0 \leq \eta_\varepsilon \leq 2\mu$$

$$v_\varepsilon \in C \ et \ \|v_\varepsilon\|_X > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$v_\varepsilon = \eta_\varepsilon A(v_\varepsilon + \varepsilon w)$$

On pose $u_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon}{\|v_\varepsilon\|_X}$ Alors, on a

$$\begin{cases} \|u_\varepsilon\| = 1 \\ 0 \leq \eta_\varepsilon \leq 2\mu \end{cases}$$

D'oú il existe une sous suite notée encore $(\eta_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon$tq :

$$\{u_\varepsilon \rightharpoonup u \ \ dans \ \ X \eta_\varepsilon \to \eta \ \ dans \ \mathbb{R}$$

Comme A est compact et $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon A(u_\varepsilon + \mu w)$ alors pour une sous suite

$$u_\varepsilon \to u \ \ dans \ \ X$$

rt on a $\|u\|_X = 1$ alors $u \neq 0$, et comme $u_\varepsilon \in C$ et $u_\varepsilon > 0$ d'oú $u = \lim u_\varepsilon > 0$ Donc

$$u \in C$$

Rappelons que $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon A(u_\varepsilon + \varepsilon w)$
En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ on obtient $u = \eta A u$
Par conséquent

$$\{-\Delta w = \lambda_1 w_1 \ \ dans \ \ \Omega w_1 = 0 \ \ sur \ \partial\Omega$$

oú $w_1 = u, \lambda_1 = \eta > 0$ Donc $\lambda_1 = \eta$ est une valeur propre pour l'opérateur L et elle est strictement positive car $w_1 = u > 0 \ \ sur \ \ \Omega$ et w_1 est une fonction propre associée, et d'après le lemme de Hopf 1.1, on a $w_1 > 0$ dans Ω et $\frac{\partial w_1}{\partial \nu} < 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega$
Soit maintenant $\lambda \in C$une valeur propre de L c-à-d

$$\{Lu = \lambda u \ \ dans \ \ X u = 0 \ \ sur \ \partial\Omega$$

7. Considérons une fonction régulière $w : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $w > 0 \ \ sur \Omega$. On pose $v = \frac{u}{w}$
Alors $\lambda v = \frac{\lambda u}{w} = \frac{1}{w} Lw = \frac{1}{w} L(vw) \qquad = Lv - cv - \frac{2}{w} \sum a^{ij} w_{x_i} v_{x_i} + \frac{v}{w} Lw$

$$\lambda v = kv + \frac{Lw}{w}$$

oú $kv = -\sum a^{ij} v_{x_i x_j} + \sum b'^i v_{x_i} \qquad b'^i = b$ D'oú

$$kv + (\frac{Lw}{w} - \lambda) v = 0 \ \ dans \ \ \Omega \tag{3.41}$$

En prenant le conjugué, on obtient

$$k\overline{v} + (\frac{Lw}{w} - \bar{\lambda}) \overline{v} = 0 \tag{3.42}$$

un calcul simple donner

$$\begin{aligned} K(|v|^2) = k(v\overline{v}) &= \overline{v} Kv + vK\overline{v} - 2 \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i} \overline{v}_{x_j} \\ &\leq \overline{v} Kv + vK\overline{v} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Motons que grâce à ellipticité de l'opérateur L, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \left(Re\xi_i Re\xi_j + Im\xi_i Im\xi_j \right) \geq 0, \quad \forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n \tag{3.44}$$

En additionnant (3.41), (3.42), on obtient

$$\overline{v} Kv + vK\overline{v} - 2(Re\lambda - \frac{Lw}{w}) v\overline{v} = 0 \tag{3.45}$$

D'où par (3.43),

$$K(|v|^2) \leq 2(Re\lambda - \frac{Lw}{w}) |v|^2 = 0 \tag{3.46}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$,on pose $w = w_1^{1-\varepsilon}$.Alors

$$Lw = \frac{1-\varepsilon}{w_1^{\varepsilon}} Lw + \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{w_1^{1+\varepsilon}} \sum a^{ij} (w_1)_{x_i} (w_1)_{x_j} + \varepsilon c w_1^{1-\varepsilon}$$

$$\geq (1-\varepsilon) \lambda_1 w$$

Par conséquent

$$\Rightarrow K(|v|^2) \leq 2(Re(\lambda) - (1-\varepsilon)\lambda_1) |v|^2 \ \ dans \ \ \Omega$$

D'oú,si $Re\lambda \leq (1-\varepsilon)\lambda_1$,alors $k(|v|^2) \leq 0 \;\; dans \;\; \Omega$
Comme $v = 0$ sur $\partial\Omega$,d'après le principe de maximum $v = \frac{u}{w} = 0$ dans Ω .D'oú $u = 0 \;\; dans \;\; \partial\Omega$,et donc λ ne peut pas etre une valeur propre

ce que implique que $Re\lambda \geq \lambda_1$, pour tout valeurs propre complexe.

8. Il reste à montrer que la valeur propre λ_1 est simple. Soit u une fonction propre associée à λ_1. i.e solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{lcll} Lu & = & \lambda_1 u & dans\ \Omega \\ u & = & 0 & dans\ \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.47}$$

Comme Reu et Imu sot solution de (3.47), on peut supposer que u est réelle. D'après l'étape 6, on peux supposer que $u > 0$ dans Ω. Maintenant, on pose

$$\chi := \sup\{\mu > 0 : w_1 - \mu u \geq 0 \ sur \ \Omega\}. \tag{3.48}$$

Alors $0 < \chi < +\infty$. On pose $v = w_1 - \chi u$. D'où $v \geq 0$ dans Ω et

$$\left\{ \begin{array}{lcll} Lv & = & \lambda_1 v & dans\ \Omega \\ v & = & 0 & dans\ \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.49}$$

Maintenant, si v n'est pas identiquement nulle, alors le principe de maximum forte et le lemme de Hopf impliquent

$$v > 0 \ dans \ \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} < 0 \ sur \ \partial\Omega$$

D'où pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$v - \varepsilon u \geq 0 \ dans \ \Omega.$$

et donc

$$w_1 - (\chi + \varepsilon)u \geq 0 \ sur \ \Omega$$

qui contredit avec (3.48). Donc $v = 0$ sur Ω. D'où $u = \dfrac{1}{\chi} w_1$. D'où λ_1 est simple. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Barbu, Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Editura Academiei Bucureşti România, Noordhoff International Publishing, Leyden The Netherlands, 1976.

[2] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitext, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[3] L. C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[4] H. Le Dret, H. Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Springer, Heidelberg, 2013.

Résumé : L'existence des valeurs propres des opérateurs elliptiques joue un rôle important dans l'étude des équations aux dérivées partielles et notamment dans la construction et la régularité des solutions, l'existence des sous et sur solutions. Dans ce mémoire, on s'intéresse à étude d'existence des valeurs et vecteurs propres des opérateurs compacts auto adjoints et ses propriétés essentielles, et en particulier on s'intéresse à l'étude bien précis de la première valeur propre. Ensuite on applique ces résultats aux opérateurs elliptiques qui s'interviennent dans les équations aux dérivées partielles.

Mots clés : Opérateurs compacts, autoadjoints, adjoint, valeurs propres, fonctions propres, première valeur propre, opérateurs elliptiques.

ملخّص: وجود القيم الذاتية للمؤثرات الناقصية يلعب دورًا هامًا في دراسة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية، وخاصة في بناء وحل المعادلات ووجود الحلول السفلى والعليا. في هذه المذكرة، نركز على دراسة وجود القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمؤثرات الناقصية المتناظرة والمتراصة وخصائصها الأساسية، وعلى وجه الخصوص نقدم دراسة مفصلة للقيمة الذاتية الأولى. بعد ذلك، نطبق هذه النتائج على بعض المؤثرات الناقصية الذين يظهرون في المعادلات التفاضلية الجزئية.

الكلمات المفتاحية: مؤثرات متراصة، متناظرة ذاتيًا، القرين، قيم ذاتية، دوال ذاتية، القيمة الذاتية الأولى، مؤثرات ناقصية.