

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE  
ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF  
M'SILA

Faculté de Mathématiques et d'Informatique  
Département de Mathématiques



## *Master de Mathématiques*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Spécialité :** Mathématiques

**Option :** Analyse mathématique et numérique

### Thème

---

*Caractérisations des espaces de Triebel-Lizorkin de type de Morrey à exposants variables*

---

Présenté par :  
MERZOUGUI Afaf

Soutenu le 18/06/2023 devant le jury composé de :

TALLAB Abdelhamid,	M.C.A.	Mohamed Boudiaf M'sila,	<b>Président</b>
DJERIOU Aissa,	M.C.A.	Mohamed Boudiaf M'sila,	<b>Encadreur.</b>
SEGHIRI Fakhreddine,	M.C.B.	Mohamed Boudiaf M'sila,	<b>Examineur</b>

Promotion 2022/2023

## *Remerciements*

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail. Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur **Aissa Djeriou** qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et de m'a voir guidé. Leurs critiques et leurs conseils m'ont été très précieux. De même je remercie Mrs **Fakhereddine Seghiri** et Mrs **Tallab Abd Elhamid** qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.

Merci à tous les enseignants et les étudiants que j'ai connu tout au long de ma carrière.

Merci à mes parents en particulier à ma mère et mes frères et mes soeurs et tout mes amis.

Enfin, je voudrais associer à mes remerciements tout qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Merci

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>6</b>
1.1 Définition de certains espaces fonctionels . . . . .	6
1.1.1 Les espaces de suites . . . . .	6
1.1.2 Les espaces de Lebesgue . . . . .	6
1.1.3 Les espaces de Morrey . . . . .	7
1.1.4 Les espaces de Bessel . . . . .	7
1.1.5 Les espaces de Sobolev . . . . .	8
1.1.6 Les espaces de Triebel - Lizorkin . . . . .	8
1.1.7 Les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin . . . . .	9
1.2 Certaines inégalités de base . . . . .	10
1.3 La fonction maximale . . . . .	11
<b>2 Les espaces de Morrey à exposant variable</b>	<b>13</b>
2.1 L'espace de Lebesgue a exposant variable . . . . .	13
2.1.1 L'espace semi-modular . . . . .	13
2.1.2 Exposant variable . . . . .	14
2.2 Les espaces de Morrey à exposant variable . . . . .	16
2.3 La continuité de la fonction maximale . . . . .	17
<b>3 Les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin à exposant variable</b>	<b>20</b>
3.1 Définitions et quelques propriétés . . . . .	20
3.2 Quelques caractérisations équivalentes . . . . .	21
<b>Conclusion</b>	<b>27</b>
Bibliographie . . . . .	27
<b>Biblographie</b>	<b>28</b>
Résumé . . . . .	29

# Notation

- $\mathbb{N}$  est la collection de tous les nombres naturels.
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .
- $\mathbb{Z}$  est l'ensemble de tous les nombres entiers.
- $\mathbb{R}^n$  est l'espace Euclidien.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
- $\mathcal{D}^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ .
- Le produit scalaire de  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  est définie par

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

- $|B|$  la mesure de Lebesgue de  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux espaces  $X_1 \hookrightarrow X_2$  s'il existe  $c > 0$ , telle que :

$$\|f\|_{X_2} \leq c \|f\|_{X_1}, \quad f \in X_1.$$

- $p'$  est l'exposant conjugué de  $p$  où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .
- Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction, le support de  $f$  est  $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ .
- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}^n$ , intégrables sur tout compact de  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonction  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support compact,  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est le dual de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , appelé espace des distribution sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  à décroissance rapide sur  $\mathbb{R}^n$  muni de semi norme classique

$$p_M(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq M} (1 + |x|)^M |\partial^\alpha f|, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Le dual  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des distribution tempérées.

- Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  sa transformée de Fourier est

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) d(x)$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi$$

- $B(x, r)$  est la boule de centre  $x$  et de rayon  $r$

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

- La fonction caractéristique d'un ensemble  $E$  et notée par

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

- L'expression  $A_1 \lesssim A_2$  signifie que  $A_1 \leq CA_2$  et  $A_1 \sim A_2$  signifie que  $A_1 \lesssim A_2 \lesssim A_1$ .

# Introduction

Ces dernières années, les espaces de régularité liés aux espaces de Morrey, en particulier les espaces de Morrey, Morrey de type de Besov et Morrey de type de Triebel-Lizorkin, ont attiré l'attention. Les espaces de Morrey classiques  $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < q \leq p \leq \infty$ , ont été introduits par Ch. B. Morrey [11] et font partie de la classe plus large des espaces de Morrey-Campanato (cf. [12]). Ils peuvent être considérés comme un complément des espaces de  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , puisque  $\mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ . A partir de cette famille de base  $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ , différents espaces de type Besov-Triebel-Lizorkin ont été définis ces dernières années. Les espaces de Besov-Triebel-Morrey ont été introduits par H. Kozono et M. Yamazaki pour étudier les solutions des équations de Navier-Stokes [7]. Et leurs applications aux EDP non linéaires dans [7], [10] ont été étudiées plus en détail. Des années plus tard, les espaces à exposant variable sont apparus.

Nous notons également que les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin à exposant variable sont des généralisations des espaces de Morrey de type de de Triebel-Lizorkin [17] et des espaces de Morrey à exposant variable [1].

Le but de ce mémoire est d'étudier certain propriétés principaux de ces espaces. Plus précisément la caractérisation par la fonction maximale de Peetre. On s'est basée sur les travaux du Jingjing Fu, Jingshi Xu [4], qu'ils ont étudié les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin non homogène à exposant variable, où ils donnent certain normes equivalent. Le mémoire se divise en trois chapitres.

Le premier chapitre est constitué des notions fondamentales sur quelques espaces fonctionnels et inégalités qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre on donne les définitions et les propriétés des espaces de Lebesgue et les espaces de Morrey a exposant variable, quelques lemmes qu'on utilisera par la suite et en termine par étudier la continuité de l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood à valeurs vectorielles sur ces espaces.

Dans le troisième chapitre on donne une caractérisation pour les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin à exposant variable par la fonction maximale de Peetre et autre Normes équivalente.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Nous rappelons les notions essentielles et nécessaires pour la suite, en particulier l'espace de Lebesgue, l'espace de Morrey, l'espace de Triebel-Lizorkin, quelques propriétés principales. Nous rappelons aussi quelques inégalités classiques.

### 1.1 Définition de certains espaces fonctionnels

#### 1.1.1 Les espaces de suites

**Définition 1.1** Soit  $0 < p \leq \infty$ .  $\ell_q$  désigne l'espace des suites  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  qui vérifient

$$\|\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} | \ell_q\| = \left( \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^q \right)^{1/q} < +\infty,$$

et

$$\|\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} | \ell_\infty\| = \sup_{j \geq 0} (|a_j|) < +\infty.$$

**Définition 1.2** Soient  $0 < q \leq \infty$ ,  $\ell_q(E)$  (resp.,  $E(\ell_q)$ ) désigne l'espace des suites  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  qui vérifient

$$\|\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} | \ell_q(E)\| = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \|a_j | E\|^q \right)^{1/q} < +\infty$$

$$\text{(resp., } \|\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} | E(\ell_q)\| = \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} (|a_j|)^q \right)^{1/q} | E \right\| < +\infty).$$

#### 1.1.2 Les espaces de Lebesgue

**Définition 1.3** Soient  $0 < p \leq \infty$  et  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . On pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \|f | L^p(\Omega)\| < \infty\}$$

avec

$$\|f | L^p(\Omega)\| = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 0 < p < \infty$$

et

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \quad \text{si } p = \infty.$$

Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on pose  $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$  et  $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p$ .

Les espaces  $L^p(\Omega)$  sont des espaces de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .

### 1.1.3 Les espaces de Morrey

Les espaces de Morrey  $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ , ont été introduits par C.B. Morrey en 1938, qui sont définis comme suit.

**Définition 1.4** Soient  $0 < q \leq p \leq \infty$ . L'espace de Morrey  $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des fonctions  $f \in L_{Loc}^q(\mathbb{R}^n)$  telles que

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{1/p-1/q} \left( \int_{B(x, r)} |f(y)|^q dy \right)^{1/q} < \infty.$$

**Remarque 1.1**

- Les espaces  $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$  sont des quasi-Banach pour  $0 < q \leq p < 1$  et des Banach pour  $p \geq q \geq 1$ .
- Si  $0 < p < q < \infty$ , Alors  $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ .
- $\mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Il existe une autre définition de l'espace de Morrey donnée par Peetre [12] comme suit

**Définition 1.5** Soient  $0 < q < \infty$ ,  $n \geq 1$  et  $0 < \lambda < n$ , l'espace de Morrey  $\mathcal{L}^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des fonctions  $f \in L_{Loc}^q(\mathbb{R}^n)$  telles que

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-\frac{\lambda}{q}} \left( \int_{B(x, r)} |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

**Remarque 1.2**

- On a  $\mathcal{L}^{q, 0}(\mathbb{R}^n) = L^q(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{L}^{q, n}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
- Pour  $1 < q < \infty$  et  $\lambda > n$ , on a  $\mathcal{L}^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ .
- La notation  $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$  a été utilisée par peetre [12].
- Pour  $\lambda = (1 - \frac{q}{p})$  ou trouve  $\mathcal{L}^{q, \lambda}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ .

### 1.1.4 Les espaces de Bessel

**Définition 1.6** Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $0 < p \leq \infty$ . L'espace  $H_p^s(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble de toutes les fonctions  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  telles que

$$\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[ (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f(\xi)(\cdot) \right] \right\|_p < \infty.$$

### 1.1.5 Les espaces de Sobolev

**Définition 1.7** Soient  $p \in [1, \infty[$  et  $s \in \mathbb{N}^*$ . L'espace de sobolev  $W_p^s(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble de toutes les fonctions  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  telles que  $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $|\alpha| \leq s$ . L'espace de sobolev est normé par

$$\|f\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha f\|_p.$$

### 1.1.6 Les espaces de Triebel - Lizorkin

Nous allons définir les espaces de Triebel-Lizorkin qui jouent un rôle important en analyse fonctionnelle. Pour cela, on rappelle la définition de la **décomposition de Littlewood-Paley** d'une distribution tempérée.

Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  telle que

- (i)  $\text{supp} \widehat{\varphi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$ .
- (ii)  $\widehat{\varphi}(\xi) > 0$  pour  $2^{-1} \leq |\xi| \leq 2$ .
- (iii)  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2^{-j}\xi) = 1$  pour  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

La construction de  $\varphi$  ne pose aucune difficulté, voir par exemple [2, Section 4.2], [3, Section 4.2]. On pose

$$\widehat{\varphi}_0(\xi) = 1 - \sum_{j \geq 1} \widehat{\varphi}(2^{-j}\xi),$$

on obtient une fonction  $\widehat{\varphi}_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , portée par la boule  $|\xi| \leq 2$ . Notez que  $\widehat{\varphi}_j(\xi) = \widehat{\varphi}(2^{-j}\xi)$  où  $\varphi_j(x) = 2^{jn}\varphi(2^jx)$ , donc

$$\text{supp} \widehat{\varphi}_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}.$$

Dans tout ce qui suit, on fixe la partition de l'unité qui résulte

$$\sum_{j \geq 0} \widehat{\varphi}_j(\xi) = 1, \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n).$$

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolution  $\Delta_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , définis par

$$\mathcal{F}(\Delta_j f)(\xi) = \varphi_j(\xi) f(\xi) \quad \text{Pour } j = 1, 2, \dots$$

et

$$\mathcal{F}(\Delta_0 f)(\xi) = \varphi_0(\xi) f(\xi).$$

Pour tout  $f \in \mathcal{S}'$ , la décomposition de Littlewood-Paley de  $f$  est

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f. \tag{1.1}$$

La série (1.1) converge au sens des distributions tempérées.

**Remarque 1.3** Notre définition dépend de toute façon du choix de la couronne

$\{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$ , puis de  $\varphi$ .

Maintenant rappeler la définition de l'espace de Triebel - Lizorkin et quelque propriété. Les espaces de Triebel-Lizorkin sont des généralisations des espaces de  $L^p$  et les espaces des potentiels de Bessel  $H_p^s$ .

**Définition 1.8** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p < \infty$  et  $0 < q \leq \infty$ . L'espace de Triebel-Lizorkin  $F_{p,q}^s$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  telles que

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \left\| \left( \sum_{j \geq 0} 2^{sjq} |\Delta_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < \infty, \quad \text{si } 0 < q < \infty$$

et

$$\|f\|_{F_{p,\infty}^s} = \left\| \sup_{j \geq 0} (2^{sj} |\Delta_j f|) \right\|_p < \infty.$$

**Remarque 1.4** Les espaces de  $F_{p,q}^s$  sont indépendants du choix de la fonction  $\varphi_j$ .

**Remarque 1.5**

i)  $F_{p,q}^s$  est un espace de Banach si  $\min(p, q) \geq 1$ .

ii) Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $p, q_0, q_1 \in ]0, \infty)$  tels que  $0 < q_0, q_1 \leq \infty$  et  $\varepsilon > 0$ , alors

$$\mathcal{S} \hookrightarrow F_{p,q_0}^{s+\varepsilon} \hookrightarrow F_{p,q_1}^s \hookrightarrow \mathcal{S}'$$

et si  $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$  on a

$$F_{p,q_0}^s \hookrightarrow F_{p,q_1}^s.$$

iii) Soient  $p_0 < p$  et  $s - \frac{n}{p_0} = \alpha - \frac{n}{p}$ , alors

$$F_{p_0,q}^s \hookrightarrow F_{p,q}^\alpha.$$

et si  $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$  on a

$$F_{p,q_0}^s \hookrightarrow F_{p,q_1}^s.$$

iv)  $W_p^m \hookrightarrow F_{p,q}^s$  pour tout entier  $m > s$ .

v) Si  $1 < p < \infty$  on a  $F_{p,2}^0 = L^p$ .

vi) Si  $s \in \mathbb{R}$  et  $1 < p < \infty$  on a  $F_{p,2}^s = H_p^s$  et  $F_{p,2}^m = W_p^m$  pour  $m = 1, 2, 3, \dots$

Pour une présentation détaillée de ces espaces, on pourra consulter [18] et [19].

### 1.1.7 Les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin

Présentons maintenant les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin qui sont des généralisation des espaces de Triebel-Lizorkin.

**Définition 1.9** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \beta \leq \infty$ ,  $0 < q \leq p \leq \infty$ . L'espace de Morrey de type de Triebel - Lizorkin noté  $MF_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble de toutes les fonctions  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  telles que  $\|f\|_{MF_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ , avec

$$\|f\|_{MF_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} |2^{js} \Delta_j|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} | \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|,$$

avec les modifications habituelles lorsque  $p = \infty$  et / ou  $q = \infty$ .

**Remarque 1.6** Les espaces de  $MF_{p,q}^{s,\beta}$  sont indépendants du choix de la fonction  $\varphi_j$ .

**Remarque 1.7**

i)  $MF_{p,q}^{s,\beta}$  est un espace de Banach si  $\min(p, q) \geq 1$ .

ii) Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \beta \leq \infty$ ,  $p, q_0, q_1 \in ]0, \infty)$  tels que  $0 < q_0, q_1 \leq \infty$  et  $\varepsilon > 0$ , alors

$$\mathcal{S} \hookrightarrow MF_{p,q_0}^{s+\varepsilon,\beta} \hookrightarrow MF_{p,q_1}^{s,\beta} \hookrightarrow \mathcal{S}'$$

iii)  $MF_{2,2}^{s,2} = F_{2,2}^s(\mathbb{R}^n) = H_2^s(\mathbb{R}^n)$ .

iv)  $MF_{p,p}^{s,p}(\mathbb{R}^n) = F_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) = W_p^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $1 \leq p < \infty$ .

v)  $MF_{p,p}^{0,p}(\mathbb{R}^n) = F_{p,p}^0(\mathbb{R}^n) = W_p^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$

## 1.2 Certaines inégalités de base

**Proposition 1.1 (Inégalité de Hölder)** Soit  $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ , avec  $1 \leq q, q' \leq \infty$  et  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ . Alors  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}.$$

**Proposition 1.2 (Inégalité de Minkowski)** Soient  $f, g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  et  $1 \leq q \leq \infty$ . Alors  $f + g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|f + g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

**Théorème 1.1 (Inégalité de Minkowski généralisée)** Soient  $0 < \gamma \leq \beta \leq \infty$  et  $\{f_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L_{Loc}^\gamma(\mathbb{R}^n)$ . Alors on a

$$\left( \sum_{j=1}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|^\gamma dy \right)^{\frac{\beta}{\gamma}} dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq c \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|^\beta dx \right)^{\frac{\gamma}{\beta}} dy \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

**Lemme 1.1 ([14])** Soit  $0 < \beta \leq \infty$  et  $\delta > 0$ . Pour toute suite  $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$  de fonction mesurable non négative sur  $\mathbb{R}^n$ , on admet que  $G_j = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-|k-j|\delta} g_k$ . Alors

$$\|\{G_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{\ell_\beta} \leq C \|\{g_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{\ell_\beta}, \quad (1.2)$$

où  $C \equiv C(\beta, \delta)$  est une constante positive ne dépendant que de  $\beta$  et  $\delta$ .

## 1.3 La fonction maximale

Nous rappelons d'abord la définition de la fonction maximale

**Définition 1.10** Pour toute fonction  $f$  localement intégrable, on définit la fonction maximale de Hardy–Littlewood par

$$Mg(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |g(y)| dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Si  $t \in (0, \infty)$ , alors on définit  $M_t g(x) = [M |g|^t]^{1/t}(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Dans [13], J. Peetre a introduit l'opérateur maximal de Peetre classique

**Définition 1.11** Soit  $f \in \mathcal{S}'$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $t > 0$  et  $a > 0$ . On définit les fonctions maximales de Peetre  $(\psi_k^* f)_a(x)$  et  $(\psi_t^* f)_a(x)$  par

$$(\psi_k^* f)_a(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\psi_k * f(x + y)|}{(1 + 2^k |y|)^a}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

et l'opérateur maximal forme continue par

$$(\psi_t^* f)_a(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\psi_t * f(y)|}{(1 + |y|/t)^a}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $\psi_k = 2^{kn} \psi(2^k \cdot)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $\psi_t \equiv t^{-n} \psi(t^{-1} \cdot)$  pour  $t \in (0, \infty)$ .

**Proposition 1.3 ([16])** Soit  $1 < p < \infty$  et  $1 < q \leq \infty$ . Alors

(i) Si  $\theta \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\left| \left( t^{-n} \theta \left( \frac{\cdot}{t} \right) \right) * f(x) \right| \leq \|\theta\|_1 Mf(x), \quad (\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n).$$

(ii) Il existe une constante  $c = c(n, p) > 0$  telle que pour tout  $f \in L^p$  on a

$$\|Mf\|_p \leq c \|f\|_p.$$

(iii) Il existe une constante  $c > 0$  telle que l'inégalité suivante

$$\left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_p.$$

est vérifiée, pour toute suite des fonctions de distribution  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  localement Lebesgue-intégrables.

**Proposition 1.4** Soient  $0 < t, b < \infty$  et  $f$  une fonction telle que  $\text{supp} \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq b\}$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^{n/t}} \leq c(M_t f(x)).$$

# Chapitre 2

## Les espaces de Morrey à exposant variable

Dans ce chapitre nous rappelons les notions essentielles et nécessaires pour la suite, en particulier l'espace semi-modulaire, l'espace modulaire, l'espace de Lebesgue et l'espace de Morrey à exposant variable, quelques propriétés principales. Nous rappelons aussi quelques inégalités classiques. Nous étudierons aussi la continuité de la fonction maximale à valeurs vectorielles dans les espaces de Morrey à exposant variable.

### 2.1 L'espace de Lebesgue a exposant variable

Dans cette section, on définit les espaces de Lebesgue à exposant variable. Nous commençons par l'espace semi-modulaire ou l'espace modulaire et la norme.

#### 2.1.1 L'espace semi-modular

On définit quelque notion de fonction modular et l'espace semi-modular.

**Définition 2.1** *Soit  $X$  un espace vectoriel réel. Une fonction  $\varrho : X \rightarrow [0, \infty]$  est dit semi-modular sur  $X$  si les propriétés suivants sont vérifiés.*

- i)  $\varrho(0) = 0$ .
- ii)  $\varrho(\lambda x) = \varrho(x)$  pour tout  $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$  avec  $|\lambda| = 1$ .
- iii)  $\varrho$  est convexe.
- iv)  $\varrho$  est continu à gauche.
- v)  $\varrho(\lambda x) = 0$  pour tout  $\lambda > 0$  implique  $x = 0$ .
- vi) Une semi-modular  $\varrho$  est dit modular si

$$\varrho(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

- vii) Est dit continu si

*L'application  $\lambda \rightarrow \varrho(\lambda x)$  est continu sur  $[0, \infty)$  pour tout  $x \in X$ .*

**Exemple 2.1**

i) Si  $1 \leq p < \infty$  alors

$$\varrho_p(f) := \int_{\Omega} |f(x)|^p dx.$$

Défini une modular continu sur l'espace des fonctions mesurables sur  $X$ .

ii) Soit  $\varphi_{\infty}(t) := \infty \cdot \chi_{(1, \infty)}(t)$  pour tout  $t \geq 0$ , i.e.

$$\varphi_{\infty}(t) = \begin{cases} \infty & t \in (1, \infty), \\ 0 & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Alors

$$\varrho_{\infty}(f) := \int_{\Omega} \varphi_{\infty}(|f(x)|) dx.$$

Défini une semi-modular sur l'espace des fonctions mesurables sur  $X$  mais n'est pas continu.

iii) Soit  $w \in L^1_{loc}(\Omega)$  avec  $w > 0$  presque partout et  $1 \leq p < \infty$ . Alors

$$\varrho(f) := \int_{\Omega} |f(x)|^p w(x) dx.$$

Défini une modular continu sur l'espace des fonctions mesurables sur  $X$ .

**Proposition 2.1 ([6])** Soit  $X$  un espace vectoriel réel et  $\varrho$  une semi modular sur  $X$ .

Puisque  $\varrho$  est positif et convexe et  $\varrho(0) = 0$  ce que implique que  $\lambda \rightarrow \varrho(\lambda x)$  n'est pas décroissant sur  $[0, \infty)$  pour tout  $x \in X$ , de plus

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda x) &= \varrho(|\lambda| x) \leq |\lambda| \varrho(x) && \text{pour tout } |\lambda| \leq 1 \\ \varrho(\lambda x) &= \varrho(|\lambda| x) \geq |\lambda| \varrho(x) && \text{pour tout } |\lambda| \geq 1 \end{aligned}$$

**Définition 2.2** Soit  $X$  un espace vectoriel réel et  $\varrho$  une semi-modular ou modular sur  $X$  alors

$$X_{\varrho} := \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varrho(\lambda x) = 0 \right\},$$

est dit espace semi-modular ou espace modular. On peut définir  $X_{\varrho}$  par un d'autre formule

$$X_{\varrho} := \{ x \in X, \exists \forall \lambda > 0 : \varrho(\lambda x) < \infty \}.$$

**2.1.2 Exposant variable**

Dans cette sous-section, nous commençons par les propriétés de base et la notation de l'exposant variable. Soit l'ensemble ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  nous mettons

$$\mathcal{P}_0(\Omega) := \{ p \text{ mesurable} : p(\cdot) : \Omega \rightarrow [c, \infty[ \text{ pour tout } c > 0 \}.$$

Les éléments de  $\mathcal{P}_0(\Omega)$  sont appelés fonctions exposantes ou simplement exposants.

**Notation 2.1** On note par

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{p \text{ mesurable} : p(\cdot) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]\}.$$

Étant donné que  $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$  et un ensemble  $E \subseteq \Omega$ , soit

$$p^-(E) = \operatorname{ess\,inf}_{x \in E} p(x), \quad p^+(E) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} p(x).$$

Si le domaine  $E = \Omega = \mathbb{R}^n$  nous allons simplement écrire

$$p^- = p^-(\mathbb{R}^n), \quad p^+ = p^+(\mathbb{R}^n).$$

**Définition 2.3** Soit l'ensemble ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ . L'espace de Lebesgue  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  être l'ensemble de toutes les fonction  $f$  mesurable telles que

$$\varrho_{p(\cdot)}(f/\lambda) = \int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} < \infty, \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Equipé de la quasi norm suivant

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} := \inf \{ \lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1 \}.$$

Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , nous écrivons souvent  $\|f\|_{p(\cdot)}$  au lieu de  $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ .

**Remarque 2.1** Si  $p(\cdot) = p$  est constante, alors la définition 2.3 est équivalente à la norme classique sur  $L^p(\Omega)$ . Si  $p < \infty$  et

$$\int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^p = 1.$$

Alors

$$\lambda = \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

il en est de même si  $p = \infty$ .

**Proposition 2.2 ([6])** Soit  $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$  et supposons que  $|\Omega| < \infty$ . Alors, l'injection continuité

$$L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$$

est vérifiée si et seulement si

$$p(\cdot) \leq q(\cdot).$$

Par le lemme 6 de [1], nous avons le lemme suivant :

**Lemme 2.1 ([1])** Soit  $p(\cdot)$  satisfaisant la condition logarithmique sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe une constante positive  $C$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ , on a

$$C^{-1} |B(x, r)|^{\frac{1}{p(x)}} \leq \|\chi_{B(x, r)}\|_{p(\cdot)} \leq C |B(x, r)|^{\frac{1}{p(x)}}.$$

L'inégalité de Hölder dans les espaces de Lebesgue à exposant variable a la forme suivante (voir par exemple [9], [15]) :

**Proposition 2.3 (Inégalité de Hölder)** *Soit  $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ , avec  $\frac{1}{q(\cdot)} + \frac{1}{q'(\cdot)} = 1$ . Alors  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et*

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{q'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

## 2.2 Les espaces de Morrey à exposant variable

Dans cette section, on définit les espaces de Morrey à exposant variable et nous donnons quelques propriétés.

**Définition 2.4** *Une fonction  $p \in C(\mathbb{R}^n)$  est dite localement log-Hölder continue, abrégée  $p \in C_{loc}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ , s'il existe  $A > 0$  telle que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{\log(e + 1/|x - y|)}.$$

*Une fonction  $p$  est dite globalement log-Hölder continue, abrégée  $p \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ , si  $p$  est localement log-Hölder continue et si il existe  $p_\infty \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$*

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{A}{\log(e + |x|)}.$$

*Soit  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble de tous les  $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  tels que l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood  $M$  est borné sur  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ . On écrit  $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ , si  $p(\cdot) \in \mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$  et  $1/p(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ . Lorsque  $p(\cdot) \in \mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$ , alors  $1/p(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$  est équivalent à  $p(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ . Si  $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ , alors on a pour tout  $p_0 < p^-$  que  $M$  est borné sur  $L^{p(\cdot)/p_0}(\mathbb{R}^n)$  ou, de façon équivalente, que  $M_t$  est borné sur  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ , où  $t = \min(1, p_0)$ .*

**Définition 2.5** *Soit  $\Omega$  un ensemble ouvert non vide dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'une fonction  $p(\cdot)$  satisfait la condition logarithmique ( $p \in CL(\Omega)$ ) s'il existe une constante positive  $A$  telle que*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{-\ln|x - y|}, \quad \text{pour tout } x, y \in \Omega \text{ satisfaisant } |x - y| \leq \frac{1}{2}.$$

**Remarque 2.2** *Si  $p \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $p$  satisfait la condition logarithmique.*

Nous donnons maintenant la définition de l'espace de Morrey avec l'exposant variable.

**Définition 2.6** *Soit  $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$  avec  $0 < q^- \leq q(x) \leq p(x) \leq p^+ < \infty$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . L'espace  $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  être l'ensemble de toutes les fonctions mesurables  $f \in L_{loc}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ , telles que*

$$\left\| f \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{n(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)})} \|f\|_{L^{q(\cdot)}(B(x, r))} < \infty.$$

**Remarque 2.3**

i)  $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  est un espace de Banach si  $\min(p, q) \geq 1$ .

ii) Soit  $1 < (q_1)^- \leq q_1(\cdot) \leq q_2(\cdot) \leq (q_2)^+ < \infty$  et soit  $q_1, q_2 \in CL(\Omega)$ . Alors

$$\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

iii) Si  $p(\cdot) = q(\cdot)$ , on a  $\mathcal{M}_{p(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ .

iv) Si  $p(x) \equiv p$  et  $q(x) \equiv q$  sont des constantes, l'espace  $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  coïncide avec l'espace de Morrey classique  $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ .

**2.3 La continuité de la fonction maximale**

Dans cette section, on va étudier la continuité de la fonction maximale sur l'espace de Morrey à exposant variable.

**Lemme 2.2** Soit  $0 < \beta \leq \infty$  et  $\delta > 0$ ,  $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$  avec  $0 < q^- \leq q(x) \leq p(x) \leq p^+ < \infty$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pour toute suite  $\{g_j\}_{j=0}^\infty$  de fonctions mesurables non négatives sur  $\mathbb{R}^n$ , notons  $G_j = \sum_{k=0}^\infty 2^{-|k-j|\delta} g_k$ . Alors

$$\left\| \{G_j\}_{j=0}^\infty \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\ell_\beta) \right\| \leq C_1 \left\| \{g_j\}_{j=0}^\infty \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\ell_\beta) \right\| \quad (2.1)$$

et

$$\left\| \{G_j\}_{j=0}^\infty \mid \ell_\beta(\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}) \right\| \leq C_2 \left\| \{g_j\}_{j=0}^\infty \mid \ell_\beta(\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}) \right\| \quad (2.2)$$

où  $C_1 = C_1(\beta, \delta)$  et  $C_2 = C_2(p(\cdot), q(\cdot), \beta, \delta)$  sont des constantes positives.

**Preuve.** Par le lemme 1.1, nous obtenons (2.1) immédiatement à partir de (1.2). Nous prouvons maintenant (2.2) en considérant deux cas sur  $q^-$ .

**Cas 1 :** Si  $q^- \geq 1$ . Puisque  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$  est une norme, par l'inégalité de Minkowski, on a

$$\left\| G_j \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)} \right\| \leq \sum_{k=0}^\infty 2^{-|k-j|\delta} \left\| g_k \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)} \right\|.$$

Par conséquent, (2.2) découle du lemme 1.1.

**Cas 2 :** Si  $q^- < 1$ . Dans ce cas nous choisissons  $0 < q_0 < q^-$  tel que  $q^-(\cdot) = q(\cdot)/q_0 > 1$ .

On a alors

$$\begin{aligned} \left\| \{G_j\}_{j=0}^\infty \mid \ell_\beta(\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}) \right\|^{q_0} &= \left\| \{G_j^{q_0}\}_{j=0}^\infty \mid \ell_{q/q_0}(\mathcal{M}_{q(\cdot)/q_0}^{p(\cdot)/q_0}) \right\| \lesssim \left\| \{g_j^{q_0}\}_{j=0}^\infty \mid \ell_{q/q_0}(\mathcal{M}_{q(\cdot)/q_0}^{p(\cdot)/q_0}) \right\| \\ &\sim \left\| \{g_j\}_{j=0}^\infty \mid \ell_\beta(\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}) \right\|^{q_0}. \end{aligned}$$

Ainsi (2.2) est vérifié, ce qui complète la preuve du lemme 2.2. ■

**Lemme 2.3 ([8])** Soit  $q \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ ,  $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 < q^- \leq q(x) \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors l'opérateur maximale de Hardy-Littlewood  $M$  est borné sur  $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ .

De plus, il existe une constante positive  $C$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\left\| Mf \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \leq C \left\| f \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

**Lemme 2.4 ([16])** Si  $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  et  $1 < \beta \leq \infty$ , alors il existe une constante positive  $C$  telle que pour toutes les séquences  $\{f_j\}_{j=0}^\infty$  de fonctions localement intégrables,

$$\left\| \{Mf_j\}_{j=0}^\infty \mid L^{p(\cdot)}(\ell_\beta) \right\| \leq C \left\| \{f_j\}_{j=0}^\infty \mid L^{p(\cdot)}(\ell_\beta) \right\|.$$

Le théorème suivant donne la continuité de l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood à valeurs vectorielles dans les espaces de Morrey à exposant variable.

**Théorème 2.1 ([4])** Soit  $1 < \beta \leq \infty$  et  $q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ ,  $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 < q^- \leq q(x) \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors il existe une constante positive  $C$  telle que pour toutes les suites  $\{f_j\}_{j=0}^\infty$  de fonctions localement intégrables sur  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$\left\| \left( \sum_{j=0}^\infty |Mf_j|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \leq C \left\| \left( \sum_{j=0}^\infty |f_j|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

**Preuve.** Soit  $\left( \sum_{j=0}^\infty |Mf_j|^\beta \right)^{1/\beta} \in \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ . On choisit n'importe quel  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , et on écrit

$$f_j(x) \equiv f_j^0(x) + \sum_{i=1}^\infty f_j^i(x),$$

où  $f_j^0 \equiv \chi_{B(x_0, 2r)} f_j$  et  $f_j^i \equiv \chi_{B(x_0, 2^{i+1}r) \setminus B(x_0, 2^i r)} f_j$  pour  $i \in \mathbb{N}$ .

Tout d'abord, nous estimons  $\left( \sum_{j=0}^\infty |Mf_j^0|^\beta \right)^{1/\beta}$  sur  $B(x_0, r)$ , par le lemme 2.4, on a

$$\begin{aligned} \left\| \left( \sum_{j=0}^\infty |Mf_j^0|^\beta \right)^{1/\beta} \mid L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| &\lesssim \left\| \left( \sum_{j=0}^\infty |f_j^0|^\beta \right)^{1/\beta} \mid L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &\lesssim r^{n(\frac{1}{q(x_0)} - \frac{1}{p(x_0)})} \left\| \left( \sum_{j=0}^\infty |f_j|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\| \left( \sum_{j=0}^\infty |Mf_j^0|^\beta \right)^{1/\beta} \mid L^{q(\cdot)}(B(x_0, r)) \right\| &\leq \left\| \left( \sum_{j=0}^\infty |Mf_j^0|^\beta \right)^{1/\beta} \mid L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &\lesssim r^{n(\frac{1}{q(x_0)} - \frac{1}{p(x_0)})} \left\| \left( \sum_{j=0}^\infty |f_j|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|. \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} |M f_j^0|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \lesssim \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

Il reste à estimer  $\left( \sum_{j=0}^{\infty} |M(\sum_{i=1}^{\infty} f_j^i)(x)|^\beta \right)^{1/\beta}$  sur  $B(x_0, r)$ . Par l'inégalité de Minkowski généralisée, on a

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^{\infty} |M f_j^i(x)|^\beta \right)^{1/\beta} &\lesssim \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \left( (2^i r)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j^i(y)| dy \right)^\beta \right]^{1/\beta} \\ &\lesssim (2^i r)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=0}^{\infty} |f_j^i(y)|^\beta \right)^{1/\beta} dy. \end{aligned}$$

Puisque  $1 < q^-$ , alors  $q'(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$  également. Ainsi, en utilisant le lemme 2.1 pour  $q(\cdot)$  et  $q'(\cdot)$  et l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned} &\left\| \left[ \sum_{j=0}^{\infty} M^\beta \left( \sum_{i=1}^{\infty} f_j^i \right) \right]^{1/\beta} \mid L^{q(\cdot)}(B(x_0, r)) \right\| \\ &\leq \left\| \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} M(f_j^i) \right)^\beta \right]^{1/\beta} \mid L^{q(\cdot)}(B(x_0, r)) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} M^\beta(f_j^i) \right)^{1/\beta} \mid L^{q(\cdot)}(B(x_0, r)) \right\| \\ &\lesssim \sum_{i=1}^{\infty} (2^i r)^{-n} \|1\|_{L^{q(\cdot)}(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, 2^{i+1}r)} \left( \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(y)|^\beta \right)^{1/\beta} dy \\ &\lesssim \sum_{i=1}^{\infty} (2^i r)^{-n} \|1\|_{L^{q(\cdot)}(B(x_0, r))} \|1\|_{L^{q'(\cdot)}(B(x_0, 2^{i+1}r))} \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^\beta \right)^{1/\beta} \mid L^{q(\cdot)}(B(x_0, 2^{i+1}r)) \right\| \\ &\lesssim \sum_{i=1}^{\infty} (2^i r)^{-n} r^{n/q(x_0)} (2^{i+1}r)^{n/q'(x_0)} (2^{i+1}r)^{n(\frac{1}{q(x_0)} - \frac{1}{p(x_0)})} \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &\lesssim \sum_{i=1}^{\infty} (2^i)^{-\frac{n}{p^+}} r^{n(\frac{1}{q(x_0)} - \frac{1}{p(x_0)})} \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|. \end{aligned}$$

alors

$$\left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} |M f_j|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \leq C \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

Ceci termine la preuve du théorème 2.1. ■

# Chapitre 3

## Les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin à exposant variable

Dans ce chapitre nous introduisons les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin à exposant variable et étudions certaines propriétés principaux. Plus précisément la caractérisation par la fonction maximale de Peetre.

### 3.1 Définitions et quelques propriétés

Nous présentons maintenant la définition des espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin  $MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$  à exposant variable comme suit.

**Définition 3.1** Soit  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \beta \leq \infty$ ,  $p, q \in \mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$  avec  $0 < q^- \leq q(x) \leq p(x) \leq p^+ < \infty$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . L'espace de Morrey de type de Triebel-Lizorkin  $MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$  à exposant variable est défini par

$$MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\| < \infty \right\},$$

où

$$\left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\| = \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} |2^{js}(\varphi_j * f)|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|$$

**Remarque 3.1** Les espaces de  $MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}$  sont indépendants du choix de la fonction  $\varphi_j$ .

#### Remarque 3.2

- i)  $MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}$  est un espace de Banach si  $\min(p, q) \geq 1$ .
- ii) Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \beta \leq \infty$ ,  $p(\cdot), q_0(\cdot), q_1(\cdot) \in ]0, \infty)$  tels que  $0 < q_0(\cdot), q_1(\cdot) \leq \infty$  et  $\varepsilon > 0$ , alors

$$\mathcal{S} \hookrightarrow MF_{p(\cdot),q_0(\cdot)}^{s+\varepsilon,\beta} \hookrightarrow MF_{p(\cdot),q_1(\cdot)}^{s,\beta} \hookrightarrow \mathcal{S}'$$

iii) Si  $p(\cdot) = q(\cdot) = 2$ , on a  $MF_{2,2}^{s,2} = F_{2,2}^s(\mathbb{R}^n) = H_2^s(\mathbb{R}^n)$ .

iv) Si  $p(\cdot) = q(\cdot) = p$ , on a  $MF_{p,p}^{s,p}(\mathbb{R}^n) = F_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) = W_p^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $1 \leq p < \infty$ .

v) Si  $p(\cdot) = q(\cdot) = p$ , on a  $MF_{p,p}^{0,p}(\mathbb{R}^n) = F_{p,p}^0(\mathbb{R}^n) = W_p^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$

Cette lemme joue un rôle important dans la preuve de la théoreme.

**Lemme 3.1 ([14])** Soit  $\mu, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $M \geq -1$  un entier et  $D^\tau \hat{\mu}(0) = 0$  pour tout  $|\tau| \leq M$ . Alors, pour tout  $N > 0$ , il existe une constante positive  $C(N)$ , dépendant de  $N$  tel que pour tout  $t \in (0, 2]$ ,

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\mu_t * v(z)| (1 + |z|)^N \leq C(N)t^{M+1}.$$

## 3.2 Quelques caractérisations équivalentes

Dans cette section, nous montrons que la définition 3.1 est indépendante du choix des fonctions  $\varphi$ . En effet, nous caractériserons ces espaces en termes de fonctions maximales de Peetre. Pour cela, nous avons besoin de plus de notations. Soit  $\phi_0, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $S \geq -1$  tel que

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}_0(\xi)| &> 0 && \text{sur } \{|\xi| < 2\varepsilon\}, \\ |\hat{\phi}(\xi)| &> 0 && \text{sur } \{\varepsilon/2 < |\xi| < 2\varepsilon\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

et

$$D^\tau \hat{\phi}(0) = 0 \quad \text{pour tout } |\tau| \leq S. \quad (3.2)$$

**Théorème 3.1 ([4])** Soit  $s < S + 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ ,  $p(\cdot) \in \mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$  avec  $0 < q^- \leq q(x) \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $\phi_0, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  satisfaisant (3.1) et (3.2). Si  $a > n/\min(q^-, \beta)$ , alors l'espace  $MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$  est caractérisé par

$$MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(i)} < \infty \right\}, i \in \{1, \dots, 5\},$$

où

$$\begin{aligned} \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(1)} &= \left\| \phi_0 * f \mid \mathcal{M}_{p(\cdot)}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &+ \left\| \left( \int_0^1 t^{-s\beta} |(\phi_t * f)(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{p(\cdot)}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(2)} &= \left\| \phi_0 * f \mid \mathcal{M}_{p(\cdot)}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &+ \left\| \left( \int_0^1 [t^{-s}(\phi_t * f)_a]^\beta \frac{dt}{t} \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{p(\cdot)}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(3)} &= \left\| \phi_0 * f \mid \mathcal{M}_{p(\cdot)}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &+ \left\| \left( \int_0^1 t^{-s\beta} \int_{|z|<t} |(\phi_t * f)(\cdot + z)|^\beta dz \frac{dt}{t^{n+1}} \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{p(\cdot)}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(4)} \equiv \left\| \left( \sum_{k=0}^{\infty} [2^{ks}(\phi_k * f)_a]^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{p(\cdot)}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|, \quad (3.6)$$

$$\left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(5)} \equiv \left\| \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ks\beta} |\phi_k * f|^\beta \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{p(\cdot)}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|. \quad (3.7)$$

De plus  $\left\{ \|\cdot\|_{MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)}^{(i)} \right\}_{i=1}^5$  sont équivalents.

**Preuve.** L'idée de la preuve provient de [20]. Tout d'abord, nous prouvons l'équivalence des caractérisations "continues" 3.3 et 3.4, l'étape suivante consiste à construire la pont entre les caractérisation "continues" 3.4 et "discrètes" 3.6 et de passer du système  $(\phi_0, \phi)$  à un système  $(\psi_0, \psi)$  l'équivalence de (3.6) et (3.7) est parallèle à (3.3) et (3.4). En effet, la définition 3.1 peut être vue comme un cas spécial de cas particulier de (3.7).

**Étape 1 :** Nous allons prouver les inégalités suivantes

$$\left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(2)} \lesssim \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(1)} \lesssim \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(2)}$$

Pour tout  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $N \in \mathbb{N}_0$ ,  $I \in \mathbb{N}$  et  $a < N$ . Par la preuve de théorème 2.6 dans [20], on a que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $t \in [1, 2]$ ,

$$(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(x)^r \lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-kNr} 2^{(k+l)n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|((\phi_{k+l})_t * f)(y)|^r}{(1 + 2^l |x - y|)^{ar}} dy. \quad (3.8)$$

Si nous choisissons  $r < \min\{q^-, \beta\}$ , nous appliquons la norme  $\left( \int_1^2 |\cdot|^{\beta/r} \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta}$  des deux côtés et utilisons l'inégalité de Minkowski pour les intégrales, ce qui donne

$$\left( \int_1^2 |(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(x)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-kNr} 2^{(k+l)n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left( \int_1^2 |((\phi_{k+l})_t * f)(y)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta}}{(1 + 2^l |x - y|)^{ar}} dy. \quad (3.9)$$

Si  $ar > n$ , on a  $g_l(y) = \frac{2^{nl}}{(1+2^l|y|)^{ar}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et on observe que

$$\left( \int_1^2 |2^{ls}(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(x)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-kNr} 2^{kn} 2^{lsr} \left[ g_l * \left( \int_1^2 |((\phi_{k+l})_t * f)(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \right](x).$$

Nous utilisons maintenant la proposition 1.3/(i) et continuons à estimer

$$\left( \int_1^2 |2^{ls}(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(x)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{lsr} 2^{k(-Nr+d)} M \left[ \left( \int_1^2 |((\phi_{k+l})_t * f)(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \right](x).$$

Un changement d'index sur le côté droit donne

$$\begin{aligned} \left( \int_1^2 |2^{ls}(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(x)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} &\lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{lsr} 2^{(k-l)(-Nr+n)} M \left[ \left( \int_1^2 |((\phi_k)_t * f)(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \right] (x). \\ &\sim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{(l-k)(Nr-n+rs)} 2^{krs} M \left[ \left( \int_1^2 |((\phi_k)_t * f)(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \right] (x). \end{aligned}$$

On choisit maintenant  $1/a < r < \min\{q^-, \beta\}$ ,  $N > \max\{0, -s\} + a$  et mettre  $\delta = N + s - n/r > 0$ , pour  $l \in \mathbb{N}$  on obtient

$$\left( \int_1^2 |2^{ls}(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(x)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-\delta r|l-k|} 2^{krs} M \left[ \left( \int_1^2 |((\phi_k)_t * f)(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \right] (x).$$

Appliquons maintenant le lemme 2.2 dans  $\mathcal{M}_{q(\cdot)/r}^{p(\cdot)/r}(\ell_{\beta/r})$  ce qui donne

$$\begin{aligned} &\left\| \left\{ \left( \int_1^2 |2^{ls}(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \right\}_{l=0}^\infty \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)/r}^{p(\cdot)/r}(\ell_{\beta/r}) \right\| \\ &\lesssim \left\| \left\{ M \left[ \left( \int_1^2 |2^{ks}((\phi_k)_t * f)(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \right] \right\}_{k=0}^\infty \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)/r}^{p(\cdot)/r}(\ell_{\beta/r}) \right\|. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le théorème 2.1, on obtient

$$\begin{aligned} &\left\| \left\{ \left( \int_1^2 |2^{ls}(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \right\}_{l=0}^\infty \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)/r}^{p(\cdot)/r}(\ell_{\beta/r}) \right\| \\ &\lesssim \left\| \left\{ M \left[ \left( \int_1^2 |2^{ks}((\phi_k)_t * f)(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \right] \right\}_{k=0}^\infty \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)/r}^{p(\cdot)/r}(\ell_{\beta/r}) \right\| \\ &\lesssim \left\| \left\{ \left( \int_1^2 |2^{ks}((\phi_k)_t * f)(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \right\}_{k=0}^\infty \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)/r}^{p(\cdot)/r}(\ell_{\beta/r}) \right\| \\ &\sim \left\| \left\{ \left( \int_1^2 |2^{ks}((\phi_k)_t * f)(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{1/\beta} \right\}_{k=0}^\infty \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)/r}^{p(\cdot)/r}(\ell_{\beta/r}) \right\|^r. \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned} &\left\| \left( \int_0^1 |\lambda^{-s}(\phi_\lambda^* f)_a(\cdot)|^\beta \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &\sim \left\| \left( \sum_{l=0}^\infty \int_1^2 |2^{ls}(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \left( \int_1^2 |2^{ls}(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(\cdot)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\ell_\beta) \right\| \\
&\lesssim \left\| \left( \int_0^1 |\lambda^{-s}(\phi_\lambda * f)(\cdot)|^\beta \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que  $\left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(2)} \lesssim \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(1)}$ . Puisque l'inégalité inverse est triviale, ceci termine l'étape 1.

**Étape 2 :** Soit  $\psi_0, \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  soient des fonctions satisfaisant (3.1) et (3.2).

**Sous-étape 2.1 :** Nous allons prouver que

$$\left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n, \psi) \right\|^{(4)} \lesssim \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n, \phi) \right\|^{(2)}, \quad (3.10)$$

pour tout  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Par la preuve de théorème 2.6 dans [20] à nouveau, on a que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $t \in [1, 2]$ ,

$$2^{ls}(\psi_l^* f)_a(x) \lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-|k-l|\delta} 2^{ks} (\phi_{2^{-k}t}^* f)_a(x).$$

Supposons d'abord que  $\beta \geq 1$ . Ensuite on prend des deux côtés  $\left( \int_1^2 |\cdot|^\beta dt/t \right)^{1/\beta}$ , ce qui donne

$$2^{ls}(\psi_l^* f)_a(x) \lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-|k-l|\delta} 2^{ks} \left( \int_1^2 |(\phi_{2^{-k}t}^* f)_a(x)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{1/\beta}.$$

L'application du lemme 2.2 donne

$$\left\| \{2^{ls}(\psi_l^* f)_a\}_{l=0}^\infty \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\ell_\beta) \right\| \lesssim \left\| \left( \sum_{k=0}^\infty 2^{ks\beta} \int_1^2 |(\phi_{2^{-k}t}^* f)_a|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{1/\beta} \mid \mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \right\|$$

qui donne le résultat recherché.

Dans le cas où  $\beta < 1$ . On a

$$(2^{ls}(\psi_l^* f)_a(x))^\beta \lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-|k-l|\delta} 2^{ks\beta} \int_1^2 |(\phi_{2^{-k}t}^* f)_a(x)|^\beta \frac{dt}{t}.$$

Remarquant que le côté droit n'est rien d'autre qu'une convolution  $(\gamma * a)_\ell$  des suites

$$\gamma_k = 2^{-|k|\delta\beta} \text{ et } \alpha_k = 2^{ks\beta} \int_1^2 |(\phi_{2^{-k}t}^* f)_a(x)|^\beta \frac{dt}{t}.$$

Nous appliquons maintenant la norme  $\ell_1$  aux deux côtés et obtenons pour tout les  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left\| \{2^{ls}(\psi_l^* f)_a(x)\}_{l=0}^\infty \right\|_{\ell_\beta}^\beta \leq \|\gamma\|_{\ell_1} \cdot \|\alpha\|_{\ell_1} \lesssim \sum_{k=0}^\infty 2^{ks\beta} \int_1^2 |(\phi_{2^{-k}t}^* f)_a(x)|^\beta \frac{dt}{t}.$$

Nous prenons les deux côtés au pouvoir  $(\dots)^{1/\beta}$  et appliquons la norme  $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ . Cella donne (3.10).

**Sous-étape 2.2 :** Avec des arguments similaires et des modifications évidentes de la sous-étape 2.1 nous obtenons pour tout  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n, \phi) \right\|^{(2)} \lesssim \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n, \psi) \right\|^{(4)}.$$

**Étape 3 :** En choisissant  $t = 1$  à l'étape 1 et en omettant l'intégration sur  $t$ , on obtient immédiatement

$$\left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(5)} \lesssim \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(4)} \lesssim \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(5)}.$$

**Étape 4 :** Il reste à montrer que (3.5) est équivalent au reste.

**Sous-étape 4.1 :** Prouvons

$$\left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(2)} \lesssim \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(3)}. \quad (3.11)$$

Nous revenons à (3.8), si  $|z| < 2^{-(l+k)}t$ , par (3.8) et par déplacement de l'intégrale, nous obtenons

$$(\phi_{2^{-l}t}^* f)_a(x)^r \leq C_N \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-kNr} 2^{(k+l)n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|((\phi_{k+l})_t * f)(y+z)|^r}{(1+2^l|x-y|)^{ar}} dy. \quad (3.12)$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} 1 + 2^l|x-y| &\leq 1 + 2^l(|x-(y+z)| + |z|) \\ &\lesssim 1 + 2^l(|x-(y+z)|) + 2^{-k} \\ &\lesssim 1 + 2^l(|x-(y+z)|), \end{aligned}$$

La dernière estimation découle du fait que  $k \in \mathbb{N}_0$  dans la somme au lieu de l'intégrale  $(\int_1^2 |\cdot|^{\beta/r} dt/t)^{r/\beta}$  (voir l'étape 3), nous prenons maintenant des deux côtés de (3.12) la norme

$$\left( \int_1^2 \int_{|z|<t} |\cdot|^{\beta/r} dz \frac{dt}{t^{n+1}} \right)^{r/\beta}.$$

L'intégration sur  $z$  n'influence pas le côté gauche. Au lieu de (3.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left( \int_1^2 |(\psi_{2^{-l}t}^* f)_a(x)|^\beta \frac{dt}{t} \right)^{r/\beta} \\ &\lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-kNs} 2^{(k+l)n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left( \int_1^2 \int_{|z|<t} |((\phi_{k+l})_t * f)(y+z)|^\beta dz \frac{dt}{t^{n+1}} \right)^{r/\beta}}{(1+2^l|x-y|)^{ar}} dy. \end{aligned}$$

Nous continuons avec des arguments analogues à ceux utilisés après (3.9) et nous aboutissons à (3.11).

**Sous-étape 4.2** : Nous prouvons que

$$\left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(3)} \lesssim \left\| f \mid MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n) \right\|^{(2)},$$

puisque pour tout  $t > 0$

$$\frac{1}{t^n} \int_{|z|<t} |(\phi_t * f)(x+z)| dz \lesssim \sup_{|z|<t} \frac{|(\phi_t * f)(x+z)|}{(1+1/t|z|)^a} \lesssim (\phi_t^* f)_a(x),$$

ceci implique la conclusion désirée, ce qui complète la preuve du théorème 3.1. ■

# Conclusion

Le but de ce travail en premier lieu est de donner les définitions et notions essentielles et nécessaires, en particulier l'espace semi-modulaire, l'espace modulaire, l'espace de Lebesgue et l'espace de Morrey à exposant variable et quelques propriétés principales. Nous étudierons aussi la continuité de la fonction maximale à valeurs vectorielles dans les espaces de Morrey à exposant variable.

D'autre part nous introduisons les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin à exposant variable et étudions certaines propriétés principaux. Plus précisément la caractérisation par la fonction maximale de Peetre.

# Bibliographie

- [1] A. Almeida, J. Hasanov, S. Samko, Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces, *Georgian Math. J.* **15**(2), (2008) 195–208.
- [2] J. Bergh et J. Löfstrom. Interpolation spaces. Springer-verlag, 1976.
- [3] G. Bourdaud. Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien. *Pub. Math. Uni. Paris 7.* N°29 (1987).
- [4] J. Fu, J. Xu, Characterizations of Morrey type Besov and Triebel–Lizorkin spaces with variable exponents, *J. Math. Anal. Appl.* **381**(1), (2011), 280–298.
- [5] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. Martell, C. Pérez, The boundedness of classical operators on variable  $L^p$  spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **31**(1), (2006), 239–264.
- [6] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Ruzicka, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents.* Springer, 2011.
- [7] Y. Giga and T. Miyakawa, Navier–Stokes flow in  $\mathbb{R}^3$  with measures as initial vorticity and Morrey spaces, *Comm. Partial Differential Equations* **14**(5), (1989), 577–618.
- [8] P. A. Hästö, Local-to-global results in variable exponent spaces, *Mathematical Research Letters*, **16**(2), (2009), 263–278.
- [9] O. Kováčik and J. R. akosnik, On spaces  $L^{p(\cdot)}$  and  $W^{k,p(\cdot)}$ . *Czech. Math. J.* **41**(116), (1991), 592–618.
- [10] A. Mazzucato, Besov-Morrey spaces : function space theory and applications to non-linear PDE, *Transactions of the American Mathematical Society*, **355**(4), (2003), 1297–1364.
- [11] C. B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **43**(1), (1938), 126–166.
- [12] J. Peetre, On the theory of  $\mathcal{L}_{p,\lambda}$  spaces. *J. Funct. Anal.*, **4**(1), (1969), 71–87.
- [13] J. Peetre, On spaces of Triebel-Lizorkin type, *Ark. Mat.* **13**(1-2), (1975), 123–130.
- [14] V.S. Rychkov, On a theorem of Bui, Paluszyński, and Taibbleson, *Proc. Steklov Inst. Math.* **227**, (1999) 280–292.
- [15] S. G. Samko, Convolution and potential type operators in  $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ . *Integral Transf. Spec.Funct.* **7**(3–4), (1998), 261–284.
- [16] E. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton university press, 1971.

- [17] Y. Sawano and H. Tanaka, Decompositions of Besov-Morrey spaces and Triebel-Lizorkin-Morrey spaces, *Mathematische Zeitschrift*, **257**(1), (2007), 871–905.
- [18] H. Triebel. *Theory of function spaces I*. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [19] H. Triebel. *Theory of function spaces II*. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [20] T. Ullrich, Continuous characterizations of Besov–Lizorkin–Triebel spaces and new interpretations as coorbits, *Journal of Function Spaces*, **2012**, (2012), 1-48.

## Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les espaces de Morrey de type de Triebel-Lizorkin  $MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$  à exposant variable qui généralisent les espaces de Triebel-Lizorkin  $MF_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$ , les espaces de Morrey  $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  et les espaces de Lebesgue  $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ , ainsi que certaines propriétés, comme la coïncidence avec d'autres espaces, les inclusions des uns dans les autres. Cette étude nous a permis de présenter certaines normes équivalentes dans ces espaces.

**Mots clés :** Fonctions maximales, Espace de Triebel-Lizorkin, Espace de Morrey, Décomposition de Littlewood-Paley, Les espaces de fonctions à exposant variable.

## Abstract

The objective of this memory is to study the Morrey type Triebel-Lizorkin spaces with variable exponent  $MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$  which generalize the Triebel-Lizorkin spaces  $MF_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$ , Morrey spaces  $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  and Lebesgue spaces  $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ , as well as some properties, such as coincidence with other spaces, inclusions of each other. This study has allowed us to present some equivalent norms of its spaces.

**Key words :** Maximal functions, Triebel-Lizorkin spaces, Morrey spaces, Littlewood-Paley decomposition, function spaces with variable exponent.

## ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة فضاءات تريبال ليزوركان من نوع موراي ذات الأس المتغير  $MF_{p(\cdot),q(\cdot)}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$  الذي يعمم الفضاءات تريبال ليزوركان  $MF_{pq}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$  ، فضاءات موراي  $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  وفضاءات لوبيغ  $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  ، وكذلك دراسة بعض الخصائص ، مثل تكافئ النظام مع الفضاءات الأخرى ، احتواءات الفضاءات في بعضها البعض. سمحت لنا هذه الدراسة بتقديم بعض النظام المكافئة في هذه الفضاءات.

كلمات مفتاحية : مؤثر الأقصى هاردي ليتلوود ، فضاء تريبال ليزوركان ، فضاء موراي ، التقسيم ليتلوود بيلي ، الدوال ذات الأس المتغير.