

# Remerciements

*En premier lieu , je tient à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant , de  
m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .*

*Je tient à exprimer mon profond respect , et de reconnaissance à mon encadreur de  
mémoire , **Professeur Mostefa Nadir** , pour ces conseils , et son encouragement  
durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .*

*Je remercier sincèrement les membres du jury :*

**Docteur : Abdelkader Gasmi**, d'avoir accepté la présidence du jury .

*Aussi je remercier vivement*

**Docteur : Bahir Gagui** , d'avoir accepté l'examineur de ce  
travail .

*Je les remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail .*

*Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père , ma mère , mes frères  
et mes soeurs , qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .*

*Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de*

**M'SILA**

*Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donnés .*

*Merci à tous ceux qui ont contribué , de près ou de loin , à l'aboutissement de ce  
travail*

# *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail à ma chère mère,*

*A mon cher père qui m'ont toujours soutenu,*

*Qui m'ont aide à affronter les difficultés,*

*A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.*

*A mes très chères soeurs et mon frère.*

*A toute ma famille.*

*A tous les amis.*

*A tous les étudiants d'université de M'SILA .*

*A tous..*

# NOTATIONS

$C([a, b], \mathbb{R})$	L'espace des fonctions réelles continues sur $[a, b]$ .
$\ker T$	Le noyau de $T$ , $\ker T = \{\varphi \mid T\varphi = 0\}$ .
$\text{Im } T$	L'image de $T$ , $\text{Im } T = \{\psi \mid \psi = T\varphi\}$
$P_S$	l'opérateur de projection sur un sous-espace fermé $S$ d'un espace de Hilbert $H$
$\mathcal{L}(E, F)$	L'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $E$ dans $F$ .
$K(E, F)$	L'ensemble des opérateurs linéaires compacts de $E$ dans $F$ .
$I$	L'opérateur identique
$GL(E)$	L'ensemble des éléments inversibles
$\rho(T)$	Ensemble résolvant de $T$ .
$R_\lambda(T)$	L'opérateur résolvante de $T$ .
$\sigma(T)$	Le spectre de $T$
$\sigma_p(T)$	Le spectre ponctuel de $T$
$\sigma_c(T)$	Le spectre continu de $T$ .
$\sigma_r(T)$	Le spectre résiduel de $T$ .

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels et notions fondamentales</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions (Rappels)	3
1.1.1 Espace de Banach	3
1.1.2 Espace de Hilbert	4
1.2 Opérateurs linéaire bornés	7
1.2.1 Opérateurs continus	8
1.2.2 Opérateurs borné	8
1.2.3 Notions de base sur les opérateurs dans les espaces de Hilbert	11
<b>2 Opérateurs compacts</b>	<b>13</b>
2.1 Ensembles compacts	13
2.2 Ensembles relativement compacts	14
2.3 Compacité dans $C(\Omega)$	15
2.4 Opérateur compact	15
2.5 Opérateurs de Hilbert-Schmidt	28
<b>3 Théorie spectrale des opérateurs compacts</b>	<b>30</b>
3.1 Inversibilité d'un opérateur	30
3.2 Spectre d'un opérateur borné	34
3.3 Théorie spectrale des opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert	43
3.3.1 Spectre d'un opérateur compact	43

3.4	Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints . . . . .	48
3.4.1	Spectre d'un opérateur adjoint . . . . .	48
3.4.2	Spectre d'un opérateur auto-adjoint . . . . .	49
3.4.3	Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts . . .	52
	<b>Conclusion générale</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>60</b>

# Introduction

La théorie spectrale est un domaine des mathématiques dont les premiers résultats appartiennent à l'algèbre linéaire. Dans ce cadre, la théorie spectrale établit notamment l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres pour tout endomorphisme symétrique sur un espace vectoriel complexe de dimension finie. Lorsque l'on se pose la question d'une généralisation de ce résultat au cas d'un espace de dimension infinie, il devient nécessaire de considérer la topologie induite par le produit scalaire et l'on entre dans le cadre de l'analyse fonctionnelle.

Dans ce mémoire, on généralise en dimension infinie la notion de valeur propre et on en étudie les propriétés dans le cadre des espaces de Banach et de Hilbert. Notons de plus que l'on obtient une généralisation importante du théorème de diagonalisation des matrices hermitiennes au cas d'opérateurs particuliers appelés opérateurs auto-adjoint compacts.

Notre mémoire est composée de trois chapitres qui sont les suivants:

Dans le premier chapitre, nous définissons brièvement dans ce chapitre les notions de base liées aux espaces de Banach et de Hilbert. Nous exposons notamment les résultats élémentaires sur les opérateurs linéaires bornés, notamment les opérateurs de projection et auto-adjoint.

Dans le deuxième chapitre, on donne la définition et les propriétés élémentaires des opérateurs compacts sur les espaces de Banach et de Hilbert, où nous avons d'abord mis en définition d'ensemble compact et relativement compact, comme je l'ai mentionné le théorème d'Arzela-Ascoli, et donné quelques exemples: opérateurs de rang finie, opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Finalement, le troisième chapitre examine la théorie spectrale des opérateurs compacts sur des espaces Hilbert, définition et exemples et propriétés. En particulier, examine la théorie

spectrale des opérateurs auto-adjoints et que les propriétés de diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints sont des « passages à la limite » des résultats correspondant en dimension finie.

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

### 1.1 Définitions (Rappels)

#### 1.1.1 Espace de Banach

**Définition 1.1.1** (*Espace vectoriel normé*)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle norme sur l'espace  $E$  toute application notée  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , vérifiant pour tout  $x, y$  dans  $E$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$

- i)  $\|x\| = 0$  si seulement si  $x = 0$
- ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (homogénéité)
- iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire)

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé

#### **Exemple 1.1.1**

Soit  $C([a, b], \mathbb{R})$ , l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs réelles. Pour tout  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ , on pose

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

Les applications  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_{\infty}$  sont des normes sur  $C([a, b], \mathbb{R})$

**Définition 1.1.2** (*Espace de Banach*)

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach pour la métrique associée à la norme donnée par

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ pour tout } x, y \in E$$

**Exemple 1.1.2**

$(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.

**Théorème 1.1.1**

Tout espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  de dimension finie est complet.

**Proposition 1.1.1**

Tout espace Banach  $(E, \|\cdot\|)$  est fermé.

**1.1.2 Espace de Hilbert****Produits scalaires et notion d'espace de Hilbert****Définition 1.1.3**

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel  $H$  une fonction  $\langle x, y \rangle$ , définie sur  $H \times H$  dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , possédant les propriétés suivantes:

pour tout  $x, y$  et  $z$  dans  $H$ , et le scalaire  $\lambda$  appartient à  $\mathbb{K}$

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

**Définition 1.1.4**

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace préhilbertien.

**Remarque 1.1.1**

Un produit scalaire sur  $H$  définit une norme sur  $H$  par la formule suivante

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**Définition 1.1.5** (*Espace de Hilbert*)

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien  $H$  complet au sens de la métrique associée à la norme induite par le produit scalaire .

**Exemple 1.1.3**

Les espaces suivants sont des espaces de Hilbert

1. L'espace euclidien  $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n\}$ , muni de produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$$

2. L'espace  $L^2([-1, 1])$  muni de produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{+1} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2([-1, 1])$$

3. L'espace de suites  $\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^2 < \infty \right\}$  muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}.$$

**Théorème 1.1.2** (*Inégalité de Cauchy-Schwartz*)

$H$  un espace euclidien, on a

$$\forall x, y \in H, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

**Définition 1.1.6** (*Orthogonalité*)

On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  d'un espace euclidien sont orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$  et on écrit  $x \perp y$ . Soit  $A$  une partie non vide d'un espace préhilbertien  $H$ . L'orthogonal de  $A$  dans  $H$  est

$$A^\perp = \{x \in H, \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A\}$$

$A^\perp$  est un sous-espace fermé de  $H$  et  $A^\perp = \overline{A}^\perp$ .

**Partie dense****Définition 1.1.7**

Une partie  $G$  de  $H$  est dite dense dans  $H$  si

$$\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in G, \|g - h\| < \varepsilon$$

ou de manière équivalente si tout  $h$  de  $H$  est limite d'une suite d'éléments  $g_n$  de  $G$

$$\|g_n - h\| \rightarrow 0.$$

**Base hilbertienne**

La notion de base hilbertienne généralise en dimension infinie la notion de base orthonormée.

**Définition 1.1.8**

Soit  $H$  un espace de Hilbert. On appelle base hilbertienne de  $H$ , si elle existe une famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  où  $1 \leq N \leq +\infty$ , telle que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad H = \overline{\text{Vect}\{e_i, 1 \leq i \leq N, i \in \mathbb{N}\}}$$

Un espace de Hilbert admettant une base Hilbertienne est dit séparable.

Dans un espace de Hilbert séparable  $H$  avec une base Hilbertienne  $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ , tout élément  $x$  se développe de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^N \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Si  $N = +\infty$ , la série converge dans  $H$ , c'est-à-dire ici qu'on a l'égalité (dite de Parseval):

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

**Théorème 1.1.3**

Tout espace de Hilbert séparable  $H$  de dimension infinie est isométrique à  $\ell^2(\mathbb{N})$ .

**Théorème 1.1.4**

Soit  $F$  un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert  $H$ . Alors on a la décomposition orthogonale

$$H = F \oplus F^\perp.$$

**Proposition 1.1.2**

Soit  $F$  un sous-espace d'un espace de Hilbert  $H$ . Alors

- i)  $(F^\perp)^\perp$  coïncide avec l'adhérence  $\overline{F}$  de  $F$  dans  $H$ .
- ii)  $F$  est dense dans  $H$  si et seulement si  $F^\perp = \{0\}$ .

**Convergence faible****Définition 1.1.9**

Soit  $H$  un espace de Hilbert,  $x \in H$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $H$ . On dit que la suite  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$  si

$$\forall y \in H, \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

Si  $H$  est de dimension finie, alors la convergence au sens faible est équivalente à la convergence au sens fort. En dimension infinie, les deux notions sont différentes.

**Théorème 1.1.5**

De toute suite bornée de  $H$  on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

## 1.2 Opérateurs linéaire bornés

L'étude des opérateurs linéaires bornés occupe une partie importante en analyse hilbertienne. Dans ce chapitre on donne les propriétés générales des opérateurs linéaires continus dans un espace de Banach.

**Définition 1.2.1** (opérateur linéaire)

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $T$  défini sur  $E$  dans  $F$  et dite linéaire, s'il vérifie les conditions suivantes :

pour tout  $x, y$  dans  $E$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

- i)  $Tx \in F$ .
- ii)  $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ .

**Définition 1.2.2**

Soit  $T$  un opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$ . Le noyau  $\ker T$  et l'image  $\text{Im } T$  de  $T$  sont définis

par

$$\ker T = \{x \in E \mid Tx = 0\}, \quad \text{Im } T = \{y \in F \mid \exists x \in E \text{ telque } Tx = y\}.$$

### 1.2.1 Opérateurs continus

#### Définition 1.2.3

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $T$  défini sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0$  de  $G$  si, on a la propriété suivante:

Pour toute suite  $x_n$  de  $G$  converge vers  $x_0$ , la suite  $T(x_n)$  converge vers  $T(x_0)$  c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = T(x_0).$$

### 1.2.2 Opérateurs borné

#### Définition 1.2.4

Un opérateur linéaire  $T$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$ , telle que

$$\|Tx\|_F \leq C \|x\|_E, \quad \forall x \in E. \quad (1.1)$$

La plus petite des constantes  $C$  vérifiant la relation (1.1) est appelée norme de  $T$  notée  $\|T\|$  et donnée par

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F$$

#### Exemple 1.2.1

Soit  $E = C([a, b], \mathbb{R})$  muni de la norme du supremum  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . On définit  $T$  sur  $E$  par

$$T_k f(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy$$

où  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue. L'opérateur  $T_k$  est appelé opérateur intégral.  $T_k$  est un opérateur linéaire continu de  $E$  dans  $E$ , et

$$\|T_k\| = \sup_{x \in [a, b]} \left\{ \int_a^b |k(x, y)| dy \right\}.$$

**Exemple 1.2.2**

Soit  $(\lambda_n)$  une suite bornée de nombres complexes et soit  $T_\lambda$  l'opérateur de multiplication dans  $\ell^2(\mathbb{N})$ , pour  $x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ ,  $T_\lambda x = \lambda_n x_n$ .  $T_\lambda$  est un opérateur linéaires borné et

$$\|T_\lambda\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|.$$

**Proposition 1.2.1**

Si  $E$  est de dimension finie alors toute opérateurs linéaire de  $E$  dans  $F$  est borné (et ceci ne dépend pas des choix des normes sur  $E$  et  $F$ ).

**Remarque 1.2.1**

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de  $E$  dans  $F$  et  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de  $E$  dans  $E$ .

**Proposition 1.2.2**

La norme  $\|T\| = \sup \|Tx\|_F$  sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur continu.

**Proposition 1.2.3**

Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces normés. L'application définie pour tout  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  par

$$\|T\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

est une norme sur  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**Théorème 1.2.1**

Soit  $H$  un espace de Hilbert. Si  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors on a

$$\|T\| = \sup \{ |\langle Tx, y \rangle| \mid x, y \in H, \|x\| = \|y\| = 1 \}.$$

**Proposition 1.2.4**

Si  $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  on a

1.  $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$ .
2.  $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$ .
3.  $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$  et  $\|T^n\| \leq \|T\|^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 1.2.2**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. Si  $F$  est un espace de Banach,  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace de Banach.

**Démonstration.**

Soit  $\{T_n\}$  une suite de Cauchy d'éléments de  $\mathcal{L}(E, F)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \|T_p - T_q\| < \varepsilon$$

alors, pour tout  $x \in E$ , on a

$$\|T_p x - T_q x\| \leq \|T_p - T_q\| \|x\| < \varepsilon \|x\|$$

D'où, on tire que  $\{T_n(x)\}$  est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach  $F$ , alors  $\{T_n(x)\}$  converge dans  $F$  vers un opérateur  $T(x)$  Passons à la limite des deux membres, on obtient

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|T_p x - T_q x\| = \|T x - T_q x\| < \varepsilon \|x\|, \forall q \geq N_\varepsilon$$

d'où l'opérateur  $A(x) = T x - T_q x$  est borné donc continu de  $E$  dans  $F$ , il est un élément de  $\mathcal{L}(E, F)$ , c'est à dire

$$\|T x - T_q x\| \leq \|T - T_q\| \|x\|$$

Notons que  $\|T - T_q\|$  est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité. D'où la relation

$$\|T - T_q\| < \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence de la suite  $T_q$  vers  $T$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , l'opérateur  $T$  est un élément de  $\mathcal{L}(E, F)$  comme différence de deux opérateurs continus  $T x = A x - T_q x$ . ■

**Exemple 1.2.3**

L'espace des fonctionnelles linéaires continues  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  ( $E^*$  Le dual topologique de  $E$ ) est un espace de Banach.

### 1.2.3 Notions de base sur les opérateurs dans les espaces de Hilbert

Sur l'espace  $\mathcal{L}(H)$ , on dispose de trois types de convergence .

#### Définition 1.2.5

On considère une suite  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{L}(H)$  et  $T \in \mathcal{L}(H)$ . On dit que

1.  $\{T_n\}$  converge vers  $T$  en norme si

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

2.  $T_n$  converge fortement vers  $T$  si pour tout  $x \in H$ , on a

$$T_n x \rightarrow T x, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

3.  $T_n$  converge faiblement vers  $T$  si pour tous  $x, y \in H$ , on a

$$\langle T_n x, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

#### Remarque 1.2.2

Les implications suivantes sont évidentes :  $T_n$  converge vers  $T$  en norme  $\implies T_n$  converge fortement vers  $T \implies T_n$  converge faiblement vers  $T$ . Si  $\dim H < +\infty$ , on a équivalence, sinon, les réciproques sont fausses.

### Opérateur adjoint

#### Théorème 1.2.3 (représentation de Riesz)

Soit  $\phi : H \rightarrow \mathbb{C}$  une forme linéaire continue. Alors il existe un unique  $y \in H$  tel que

$$\text{pour tout } x \in H, \phi(x) = \langle x, y \rangle.$$

En outre, nous avons  $\|\phi\| = \|y\|$ .

#### Définition 1.2.6

Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors il existe un opérateur linéaire borné noté  $T^*$  défini de  $H$  dans  $H$  par

$$\langle T x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \text{ pour tout } x \text{ et } y \in H$$

est dit opérateur adjoint de  $T$ . De plus  $T^*$  vérifie  $\|T^*\| = \|T\|$  et  $\|T^* T\| = \|T\|^2$ .

**Exemple 1.2.4** (*Opérateur shift*)

Considérons les opérateurs de décalage à droite et à gauche sur  $\ell^2(\mathbb{N})$ , agissant sur un vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots)$  par

$$S(x) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$T(x) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

donc  $T = S^*$ . En effet,

$$\langle x, Sy \rangle = \overline{x_2}y_1 + \overline{x_3}y_2 + \overline{x_4}y_3 + \dots = \langle Tx, y \rangle$$

**Opérateur autoadjoint, normal, unitaire, positif****Définition 1.2.7**

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T$  définie de  $H$  dans lui même, Alors

1.  $T$  auto-adjoint si  $T^* = T$ .
2.  $T$  est normal s'il commute avec son adjoint  $TT^* = T^*T$ .
3.  $T$  unitaire si  $TT^* = T^*T = I$ .
4.  $T$  positif (notation :  $T \geq 0$ ) si  $T$  est autoadjoint et si pour tout  $x \in H$ ,  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ .

**Opérateur de projection****Définition 1.2.8**

Soit  $F$  un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert  $H$ . L'opérateur  $P$  sur  $H$  définie par

$$Px = y, \quad \text{pour } x = y + z, y \in F, \text{ et } z \in F^\perp$$

est appelé l'opérateur de projection sur  $F$ . Le vecteur  $y$  est appelé la projection de  $x$  sur  $F$ .

L'opérateur de projection sur un sous-espace  $F$  est souvent notée par  $P_F$ .

**Exemple 1.2.5**

Soit  $S$  un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert  $H$ , et soit  $\{e_i\}_{i \geq 1}$  un système orthonormé complet en  $S$ . Ensuite, l'opérateur de projection  $P_S$  peut être défini par

$$P_S x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

# Chapitre 2

## Opérateurs compacts

Parmi tous les opérateurs continus dans un espace de Hilbert, on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts, appelés encore opérateurs complètement continus.

### 2.1 Ensembles compacts

#### Définition 2.1.1

Soit  $E$  un espace normé. Un sous-ensemble  $G$  est dit compact si de tout recouvrement ouvert de  $G$  on peut extraire un sous recouvrement finie

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouverts) tels que, } G \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{tel que } G \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}$$

#### Définition 2.1.2

Un ensemble  $G$  est dit séquentiellement compact si pour toute suite d'éléments dans  $G$  contient une sous suite converge vers un élément dans  $G$ .

#### Théorème 2.1.1

Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact.

**Proposition 2.1.1**

Soit  $E$  un espace métrique et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes

a) Le sous-ensemble  $F$  est compact

b) Le sous-ensemble  $F$  est complet et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre fini d'éléments de  $F$ ,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , tels que

$$F \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \varepsilon)$$

où  $B(x_j, \varepsilon)$  est la boule ouverte de centre  $x_j$  et de rayon  $\varepsilon$ .

La propriété b) exprime le fait que tout élément  $x$  de  $F$  est à une distance inférieure à  $\varepsilon$  d'au moins un élément parmi  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

**Proposition 2.1.2**

Dans un espace normé de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées. Mais dans les espaces normés de dimension infini, la situation est plus compliquée.

## 2.2 Ensembles relativement compacts

**Définition 2.2.1**

Un ensemble  $G$  dans un espace normé  $E$  est dit relativement compact si la fermeture  $\overline{G}$  est compact.

**Proposition 2.2.1**

Soit  $E$  un espace métrique. Un sous-ensemble  $G$  de  $E$  est compact si toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $G$ , contient une sous-suite  $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  convergente dans  $E$ .

**Remarque 2.2.1**

La différence avec la notion d'ensemble compact est donc que la limite de la suite n'appartient pas nécessairement à  $G$ .

**Théorème 2.2.1**

Tout ensemble borné et de dimension finie d'un espace normé est relativement compact.

## 2.3 Compacité dans $C(\Omega)$

### Théorème 2.3.1 (Arzela-Ascoli)

Une sous-ensemble  $G \subset C(\Omega)$  est relativement compact dans  $C(\Omega)$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$G$  bornée:

Il existe  $M > 0$ ,  $|\varphi(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in \Omega$  et  $\forall \varphi \in G$

$G$  équicontinue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \Omega, |x - y| < \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon, \forall \varphi \in G$$

où  $C(\Omega)$  l'espace des fonctions continues sur le compact  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  muni de la norme

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

## 2.4 Opérateur compact

### Définition 2.4.1

On dit qu'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  est compact s'il envoie tout ensemble borné  $G$  dans  $E$  à un ensemble relativement compact  $T(G)$  dans  $F$ . Autrement dit, la fermeture  $\overline{T(G)}$  est compacte.

### Définition 2.4.2 (critère de compacité)

Un opérateur linéaire  $T$  défini  $E \rightarrow F$  est dit compact si et seulement si pour toute suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée de  $E$ ,  $(T\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contient une sous-suite  $(T\varphi_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge de  $F$ .

### Remarque 2.4.1

L'ensemble des opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$  est noté  $K(E, F)$ .

Lorsque  $E = F$ , on note simplement  $K(E, E) = K(E)$ .

### Remarque 2.4.2

L'opérateur nul est un opérateur compact dans tout espace normé  $E$ .

**Exemple 2.4.1**

Soit  $y$  et  $z$  éléments fixes d'un espace de Hilbert  $H$ . Définir

$$Tx = \langle x, y \rangle z$$

Soit  $(x_n)$  une suite bornée, tel que  $\|x_n\| \leq M$  pour  $M > 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$|\langle x_n, y \rangle| \leq \|x_n\| \|y\| \leq M \|y\|$$

La suite  $\langle x_n, y \rangle$  contient une suite convergente  $\langle x_{p_n}, y \rangle$ . Désignons la limite de cette suite par  $\alpha$ . Alors

$$Tx_{p_n} = \langle x_{p_n}, y \rangle z \rightarrow \alpha z \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Par conséquent,  $T$  est un opérateur compact.

**Proposition 2.4.1**

Si  $E$  ou  $F$  sont de dimension finie, on a  $K(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ .

**Proposition 2.4.2**

Soient  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $S \in \mathcal{L}(F, G)$

i) Si  $T$  et  $S$  sont compacts, alors la combinaison linéaire  $A = \alpha T + \beta S$  est un opérateur compact.

ii) Si  $S$  ou  $T$  est compact alors  $ST$  est compact.

**Démonstration.**

i) Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite bornée de  $E$ , et  $\{A\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  suite de  $F$  alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha T\varphi_n(x) + \beta S\varphi_n(x) \quad , \text{ avec } \varphi_n \in E, n \in \mathbb{N}$$

$T$  et  $S$  étant compacts on peut extraire  $\{T\varphi_n\}$  et de  $\{S\varphi_n\}$  deux sous-suite convergente qui donne par leur sommes une sous-suite convergente de  $A\varphi_n$ . Donc  $A$  compact.

ii) Si  $T \in K(E, F)$ . Alors, pour toute suite bornée  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$ , la suite  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite  $(Tx_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers un point  $y \in F$ . Puisque  $S$  est continu,  $(Tx_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $Sy \in G$ . Donc  $ST \in K(E, G)$ .

- Si  $S \in K(F, G)$ . Alors, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  bornée par une constante  $M$ , la suite  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée dans  $F$ . En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|_E \leq M \|T\|$$

Comme  $S \in K(F, G)$ , la suite  $((Tx_n))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite  $(Tx_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers un point  $z \in G$ . Donc  $ST \in K(E, G)$ . ■

### **Théorème 2.4.1**

Si  $f$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $f(0) = 0$ , et si  $T$  est compact, alors  $f(T)$  est compact.

### **Proposition 2.4.3**

Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$  un opérateur positif. Si  $T$  est compact, alors  $\sqrt{T}$  est compact.

#### **Démonstration.**

On prend la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

On a la fonction  $f$  est continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  avec  $f(0) = \sqrt{0} = 0$  et comme  $T$  est compact alors, d'après le **théorème précédent**  $f(T) = \sqrt{T}$  est compact. ■

### **Théorème 2.4.2**

L'ensemble  $K(E, F)$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{L}(E, F)$ . En particulier  $K(E, F)$  est un espace de Banach sur  $\mathbb{K}$ .

#### **Démonstration.**

Il est clair que la somme de deux opérateurs compacts est un opérateur compact. Supposant que  $T_n \in K(E, F)$ ,  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ . Montrons que  $T \in K(E, F)$ . Comme  $F$  est complet il suffit de vérifier que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $T(B_E)$  peut être recouvert par un nombre fini de boules  $B(x_j, \varepsilon)$  dans  $F$ . On fixe  $n$  tel que  $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Comme  $T_n(B_E)$  est relativement compact, et il existe donc  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  dans  $F$  tels que  $T_n(B_E) \subset \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \frac{\varepsilon}{3})$

$$T_n(B_E) \subset \bigcup_{j=1}^k B(T_n x_j, \frac{\varepsilon}{3})$$

on en déduit que, pour tout  $x \in B(0, 1)$

$$\|Tx - Tx_j\| \leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - T_n x_j\| + \|T_n x_j - Tx_j\| < \varepsilon$$

$$T(B_E) \subset \bigcup_{j=1}^k B(Tx_j, \varepsilon).$$

■

**Théorème 2.4.3** (*et exemple fondamental*)

Tout opérateur linéaire borné de rang fini ( $\dim T(E) < \infty$ ) est compact.

**Démonstration.**

Soit  $T$  un opérateur de rang fini et soit  $F = \text{Im } T$ . Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $H$ , la suite  $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , par continuité de  $T$ , est bornée dans  $F$  qui est de dimension finie, d'après le **théorème 2.2.1** elle est donc relativement compacte. ■

**Exemple 2.4.2**

Soient  $E := L^p([0, 1], \mathbb{R})$  et  $T$  l'opérateur défini sur  $E$  par

$$\forall f \in E, Tf(x) = \int_0^1 xy(1 - xy)f(y)dy, \forall x \in [0, 1]$$

Alors,  $T$  est à valeurs dans  $F := \mathbb{R}_2[X]$  (espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2). Comme  $F$  est de dimension finie, l'opérateur  $T$  est de rang fini.

**Proposition 2.4.4**

Soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E$  de dimension finie. Alors  $T$  est compact.

En effet, puisque  $\dim T(E) \leq \dim E < \infty$ , et d'après le **théorème 2.4.3**.  $T$  est compact.

**Exemple 2.4.3**

Soit  $F$  un sous-espace de dimension finie d'un espace de Hilbert  $H$ . L'opérateur de projection  $P_F$  est un opérateur compact.

**Proposition 2.4.5**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $T \in K(E, F)$  alors si  $(x_n)$  est une suite de  $E$  convergente faiblement vers  $x$ , alors  $Tx_n$  converge fortement dans  $F$  vers  $Tx$ .

**Démonstration.**

Supposons d'abord que  $T$  soit compact. Soit  $x_n \in E$  une suite faiblement convergente vers  $x \in E$ . Un opérateur compact étant continu, donc faiblement continu, on a  $T(x_n) \rightarrow T(x)$ . Mais toute suite faiblement convergente est bornée, donc  $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite fortement convergente. La limite de cette sous-suite ne peut être que  $T(x)$ .

Remarquons par ailleurs que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée car faiblement convergente, donc, en vertu de la compacité de  $T$ , la suite  $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est à valeurs dans un compact.

Comme elle admet  $T(x)$  pour unique valeur d'adhérence, on en déduit que la suite toute entière converge fortement vers  $T(x)$ . ■

**Corollaire 2.4.1**

Soit  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , une suite orthonormée dans  $E$ . Si  $T \in K(E)$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Te_k\| = 0$ .

**Démonstration.**

Pour tout  $x \in E$ , la série  $\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2$  est convergente et son terme général  $\langle x, e_k \rangle$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini. Cela traduit le fait que la suite  $(e_k)$  est faiblement convergente vers 0, la proposition précédente permet de conclure. ■

**Corollaire 2.4.2**

Soit  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathcal{L}(H)$  qui converge faiblement vers  $A \in \mathcal{L}(H)$ . Soit  $T \in K(H)$ , alors  $TA_n$  converge vers  $TA$  fortement.

**Démonstration.**

Est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.5. ■

**Théorème 2.4.4**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et soit  $T_n$  suite des opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$  convergente en norme vers l'opérateur linéaire  $T$  de  $E$  dans  $F$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Alors  $T$  est un opérateur étant compact.

**Démonstration.**

On utilise un procédé diagonal, soit  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $E$ , l'opérateur  $T_1$  compact on peut extraire de la suite  $\{T_1\varphi_n\}$  une sous-suite convergente, soit  $\{\varphi_n^1\}$  une sous-suite de  $\{\varphi_n\}$ , tel que  $\{T_1\varphi_n^1\}$  soit convergente. De la même façon, on peut extraire de la suite  $\{T_2\varphi_n^1\}$  une sous-suite convergente, car  $T_2$  est compact, soit  $\{\varphi_n^2\}$  une sous-suite de  $\{\varphi_n^1\}$ , tel que la suite  $\{T_2\varphi_n^2\}$  soit convergente.

Remarquons la suite,  $\{T_1\varphi_n^2\}$  est une sous-suite de la suite convergente  $\{T_1\varphi_n^1\}$  qui est elle-même convergente. En raisonnant de la même façon, pour les opérateurs  $T_1, T_2, \dots, T_p, \dots$ , on détermine les suites  $\{\varphi_n^1\}, \{\varphi_n^2\}, \dots, \{\varphi_n^p\}, \dots$ , il est à remarquer que la suite  $\{\varphi_n^p\}$  est une sous-suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites  $\{T_k\varphi_n^p\}$  sont convergentes pour  $k = 1, 2, \dots, p$ , comme  $F$  est complet, pour la compacité de  $T$  il suffit de démontrer que la suite  $\{T_k\varphi_n^p\}$  est une suite de Cauchy, alors

$$\begin{aligned} \|T\varphi_n^p - T\varphi_n^q\| &= \|T\varphi_n^p + T_n\varphi_n^p - T_n\varphi_n^p + T_n\varphi_n^q - T_n\varphi_n^q - T\varphi_n^q\| \\ &\leq \|T\varphi_n^p - T_n\varphi_n^p\| + \|T\varphi_n^q - T_n\varphi_n^q\| + \|T_n\varphi_n^p - T_n\varphi_n^q\| \end{aligned}$$

soit  $\|\varphi_n\| \leq M$ , choisissons  $n$  de sorte que l'on a  $\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{3M}$ , ensuite choisissons  $N$ , tel que pour tout les  $p > N$  et  $q > N$ , on a la relation  $\|T_n\varphi_n^p - T_n\varphi_n^q\| < \frac{\varepsilon}{3}$ , car la suite  $\{T_k\varphi_n^p\}$  est convergente. Dans ces conditions, on aura pour tout  $p$  et  $q$  suffisamment grands

$$\begin{aligned} \|T\varphi_n^p - T\varphi_n^q\| &\leq \|T\varphi_n^p - T_n\varphi_n^p\| + \|T\varphi_n^q - T_n\varphi_n^q\| + \|T_n\varphi_n^p - T_n\varphi_n^q\| \\ &< \|T - T_n\| \|\varphi_n^p\| + \|T - T_n\| \|\varphi_n^q\| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon M}{3M} + \frac{\varepsilon M}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

**Exemple 2.4.4**

Soient  $H$  un espace de Hilbert séparable et  $(e_n)$  une base hilbertienne de  $H$ . Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $\mathbb{C}$  alors l'opérateur de multiplication par  $\lambda_n$  défini par

$$T_\lambda e_n = \lambda_n e_n$$

$T$  est compact si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$ .

**Démonstration.**

Soit  $P_n$  l'opérateur de projection orthogonale sur le sous espace engendré par  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

L'opérateur  $P_n T_\lambda$  est un opérateur de rang fini et on a

$$(T_\lambda - P_n T_\lambda) e_j = \begin{cases} \lambda_j e_j & \text{si } j \geq n + 1 \\ 0 & \text{si } j \leq n \end{cases}$$

et par suite  $\|T_\lambda - P_n T_\lambda\| = \sup_{j > n} |\lambda_j|$ . Si la suite  $(\lambda_n)$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini, on en déduit que l'opérateur  $T_\lambda$  est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, donc compact (d'après **le théorème 2.4.3**).

Inversement, si  $T_\lambda$  est compact, **le corollaire 2.4.1** assure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_\lambda e_n\| = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n|.$$

ce qui termine la preuve. ■

**Exemple 2.4.5**

Soit  $T$  l'opérateur défini de  $\ell^2(\mathbb{N})$  dans  $\ell^2(\mathbb{N})$  par

$$Tx = \frac{\zeta_j}{j}, \text{ où } x = (\zeta_j) \in \ell^2(\mathbb{N}), \text{ pour } j = 1, 2, \dots$$

On démontre la compacité de  $T$ . Soit  $x = (\zeta_j) \in \ell^2(\mathbb{N})$  et  $T_n : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$  défini par

$$T_n x = \left( \zeta_1, \frac{\zeta_2}{2}, \dots, \frac{\zeta_n}{n}, 0, 0, \dots \right).$$

$T_n$  est linéaire et bornée, et est compact (**le théorème 2.4.3**).

$$\|(T_n - T)x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left| \frac{\zeta_j}{j} \right|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\zeta_j|^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \|x\|^2.$$

Prendre le supremum sur tous les  $x$  de norme 1, on obtient

$$\|T_n - T\| \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

D'où  $T_n \rightarrow T$ , d'après le théorème précédent  $T$  est compact.

La réciproque de le théorème précédent est fausse en général mais si  $F$  est un espace de Hilbert, on a le résultat suivant.

**Théorème 2.4.5**

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $T \in K(E, H)$ . Alors, il existe une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{L}(E, H)$ , d'opérateurs de rang fini, qui converge vers  $T$  dans  $\mathcal{L}(E, H)$ .

**Démonstration.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé, puisque  $\overline{T(B_E)}$  est un compact de  $H$ , il existe  $k_n \in \mathbb{N}^*$  et  $y_1, \dots, y_{k_n} \in H$  tels que

$$\overline{T(B_E)} \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B\left(y_i, \frac{1}{n+1}\right) \quad (2.1)$$

où  $B(y, r) := \{x \in H \mid |x - y| < r\}$ . Or  $L_n := Vect\{y_1, \dots, y_{k_n}\}$  est un espace vectoriel de dimension finie, donc un fermé de l'espace de Hilbert  $H$ , d'où  $H = L_n \oplus L_n^\perp$ . Soit  $P_n \in \mathcal{L}(H)$  la projection orthogonale de  $H$  sur  $L_n$ . Alors  $T_n := P_n T \in \mathcal{L}(E, H)$  est un opérateur de rang fini puisque

$$\dim(\text{Im}(T_n)) = \dim(\text{Im}(P_n T)) \leq \dim(\text{Im}(L_n)) \leq k_n.$$

Enfin, pour  $x \in B_E$ , d'après (2.1), il existe  $i_0 \in \{1, \dots, k_n\}$  tel que

$$\|Tx - y_{i_0}\| < \frac{1}{n+1}$$

Mais  $y_{i_0} \in L_n$  et  $P_n Tx$  est la projection orthogonale de  $Tx$  sur  $L_n$  donc

$$\|Tx - P_n Tx\| = \text{dis}(Tx, L_n) \leq \|Tx - y_{i_0}\| < \frac{1}{n+1}$$

Finalement, on obtient

$$\forall x \in B_E, \|Tx - T_n x\| < \frac{1}{n+1},$$

Il suit  $\|T - T_n\| < \frac{1}{n+1}$ , où  $T_n$  suite d'opérateurs de rang fini qui convergent en norme vers  $T$ . ■

**Lemme 2.4.1 (Riesz)**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et soit  $G \subset E$  un sous-espace fermé tel que  $G \neq E$ . Alors il existe un élément  $\varphi \in E$  avec  $\|\varphi\| = 1$ , tel que pour tout  $\psi \in G$

$$\|\varphi - \psi\| \geq \alpha, \text{ avec } 0 < \alpha < 1.$$

**Démonstration.**

En effet, soit  $f \in E$ , tel que  $f \notin G$ , Alors on a

$$\inf_{h \in G} \|f - h\| = \beta > 0$$

choisissons un élément  $g \in G$ , tel que

$$\alpha \leq \|f - g\| \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

soit  $\varphi$  le vecteur donné par

$$\varphi = \frac{f - g}{\|f - g\|}$$

alors

$$\|\varphi\| = 1$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \|\varphi - \psi\| &= \frac{1}{\|f - g\|} \|f - \{g + \|f - g\| \psi\}\| \\ &\geq \frac{\beta}{\|f - g\|} \geq \alpha, \quad (g + \|f - g\| \psi) \in G. \end{aligned}$$

■

**Théorème 2.4.6** (de Riesz)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Alors, l'opérateur identique  $I$  est compacte si et seulement si  $E$  est de dimension finie.

**Démonstration.**

Soit  $\varphi_1$  un élément de  $E$ , tel que  $\|\varphi_1\| = 1$ , alors  $G_1 = Vect\{\varphi_1\}$  est un sous-espace fermé de  $E$  car  $G_1$  est de dimension finie, d'après le **lemme Riez**, il existe  $\varphi_2 \in E$  tel que  $\|\varphi_2\| = 1$ , et  $\|\varphi_1 - \varphi_2\| \geq \frac{1}{2}$ , prenons une deuxième fois le sous-espace fermé  $G_2 = Vect\{\varphi_1, \varphi_2\}$ , alors il existe  $\varphi_3 \in E$  avec  $\|\varphi_3\| = 1$ ,  $\|\varphi_1 - \varphi_3\| \geq \frac{1}{2}$  et  $\|\varphi_2 - \varphi_3\| \geq \frac{1}{2}$ . On répète la même procédure jusqu'à l'obtention des suite  $\{\varphi_n\}$  vérifiant  $\|\varphi_n\| = 1$ , et  $\|\varphi_n - \varphi_m\| \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $n \neq m$ . Il est remarque que cette suite  $\{\varphi_n\}$  est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente. Ce qui implique que l'opérateur  $I\varphi_n = \varphi_n$  est pas compact.

Et on a déjà démontré que si  $E$  est de dimension finie tout opérateur linéaire borné de  $E$  dans lui même est compact, alors l'identique est compact. ■

**Corollaire 2.4.3**

*La boule unité  $B(0,1)$  dans un espace de dimension infini n'est pas compact.*

En effet, si  $E$  est de dimension infini, l'identité  $I$  n'est pas compact d'après le théorème précédent. Donc  $I(B(0,1))$  n'est pas relativement compact implique  $I(B(0,1)) = B(0,1)$  n'est pas compact.

L'intérêt de la convergence faible réside dans la remarque suivante, que nous admettrons.

**Remarque 2.4.3**

*Soit  $H$  un espace de Hilbert. La boule unité de  $H$  est faiblement compacte. De manière équivalente, de toute suite bornée de  $H$ , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans  $H$ .*

**Corollaire 2.4.4**

*Dans un espace normé de dimension infinie, si un opérateur compact est inversible, alors son inverse n'est pas borné.*

**Démonstration.**

Si  $T$  est compact et inversible,  $T^{-1}$  ne peut pas être borné si non,  $TT^{-1}$  serait compact, ce qui exige que  $E$  soit de dimension finie. ■

**Théorème 2.4.7**

*Tout opérateur compact est borné. la réciproque est fautive.*

**Démonstration.**

Soit  $T$  un opérateur compact dans  $E$ . L'image de la boule unité de  $E$  est un ensemble relativement compact, donc borné. Il existe, alors, une constante  $M > 0$ , telle que

$$\|Ty\| \leq M, \forall y \in E, \|y\| \leq 1$$

On en déduit que

$$\|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in E$$

L'opérateur  $T$  est donc continu et sa norme est majorée par  $M$ . Réciproquement l'opérateur identité  $I$  de  $E$  dans  $E$  est bornée mais n'est pas compact car  $I(B(0,1)) = B(0,1)$ , n'est pas relativement compacte sauf si  $E$  est de dimension finie. ■

**Proposition 2.4.6**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Alors  $T$  est compact si et seulement si  $T^*$  est compact.

**Démonstration.**

Première implication  $T$  compact  $\implies T^*$  est compact.

Soit  $\psi_n$  une suite bornée de  $H$ , alors il existe constante  $M > 0$ , telle que  $\|\psi_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ , l'opérateur  $T$  étant compact et  $T^*$  est bornée, alors  $TT^*$  est compacte. D'où l'existence d'une suite  $\psi_{n_k}$  de  $\psi_n$  telle que  $TT^*(\psi_{n_k})$  soit convergente dans  $H$

$$\begin{aligned} \left\| T^* \psi_{n_p} - T^* \psi_{n_q} \right\|^2 &= \left\| T^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}) \right\|^2 \\ &= \left\langle T^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}), T^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}) \right\rangle \\ &= \left\langle TT^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}), \psi_{n_p} - \psi_{n_q} \right\rangle \\ &= \left\langle TT^* \psi_{n_p} - TT^* \psi_{n_q}, \psi_{n_p} - \psi_{n_q} \right\rangle \\ &\leq \left\| TT^* \psi_{n_p} - TT^* \psi_{n_q} \right\| \left\| \psi_{n_p} - \psi_{n_q} \right\| \\ &\leq 2M\varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite  $T^*(\psi_{n_k})$  est de Cauchy dans  $H$ , D'où la convergence de cette  $T^*(\psi_{n_k})$  suite dans  $H$ . Pour la deuxième implication, la même démonstration pour (1) où  $T^*$  est compact. ■

**Théorème 2.4.8**

L'opérateur intégral  $T$  de  $C(\Omega)$  dans  $C(\Omega)$  définie par

$$(T\varphi)(x) = \int_{\Omega} k(x, t)\varphi(t)dt$$

où  $k(x, t)$  la fonction noyau est une fonction continue sur  $\Omega \times \Omega$ .  $T$  est un opérateur compact.

**Démonstration.**

Soit  $G$  un ensemble bornée dans  $C(\Omega)$  alors, on a  $\|\varphi\| \leq M$  pour tout  $\varphi \in G$ .

Pour démontrer que  $T(G)$  est relativement compact on utilise le théorème d'Arzela-Ascoli, de plus

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x)| &= \left| \int_{\Omega} k(x, t)\varphi(t)dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in G} |\varphi(t)| \int_{\Omega} |k(x, t)| dt \\ &\leq M \max_{x, t} |k(x, t)| |\Omega| \end{aligned}$$

cela veut dire que  $T(G)$  est bornée.

L'opérateur  $k$  est uniformément continu sur le compact  $\Omega \times \Omega$ , d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in \Omega, |x - y| < \delta \Rightarrow |k(x, z) - k(y, z)| < \frac{\varepsilon}{M|\Omega|}$$

d'où

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x) - (T\varphi)(y)| &= \left| \int_{\Omega} k(x, z) - k(y, z)\varphi(z)dz \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |k(x, z) - k(y, z)| |\varphi(z)| dz \\ &< M \frac{\varepsilon}{M|\Omega|} |\Omega| < \varepsilon, \forall \varphi \in G \text{ et } x, y \in \Omega \text{ avec } |x - y| < \delta \end{aligned}$$

Ceci exprime que  $T(G)$  équicontinue.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli  $T(G)$  est relativement compact, alors  $T$  est compact.

■

### Exemple 2.4.6

L'opérateur  $T$  de Volterra (primitive s'annulant en 0) défini sur  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  est compact.

$$\forall f \in E, (Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0, 1]$$

En effet, on va utiliser le théorème d'Ascoli avec  $\Omega = [0, 1]$ .

Soit  $G$  un ensemble bornnée dans  $E$ , pour tout  $f \in G$ ,  $\|f\|_\infty \leq M$ , alors

$$\begin{aligned} \|Tf\|_\infty &= \sup_{x \in [0,1]} |(Tf)(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |f(t)| \int_0^x dt \\ &\leq \|f\|_\infty \leq M < \infty \end{aligned}$$

Donc  $T(G)$  est bornnée.

Soit  $\varphi \in E$ , et  $x, y \in [0, 1]$  tel que  $y > x$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in [0, 1], |x - y| < \delta$$

alors

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tf(y)| &= \left| \int_0^x f(t)dt - \int_0^y f(t)dt \right| \\ &\leq |y - x| \|f\|_\infty \\ &\leq |y - x| M \end{aligned}$$

On opse  $M = \frac{\varepsilon}{|y - x|}$ ,  $x \neq y$ . Alors que

$$|Tf(x) - Tf(y)| < \varepsilon$$

Ce qui montre que  $T(G)$  est bien équicontinue, d'où le résultat.

**Définition 2.4.3** (Noyau faiblement singulier)

On appelle noyau faiblement singulier la fonction  $k$  continue sur  $\Omega \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  sauf peut être aux points  $x = t$  et telle que,

$$\forall x, t \in \Omega, x \neq t, \exists M > 0, |k(x, t)| < \frac{M}{|x - t|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n.$$

**Proposition 2.4.7**

L'opérateur intégral  $T$  de  $C(\Omega)$  dans  $C(\Omega)$  à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.

## 2.5 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

### Définition 2.5.1

Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, et soit  $(e_k)$  une base hilbertienne de  $H$ . Un opérateur linéaire  $T : H \rightarrow H$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty$$

Le réel

$$\|T\|_{HS} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est appelé la norme de Hilbert-Schmidt de  $T$ .

Notons que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est borné et on a l'inégalité  $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$ .

### Proposition 2.5.1

Tout opérateur de Hilbert-Schmidt  $T$  est compact.

#### Démonstration.

Soit  $(e_n)$  une base hilbertienne de  $H$  et soit  $T$  un opérateur de Hilbert-Schmidt sur  $H$ . Pour tout  $n$ , on désigne par  $P_n$  l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace engendré par  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . L'opérateur  $T_n = P_n T$  est de rang fini égal à  $n$  et on a

$$(T - T_n)e_j = \begin{cases} 0, & \text{si } j \leq n; \\ Te_j, & \text{si } j \geq n+1. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\|T - T_n\|^2 \leq \|T - T_n\|_{HS}^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \|Te_j\|^2.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini, puisque c'est le reste d'une série convergente. L'opérateur  $T$  est donc limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. Il est donc compact. ■

### Exemple 2.5.1

Considérons l'opérateur intégral  $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  défini par

$$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x, t)f(t)dt$$

avec un noyau  $k(x, t) \in L^2([0, 1]^2)$ . Alors  $T$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et

$$\|T\|_{HS} = \|k\|_2$$

Réciproquement tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur  $L^2(\Omega)$  se représente de manière unique à l'aide d'une fonction  $K(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ .

**Démonstration.**

Nous allons voir l'intégrale dans la définition de  $T$ , comme le produit scalaire de  $f$  avec le noyau  $k$ . Plus précisément, considérons la fonction  $k_x(t) = k(x, t)$ , Alors

$$(Tf)(x) = \langle k_x, f \rangle \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

Fixons une base orthonormée  $(e_k)$  de  $L^2([0, 1])$ . Alors

$$\begin{aligned} \|T\|_{HS}^2 &= \sum_k \|Te_k\|_2^2 = \sum_k \int_0^1 |Te_k(x)|^2 dx = \sum_k \int_0^1 |\langle k_x, e_k \rangle|^2 dx \\ &= \int_0^1 \sum_k |\langle k_x, e_k \rangle|^2 dx \quad (\text{par le théorème de convergence monotone}) \\ &= \int_0^1 \|k_x\|^2 dx \quad (\text{par l'identité de Parseval}) \\ &= \|k\|_2^2 \quad (\text{Par définition de } k_t \text{ et le théorème de Fubini}) \end{aligned}$$

■

# Chapitre 3

## Théorie spectrale des opérateurs compacts

Dans ce chapitre, on définit les notions du spectre et de valeurs propres des opérateurs sur des espaces vectoriels et on en donne les propriétés élémentaires. Le cadre est celui des espaces de Hilbert.

### 3.1 Inversibilité d'un opérateur

Dans cette section, on regroupe certains résultats sur les opérateurs inversibles. En particulier, on donne une caractérisation de l'inversibilité d'un opérateur qui s'avérera très utile pour la suite.

Dans toute cette section, on désigne par  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach sur  $\mathbb{K} := \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

#### Définition 3.1.1

On rappelle qu'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E)$  est dit inversible s'il admet un inverse dans  $\mathcal{L}(E)$  i.e. il existe  $S \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $ST = TS = I$ ,  $S$  est appelée l'inverse de  $T$  et est désignée par  $T^{-1}$ .

On note  $GL(E)$  l'ensemble des opérateurs  $T \in \mathcal{L}(E)$  inversibles.

#### Remarque 3.1.1

L'inverse d'un opérateur borné n'est pas forcément borné.

**Exemple 3.1.1**

Soit  $H = \ell^2$ . L'opérateur  $T$  défini par

$$T(x_1, x_2, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right).$$

$T$  est borné, car

$$\|T(x_1, x_2, \dots)\| = \sqrt{\sum_{i \geq 1} \frac{|x_i|^2}{i^2}} = \|(x_1, x_2, \dots)\|$$

$T$  est inversible, et son inverse donné par

$$T^{-1}(x_1, x_2, \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, \dots).$$

Cependant  $T^{-1}$  est non borné. En effet, si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie par

$$e_n = (x_1^n, x_2^n, \dots) \quad \text{avec} \quad x_i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a  $\|e_n\| = 1$ , et  $\|T^{-1}e_n\| = n$ . Donc  $T^{-1}$  n'est pas borné.

Notons que la somme de deux opérateurs inversibles n'est pas nécessairement inversible:  $(I + (-I))$ .

**Proposition 3.1.1**

Si  $T$  et  $S$  inversibles, alors le produit  $TS$  est inversible et l'on a

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}.$$

**Théorème 3.1.1**

Si  $E$  de dimension finie  $n$ . Un opérateur  $T$  est inversible si et seulement si  $(\ker(T) = \{0\})$ .

**Démonstration.**

Si  $T$  est inversible et  $Tx = 0$ , alors

$$x = T^{-1}Tx = T^{-1}0 = 0.$$

Supposons maintenant que  $Tx = 0$  implique  $x = 0$ . Si  $Tx_1 = Tx_2$ , alors  $T(x_1 - x_2) = 0$  et ainsi  $x_1 - x_2 = 0$ . Par conséquent  $x_1 = x_2$ , alors  $T$  est inversible. ■

**Théorème 3.1.2** (de l'application ouverte)

Soient  $E$  et  $F$  deux Banach et  $T$  un opérateur borné et surjectif de  $E$  sur  $F$ . Alors il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$B_F(0, \alpha) \subset T(B_E(0, 1)).$$

**Théorème 3.1.3** (Théorème des opérateurs inverses)

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et soit  $T$  un opérateur linéaire continue et bijectif de  $E$  sur  $F$ . Alors  $T^{-1}$  est continue de  $F$  dans  $E$ .

**Démonstration.**

C'est une conséquence directe du théorème de l'application ouverte. Comme  $T$  est bijective,  $T$  est l'application inverse de  $T^{-1}$ . Dire que  $T$  est ouverte revient alors à dire que l'image inverse par  $T^{-1}$  de tout ouvert de  $E$  est un ouvert de  $F$ . C'est-à-dire que  $T^{-1}$  est continu. ■

**Proposition 3.1.2**

Soient  $(F, \|\cdot\|_F)$  est un espace de Banach sur  $\mathbb{K}$  et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $T$  est injectif et  $\text{Im}(T)$  est fermé dans  $F$ .
2. Il existe  $c > 0$  telle que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|Tx\|_F \geq c \|x\|_E$ .
3. il n'existe pas de suite  $(x_n)$  dans  $E$  telle que  $\|x_n\| = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n)\| = 0$ .

**Corollaire 3.1.1**

Soient  $(F, \|\cdot\|_F)$  un espace de Banach sur  $\mathbb{K}$  et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\overline{\text{Im}(T)} = F$  et il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|Tx\|_F \geq C \|x\|_E$ .
2.  $T$  est inversible.

**Démonstration.**

Si 1.a lieu, d'après le **Corollaire précédent**,  $T$  est injectif et  $\text{Im}(T)$  est fermé dans  $F$ . Alors,  $\text{Im}(T) = \overline{\text{Im}(T)} = F$ , donc  $T$  est surjectif et, par suite, inversible. Réciproquement, si 2. a lieu, on a  $F = \text{Im}(T) \subset \overline{\text{Im}(T)} \subset F$ . Donc  $\text{Im}(T) = \overline{\text{Im}(T)} = F$ , ce qui donne le résultat d'après le **Corollaire précédent**. ■

**Théorème 3.1.4** (*Série de Neumann*)

Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $T \in \mathcal{L}(E)$ , avec  $\|T\| < |\lambda|$ . Alors  $T_\lambda = T - \lambda I$  admet un opérateur inverse borné donné par la série

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}$$

De plus

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

**Démonstration.**

De la relation  $\left\|\frac{T}{\lambda}\right\| < 1$ , on a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{T^k}{\lambda^k}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{T}{\lambda}\right\|^k < \infty.$$

Donc, puisque l'espace  $\mathcal{L}(E)$  est complet, alors il existe un opérateur linéaire borné  $B$  dans  $E$ , tel que

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k}$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} (T - \lambda I) B &= (T - \lambda I) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (T - \lambda I) \frac{T^k}{\lambda^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{k+1} - \lambda T^k}{\lambda^k} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{T^{k+1}}{\lambda^{k+1}} - \frac{T^k}{\lambda^k} \right) = -\lambda I \end{aligned}$$

ainsi que

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{B}{\lambda} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}$$

Pour démontrer la deuxième relation, on observe que

$$\begin{aligned} \|T_\lambda\| &= \|T_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{T^k}{\lambda^k}\right\| \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \left\|\frac{T}{\lambda}\right\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \end{aligned}$$

■

**Proposition 3.1.3**

L'ensemble  $GL(E)$  des éléments inversibles (opérateurs bijectifs) de  $\mathcal{L}(E)$  est un ouvert et l'application  $T \mapsto T^{-1}$  est continue.

**3.2 Spectre d'un opérateur borné**

La notion de spectre a déjà été rencontrée à propos des matrices. Etant donné  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , le spectre de  $A$  est l'ensemble des valeurs propres de  $A$ , i.e. l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $\det(A - \lambda I) = 0$ , ce qui signifie que  $A - \lambda I$  n'est pas un isomorphisme de  $\mathbb{C}^n$ . On va définir de façon tout-à-fait analogue le spectre d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert, mais en dimension infinie on va voir qu'on peut distinguer plusieurs types d'éléments du spectre et que les valeurs propres ne sont pas les seuls types de valeurs spectrales.

**Valeur propre et vecteur propre****Définition 3.2.1**

Soit  $A$  une matrice carrée un espace vectoriel complexe  $E$ . Un nombre complexe  $\lambda$  est appelé une **valeur propre** de  $A$  s'il y a un vecteur non nul  $u \in E$  tel que

$$Au = \lambda u$$

Chaque vecteur  $u$  satisfaisant  $Au = \lambda u$  est appelé un **vecteur propre** de  $A$  correspondant à la  $\lambda$  valeur propre.

**Proposition 3.2.1**

Un scalaire  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  si, et seulement si, il est une racine du polynôme caractéristique de  $A$  :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

La chaîne des implications suivantes aide à comprendre ceci :

$$\begin{aligned}
 & \lambda \text{ est une valeur propre de } A \\
 \iff & \text{ il existe } u \neq 0 \text{ avec } Au = \lambda u \\
 \iff & \text{ il existe } u \neq 0 \text{ avec } (A - \lambda I)u = 0 \\
 \iff & (A - \lambda I) \text{ est singulier (qui est, non inversible)} \\
 \iff & \det(A - \lambda I) = 0
 \end{aligned}$$

**Définition 3.2.2** (Ensemble résolvant, résolvante)

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , on appelle ensemble résolvant de  $T$  l'ensemble

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (T - \lambda I) \text{ inversible}\}.$$

L'opérateur  $(T - \lambda I)^{-1}$  est appelé la résolvante de  $T$  en  $\lambda$  et noté  $R_\lambda(T)$ .

**Remarque 3.2.1**

D'après le **théorème 3.1.3**.  $(T - \lambda I)$  inversible équivaut que  $(T - \lambda I)$  bijective, alors  $\rho(T)$  définie aussi comme

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (T - \lambda I) \text{ bijective}\}.$$

**Proposition 3.2.2**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$

1. Si  $|\lambda| > \|T\|$  alors  $\lambda \in \rho(T)$ , et  $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ .
2.  $\rho(T)$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{K}$ .

**Démonstration.**

1. Si  $|\lambda| > \|T\|$  alors  $\lambda \neq 0$  et  $\|\lambda^{-1}T\| < 1$  donc, d'après le **théorème 3.1.4**,  $(\lambda^{-1}T - I)$  est inversible, i.e.  $\lambda \in \rho(T)$ .

2. D'après le 1,  $\rho(T)$  est non vide. Soit  $\varphi$  l'application définie de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathcal{L}(H)$  par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda) := T - \lambda I$$

alors,  $\rho(T) = \varphi^{-1}(GL(H))$ . De plus, pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , on a

$$\|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I\| \leq |\lambda - \mu|.$$

Donc  $\varphi$  est continue. Or, d'après la **proposition 3.1.3**,  $GL(H)$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(H)$ . Ainsi  $\rho(T) = \varphi^{-1}(GL(H))$  est un ouvert de  $\mathbb{K}$ . ■

**Définition 3.2.3** (Rappels)

Soient  $E$  un espace de Banach complexe et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Rappelons qu'une application  $f : U \rightarrow E$  est analytique complexe si pour tout  $z_0 \in U$ , il existe  $r > 0$  et une suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E$  tels que  $B(z_0, r) \subset U$  et la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (z - z_0)^n c_n$  converge normalement sur  $B(z_0, r)$ , de somme égale à  $f(z)$ , pour tout  $z \in B(z_0, r)$ . Une telle suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors unique. Une application analytique complexe est en particulier continue

**Théorème 3.2.1** (de Liouville)

Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow E$  est une application analytique complexe bornée, alors  $f$  est constante.

**Proposition 3.2.3** (Identité de la résolvante)

$T \in \mathcal{L}(H)$  et  $\lambda, \mu \in \rho(T)$ . Alors, on a

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu = (\lambda - \mu)R_\mu R_\lambda.$$

De plus, l'application  $\lambda \mapsto R_\lambda$  est dérivable sur  $\rho(T)$  et sa dérivée est donnée par

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = -R_\lambda^2.$$

**Proposition 3.2.4**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ . L'application  $\lambda \mapsto R_\lambda := R_\lambda(T)$  est analytique sur  $\rho(T)$ . Plus précisément, si  $\lambda_0 \in \rho(T)$ , alors  $D(\lambda_0, \|\lambda_0\|^{-1}) \subset \rho(T)$ , et pour tout  $\lambda \in D(\lambda_0, \|\lambda_0\|^{-1})$

$$R_\lambda = \sum_{n \geq 0} (-1)^n R_{\lambda_0}^{n+1} (\lambda - \lambda_0)^n.$$

**Définition 3.2.4** (Spectre)

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , on appelle spectre de  $T$  et on note  $\sigma(T)$  le complémentaire dans  $\mathbb{K}$  de  $\rho(T)$ .

Le spectre de  $T$  est donc l'ensemble

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \mathbb{K} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (T - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (T - \lambda I) \text{ n'est pas bijective}\} \end{aligned}$$

Un élément de  $\sigma(T)$  est une valeur spectrale de  $T$ .

Cette propriété peut être réalisée de trois façons différentes, ce qui correspond à trois type de spectres distincts:

1. **Le spectre ponctuel:** noté  $\sigma_p(T)$ , est l'ensemble des valeurs propres de  $T$ , ( $Vp(T)$ ) est donné par

$$\begin{aligned}\sigma_p(T) &= Vp(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (T - \lambda I) \text{ n'est pas injective}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}\end{aligned}$$

2. **Le spectre continu :**  $\sigma_c(T)$ , est l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \ker(T - \lambda I) = \{0\}, \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq H, \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = H \right\}$$

3. **Le spectre résiduel:**  $\sigma_r(T)$ , est l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \ker(T - \lambda I) = \{0\}, \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq H, \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \neq H \right\}$$

Le spectre  $\sigma(T)$  est la réunion disjointe de  $\sigma_p(T)$ ,  $\sigma_c(T)$  et  $\sigma_r(T)$  alors

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

et la figure suivante, montrant ces trois morceaux disjoints. Le point spectre,  $\sigma_p(T)$ , est représenté en pointillés. Le spectre continu est  $\sigma_c(T)$  (représenté en tiret), et le La dernière classe est le spectre résiduel est  $\sigma_r(T)$ .

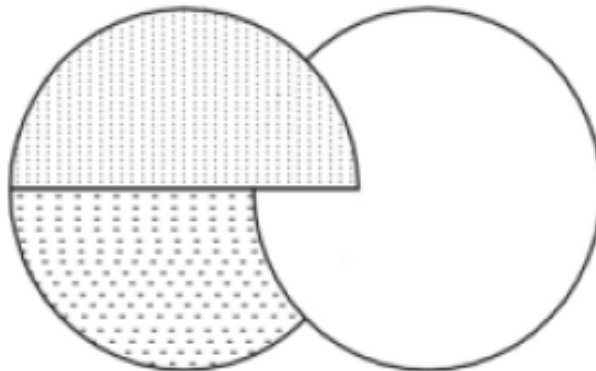


FIGURE : parties disjointes du spectre

**Corollaire 3.2.1**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Alors

$$\sigma(T) \neq \emptyset.$$

**Démonstration.**

Supposons le contraire  $\sigma(T) = \emptyset$ ,  $R(\lambda)$  est une fonction entière avec  $R(\lambda) \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0$ , donc  $R(\lambda) = 0$  par le théorème de Liouville. ce qui est absurde. ■

**Remarque 3.2.2**

Si  $H$  est de dimension finie  $n$ , chaque opérateur linéaire  $T$  sur  $H$  peut être représenté par une matrice carrée  $A$ , et que l'opérateur linéaire  $T - \lambda I$  est inversible précisément lorsque la matrice  $A - \lambda I$  est inversible. Les valeurs spectrales de  $T$  sont donc les valeurs propres de  $T$ , et aussi les valeurs propres de la matrice  $A$  de  $T$  dans n'importe quelle base de  $H$ . Ce sont les ( $n$  en comptant avec multiplicité) racines complexes du polynôme caractéristique  $\det(T - \lambda I) = \det(A - \lambda I_n)$ . La multiplicité d'une valeur spectrale de  $T$  est inférieure ou égale à la multiplicité de la racine correspondante du polynôme caractéristique de  $T$ , avec égalité si  $T$  est diagonalisable.

**Proposition 3.2.5**

1) Pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ , on a

$$\sigma(T + \lambda I) = \lambda + \sigma(T)$$

2) Pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , on a

$$\sigma(\lambda T) = \lambda \sigma(T)$$

**Exemple 3.2.1**

1. Il est clair que  $\sigma(I) = \sigma_p(I) = \{1\}$ . Car il  $(I - \lambda I) = (1 - \lambda)I$  est inversible si  $(1 - \lambda) \neq 0$ .
2. De même, si  $\mu \in \mathbb{K}$ , alors  $\sigma(\mu I) = \{\mu\}$ .
3. Si  $H \neq \{0\}$ , et si  $T$  est l'opérateur nul, alors  $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$ , et  $\sigma_r(T) = \emptyset$ .

**Proposition 3.2.6**

Le spectre  $\sigma(T)$  est un ensemble compact et

$$\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, +\|T\|].$$

**Démonstration.**

Comme  $\rho(T)$  est un ensemble ouvert, alors  $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$  est fermé. De plus, soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\lambda| > \|T\|$ . Alors  $T - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$  et  $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$ . Donc  $T - \lambda I \in GL(H)$  et  $T - \lambda I$  est aussi inversible. Donc  $\lambda \notin \sigma(T)$ . Donc  $\sigma(T) \subset D(0, \|T\|)$  et  $\sigma(T)$  est borné. C'est donc un fermé borné de  $\mathbb{K}$ , donc un compact de  $\mathbb{K}$ , et  $\sigma(T) \subseteq \overline{D(0, \|T\|)}$ . ■

**Exemple 3.2.2**

Considérons l'opérateur (multiplication)  $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  définie par

$$\forall t \in [0, 1], (Tf)(t) = tf(t)$$

On a  $\|T\| = 1$ , et donc

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\} = [0, 1].$$

En effet, comme  $(T - \lambda I)f(t) = (t - \lambda)f(t)$ , nous avons Si  $\lambda \notin [0, 1]$ , la fonction

$$x \mapsto (x - \lambda)^{-1}$$

est bornée sur l'intervalle  $[0, 1]$  et l'opérateur de multiplication par cette fonction est borné, c'est l'inverse de  $T - \lambda I$ . Donc  $\sigma(T) \subset [0, 1]$ . Inversement, si  $\lambda \in [0, 1]$ , alors  $\frac{1}{t - \lambda} \notin L^2([0, 1])$  en raison de la singularité non-intégrable en  $t = 1$ . D'où  $T - \lambda I$  n'est pas inversible (à  $y(t) = 1$ ). D'autre part, la relation  $Tf - \lambda f = 0$  implique que  $f$  est nulle sauf éventuellement au point  $\lambda$ , l'opérateur  $T$  n'admet donc pas de valeur propre ( $\sigma_p(T) = \emptyset$ ). Enfin, pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , l'opérateur  $T - \lambda I$  n'est pas surjectif, puisque l'unique solution de l'équation  $Tf - \lambda f = 1$  est la fonction  $(x - \lambda)^{-1} \notin L^2([0, 1])$ . L'image de  $(T - \lambda I)$  est dense dans  $L^2([0, 1])$ , tel que  $\forall f \in L^2([0, 1])$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x - \lambda| \geq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |x - \lambda| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Alors  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^2([0, 1])$  et  $f_n \in \text{Im}(T - \lambda I)$ , d'où  $(x - \lambda)^{-1} f_n(x) \in L^2([0, 1])$ . Alors pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\lambda \in \sigma_c(T)$ . En conclusion

$$\sigma(T) = [0, 1], \quad \sigma_p(T) = \emptyset, \quad \sigma_c(T) = [0, 1], \quad \sigma_r(T) = \emptyset.$$

**Exemple 3.2.3** (Opérateur diagonal sur  $\ell^2(\mathbb{N})$ )

Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n \rightarrow 0$ . On définit l'opérateur  $T$  sur  $\ell^2$  par

$$(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Comme  $(T - \lambda I)x = (\lambda_k - \lambda)x_k$ , nous avons  $(T - \lambda I)^{-1} = \left( \frac{y_k}{\lambda_k - \lambda} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ . Il en résulte que  $(T - \lambda I)^{-1}$  est un opérateur borné si et seulement si  $\lambda$  n'est pas dans l'adhérence de  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , qui n'est autre que  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$ . Tous les  $\lambda_k$  sont clairement des valeurs propres de  $T$  comme  $Te_k = \lambda_k e_k$  pour la base canonique  $(e_k)$  de  $\ell^2$ . Mais 0 n'est pas valeur propre car  $T$  est injective (comme tous les  $\lambda_k \neq 0$ ). Notre conclusion est la suivante :

$$\sigma(T) = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{0\}, \quad \sigma_p(T) = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

**Théorème 3.2.2**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , et soit  $S$  un opérateur inversible dans  $\mathcal{L}(H)$ , alors

$$\sigma(T) = \sigma(S^{-1}TS).$$

**Démonstration.**

Si  $T - \lambda I$  est invertible, avec inverse  $V$ , puis  $S^{-1}TS - \lambda I = S^{-1}(T - \lambda I)S$ , a inverse  $S^{-1}VS$ . Inversement, si  $S^{-1}(T - \lambda I)S$  est invertible, puis appliquer la première part, nous voyons que  $S[S^{-1}(T - \lambda I)S]S^{-1} = T - \lambda I$  est invertible. Alors

$$S^{-1}(T - \lambda I)S = S^{-1}TS - \lambda I$$

ce qui achève la démonstration. ■

**Théorème 3.2.3**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  et soit  $p$  un polynôme de degré  $n$  à coefficients complexes,  $p(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

Alors

- 1) le spectre de  $p(T)$  est  $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ .
- 2) Si  $T$  est inversible, alors  $\sigma(T^{-1}) = [\sigma(T)]^{-1} = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ .

**Démonstration.**

1) Soient  $T \in \mathcal{L}(H)$  et  $p \in \mathbb{K}[X]$ . Alors, on peut définir l'opérateur  $P(T) \in \mathcal{L}(H)$  de la manière suivante :

$$p(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k, \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}.$$

Montrons tout d'abord que  $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$ . Soit  $\lambda \in \sigma(T)$ . Puisque  $\lambda$  est racine de  $p(x) - p(\lambda)$  donc il existe  $q \in \mathbb{K}[X]$  tel que

$$p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)q(x)$$

d'où

$$p(T) - p(\lambda)I = (T - \lambda I)q(T) = q(T)(T - \lambda I)$$

Puisque  $T - \lambda I$  n'est pas inversible,  $p(T) - p(\lambda)I$  ne l'est pas, et  $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$ , montrant que  $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$ .

Montrons ensuite que  $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$ . Si  $P$  est identiquement nul, l'inclusion est trivialement vérifiée, soient  $\mu \in \sigma(p(T))$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les  $n$  racines complexes du polynôme  $p - \mu$ , puisque

$$p(x) - \mu = \alpha(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$$

où  $\alpha \neq 0$ . Alors on obtient

$$p(T) - \mu I = \alpha(T - \lambda_1 I)\dots(T - \lambda_n I)$$

Si aucun  $\lambda_j$  n'est dans le spectre de  $T$ , le second membre est inversible, et  $\mu \in \sigma(p(T))$ . Donc il existe  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $(T - \lambda_{j_0} I)$  n'est pas inversible, d'où  $\lambda_{j_0} \in \sigma(T)$ . De plus, on a  $p(\lambda_{j_0}) = \mu$ . Donc  $\mu \in \sigma(p(T))$ , prouvant que

$$\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T)).$$

2) Soit  $\lambda \in \sigma(T^{-1})$  Comme  $T^{-1}$  est inversible, nécessairement  $\lambda \neq 0$ . Comme  $(T^{-1} - \lambda I)$  est non inversible et comme  $T^{-1} - \lambda I = \lambda T^{-1} (T - \frac{1}{\lambda} I)$ . L'opérateur  $(\frac{1}{\lambda} I - T)$  est non inversible, i.e.  $(\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T))$ . On pose  $\frac{1}{\lambda} = \mu \in \sigma(T)$ , implique  $\lambda \in [\sigma(T)]^{-1}$ . On a donc montré que

$$\sigma(T^{-1}) \subset [\sigma(T)]^{-1}.$$

En échangeant le rôle de  $T$  et  $T^{-1}$  on obtient l'inclusion réciproque  $[\sigma(T)]^{-1} \subset \sigma(T^{-1})$ , ce qui achève la preuve de la première assertion. ■

### Exemple 3.2.4

Pour la deuxième propriété on a les exemples suivante:

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  qui satisfait  $T^2 = T$ . Cela implique que  $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$ . Pour voir que cela découle directement du théorème précédent, soit  $p(z) = z^2 - z$ , implique que  $P(T) = 0$ , et donc  $\sigma(P(T)) = \{0\}$ . Nous devons alors  $P(\lambda) = 0$  pour tout  $\lambda \in \sigma(T)$ , alors  $\sigma(T) = \{0, 1\}$ .

### Remarque 3.2.3

Soit  $E := \mathbb{R}^2$  et  $T \in \mathcal{L}(H)$ . La rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Alors,  $T$  est l'endomorphisme dont la matrice associée dans la base canonique de  $E := \mathbb{R}^2$  est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a  $J^2 = -I$  donc  $\sigma(T^2) = \sigma_p(T^2) = Vp(J^2) = \{-1\}$ .

D'autre part, le polynôme caractéristique de  $J$  est  $x^2 + 1$ , d'où

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = Vp(J) = \emptyset$$

car  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . On note  $p(x) = x^2 \in \mathbb{R}[X]$ . Alors, on obtient

$$p(\sigma(T)) = p(\emptyset) = \emptyset \subsetneq \sigma(p(T)) = \{-1\}$$

Autrement dit, si  $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$  l'égalité du Théorème de l'image spectrale ( $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ ) peut ne pas avoir lieu.

## Rayon spectral

### Définition 3.2.5

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ . On définit le **rayon spectral**  $r(T)$  de  $T$  par

$$r(T) := \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Si  $\sigma(T) = \emptyset$ , par convention, on pose  $r(T) = 0$ , mais que  $r(T) = 0$  ne signifie pas nécessairement  $T = 0$ .

**Remarque 3.2.4**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors  $r(T) \in [0, \|T\|]$ , i.e  $r(T) \leq \|T\|$ . Car, on a  $\sigma(T) \subset \overline{D(0, \|T\|)}$ . La définition est plus précise :  $\overline{D(0, r(T))}$  est le plus petit disque fermé, centré en 0, contenant  $\sigma(T)$ .

**Proposition 3.2.7** (Formule du rayon spectral)

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Alors

$$r(T) := \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

La suite  $\left(\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{R}_+$  et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|.$$

### 3.3 Théorie spectrale des opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert

Cette théorie est pour l'essentiel la création du mathématicien hongrois F.Riesz, aux alentours de 1910. Le théorème de Riesz (qui affirme que si  $E$  est un espace vectoriel normé, alors  $\overline{B_E}$  est compacte si et seulement si  $E$  est de dimension finie) est l'un des points clés de cette théorie.

#### 3.3.1 Spectre d'un opérateur compact

**Théorème 3.3.1** (Alternative de Fredholm)

L'Alternative de Fredholm est un théorème qui caractérise l'existence et l'unicité de la solution d'un problème linéaire perturbé et compact. Soit  $H$  un espace de Hilbert si  $T \in K(H)$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$

- i)  $\ker(I - T)$  est de dimension finie.
- ii)  $\text{Im}(I - T)$  est fermé.
- iii)  $\ker(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(I - T) = H$ .

**Remarque 3.3.1**

La propriété iii) est familière en dimension finie. Si  $\dim H < \infty$ , un opérateur linéaire

de  $H$  dans lui-même est injectif si et seulement s'il est surjectif. Par contre en dimension infinie un opérateur borné peut être injectif sans être surjectif et inversement: par exemple le shift à droite (resp. à gauche) dans  $\ell^2$ . La conclusion iii) exprime donc une propriété remarquable des opérateurs de la forme  $(I - T)$  avec  $T \in K(H)$ .

**Démonstration.**

Voir la page[60]. ■

On a maintenant une description précise du spectre d'un opérateur compact dans un espace de Hilbert.

**Théorème 3.3.2** (*Riesz-Schauder*)

Soit  $T \in K(H)$  et  $\dim H = +\infty$ . Alors, on a

- a)  $0 \in \sigma(T)$
- b)  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ , et les sous-espaces propres associés  $\ker(T - \lambda I)$  est de dimension finie.
- c) l'une des situations suivantes:
  - ou bien  $\sigma(T) = \{0\}$ ,
  - ou bien  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  est fini,
  - ou bien  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  est une suite qui tend vers 0.

**Démonstration.**

a) Si  $0 \notin \sigma(T)$  cela signifie que  $T$  est bijectif et donc  $I = TT^{-1}$  est compact. Donc  $H$  est de dimension finie et une contradiction. Donc  $0 \in \sigma(T)$ .

b) Soit  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $\lambda \neq 0$ . Montrons que  $\lambda \in \sigma_p(T)$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\ker(\lambda^{-1}T - I) = \{0\}$ , d'après l'alternative de Fredholm on sait que  $\text{Im}(\lambda^{-1}T - I) = H$ , et donc  $\lambda \in \rho(T)$ . Ce qui est absurde. En déduit que  $\lambda \in \sigma(T)$  et  $\lambda \neq 0$  impliquent  $\lambda \in \sigma_p(T)$ . Pour démontre que  $\dim(\ker(T - \lambda I)) < +\infty$ , supposons que  $\ker(T - \lambda I)$  soit de dimension infinie, alors on peut trouver  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite ortho-normale dans  $\ker(T - \lambda I)$ , i.e. on a  $Te_n = \lambda e_n$ , mais  $\{e_n\}_n$  est bornée ( $\|e_n\| = 1$ ) et  $\lambda \neq 0$ , donc  $\{Te_n\}_n$  n'admet pas de sous-suite de Cauchy,  $\|Te_n - Te_m\| = |\lambda| \|e_n - e_m\| = |\lambda| \sqrt{2}$  ce qui contredit la compacité de  $T$ . ■

Pour la suite de la démonstration on aura besoin du

**Lemme 3.3.1**

Soient  $T \in K(H)$  et  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels tous distincts telle que  $\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda$$

et

$$\lambda_n \in \{\sigma(T) \setminus \{0\}\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Alors  $\lambda = 0$ .

**Démonstration.**

On sait que  $\lambda_n \in V_P(T)$ ; soit  $e_n \neq 0$  tel que  $(T - \lambda_n I)e_n = 0$ . Soit  $E_n$  l'espace vectoriel engendré par  $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ . Montrons que  $E_n \subsetneq E_{n+1}$  pour tout  $n$ . Il suffit de vérifier que, pour tout  $n$ , les vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont linéairement indépendants. Raisonnons par récurrence sur  $n$ . Admettons le résultat à l'ordre  $n$  et supposons que

$$e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

Alors

$$T e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{n+1} e_i$$

Par suite  $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$  et donc  $\alpha_i = 0$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ce qui est absurde. Donc  $E_n \subsetneq E_{n+1}$  pour tout  $n$ .

D'autre part, il est clair que  $(T - \lambda_n I)E_n \subset E_{n-1}$ . Appliquant **le lemme de Riesz 2.4.1** on construit une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  telle que  $u_n \in E_n, \|u_n\| = 1$  et  $\text{dis}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$  pour  $n \geq 2$ .

Soient  $2 \leq m \leq n$  de sorte que

$$E_{n-1} \subset E_n \subset E_{n-1} \subset E_n.$$

On a

$$\left\| \frac{T u_n}{\lambda_n} - \frac{T u_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \frac{(T u_n - \lambda_n u_n)}{\lambda_n} - \frac{(T u_m - \lambda_m u_m)}{\lambda_m} + u_n - u_m \right\| \geq \text{dis}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Si  $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$  on aboutit à une contradiction puisque  $(T u_n)$  admet une sous-suite convergente.

c) Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'ensemble

$$\sigma(T) \cap \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

est vide ou fini. Lorsque  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  contient une infinité de points distincts on peut donc les ranger en une suite qui tend vers 0. En effet, soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n_0}$  ses éléments classés de la façon suivante :

$$|\lambda_0| \geq \dots \geq |\lambda_{n_0}|$$

De même, l'ensemble

$$\Lambda_n = \left\{ \lambda \in \sigma(T), \frac{1}{n+1} \leq |\lambda| < \frac{1}{n} \right\}$$

est fini. On pose  $\Lambda_n = \{\lambda_{n_0+1}, \dots, \lambda_{n_1}\}$  où les  $\lambda_i$  sont classés de la façon suivante

$$\frac{1}{n+1} \leq |\lambda_{n_1}| \leq \dots \leq |\lambda_{n_0+1}| < \frac{1}{n} \leq |\lambda_{n_0}| \leq \dots \leq |\lambda_0|$$

En procédant ainsi par récurrence, on peut ranger les éléments de  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  en une suite  $(\lambda_n) \in \mathbb{N}$  qui décroît, en module, vers 0. ■

### Corollaire 3.3.1

Soit  $T \in K(H)$ , alors le spectre de  $T$  est au plus dénombrable. Chaque point du spectre est isolé, à l'exception possible de 0.

#### Démonstration.

Puisque  $\sigma(T)$  est compact, il suffit de montrer que tout  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$  est isolé. Or, si un tel  $\lambda$  n'est pas isolé, il existerait une suite  $(\lambda_k)$ , d'éléments dans  $\sigma(T)$  non nuls et distincts deux à deux, qui convergerait vers  $\lambda$ . Comme  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ , les  $\lambda_k$  sont des valeurs propres et le **théorème 3.3.2** dit que nécessairement  $(\lambda_k)$  converge vers 0, ce qui contredit l'hypothèse  $\lambda \neq 0$ . ■

### Remarque 3.3.2

0 peut être valeur propre de  $T$  mais pas nécessairement.

### Exemple 3.3.1

Étant donnée une suite  $(\alpha_n)$  qui tend vers 0 on peut construire un opérateur compact  $T$  tel que  $\sigma(T) = (\alpha_n) \cup \{0\}$ . Il suffit de considérer dans  $E = \ell^2$  l'opérateur

$$T : u = (u_n) \longmapsto Tu = (\alpha_n u_n).$$

Noter que  $T$  est compact car il existe une suite  $(T_n)$  d'opérateurs de rangs finis telle que  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ . Sur cet exemple on voit aussi que 0 peut appartenir, ou ne pas appartenir à  $\sigma_p(T)$ , de plus, si  $0 \in \sigma_p(T)$  il peut arriver que l'espace propre associé, i.e.  $\ker(T)$  soit de dimension infinie.

**Exemple 3.3.2**

Soient  $E := C([0, 1], \mathbb{R})$  et  $T$  l'opérateur de Volterra défini défini sur  $E$  par

$$\forall f \in E, (Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0, 1].$$

Alors, on a  $\ker(T) = \{0\}$  et  $\text{Im}(T) = \{g \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid g(0) = 0\}$ . En particulier,  $T$  est injectif donc  $0 \notin \sigma_p(T) = Vp(T)$  mais non surjectif donc  $0 \in \sigma(T)$ .

**Définition 3.3.1** (valeur propre approché)

$\lambda$  est un valeur propre approché de  $T$  s' il existe une suite des fonctions  $\psi_n \in H$ , telles que  $\|\psi_n\| = 1$  pour tout  $n$ , et

$$\|T\psi_n - \lambda\psi_n\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

**Définition 3.3.2** (valeur propre approché)

Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H)$ .  $\lambda$  est un valeur propre approché de  $T$  s' il existe une suite des fonctions  $x_n \in H$ , telles que  $\|x_n\| = 1$  pour tout  $n$ , et

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

**Exemple 3.3.3**

Soit  $S$  le shift à droite sur  $\ell^2(\mathbb{N})$ ; on sait que le spectre de  $S$  est égal au disque unité fermé, sa frontière est donc le cercle unité. Soit  $\lambda$  de module 1 un point quelconque de  $\partial\sigma(T)$ ; on considère pour tout  $n \geq 1$  le vecteur  $x_n$  telle que  $\|x_n\| = 1$  de  $\ell^2(\mathbb{N})$

$$x_n = n^{-\frac{1}{2}} (1, \lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \dots, \lambda^{-n+1}, 0, \dots)$$

et on note que  $\|Sx_n - \lambda x_n\| \leq 2n^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ , ce qui donne des presque vecteurs propres pour la valeur  $|\lambda| \leq 1$ .

### Théorème 3.3.3

Si  $T \in K(H)$ , alors chaque approximative non nulle valeur propre de  $T$  est une valeur propre.

#### Démonstration.

Soit  $(x_n)$  une suite de vecteurs de telle que  $\|x_n\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , pour  $\lambda \neq 0$ . Puisque  $T$  est compact, il existe une suite  $(x_{p_n})$  de  $(x_n)$  tel que  $Tx_{p_n} \rightarrow y$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , pour  $y \in H$ , alors

$$\|y - \lambda x_{p_n}\| \leq \|y - Tx_{p_n}\| + \|Tx_{p_n} - \lambda x_{p_n}\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Puisque  $\lambda \neq 0$ , on a  $x_{p_n} \rightarrow \frac{y}{\lambda}$ . Si nous laissons  $u = \frac{y}{\lambda}$ , alors

$$\|Tu - \lambda u\| \leq \|Tu - Tx_{p_n}\| + \|Tx_{p_n} - y\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Ainsi,  $Tu = \lambda u$ . ■

## 3.4 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

Dans cette section, on s'intéresse aux opérateurs dits auto-adjoints dont on étudie les propriétés spectrales et pour lesquels on définit un calcul fonctionnel continu. Le cadre est celui des espaces de Hilbert.

### 3.4.1 Spectre d'un opérateur adjoint

#### Théorème 3.4.1

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Alors, on a

- a)  $\ker(T) = (\text{Im}(T^*))^\perp$ ,  $\overline{\text{Im}(T^*)} = (\ker T)^\perp$ .
- b)  $\ker(T^*) = \{0\}$  si et seulement si  $\overline{\text{Im}(T)} = H$ .

#### Proposition 3.4.1

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Alors

1.  $\rho(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \bar{\lambda} \in \rho(T)\}$  et  $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\bar{\lambda}, \lambda \in \sigma(T)\}$ .
2. Pour tout  $\lambda \in \rho(T^*)$ ,  $R_\lambda(T^*) = (R_{\bar{\lambda}}(T))^*$ .
3.  $\lambda \in \sigma_r(T) \implies \bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ .

**Démonstration.**

1. On a l'équivalence  $(T^* - \lambda I)$  est inversible si et seulement si  $(T^* - \lambda I)^*$  est inversible or  $(T^* - \lambda I)^* = (T - \bar{\lambda}I)$  donc

$$\begin{aligned}\rho(T^*) &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (T^* - \lambda I) \text{ inversible}\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (T - \bar{\lambda}I) \text{ inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \bar{\lambda} \in \rho(T)\}.\end{aligned}$$

De plus,  $\sigma(T^*) = \mathbb{K} \setminus \rho(T^*)$ , ce qui donne le résultat

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$$

2. Si  $\lambda \in \rho(T^*)$  alors

$$\begin{aligned}R_\lambda(T^*) &= (T^* - \lambda I)^{-1} = ((T - \bar{\lambda}I)^*)^{-1} \\ &= ((T - \bar{\lambda}I)^{-1})^* = (R_{\bar{\lambda}}(T))^*\end{aligned}$$

3. Soit  $\lambda \in \sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(T - \lambda I) = \{0\}, \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq H, \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \neq H \right\}$ , d'après le **théorème précédent**  $\overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \neq H \iff \ker((T - \lambda I)^*) \neq \{0\}$ , et  $(T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda}I$ , implique  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ . ■

### 3.4.2 Spectre d'un opérateur auto-adjoint

Dans cette section, on s'intéresse aux opérateurs dits auto-adjoints dont on étudie les propriétés spectrales et pour lesquels on définit un calcul fonctionnel continu. Le cadre est celui des espaces de Hilbert.

**Définition 3.4.1**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ . On dit que  $T$  est auto-adjoint si  $T^* = T$  c'est à dire:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \forall x, y \in H.$$

**Lemme 3.4.1**

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $T$  un opérateur auto-adjoint dans  $\mathcal{L}(H)$ . On sait que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

**Proposition 3.4.2**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint. On pose

$$m = \inf_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle \quad \text{et} \quad M = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle.$$

Alors

$$\sigma(T) \subset [m, M], \quad m \in \sigma(T) \quad \text{et} \quad M \in \sigma(T)$$

**Remarque 3.4.1**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint tel que

$$\sigma(T) = \{0\}, \quad \text{alors} \quad T = 0.$$

**Démonstration.**

D'après la proposition précédent on sait que

$$\langle Tx, x \rangle = 0, \quad \forall x \in H.$$

Il en résulte que

$$2 \langle Tx, y \rangle = \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle Tx, x \rangle - \langle Ty, y \rangle = 0, \quad \forall x, y \in H$$

Donc  $T = 0$ . ■

**Proposition 3.4.3**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint. Alors,

1.  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .
2.  $\sigma_r(T) = \emptyset$ .
3. Si  $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ ,  $\lambda \neq \mu$ , alors  $\ker(T - \lambda I) \perp \ker(T - \mu I)$ , i.e. les sous-espaces propres de  $T$  sont orthogonaux deux à deux.

**Démonstration.**

1. Commençons par montrer que  $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ . Soit  $\lambda \in \sigma_p(T)$  et  $x \in H$ ,  $x \neq 0$  tel que  $Tx = \lambda x$ , alors

$$\langle Tx, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

d'où  $(\lambda - \bar{\lambda}) \|x\|^2 = 0$  et  $\|x\| \neq 0$ , d'où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**La proposition 3.4.1** implique que  $\sigma_r(T) = \emptyset$ , en effet, soit  $\lambda \in \sigma_r(T)$ , alors

$$\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*) = \sigma_p(T) \subset \mathbb{R}.$$

On a donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \sigma_p(T)$ , ce qui est absurde car  $\sigma_r(T)$  et  $\sigma_p(T)$  sont disjoints. Donc  $\sigma_r(T) = \emptyset$ . Montrons maintenant que  $\sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$ . Soit  $\lambda = \alpha + i\beta$  avec  $\beta \neq 0$ . On suppose que  $\lambda \in \sigma_c(T)$ . Alors  $(T - \lambda I)$  est injective et son image est dense mais distincte de  $H$ . On va montrer qu'en fait  $\text{Im}(T - \lambda I)$  est fermée dans  $H$ , ce qui contredit les hypothèses. Pour cela, on commence par montrer une inégalité qu'on utilisera ensuite pour conclure. Soit  $x \in H$ ,

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)x\|^2 &= \langle (T - (\alpha + i\beta))x, (T - (\alpha + i\beta))x \rangle \\ &= \|(T - \alpha)x\|^2 + \|\beta x\|^2 + 2\Re \langle i\beta x, (T - \alpha)x \rangle \end{aligned}$$

or,

$$\langle i\beta x, (T - \alpha)x \rangle = i \langle \beta x, (T - \alpha)x \rangle = (i\alpha\beta \|x\|^2 - i\beta \langle x, Tx \rangle) \in i\mathbb{R}$$

d'où

$$\|(T - \lambda)x\|^2 = \|(T - \alpha)x\|^2 + \|\beta x\|^2 \geq \beta^2 \|x\|^2. \quad (3.1)$$

Considérons  $x_n$  une suite de Cauchy dans  $\text{Im}(T - \lambda I)$ , soit  $x$  sa limite dans  $H$ . Pour chaque  $n$ , il existe  $y_n \in H$  tel que  $x_n = (T - \lambda I)y_n$ , et en utilisant **(3.1)** on a

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|(T - \lambda)(y_m - y_n)\|^2 \geq \beta^2 \|y_m - y_n\|^2$$

Il suit que  $\{y_n\}_n$  est une suite de Cauchy, elle est donc convergente, soit  $y$  sa limite, par continuité de  $(T - \lambda I)$ , il suit  $x = (T - \lambda I)y \in \text{Im}(T - \lambda I)$ . D'où le résultat. L'hypothèse  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  est donc incompatible avec  $\lambda \in \sigma_c(T)$ , i.e.  $\sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$ .

3. Si  $x \in \ker(T - \lambda I)$  et  $y \in \ker(T - \mu I)$ , alors

$$Tx = \lambda x \quad \text{et} \quad Ty = \mu y$$

Comme  $T = T^*$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ , on obtient

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle - \langle x, \mu y \rangle = \langle Tx, y \rangle - \langle x, Ty \rangle = 0,$$

d'où  $\langle x, y \rangle = 0$  car  $\lambda \neq \mu$ . Autrement dit,  $\ker(T - \lambda I) \perp \ker(T - \mu I)$ . ■

### Théorème 3.4.2

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint. Alors

$$r(T) = \|T\| .$$

#### Démonstration.

Le théorème est évidemment vrai pour  $T = 0$ . Soit  $T$  nul,  $T$  opérateur bornée, auto-adjoint sur un espace de Hilbert  $H$ . Compte tenu de **la remarque 3.2.4**,  $r(T) \leq \|T\|$ , il Suffit de montrer qu'il existe  $\lambda \in \sigma(T)$  tel que  $|\lambda| = \|T\|$ . Alors, **le lemme 3.4.1**,  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$ , Il existe une suite  $x_n \in H$  tel que  $\|x_n\| = 1$  et  $|\langle Tx_n, x_n \rangle| \rightarrow \|T\|$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$  où  $|\lambda| = \|T\|$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \leq \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 = 2\lambda (\lambda - \langle Tx_n, x_n \rangle)$$

Ainsi,

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0 , \text{ lorsque } n \rightarrow \infty . \quad (3.2)$$

Maintenant, supposons que  $\lambda \in \rho(T)$ . Alors, de **(3.2)** et la continuité des  $(T - \lambda I)^{-1}$ , nous obtenons

$$1 = \|x_n\| = \|(T - \lambda I)^{-1}(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0 , \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Cette contradiction montre que  $\lambda \in \sigma(T)$ . ■

### 3.4.3 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Un résultat classique d'algèbre linéaire affirme qu'en dimension finie tout opérateur auto-adjoint est diagonalisable dans une base orthonormée. Le but de cette section est de généraliser ce résultat en dimension infinie mais, pour ce faire, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse de compacité et donc de considérer des opérateurs auto-adjoints compacts. Le cadre est celui des espaces de Hilbert.

**Théorème 3.4.3**

Si  $T$  est un opérateur compact auto-adjoint, alors il admet une valeur propre  $\lambda$  telle que

$$|\lambda| = \|T\|.$$

**Démonstration.**

Si  $T = 0$ , 0 est valeur propre de  $T$  et  $\|T\| = 0$ . Supposons  $T \neq 0$ . Alors, d'après la démonstration du **théorème 3.4.2**, il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs unitaires

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \tag{3.3}$$

La compacité de  $T$ , implique la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergente. puisque  $T \neq 0$ , il résulte de **(3.3)** que  $x_{n_k} \rightarrow u$  pour  $u \in H$ . on pose que  $\|u\| = 1$ , comme  $\|x_{n_k}\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Enfin, à partir de la continuité de  $T$  et **(3.2)**, nous obtenons  $Tu = \lambda u$ . Donc  $\lambda \in \sigma_p(T)$ . ■

**Théorème 3.4.4**

*L'espaces propres correspondant à des valeurs propres non nulles d'un opérateur auto-adjoint compact sont de dimension finie.*

**Démonstration.**

Soit  $\lambda \neq 0$  ait une valeur propre d'un opérateur  $T$  auto-adjoint compact, et soit  $E_\lambda$  soit l'espace propre correspondant à  $\lambda$ . Supposons  $E_\lambda$  est de dimension infini. Soit  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  est une base orthonormée de  $E_\lambda$ . Alors  $Tx_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , puisque la suite  $(x_n)$  est faiblement convergente à 0. Mais cela est impossible, parce que  $Tx_n = \lambda x_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lambda \neq 0$ . ■

**Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts**

Soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension finie, dit  $H = \mathbb{C}^n$ . Il est connu de l'algèbre linéaire que les vecteurs propres d'un opérateur auto-adjoint sur  $H$  forment une base orthogonale de  $H$ . Les théorèmes suivants généralisent ce résultat à des espaces de dimension infini.

**Définition 3.4.2**

Deux opérateurs  $T_1, T_2$  dans  $\mathcal{L}(H)$  sont dits semblables s'il existe  $S$  inversible dans  $\mathcal{L}(H)$  tel que

$$S^{-1}T_1S = T_2.$$

**Théorème 3.4.5** (réduction des matrices hermitiennes)

Soit  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  telle que  $A = A^*$ , alors il existe  $U \in M(n \times n, \mathbb{C})$ ,  $U$  unitaire telle que  $U^{-1}AU$  soit diagonale réelle.

**Théorème 3.4.6** (Hilbert-Schmidt)

Soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit  $T \in K(H)$  un opérateur auto-adjoint. Alors il existe une famille orthonormale dénombrable dans  $H$ ,  $\{e_n\}_{0 \leq n < N+1}$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , constituée de vecteurs propres de  $T$ , tels que  $Te_n = \lambda_n e_n$ , où la famille  $\{|\lambda_n|\}_{0 \leq n < N+1}$  est décroissante. De plus, si  $N = +\infty$ , alors  $\lambda_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . La famille  $\{e_n\}_{0 \leq n < N+1}$  constitue une base orthonormale de  $\overline{\text{Im } T} = \ker(T)^\perp$  et pour tout  $x \in H$ , on a

$$Tx = \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n. \quad (3.4)$$

Le spectre de  $T$  est

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n \mid 0 \leq n < N + 1\}.$$

**Démonstration.**

D'après le **théorème 3.4.3** on a  $\|T\|$  ou  $(-\|T\|)$  est une valeur propre de  $T$ .

Considérons maintenant  $e_0 \in H$ ,  $\|e_0\| = 1$ , tel que  $Te_0 = \lambda_0 e_0$ , avec  $|\lambda_0| = \|T\|$  (bien sûr  $\lambda_0$  est réel comme valeur propre d'un opérateur auto-adjoint). On pose  $T_0 = T$ . On définit maintenant  $H_1 := \{e_0\}^\perp$ . Du fait que  $Te_0 = \lambda_0 e_0$  et que  $T$  est auto-adjoint,  $H_1$  est stable par  $T$ . En effet, considérons  $x \in H$ ,  $x \perp e_0$  tel que  $\langle Tx, e_0 \rangle \neq 0$ , alors

$$\langle Tx, e_0 \rangle = \langle x, Te_0 \rangle = \lambda_0 \langle x, e_0 \rangle = 0$$

ce qui est absurde. On pose alors  $T_1 := T|_{H_1}$ . Alors  $T_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ , est compact et auto-adjoint sur  $H_1$ . Puis on répète le processus. A l'étape  $n$ , on choisit  $e_n \in H_n$ ,  $\|e_n\| = 1$ , avec  $Te_n = T_n e_n = \lambda_n e_n$ , où  $T_n = T|_{H_n}$  avec  $|\lambda_n| = \|T_n\|$ . On définit alors  $H_{n+1} := \{e_0, \dots, e_n\}^\perp$ , comme  $Te_i = \lambda_i e_i$  pour  $i = 0, \dots, n$  et comme  $T$  est auto-adjoint,  $H_{n+1}$  est stable par  $T$  et on peut donc poser  $T_{n+1} := T|_{H_{n+1}}$ , qui à son tour est un opérateur borné sur  $H_{n+1}$ , compact et auto-adjoint.

Comme les  $T_n$  sont des restrictions de  $T$  sur des espaces de plus en plus petits, leur norme décroît, i.e.  $|\lambda_n|$  est décroissante en  $n$ . Ce processus s'arrête si pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ ,

on a  $T_{N+1} = 0$ , i.e. on a  $H_{N+1} = \ker(T)$ . On est alors clairement dans le cadre du théorème avec  $N$  fini. Si ce processus ne s'arrête pas, alors on obtient une suite  $\{\lambda_n\}$ , tous les  $\lambda_n$  étant non nuls, telle que  $|\lambda_n| = \|T_n\|$  décroît avec  $n$  (on est dans le cadre du théorème avec  $N = +\infty$ ). La suite  $\{|\lambda_n|\}_n$  admet donc une limite, on la note  $\delta$ . Supposons que  $\delta > 0$ , alors  $x_n := (\frac{\delta}{\lambda_n})e_n$  est de norme inférieure ou égale à 1 et  $Tx_n = \delta e_n$  n'a pas de sous-suite de Cauchy, car pour  $n \neq m$ ,

$$\|Tx_n - Tx_m\|^2 = \delta^2 (\|e_n\|^2 + \|e_m\|^2) = 2\delta^2$$

du fait que  $e_n \perp e_m$ . Ceci contredit la compacité de  $T$ . D'où  $\lambda_n \rightarrow 0$ .

Supposons  $N$  fini. Pour  $x \in H$ , on peut décomposer  $x$  de façon unique sous la forme suivante :

$$x = \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n + P_{H_{N+1}} x$$

où  $P_{H_{N+1}}$  est la projection sur  $H_{N+1} = \ker(T)$ . On a donc

$$Tx = \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle Te_n = \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Ainsi les  $\{\lambda_n\}_{0 \leq n \leq N}$  engendrent  $\text{Im } T$  qui est de dimension finie  $N + 1$  et donc fermée, d'où

$$\text{Im } T = (\ker(T))^\perp.$$

Supposons maintenant que  $N = +\infty$ . Soit  $x \in H$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a, en projetant  $x$  sur l'espace engendré par  $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$  puis sur  $H_{n+1}$ ,

$$x = \sum_{p=0}^n \langle x, e_p \rangle e_p + P_{H_{n+1}} x$$

et en utilisant que  $TP_{H_{n+1}} = T_{n+1}P_{H_{n+1}}$ ,

$$Tx = \sum_{p=0}^n \langle x, e_p \rangle Te_p + T_{n+1}x = \sum_{p=0}^n \lambda_p \langle x, e_p \rangle e_p + T_{n+1}P_{H_{n+1}} x.$$

Comme  $\|T_n\|$  tend vers zéro, on en déduit que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

converge dans  $H$  et que sa limite vaut  $Tx$ . On obtient donc (3.4), ce qui implique que  $\text{Im } T$  est engendré par les  $e_n$  et donc que la famille  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormale de

$$\overline{\text{Im } T} = \ker(T)^\perp.$$

Ceci clôt la preuve du théorème. ■

### Corollaire 3.4.1

Soit  $H$  est un espace de Hilbert séparable et  $T \in K(H)$ . Un opérateur auto-adjoint compact. Alors, il existe une base hilbertienne de  $H$  formée de vecteurs propres de  $T$ .

#### Démonstration.

Si  $H$  est séparable,  $\ker(T)$  aussi. On considère la famille  $\{e_n\}_{0 \leq n < N+1}$  donnée par le théorème de Hilbert-Schmidt 3.4.6 et on y ajoute une base orthonormale de  $\ker(T)$ . ■

### Remarque 3.4.2

Attention, si à la fois  $\ker(T)$  et  $\text{Im}(T)$  sont de dimension infinie, il n'est pas possible de trouver une base orthonormée  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $H$  de vecteurs propres de  $H$  tels que la suite  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  des valeurs propres associés ( $Ta_n = \lambda_n a_n$ ) soit de module décroissant avec  $n$ . On peut le faire sur  $\overline{\text{Im}(T)}$  mais pas sur  $H$ .

### Exemple 3.4.1

Voyons maintenant deux exemples d'opérateurs compacts ayant 0 dans leur spectre mais pour lesquels 0 joue des rôles différents. Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une base Hilbertienne de  $H$ .

- Le premier exemple est l'opérateur  $K_1$  défini par

$$K_1 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \langle x, e_n \rangle e_n$$

L'opérateur  $K_1$  est compact, son spectre est

$$\sigma(K_1) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

et 0 n'est pas une valeur propre.

- Le second exemple est  $T$  l'opérateur  $K_2$  défini par

$$K_2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \langle x, e_{2k} \rangle e_{2k}$$

L'opérateur  $K_2$  est compact, son spectre est

$$\sigma(K_2) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

et 0 est une valeur propre, son sous-espace propre est.

$$\ker(K_2) = \overline{\text{vect} \{e_{2k+1}, k \in \mathbb{N}\}}.$$

### Corollaire 3.4.2

Soit  $T \in K(H)$  un opérateur auto-adjoint, alors

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n \tag{3.5}$$

où  $P_n$  le projecteur orthogonal sur le sous-espace de dimension finie de  $H$ .

#### Démonstration.

Soit  $\{v_1, v_2, \dots\}$  un système orthonormé complet de vecteurs propres de  $T$  correspondant à des valeurs propres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ . Soit  $P_n$  soit l'opérateur de projection sur l'espace à une dimension engendré par  $v_n$ , alors  $P_n x = \langle x, v_n \rangle v_n$ , l'équation (3.4) peut être écrite comme

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n x$$

Voici une autre façon de représenter  $T$  sous la forme (3.5). Soit  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  toutes les valeurs propres non nulles distinctes de  $T$  et  $P_n$  la projection sur le sous-espace correspondant à  $\lambda_n$ . Puisque on a  $\dim \ker(T - \lambda I) < +\infty$ . D'après le **théorème 3.4.4**, ces espaces propres sont de dimensions finie ■

### Définition 3.4.3 (Fonction d'un opérateur)

Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles sur  $\mathbb{R}$  tel que

$$f(\lambda) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Pour un opérateur un compact auto-adjoint  $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n$ , on définit

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n) P_n.$$

**Exemple 3.4.2**

1. Soit  $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n$  un opérateur auto-adjoint, compact telle que  $\lambda_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour tout  $\alpha > 0$ , on peut définir  $T^\alpha$  par

$$T^\alpha x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^\alpha P_n x.$$

On notera que dans le cas de  $\alpha = \frac{1}{2}$ . L'opérateur défini par  $T^{\frac{1}{2}}$  est la racine carré de  $T$ , on a

$$\left(\sqrt{T}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\lambda_n}\right)^2 P_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n x = T.$$

Parce que tous les  $\lambda_n$  sont non-négatif.

2. Soit  $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n$  un opérateur auto-adjoint, compact nous peut définir sinus de  $T$  par

$$\sin(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\lambda_n) P_n$$

La condition  $f(\lambda) \rightarrow 0$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  dans la **définition 3.4.3** peut être remplacé par bornitude de  $f$  dans  $x$  voisinage de l'origine. En effet, si  $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n P_n$  et  $P_n x = \langle x, v_n \rangle v_n$ , alors pour tout  $x \in H$ , on a

$$(f(T))(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(\lambda_n) \langle x, v_n \rangle v_n,$$

cette série convergence, puisque

$$|f(\lambda_n) \langle x, v_n \rangle|^2 \leq M |\langle x, v_n \rangle|^2$$

pour une constante  $M$ , et donc  $(f(\lambda_n) \langle x, v_n \rangle) \in \ell^2$ . Il est clair que, dans ce cas, nous ne peut pas attendre  $f(T)$  à un opérateur compact.

## Conclusion

L'étude spectrale d'opérateur compact  $T$ , signifie étudier les valeurs  $\lambda \in \mathbb{C}$  pour lesquelles l'opérateur  $(\lambda^{-1}T - I)$  est bijectif (le cas  $\lambda = 0$  est particulier, comme on le verra avec le théorème de Riesz-Schauder). La théorie de Fredholm établit que si on peut assurer l'unicité, alors l'existence suit. C'est le résultat appelé "alternative de Fredholm"

- En espace  $H$  de dimension finie  $n$ , le spectre est exactement l'ensemble des valeurs propres.

- La théorie spectrale des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert séparable diffère très peu de celle des matrices, où l'inclusion  $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ .

- En espace  $H$  de dimension infinie, tous les opérateurs auto-adjoints compacts est diagonalisables en base hilbertienne (lorsque l'espace de Hilbert est séparable) formée de vecteurs propres de  $T$ , on obtient 
$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n .$$

# Bibliographie

- [BM] **B. Maccluer**, Elementary Functional Analysis.
- [BF] **E. Fricain**, Analyse fonctionnelle des opérateur cours et exercice, Mastre (mathématiques pures ), 2009-2010.
- [FP] **F. Paulin**, Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique. Cours de deuxième année de magistère Année 2015-2016
- [J-PN] **J-P. Nicolas**, Analyse fonctionnelle, Département de Mathématiques, Université de Brest, 6 avenue Victor Le Gorgeu, 29200 Brest.
- [JH] **J. Hunter, B. Nachtergaeel**, Applied Analysis, department of mathematics, univercity of california at Davis, september 12, 2000.
- [HB] **H. BRÉZIS**, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, 1983.
- [HC] **H. Chebli**, Analyse hilbertienne. Centre de Publication Universitaire Tunis, 2001.
- [LD&PM] **L. Debnath , Piotr Mikusiński**, Hilbert Spaces with Applications.
- [MN] **M. NADIR**, Cours analyse fonctionnelle, université de M'sila , algérie 2004.
- [SM] **S. Maingot , D. Manceau**, Théorie spectrale