UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMTIQUE

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du *Diplôme de Master*

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées et Discrètes

Par

Nassira KADIRI

SUJET

Quelques caractérisations des treillis flous distributifs

Devant le jury :

Président :	Abdelaziz AMROUNE	Prof	Université de M'sila
Rapporteur :	Lemnaouar ZEDAM	MC(A)	Université de M'sila
Examinateur :	Moussa BENOUMHANI	MC(A)	Université de M'sila.

Promotion : 2011/2012

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je tiens à remercier mon directeur de recherche Monsieur L. ZEDAM qui s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements particuliers vont aux membres du jury, Messieurs : le Président Mr. A. AMROUNE, et l'examinateur Mr.A. MERZOUGUI.

Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble. Le mérite de Zadeh a été de tenter, sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée : permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble, c'est à dire d'autoriser un élément à appartenir plus au moins fortement à ce sous-ensemble.

La naissance du concept d'ensemble flou ou la graduation de l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble a été introduite en 1965 par le Professeur Lotfi Zadeh [Zad65] afin de représenter plus fidèlement les classes d'objets réelles, qui ne possède généralement pas de critères d'appartenance bien définis. Après, il a introduit en 1971 [Zad71] la notion de relation floue (fuzzy relation) comme un sous-ensemble flou permettant la graduation de relation entre des éléments dans le même ensemble ou dans des ensembles déférents. Dans ce document fondateur, il a défini la notion d'ordre flou en généralisant les notions de réflexivité, l'antisymétrie et la transitivité classique. Depuis lors, plusieurs chercheurs, dont Billot [Bil92], Blyth [Bly05], Bodenhofor et al. [BBJ07], Dubois et Prade [DP00], Kundu [Kun00], Ovchinnikov [Ovc95], Zedam et Stouti [SZ10, ZS12], Venugopalan [Ven92], Xie et al [XZF08], Zimmermann [Zim91], Zhang [Zha08] et bien d'autres, se sont intéressés au problème suivant : « La possibilité de fuzzification de certains résultats célèbres connus sur les ensembles ordonnés classiques ».

Le but de ce mémoire est d'étudier quelques propriétés des relations d'ordres flous et de caractériser les treillis flous distributifs.

Notre mémoire est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires de la théorie des ensembles et des relations. Ainsi, le théorème de caractérisations des treillis distributifs.

Dans le second chapitre, nous rappelons des notions relatives aux sous-ensembles flous, aux relations et relations d'ordres flous, aux treillis flous en donnant des exemples éclaircissants la déférence entre des notions floues et des notions classiques et les opérations algébriques sur les sous ensembles flous.

Dans le troisième chapitre, nous essayons de généraliser le théorème de caractérisations des treillis distributifs pour treillis flous distributifs.

Enfin, le mémoire se termine par une conclusion générale qui récapitule les travaux présentés.

Chapitre 1

Généralité sur les treillis et treillis distributifs

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions de base concernant les relations d'ordre classiques, les ensembles ordonnés, les treillis, et les treillis distributifs. Ainsi, les caractérisations des treillis distributifs.

1.1 Produit cartésien

Définition 1.1 *Soient X et Y deux ensembles non vides, le produit des deux ensembles ou le produit cartésien $X \times Y$ est défini par :*

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

Exemple 1.1 *Si $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_{1,}y_2\}$. Le produit cartésien $X \times Y$ est :*

$$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}$$

Le produit cartésien $X \times X$ est le suivant :

$$X \times X = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}.$$

1.2 Relations binaires

Définition 1.2 *Soient X et Y deux ensembles non vides, une relation binaire R entre deux ensembles X et Y est une partie de $X \times Y$. Pour $(x, y) \in R \subseteq X \times Y$ on dit que x est en relation avec y et on note cela xRy.*

Définition 1.3 *Une relation binaire R sur un ensemble non vide X est une partie de $X \times X$. On dit que R est définie sur X.*

Exemple 1.2 *Soient $X = \mathbb{Z}$ et $Y = \mathbb{N}$ et*

$$\begin{aligned} R &= \{(0,0), (-1,1), (1,1), (-2,4), (2,4), ...\} \\ &= \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Définition 1.4 *Soit R une relation binaire sur un ensemble X, pour tous $x, y, z \in X$, R est dite :*

- ***Réflexive*** *ssi : xRx. c-à-d. Chaque élément est en relation avec lui-même.*
- ***Symétrique*** *ssi : $xRy \implies yRx$. Si x est en relation avec y alors y est en relation avec x.*
- ***Transitive*** *ssi : $[xRy \text{ et } yRz] \implies xRz$. Si x est en relation avec y et y en relation avec z alors x est en relation avec z.*
- ***Anti-symétrique*** *ssi : $[xRy \text{ et } yRx] \implies x = y$. Si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, ils sont égaux.*

Exemple 1.3 *Soient $X = \mathbb{Z}$ et la relation $xRy \iff |\, x - y \,| \leq 1$ alors R est réflexive, symétrique, non antisymétrique, non transitive.*

1.3 Relations d'ordres

1.3.1 Relation d'ordre

Définition 1.5 *Une relation binaire R sur un ensemble X est dite relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exemple 1.4 *Soit X un ensemble, la relation d'inclusion $(\subseteq)$ sur l'ensemble $P(X)$ des parties de X définit une relation d'ordre.*

Exemple 1.5 *Soient $x, y \in \mathbb{N}$, on dit que x divise y et on écrit $x|y$ si et seulement si $\exists\ z \in \mathbb{N}$ tel que $y = x.z$*

La relation de divisibilité " $|$ " est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple 1.6 *$\leq, \geq, =$ sont des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$).*

Définition 1.6 *Soient X un ensemble et R une relation d'ordre sur X. On dit que (X, R) est un ensemble ordonné.*

Exemple 1.7 $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{C}, \leq)$ *sont des ensembles ordonnés.*

1.3.2 Diagramme d'un ensemble ordonné

Définition 1.7 *Les ensembles ordonnés peuvent se représenter par un diagramme de Hasse en appliquant la règle suivante :*

- *Les éléments sont représentés par des sommets.*

- *x et y sont joints par une arête si et seulement si :*

$$x \leq y \text{ et } \nexists\ z \in X,\ x \leq z \text{ et } z \leq y.$$

Exemple 1.8 *Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, R)$ l'ensemble ordonné où R est l'ordre suivant sur X :*

$$R = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}.$$

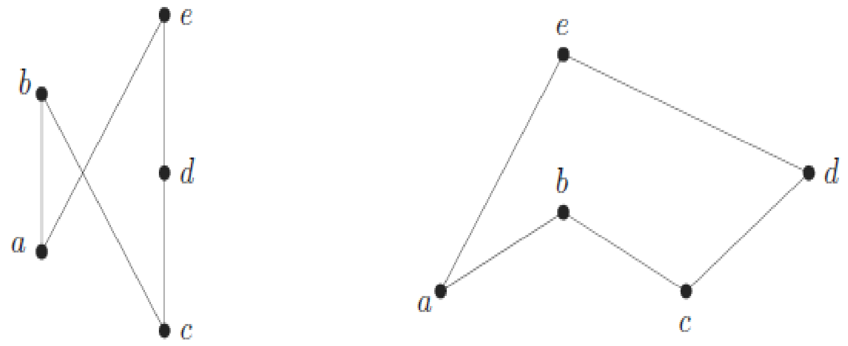

Fig.**1**. *Deux diagrammes de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.8*

Définition 1.8 *Soient x, y deux éléments d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$. Si $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit que x et y sont comparables. Dans le cas contraire, c'est-à-dire : si $x \nleq y$ et $y \nleq x$, on dit que x et y sont incomparables.*

La figure 2 représente les deux diagrammes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.8.

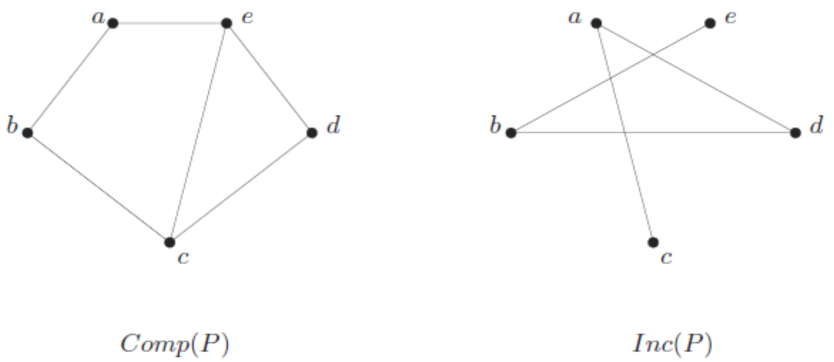

Fig.**2**. *Les diagrammes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné*

1.3.3 Chaîne et antichaîne

Définition 1.9 *On appelle chaîne tous ensemble ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours comparables. Le symbole C_n désigne une chaîne à n éléments. Et une antichaîne est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques sont toujours incomparables. Le symbole A_n désigne une antichaîne à n éléments.*

Exemple 1.9 *L'ensemble ordonné* $(\mathbb{N}, \leq)$ *est une chaîne.*

La figure 3 représente les diagrammes de la chaîne C_4, de l'antichaîne A_4.

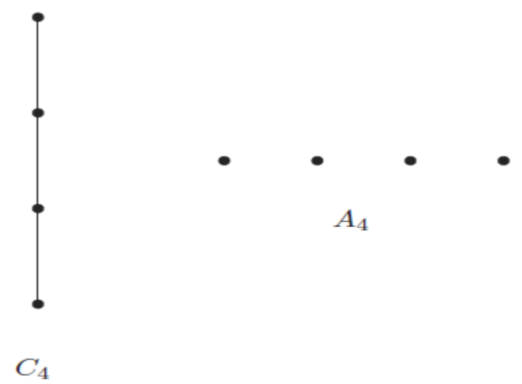

Fig.3. Les diagrammes de la chaîne C_4, de l'antichaîne A_4

1.3.4 Ordre total et ordre partiel

Définition 1.10 *Soit R une relation d'ordre sur X. On dit que R définit un ordre total sur X lorsque deux éléments de X sont toujours comparables pour R, c'est à dire :*

$$\forall x, y \in X,\ xRy \quad ou\ yRx$$

Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel.

Exemple 1.10

- *La relation* $" \leq "$ *définit un ordre total sur* $\mathbb{R}$ *(et sur* $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, ...$*).*

- *La relation de divisibilité* $" \mid "$ *définit un ordre partiel sur* $\mathbb{N}$.

Définition 1.11 *La relation de couverture d'un ensemble ordonné* $(X, \leq)$, *notée* $\prec$, *est définie par*

$$x \prec y \text{ si } (x < y \text{ et } x \leq z < y) \implies x = z$$

On dit alors que x *est couvert par* y *ou que* y *couvre* x. *On pose*

$$xX^{+} = \{t \in X : x \prec t\} \text{ et } X^{-}x = \{t \in X : t \prec x\}.$$

Exemple 1.11 *L'ensemble ordonné* P *de l'exemple* 1.8 *a cinq couples de couverture :* $a \prec b, a \prec e, c \prec b, c \prec d$ *et* $d \prec e$. *Donc*

$$R = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e)\}.$$

1.4 Eléments Particuliers

Soient x, y deux éléments d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$ et soit $A \subseteq X$ un sous ensemble de X.

(•) Maximum, minimum

Définition 1.12 *S'il existe un élément* a *de* A *tel que* $\forall x \in A$, $x \leq a$, *alors il n'en existe qu'un seul, et on l'appelle le maximum de* A *(ou le plus grand élément de* A*), noté* $max(A)$. *La définition est analogue pour le minimum (ou le plus petit élément). Il n'y n'a pas nécessairement existence.*

Exemple 1.12

- *Pour la relation usuelle* $\leq$ *dans* $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ *et* $\mathbb{N}$ *n'ont pas de maximum.*

- *Pour la relation de divisibilité dans* $\mathbb{N}$, $\{1, 2, ..., 10\}$ *non plus.*

(•) Majorants, minorants

Définition 1.13 *Soit* $x \in X$, *On dit que* x *est un majorant de* A *(dans* X*) lorsque* $\forall y \in A$ *on a* $y \leq x$. *La définition est analogue pour le minorant. Il n'y a pas toujours existence, ni unicité.*

Remarque 1.1 *Si x majore A, alors tout élément $x^{'}$ de X tel que $x \leq x^{'}$ majore aussi A. On a l'équivalence :*

$$a = \max(A) \Longleftrightarrow a \in A \text{ et } a \text{ majore } A$$

Une partie A est dite majorée (respectivement minorée). lorsqu'elle admet au moins un majorant (respectivement minorant), et enfin est dite bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

(•) Borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.14 *Si A est majorée, et si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé la borne supérieure de A, notée $sup(A)$. La définition est analogue pour l'éventuelle borne inférieure :*

Si A est minorée, et si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé la borne inférieure de A, notée $inf(A)$.

Remarque 1.2 *Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure, et $sup(A) = max(A)$ mais A peut avoir une borne supérieure sans avoir de maximum.*

En effet :

On suppose que A admette un maximum, disant a. On note S l'ensemble des majorants de A (S n'est pas vide puisqu'il contient a).

Soit $b \in S$.

Alors $a \leq b$ puisque $a \in A$ et b est un majorant de A.

Ainsi, $\forall b \in S$, $a \leq b$, donc a est le minimum de S.

Donc a est la borne supérieure de A.

Notation 1.1

- *L'ensemble $\{t \in A : t \leq x\}$ des minorants de x se note $(x]$ ou Ax.*
- *L'ensemble $\{t \in A : x \leq t\}$ des majorants de x se note $[x)$ ou xA.*
- *L'ensemble $\{t \in A : t < x\}$ des minorants stricts de x se note $(x[$.*
- *L'ensemble $\{t \in A : x < t\}$ des majorants stricts de x se note $]x)$.*

Définition 1.15 *(Élément irréductible)*

- $x \in A$ *est sup-irréductible s'il n'est supremum d'aucune partie ne le contenant pas. De manière équivalente,* x *est sup-irréductible s'il n'est pas supremum de la partie* $(x[$.

- $x \in A$ *est inf-irréductible s'il n'est infimum d'aucune partie ne le contenant pas. De manière équivalente,* x *est inf-irréductible s'il n'est pas infimum de la partie* $]x)$.

- $x \in A$ *est dit irréductible s'il est sup- ou inf-irréductible, il est dit doublement irréductible s'il est sup- et inf-irréductible.*

Exemple 1.13 *Pour L'ensemble ordonné P de la figure 2 (comp(P)), tous les éléments sauf c sont sup-irréductibles tandis que c est inf-irréductible, et les éléments b et d sont irréductibles.*

Définition 1.16 *(Relation flèche)*

- x *et* y *sont en relation flèche inférieure, ce qui est noté* $x \downarrow y$*, si* x *est minimal parmi les éléments* z *de* A *tels que* $z \not\leq y$*. De manière équivalente, on a* $x \downarrow y$ *si et seulement si* ($x \not\leq y$ *et* $A^{-}x \subseteq Ay$).

- x *et* y *sont en relation flèche supérieure, ce qui est noté* $x \uparrow y$*, si* y *est maximal parmi les éléments* z *de* A *tels que* $x \not\leq z$*. De manière équivalente, on a* $x \uparrow y$ *si et seulement si* ($x \not\leq y$ *et* $xA \subseteq yA^{+}$).

- x *et* y *sont en relation double flèche, ce qui est noté* $x \updownarrow y$*, si* $x \downarrow y$ *et* $x \uparrow y$.

Exemple 1.14 *Dans l'ensemble ordonné donné à la figure 4,* $\{a, d, e, g, h, i, j\}$ *est l'ensemble des éléments qui ne minorent pas f. Comme a et g sont les éléments minimaux de cet ensemble. L'ensemble des éléments qui ne majorent pas a est* $\{b, c, f, g\}$ *et f et g sont maximaux dans cet ensemble, d'où* $a \uparrow f$ *et* $a \uparrow g$*. Des relations flèches de cet ensemble ordonné sont* *données dans le tableau 1.*

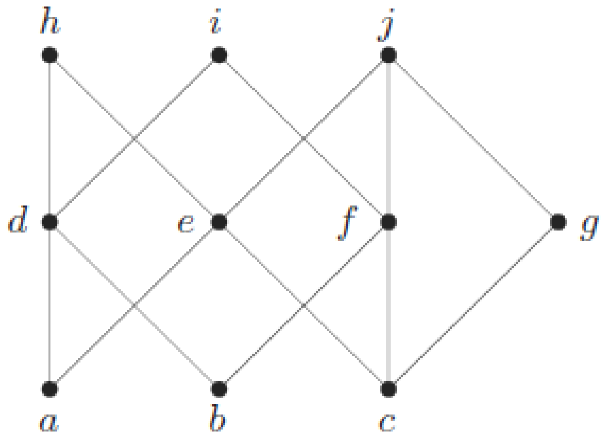

Fig.4. *Exemble.1.14*

	d	e	f	g	h	i	j
a	$\times$	$\times$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\times$	$\times$	$\times$
b	$\times$	$\updownarrow$	$\times$	$\updownarrow$	$\times$	$\times$	$\times$
c	$\updownarrow$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
d	$\times$				$\times$	$\times$	$\updownarrow$
e		$\times$		$\uparrow$	$\times$		$\times$
f			$\times$	$\uparrow$	$\updownarrow$	$\times$	$\times$
g		$\downarrow$	$\downarrow$	$\times$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\times$

Tableau.1. *Table fléchée de l'ensemble ordonné de la figure .4.*

1.5 Treillis

Cette section consiste en une introduction aux treillis. Nous donnons les définitions de base et certains résultats sur cette classe des treillis.

1.5.1 Concepts et résultats connus

Définition 1.17 *Un treillis est un ensemble ordonné* $(T, \leq)$ *ou tout couple* (x, y) *ou toute partie fini de* T *admet une borne supérieure et une borne inférieure. On note* $x \vee y$ *la borne supérieure, et* $x \wedge y$ *la borne inférieure de* x *et* y.

$$\forall x, y \in T : \quad sup\,\{x, y\} = x \vee y$$
$$inf\,\{x, y\} = x \wedge y.$$

Exemple 1.15 *Soit* $X = \{1, 2, 3\}$ *et* $P(X)$ *=*{∅,{1,2,3},{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3}} *(l'ensemble des parties de* X*), la relation* $ARB \iff A \subseteq B$ *est un ordre, donc* (P(X), ⊆, ∩, ∪) *est un treillis*

$$\forall\ A,\ B \in P(X): \quad \sup\{A, B\} = A \cup B$$
$$\inf\{A, B\} = A \cap B.$$

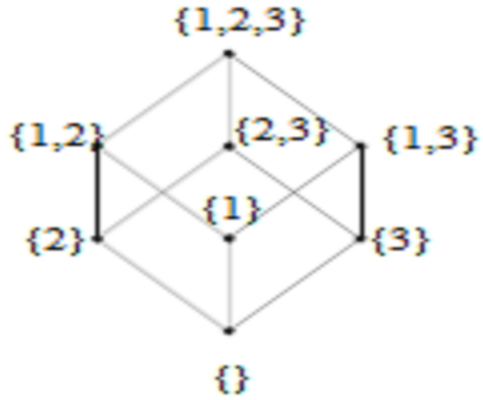

Fig.5. *Diagramme de (P({1,2,3}),* ⊆ , ∩ , ∪ *)*

Exemple 1.16 *tout chaîne* C_n *est un treillis*

$$\forall\ x, y \in C_n: \quad \sup\{x, y\} = \max(x, y)$$
$$\inf\{x, y\} = \min(x, y)$$

Définition 1.18 *(Sous-treillis) Soit* $(T, \leq, \wedge, \vee)$ *un treillis, une partie* A *de* T *est un sous treillis de* T *si elle est stable pour les opérations infimum (borne inférieure) et supremum (borne supérieure) de* T*. c-à-d.*

$$Si\ x, y \in A \implies x \wedge y \in A \text{ et } x \vee y \in A.$$

Définition 1.19 *(Définition algébrique) Un ensemble* T *muni de deux opérations* $*$ *et* o*, est un treillis si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. $x * x = x = x\ o\ x$ *(idempotence).*
2. $x * y = y * x$ *et* $x\ o\ y = y\ o\ x$ *(commutativité).*
3. $(x * y) * z = x * (y * z)$ *et* $(x\ o\ y)\ o\ z = x\ o\ (y\ o\ z)$ *(associativité).*
4. $x\ o\ (x * y) = x = x * (x\ o\ y)$ *(absorption).*

Proposition 1.1 *Si T muni d'une relation d'ordre $\leq$ est un treillis, alors la borne inférieure et la borne supérieure de T vérifient les propriétés 1,2,3 et 4.*

Preuve. *Soit $(T, \leq, *, o)$ un treillis. x, y et z sont des éléments quelconques d'un treillis.*

(1) *pour $\{x\}$, on a bien*

$$x * x = x = x \ o \ x$$

(2) *pour $\{x, y\} = \{y, x\}$, on a bien*

$$x * y = y * x$$

$$x \ o \ y = y \ o \ x$$

(3) $sup(x, sup(y, z)) = sup(sup(x, y), z) = sup(\{x, y, z\})$ *donc*

$$x \ o \ (y \ o \ z) = (x \ o \ y) \ o \ z$$

et $inf(x, inf(y, z)) = inf(inf(x, y), z) = inf(\{x, y, z\})$ *donc*

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

(4) $inf(x, sup(x, y)) = x$ *et* $sup(x, inf(x, y)) = x$ *donc*

$$x * (x \ o \ y) = x = x \ o \ (x * y).$$

■

Proposition 1.2 *Si T est un ensemble muni de deux opérations o et $*$ vérifiant les propriétés 1,2,3 et 4, alors T muni de la relation d'ordre $\leq$ définie par :*

$$x \leq y \iff x \ o \ y = y$$

ou

$$x \leq y \iff x * y = x$$

est un treillis $(T, \leq, \wedge, \vee)$. *En plus,*

$$x \vee y = x \ o \ y \text{ et } x \wedge y = x * y.$$

Preuve.

- *Montrons que* $\leq$ *ainsi définie est une relation d'ordre.*

- $\leq$ *est réflexive par l'idempotence.*

- *Si* $x \leq y$ *et* $y \leq x$, $x \ o \ y = y$ *et* $y \ o \ x = x$ *alors* $x = y$ *par commutativité*

  donc $\leq$ *est antisymétrique.*

- *Si* $x \leq y$ *et* $y \leq z$, $x \ o \ y = y$ *et* $y \ o \ z = z$

  donc

$$\begin{aligned} x \ o \ z &= x \ o \ (y \ o \ z) \\ &= (x \ o \ y) \ o \ z && \text{par associativité} \\ &= y \ o \ z \\ &= z \end{aligned}$$

donc $x \leq z$ *et* $\leq$ *est transitive.*

Remarquons que

$$\begin{aligned} x \ o \ y = y \quad \Longrightarrow \quad x * y &= x * (x \ o \ y) \\ &= x && \text{par absorption} \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} x * y = x \quad \Longrightarrow \quad x \ o \ y &= (x * y) \ o \ y \\ &= y \ o \ (y * x) && \text{par commutativité} \\ &= y && \text{par absorption} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & x \ o \ y = y && \Longleftrightarrow \quad x * y = x \\ \text{et} \quad & x \leq y && \Longleftrightarrow \quad x * y = x \end{aligned}$$

- *Montrons que tout couple d'éléments de* T *admet une borne inf.*

  Pour tout couple (x, y) *de* $T \times T$, $x * y$ *est borne inférieure de* $\{x, y\}$.

En effet,

$$\begin{aligned} x * (x * y) &= (x * x) * y && \textit{par associativité} \\ &= x * y && \textit{par idempotence} \end{aligned}$$

donc $\quad x * (x * y) = x * y$

soit $x * y \leq x$.

Et

$$\begin{aligned} y * (x * y) &= y * (y * x) && \textit{par commutativité} \\ &= (y * y) * x && \textit{par associativité} \\ &= y * x && \textit{par idempotence} \\ &= x * y && \textit{par commutativité} \end{aligned}$$

donc $\quad y * (x * y) = x * y$

soit $x * y \leq y$.

Donc $x * y$ *est minorant de* $\{x, y\}$.

- *Montrons que* $x * y$ *est le plus grand des minorants.*

  S'il existe z *minorant de* $\{x, y\}$, $x * z = z$ *et* $y * z = z$.

  Donc

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= x * (y * z) \\ &= x * z \\ &= z \end{aligned}$$

  et donc $z \leq x * y$.

  En utilisant l'équivalence

$$x \ o \ y = y \iff x * y = x$$

on montre que $x \ o \ y$ *est la borne supérieure de* $\{x, y\}$.

■

1.5.2 Treillis distributifs

On a introduit un treillis distributif comme un treillis vérifiant l'une et ou l'autre des deux propriétés (équivalentes) de distributivité d'une de ses opérations par rapport à l'autre (propriétés (1) et (2) ci-dessous).

Définition 1.20 *Un treillis (T,* $\leq$, $\wedge$, $\vee$) *est distributif si* $\wedge$ *est distributive par rapport à* $\vee$ *et inversement :*

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *pour tout a,b,c de T.*

2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *pour tout a,b,c de T.*

Exemple 1.17 *L'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble* X *est un treillis distributifs pour l'intersection et l'union (P(X),* $\subseteq$, $\cap$, $\cup$*).*

Exemple 1.18 *Les ensembles* $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{N}$ *muni de la relation ordinaire* $\leq$ *sont des treillis distributifs.*

Exemple 1.19 *Toute chaîne est un treillis distributif*

$$\begin{aligned} \min(x, \max(y, z)) &= \max(\min(x, y), \min(x, z)) \\ \max(x, \min(y, z)) &= \min(\max(x, y), \max(x, z)) \end{aligned}$$

1.5.3 Caractérisations des treillis distributifs

La classe des treillis distributifs est la plus importante pour plusieurs raisons. D'abord, on peut noter que les treillis distributifs, du fait justement de la distributivité entre leurs deux opérations, sont ceux dont le maniement algébrique est le plus aisé. Ensuite, un bon nombre d'ordres intervenant naturellement en mathématiques pures ou appliquées s'avèrent des treillis distributifs.

Tout d'abord, nous rappelons les notations suivantes pour un treillis $(T, \leq, \wedge, \vee)$: S_T (respectivement, I_T) est l'ensemble de ses éléments sup-irréductibles (respectivement, inf-irréductibles), S_x (respectivement, I_x) est l'ensemble des éléments sup-irréductibles inférieurs ou égaux (respectivement, inf-irréductibles supérieurs ou égaux) à un élément x de T, pour $s \in S_T$ et $i \in I_T$.

Définition 1.21 *Soit X une partie d'un ensemble ordonné $(A, \leq)$. On dit que $x \in A$ est l'infimum de X (ou sa borne inférieure) si X est minorée et si l'ensemble de ses minorants admet x pour maximum. On le note $infX$ ou $\bigwedge X$. De même, X a un supremum (ou une borne supérieure) y si X est majorée et si l'ensemble de ses majorants admet y pour minimum. On le note $supX$ ou $\bigvee X$.*

Théorème 1.2 *[CLM07] Un treillis $(T, \leq, \wedge, \vee)$ est distributif si et seulement si il vérifie l'une quelconque des propriétés suivantes :*

1. *pour tous $x, y, z \in T$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,*
2. *pour tous $x, y, z \in T$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,*
3. *pour tous $x, y, z \in T$, $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$,*
4. *pour tous $s \in S_T$, $X \subseteq T$, $s \leq \bigvee X$ implique $s \leq x$ pour au moins un élément x de X,*
5. *pour tout $s \in S_T$, il existe un unique $i \in I_T$ tel que $s \uparrow i$,*
6. *pour tous $x, y \in T$, on a $S_{x \vee y} = S_x \cup S_y$,*
7. *pour tous $i \in I_T$, $X \subseteq T$, $i \geq \bigwedge X$ implique $i \geq x$ pour au moins un élément $x \in X$,*
8. *pour tout $i \in I_T$, il existe un unique $s \in S_T$ tel que $s \downarrow i$,*
9. *pour tous $x, y \in T$, on a $I_x \cup I_y = I_{x \wedge y}$,*
10. *un treillis est distributif si et seulement si il ne contient pas de sous-treillis de type M_3 ou N_5,*
11. *pour tous $x, y, z \in T$, $(x \wedge z = y \wedge z$ et $x \vee z = y \vee z) \implies x = y$.*

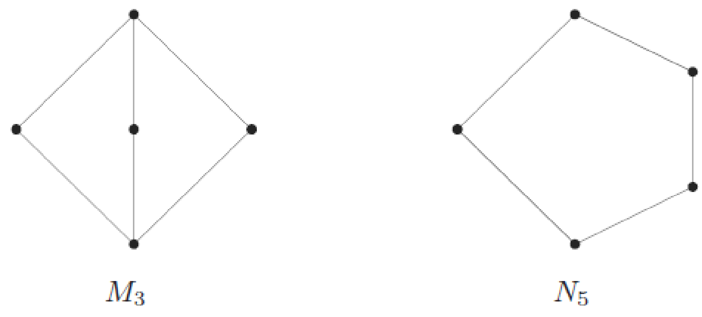

Fig.6. *Les treillis M_3 et N_5*

Nons essayons de présenter la démonstration de quelques implications et on réfère aux (Caspard [CLM07], Davey [DP02], Schroder [Sch02]) pour ces autres implications.

Preuve. On doit montrer que dans tout treillis distributif, les propriétés (1) à (11) sont équivalentes.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : supposons (1) vraie et soient $x, y, z \in T$.

On a

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] && (\textit{par } (1)) \\
&= x \vee [z \wedge (x \vee y)] && (\textit{par absorption et commutativité}) \\
&= x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)] && (\textit{par } (1)) \\
&= [x \vee (z \wedge x)] \vee (z \wedge y) && (\textit{par associativité}) \\
&= x \vee (y \wedge z) && (\textit{par absorption et commutativité}).
\end{aligned}$$

L'implication (2) $\Longrightarrow$ (1)

Supposons $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ pour tous x, y, z de T.

Alors

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = ((x \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z).$$

Or

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee x &= x \vee (x \wedge y) \\
&= x && \textit{par absorption.}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee z &= z \vee (x \wedge y) \\
&= (z \vee x) \wedge (z \vee y).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= x \wedge ((z \vee x) \wedge (z \vee y)) \\
&= (x \wedge (z \vee x)) \wedge (z \vee y) && \textit{par associativité} \\
&= x \wedge (z \vee y) && \textit{par absorption.}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$x \wedge (z \vee y) = (x \wedge z) \vee (x \wedge y).$$

L'implication (2) $\Longrightarrow$ (3)

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) &= ([(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee z) \wedge ([(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee x) \\
&\quad (\textit{par } (2)) \\
&= [(x \wedge y) \vee z] \wedge [(x \vee (y \wedge z)] \\
&\quad (\textit{par absorption et commutativité}) \\
&= [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] \wedge [(x \vee y) \wedge (x \vee z)] \quad (\textit{par } (2)) \\
&= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) \\
&\quad (\textit{par associativité et idempotence}).
\end{aligned}$$

L'implication (3) $\implies$ (1)

Si (3) est vraie, on en déduit aisément que T vérifie la propriété suivante (M) de modularité : $\forall x, y, z \in T$,

$$x \leq z \implies x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

On a aussi, compte tenu de (3),

$$x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] = x \wedge [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)].$$

En réorganisant le premier membre de cette égalité et en simplifiant le second, on trouve :

$$x \wedge ((y \wedge z) \vee [(x \wedge y) \vee (z \wedge x)]) = x \wedge (y \vee z),$$

avec

$$(x \wedge y) \vee (z \wedge x) \leq x,$$

ce qui permet d'utiliser la commutativité et (M) pour réécrire le premier membre :

$$\begin{aligned} ([(x \wedge y) \vee (z \wedge x)] \vee (y \wedge z)) \wedge x &= [(x \wedge y) \vee (z \wedge x)] \vee (y \wedge z \wedge x) \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

D'où finalement,

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z).$$

(1) $\implies$ (4) : *si* $s \in S_T$ *et* $s \leq \bigvee X$, *on a* $s = s \wedge (\bigvee X) = \bigvee_{x \in X}(s \wedge x)$ par distributivité et, s étant sup-irréductible, on a $s = s \wedge x$ pour au moins un élément x de X.

L'implication (1) $\implies$ (11)

Supposons (1) vraie et soient $x, y, z \in T$.

On a

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= x \wedge (x \vee z) && \text{car } y \vee z = x \vee z \\ &= x && \textit{par absorption.} \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) && \textit{par } (1) \\
&= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) && \text{car } y \vee z = x \vee z \\
&= ((x \wedge y) \vee y) \wedge ((x \wedge y) \vee z) && \textit{par } (1) \\
&= y \wedge ((x \wedge y) \vee z) \\
&= y \vee (y \wedge z) = y
\end{aligned}$$

Donc $x = y$.

Montrons que les treillis M_3 et N_5 sont treillis distributifs.

Un treillis N_5 est distributif si et seulement si il vérifie la propriété (1) :

Alors

$$b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c)$$

Avec

$$\begin{aligned}
b \wedge (a \vee c) &= (b \wedge u) && \text{car } a \vee c = u \\
&= b.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
(b \wedge a) \vee (b \wedge c) &= e \vee e \\
&= e.
\end{aligned}$$

Donc $b \wedge (a \vee c) \neq (b \wedge a) \vee (b \wedge c)$.

Alors treillis N_5 est non-distributif. ■

Chapitre 2

Relations floues et Ensembles ordonnés flous

Dans ce chapitre, nous présentons la théorie des ensembles flous et sa position par rapport à la théorie classique des ensembles, ainsi que les concepts flous relatifs comme les relations floues. On donnera quelques propriétés des relations floues. Puis on étudiera des relations d'ordres floues

Pour plus de détails voir (ZADEH [Zad65, Zad71], Bernadette (Ber95)).

2.1 Ensembles flous

Dans un ensemble de référence X, un sous-ensemble flou de ce référentiel X est caractérisé par une fonction d'appartenance μ de X dans l'intervalle des nombres réels $[0,1]$ (degré d'appartenance qui est l'extension de la fonction caractéristique d'un sous-ensemble classique). En fait, un sous-ensemble flou est formellement défini par l'application μ, mais pour se ramener au langage des mathématiques classiques, nous parlerons d'un sous-ensemble flou A, et noterons μ_A sa fonction d'appartenance.

2.1.1 Sous-ensemble flou

Définition 2.1 *[Ber95] (Sous-ensemble classique) Un sous-ensemble classique A de X est défini par une fonction caractéristique χ_A qui prend la valeur 0 pour les éléments de X n'appartenant pas à A et la valeur 1 pour ceux qui appartiennent à A :*

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 \ si \ x \in A, \\ 0 \ si \ x \notin A. \end{cases}$$

Définition 2.2 *[Zad65] (Sous-ensemble flou) Un sous-ensemble flou A de X est défini par une fonction d'appartenance qui associe à chaque élément x de X, le degré $\mu_A(x)$ compris entre 0 et 1, avec lequel x appartient à A :*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1].$$

Dans le cas particulier où μ_A ne prend que des valeurs égales à 0 ou 1, le sous-ensemble flou A est un sous-ensemble classique de X qui est donc un cas particulier de sous-ensemble flou.

Notation 2.1

- *On note la suite $F(X)$ l'ensemble qui contient tous les sous-ensembles flous de X.*
- *On note par $A = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle \mid x \in X,\ \mu_A(x) \in [0,1]\}$ l'ensemble flou A.*

Exemple 2.1 *Soit $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. On considère*

$$A = \{\langle a, 0.5\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 0.3\rangle, \langle d, 0\rangle, \langle e, 0.9\rangle, \langle f, 0.01\rangle\}$$

Alors, A est un sous-ensemble flou de X.

Exemple 2.2 *Considérons l'ensemble référentiel X défini sur l'âge*

$$X = \{5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85\}$$

âge(éléments)	*enfant*	*jeune*	*adulte*	*sénior*
5	*0*	*0*	*0*	*0*
15	*0*	*0.2*	*0.1*	*0*
25	*0*	*1*	*0.9*	*0*
35	*0*	*0.8*	*1*	*0*
45	*0*	*0.4*	*1*	*0.1*
55	*0*	*0.1*	*1*	*0.2*
65	*0*	*0*	*1*	*0.6*
75	*0*	*0*	*1*	*1*
85	*0*	*0*	*1*	*1*

Tableau.2. *Exemple de sous-ensemble flou*

Nous pouvons définir des sous- ensembles flous tels que "enfant" , "jeune" , "adulte" et "Sénior" dans X.

Les possibilités de chaque élément de x soit dans ces quatre sous-ensembles flous sont dans le Tableau 2

2.1.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

Un ensemble flou A de l'univers X est caractérisé par : (a) support, (b) hauteur, (c) noyau, et (d) cardinalité.

(a) Support d'un sous-ensemble flou : Le support de A, noté $supp(A)$, est la partie de X sur laquelle la fonction d'appartenance de A n'est pas nulle :

$$supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) \neq 0\}.$$

(b) Hauteur d'un sous-ensemble flou : La hauteur, notée $h(A)$, du sous-ensemble flou A de X est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance :

$$h(A) = sup_{x \in X}(\mu_A(x)).$$

(c) Noyau d'un sous-ensemble flou : Le noyau d'un sous-ensemble flou A de X, noté $noy(A)$, est l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance de A est egal 1 :

$$noy(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

(d) Cardinalité du sous-ensemble flou : La cardinalité du sous-ensemble flou A de X lorsque X est fini, noté $|A|$, est définie par :

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

Définition 2.3 *Le sous-ensemble flou A de X est normalisé si l'hauteur $h(A)$ est égale à 1.*

Exemple 2.3 *On revient à l'éxemple 2.2*

$supp(\text{"}jeune\text{"}) = \{15, 25, 35, 45, 55\}$

$h(\text{"}jeune\text{"}) = \{25\}$

$noy(\text{"}jeune\text{"}) = \{25\}$

$|sénior| = 0.1 + 0.2 + 0.6 + 1 + 1 = 2.9$

Exemple 2.4 *[Ber95] Soit X un ensemble fini de pays, par exemple X = {Allemagne, Belgique, Espagne, France, Grande-Bretagne, Italie} l'ensemble des pays susceptibles d'être un lieu de résidence pour un individu donné, notés A, B, E, F, G, I. On peut définir les sous-ensembles flous suivants, correspondant à la description des souhaits de l'individu :*

$$A_1 = \{\langle A, 0.6\rangle, \langle B, 0.7\rangle, \langle E, 0.4\rangle, \langle F, 0.3\rangle, \langle G, 0.8\rangle, \langle I, 0.5\rangle\}$$

($h(A_1) = 0.8$, $supp(A_1) = X$, $noy(A_1) = \varnothing$, $|A_1| = 3.3$), tous les pays étant acceptables, avec néanmoins un ordre de préférence.

$$A_2 = \{\langle A, 0\rangle, \langle B, 0\rangle, \langle E, 0\rangle, \langle F, 0\rangle, \langle G, 1\rangle, \langle I, 0\rangle\}$$

(singleton de X, sous-ensemble flou normalisé, $supp(A_2) = noy(A_2) = \{G\}$, $|A_2| = 1$), avec un choix très net de G.

2.1.3 Opérations sur les sous-ensembles flous

Les notions d'inclusion, de réunion, d'intersection, de complément, ...etc sont étendues à tels ensembles.

Les diverses propriétés de ces notions dans le contexte des ensembles flous sont établies :

* **Egalité** : Deux sous-ensembles flous A et B de X sont égux si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tout élément de X :

$$A = B \text{ si } \forall x \in X : \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

* **Inclusion** : Étant donné deux sous-ensembles flous A et B de X, on dit que A est inclus dans B et on note $A \subseteq B$, si leurs fonctions d'appartenance sont :

$$A \subseteq B \text{ si } \forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Remarque 2.1 *L'inclusion définit une relation d'ordre sur $F(X)$, c'est à dire que $A \subseteq A$ (réflexivité), $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$, implique $A \subseteq C$ (transitivité), $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, implique $A = B$ (antisymétrie).*

* **Intersection** : L'intersection de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou que l'on note $A \cap B$, tel que :

$$\forall x \in X \; : \; \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Exemple 2.5 *L'intrsection des sous-ensembles flous"jeune" et"adulte"est (Tableau 2) "jeune"$\cap$"adulte"*$= \{\langle 15, 0.1\rangle, \langle 25, 0.9\rangle, \langle 35, 0.8\rangle, \langle 45, 0.4\rangle, \langle 55, 0.1\rangle\}$.

* **Union** : L'union de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou que l'on note $A \cup B$, tel que :

$$\forall x \in X \; : \; \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Exemple 2.6 *L'union de "jeune" et "adulte" est (Tableau 2). "jeune"$\cup$"adulte"* $=$ $\{\langle 15, 0.2\rangle, \langle 25, 1\rangle, \langle 35, 1\rangle, \langle 45, 1\rangle, \langle 55, 1\rangle, \langle 65, 1\rangle, \langle 75, 1\rangle, \langle 85, 1\rangle\}$.

* **Complément** : Le complément A^c d'un sous-ensemble flou A de X est défini comme un sous-ensemble flou de X par fonction d'appartenance :

$$\forall x \in X \ : \ \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Exemple 2.7 *On revient à l'exemple du tableau 2, le complément du sous-ensemble flou "adulte" est* $(\text{"adulte"})^c = \{\langle 5, 1\rangle, \langle 15, 0.9\rangle, \langle 25, 0.1\rangle\}$.

* **produit cartésien :**

Définition 2.4 *Soient des sous-ensembles flous A_1 et A_2, respectivement définis sur X_1 et X_2, on définit leur produit cartésien $A = A_1 \times A_2$, comme un sous-ensemble flou de X par fonction d'appartenance :*

$$\forall x = (x_1, x_2) \in X, \ \mu_A(x) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)).$$

Exemple 2.8 $X_1 = \{jaune, bleu\}$ *et* $X_2 = \{rond, long\}$, *on pose les ensembles flous :* $A_1 = \{\langle j, 0.8\rangle, \langle b, 0.2\rangle\}$ *et* $A_2 = \{\langle r, 0.4\rangle, \langle l, 0.6\rangle\}$ *alors, leur produit cartésien est :*

$$A_1 \times A_2 = \{\langle (j,r), 0.4\rangle, \langle (j,l), 0.6\rangle, \langle (b,r), 0.2\rangle, \langle (b,l), 0.2\rangle\}.$$

2.1.4 Propriétés des ensembles flous

Comme dans le cas des ensembles ‹‹classique››, les définitions que nous venons de donner conduisent aux propriétés suivantes pour tous A, B et C de $F(X)$:

Commutativité : $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

Associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Idempotence : $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

Identité : $A \cup \varnothing = A$, $A \cup X = X$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap X = A$

Les lois d'absorption : $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

2.2 Relations floues

Parmi les concepts flous les plus importants du point de vue des applications qu'ils peuvent avoir, les relations floues généralisent la notion de relation classiquement définie sur les ensembles. Elles mettent en évidence des liaisons imprécises ou graduelles entre éléments d'un même ensemble [Zad71].

Définition 2.5 *[Zad71] Une relation floue r entre deux ensembles de référence X et Y est un sous-ensemble flou de produit cartésien $X \times Y$, de fonction d'appartenance μ_r. $\mu_r(x, y)$ est appele le degré de relation entre x et y. On note par $\mu_r(x, y)$ ou simplement $r(x, y)$*

$$r : X \times Y \longrightarrow [0, 1]$$

et

$$r(x, y) = \{\langle (x, y)\,,\ \mu_r(x, y) \rangle \ \mid \ (x, y) \in X \times Y\}\,.$$

***Cas particuliers** : Si $X = Y$, une relation floue r définie sur les deux univers X et Y est une relation binaire floue définie sur X.*

Remarque 2.2 *La différence entre une relation floue et une relation classique est que pour la première, toute valeur d'appartenance dans l'intervalle $[0, 1]$ est permise. Alors que pour la seconde, seules les valeurs 0 et 1 sont permises*

Remarque 2.3 *Si X et Y sont finis, une relation floue r, définie sur les deux univers X et Y, peut être décrite par la matrice $M(r)$ des valeurs de sa fonction d'appartenance, le coefficient de $M(r)$ indiqué sur la ligne x et la colonne y ayant pour valeur $\mu_r(x, y)$, pour tout x de X et tout y de Y.*

Exemple 2.9 *La relation binaire r représente le concepte "très loin"*

$X = \{NewYork, Paris\}$

$Y = \{Beijing, NewYork, London\}$

$r(x, y) = \{\langle (NY, B), 1\rangle, \langle (NY, NY), 0\rangle, \langle (NY, L), 0.6\rangle, \langle (P, B), 0.9\rangle, \langle (P, NY), 0.7\rangle, \langle (P, L), 0.3\rangle\}$

On peut la représentée par la matrice suivante :

$M(r) =$

$r(.,.)$	NY	$Paris$
$Beijing$	1	0.9
NY	0	0.7
$Londre$	0.6	0.3

Exemple 2.10 *[Ber95] Soit* $\{Hector, Irène, Jules\}$ *un ensemble d'individus, qu'on note de façon abrégée* $X = Y = \{H, I, J\}$ *et* r *une relation floue indique la force de leur intérêt,* $r(x, y)$ *étant d'autant plus élevé que* x *éprouve un grand intérêt pour* y*. On peut donner* r *sous forme matricielle comme ci-dessous :*

$M(r) =$

$r(.,.)$	H	I	J
H	1	0.9	0.3
I	0.9	1	0.1
J	0.5	0.1	1

avec

$$\begin{array}{lll} r(H,I) & = r(I,H) & = 0,9 \\ r(H,J) & = 0,3 & \\ r(I,J) & = r(J,I) & = 0,1 \\ r(J,H) & = 0,5 & \\ r(H,H) & = r(I,I) & = r(J,J) = 1. \end{array}$$

Exemple 2.11 *Soit l'ensemble* $X = \{1, 2, 3\}$, *la relation floue* r *"est approximativement égal à" peut-être définie par :*

$$r : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \longrightarrow [0, 1]$$

$$(x, y) \longmapsto r(x, y) = \begin{cases} 1 & si \quad x = y \\ 0,8 & si \ |x - y| = 1 \\ 0,3 & si \ |x - y| = 2 \end{cases}$$

Notation matricielle :

$M(r) =$

$r(.,.)$	1	2	3
1	1	0.3	0.8
2	0.8	1	0.8
3	0.3	0.8	1

Remarque 2.4 *les relations floues sont des cas particuliers de sous-ensembles flous, toutes les propriétés et définitions qui concernent les ensembles flous leur sont applicables, ainsi par exemples définition de la hauteur, le support ou le noyau d'une relation floue. Ainsi que, l'égalité, l'inclusion, l'intersection, l'union des relations, le complément, et relation inverse.*

2.2.1 Composition de deux relations floues

Définition 2.6 *[Ber95] La composition de deux relations floues r_1 sur $X \times Y$ et r_2 sur $Y \times Z$ définit une relation floue $r = r_1 o\ r_2$ sur $X \times Z$ de fonction d'appartenance définie par :*

$$\forall (x, z) \in X \times Z,\ r(x, z) = \sup_{y \in Y}(\min(r_1(x, y), r_2(y, z))).$$

Exemple 2.12 *Considérons les relations floues $r \subseteq A \times B, s \subseteq B \times C$. définies par ses matrices suivantes :*

$M(r) =$

$r(.,.)$	a	b	c	d
1	0.1	0.2	0.0	1.0
2	0.3	0.3	0.0	0.2
3	0.8	0.9	1.0	0.4

$M(s) =$

$s(.,.)$	α	β	γ
a	0.9	0.0	0.3
b	0.2	1.0	0.8
c	0.8	0.0	0.7
d	0.4	0.2	0.3

Le composé des deux relations r et s est le suivant :

$M(s \circ r) =$

$[s \circ r](.,.)$	α	β	γ
1	0.4	0.2	0.3
2	0.3	0.3	0.3
3	0.8	0.9	0.8

2.2.2 Propriétés des relations floues

La relation binaire floue r sur X est :

- **Symétrique** ssi : $\forall(x, y) \in X \times X,\ \mu_r(x, y) = \mu_r(y, x)$,
- **Antisymétrique** ssi : $\forall(x, y) \in X \times X,\ (\mu_r(x, y) > 0\ et\ \mu_r(y, x) > 0) \implies x = y$,
- **Refléxive** ssi : $\forall x \in X,\ \mu_r(x, x) = 1$,
- **Transitive** ssi : $\forall(x, z) \in X \times X,\ \mu_r(x, z) \geq sup_{y\in X}[min(\mu_r(x, y), \mu_r(y, z))]$.

Exemple 2.13 *La relation floue r " x approximativement égal à 3" peut être définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la fonction d appartenance :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} : r(x, y) = \frac{1}{1 + (x - y)^2}$$

est réflexive et antisymétrique, mais n'est ni symétrique, ni transitive.

2.3 Relations d'ordres floues

L'ordre flou est défini par plusieurs auteurs (Zadeh [Zad71], Venugopalan [Ven92], et Stouti [SZ10]).

Dans cette section on a rappelé la définition de l'ordre flou et de quelques notions et exemples relatifs à ce qui est donné par [Zad71].

2.3.1 Relation d'ordre flou

Définition 2.7 *[Zad71] Soit X un ensemble non vide, la relation d'ordre flou dans X est un ensemble flou r de $X \times X$ satisfait les conditions suivantes :*

(i) $\forall x \in X,\ \mu_r(x, x) = 1$ *(F-réflexivité) ;*

(ii) $\forall(x, y) \in X \times X,\ (\mu_r(x, y) > 0\ et\ x \neq y) \Longrightarrow \mu_r(y, x) = 0)$ *(F-antisymétrie);*

(iii) $\forall(x, z) \in X \times X,\ \mu_r(x, z) \geq sup_{y\in X}[min(\mu_r(x, y), \mu_r(y, z))]$ *(F-transitivité).*

Définition 2.8 *(Ensembles ordonnés flous) Un ensemble X muni d'une relation d'ordre flou r s'appelle un ensemble ordonné flou et on le note par (X, r).*

Remarque 2.5 *L'ordre classique $\leq$ est un ordre flou.*

Exemple 2.14 *[Ber95] Soit $X = \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. La relation floue r_λ est défini par :*

$$\forall\ x,\ y \in X,\ r_\lambda(x, y) = \begin{cases} 1, & si\ x = y; \\ \min(1, \frac{y-x}{\lambda}), & si\ x < y; \\ 0, & si\ x > y; \end{cases}$$

est un ordre flou sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.15 *[ZS12] Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$, le sous-ensemble flou r défini sur $X \times X$ par la matrice suivant :*

$M(r) =$

$r(.,.)$	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0.6	0.4
b	0	1	0	0.6	0.6
c	0	0	1	0	0.6
d	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	1

est un ordre flou sur X.

2.3.2 Ordre flou total

Définition 2.9 *[Zad71] Une relation d'ordre flou r est une relation d'ordre flou total ssi : $\forall x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow r(x, y) > 0$ ou $r(y, x) > 0$. Si r est une relation d'ordre flou total dans un ensemble X, alors (X, r) s'appelle un ensemble totalement ordonné flou ou une chaîne floue.*

Si pour quels $x,\ y \in X$, $r(x, y) > 0$ si et seulement si $x = y$, alors (X, r) s'appelle une antichaîne floue.

Exemple 2.16 *[ZS12] Soit $X = \mathbb{R}$, la relation floue r est défini par :*

$$\forall x, y \in X,\ r(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ \ x = y \\ 0 & si\ \ x > y \\ 1 - \frac{x}{y} & si\ \ 0 \leq x \leq y \\ 1 - \frac{y}{x} & si\ \ x < y \leq 0 \\ 1 & si\ \ x < 0\ \ et\ \ y > 0 \end{cases}$$

est un ordre flou total sur $\mathbb{R}$.

2.3.3 Éléments Particuliers d'un ensemble ordonné flou

Soit (X, r) un ensemble ordonné flou, et A un sous-ensemble de X.

(a) Majorants, minorants :

Définition 2.10 *On dit qu'un élément $M \in X$ est $r-$majorant de A si :*

$$\forall x \in A,\ r(x, M) > 0$$

L'ensemble des éléments $r-$majorants des A est un ensemble flou sur X, noté par A_r^u.

On dit qu'un élément $m \in X$ est $r-$minorant de A si :

$$\forall x \in A,\ r(m, x) > 0$$

L'ensemble des éléments $r-$minorants des A est un ensemble flou sur X, noté par A_r^l.

(b) Maximum, minimum :

Définition 2.11 *Si M est un $r-$majorant de A et $M \in A$, alors M est appelé plus grand élément (ou maximum) de A, noté par $max_r(A)$.*

Si m est un $r-$minorant de A et $m \in A$, alors m est appelé plus petit élément (ou minimum) de A, noté par $min_r(A)$.

(c) Élément maximal, élément minimal :

Définition 2.12 *Un élément a de A est dit élément maximal de A s'il y a $x \in A$ de sorte que :*

$$r\,(a, x) > 0,\ alors\ x = a.$$

Un élément b de A est dit élément minimal de A s'il y a $x \in A$ de sorte que : $r\,(x, b) > 0$, alors $x = b$.

(d) r-supremum, r-infimum :

Le r-supermum de A noté

$$\sup_r(A) = \min_r(A_r^u).$$

Le r-infimum de A noté

$$\inf_r(A) = \max_r(A_r^l).$$

(e) Élément r-irréductible :

Définition 2.13

- *$x \in A$ est sup_r-irréductible s'il n'est r-supremum d'aucune partie ne le contenant pas.*
- *$x \in A$ est inf_r-irréductible s'il n'est r-infimum d'aucune partie ne le contenant pas.*
- *$x \in A$ est dit r-irréductible s'il est sup_r- ou inf_r-irréductible, il est dit doublement irréductible s'il est sup_r- et inf_r-irréductible.*

Exemple 2.17 *Soit $X = \{a, b, c\}$ et r l'ordre flou défini par la matrice suivante :*

$M(r) =$

$r(.,.)$	a	b	c
a	1	0.3	0.4
b	0	1	0.5
c	0	0	1

Alors, r est un ordre flou total.

Soit $A = \{a, b\}$ $(A \subset X)$. On a, $A_r^u = \{x \in X : r(y, x) > 0, \forall y \in A\} = \{b, c\}$.

Et $max_r(A) = b$.

Chapitre 3

Théorème de caractérisation des treillis flous distributifs

Dans ce chapitre, nous introduisons les treillis flous, rappelons quelques propriétés et donnons quelques exemples. Puis, nous esseyons de généraliser certains caractérisations des treillis distributifs pour les treillis flous distributifs.

3.1 Treillis flous

Définition 3.1 *Soit (X, r) un ensemble ordonné flou. On dit que (X, r) est un treillis flou si chaque paire d'élément $\{x, y\}$(en générale tout partie fini de X) possède un r-supremum et un r-infimum.*

Exemple 3.1 *Tout chaîne flou est un treillis flou et dans ce cas :*

$$\inf_r \{x, y\} = \min_r \{x, y\}$$

et

$$\sup_r \{x, y\} = \max_r \{x, y\} .$$

Exemple 3.2 *Soit* $X = \{a, b, c\}$ *et* $r : X \times X \longrightarrow [0,1]$ *l'ordre flou défini par la matrice suivante :*

$M(r) =$

$r(.,.)$	a	b	c
a	1	0	0
b	0.5	1	0
c	0.3	0.2	1

Alors, $x \vee_r y = x$, $x \vee_r z = x$, $y \vee_r z = y$, $x \wedge_r y = y$, $x \wedge_r z = z$, *et* $y \wedge_r z = z$. *Donc* (X, r) *est un treillis flou.*

Exemple 3.3 *Soit* $X = \mathbb{N}$ *et* r *est une relation d'ordre flou sur* $\mathbb{N}$ *définit par :*

$$r(n, m) = \begin{cases} 1 & si\ n = m \\ 1 - \frac{n}{m} & si\ n < m \\ 0 & si\ n > m \end{cases}$$

Alors, $(\mathbb{N}, r)$ *est un treillis flou.*

3.2 Propriétés des treillis flous

Dans un treillis flou $(T, r, \wedge_r, \vee_r)$, où les opérateurs $\vee_r$ et $\wedge_r$ sont les opérateurs sup et inf par rapport à l'ordre flou r. On a :

(1). $r(x, y) > 0 \Longleftrightarrow x \wedge_r\ y = x \Longleftrightarrow x \vee_r y = y$ (Consistence);

(2). $x \vee_r y = y \vee_r x$ et $x \wedge_r y = y \wedge_r x$ (commutativité);

(3). $x \vee_r x = x$ et $x \wedge_r x = x$ (idempotence);

(4). $x \wedge_r (x \vee_r y) = x \vee_r (x \wedge_r y) = x$ (absorption);

(5). $x \vee_r (y \vee_r z) = (x \vee_r y) \vee_r z$ (associativité).

Démonstration : les propriétés (2) et (3) sont évidents.

Montrons la (4) propriété : Soit $x \vee_r y = z$ donc $r(x, z) > 0$ ce qui veut dire $x \in \{x, y\}_r^l$, (x est un minorant de $\{x, z\}$). Si $u \in \{x, z\}_r^l$ alors $r(u, x) > 0$ (alors x est le plus grand des minorants de $\{x, z\}$)

d'où $x = x \wedge_r z = x \wedge_r (x \vee_r y)$.

On démontre de même que $x \vee_r (x \wedge_r y) = x$.

(1) (Consistence) Supposons que $r(x, y) > 0$ donc $y \in \{x, y\}_r^u$, Si $u \in \{x, y\}_r^u$ alors $r(y, u) > 0$, donc y est le plus petit des majorants de $\{x, y\}$.

d'où $x \vee_r y = y$.

De même, on démontre que $x \wedge_r y = x$.

Il reste à montrer la 5^{eme} *propriété* :

$$\forall x, y, z \in T : x \vee_r (y \vee_r z) = (x \vee_r y) \vee_r z$$

Soit

$$x \vee_r (y \vee_r z) = t \implies r(x, t) > 0$$

$$et \implies r((y \vee_r z), t) > 0$$

$$r(y \vee_r z, t) > 0 \implies r(z, t) > 0 \quad (\star)$$

$$r(y \vee_r z, t) > 0 \implies r(y, t) > 0$$

$$\left.\begin{matrix} r(x, t) > 0 \\ r(y, t) > 0 \end{matrix}\right) \implies r((x \vee_r y), t) > 0 \quad (\star\star)$$

de $(\star)$ et $(\star\star)$ on a :

$$t = (x \vee_r y) \vee_r z.$$

3.3 Treillis flous distributifs

Soit $(T, r, \wedge_r, \vee_r)$ un treillis flou. T est distributif s'il vérifié :

$$\forall x, y, z \in T : x \vee_r (y \wedge_r z) = (x \vee_r y) \wedge_r (x \vee_r z)$$

et

$$x \wedge_r (y \vee_r z) = (x \wedge_r y) \vee_r (x \wedge_r z)$$

$\wedge_r$ et $\vee_r$ sont les opérateurs sup et inf flou (par rapport à r).

Exemple 3.4 *Toute chaîne est un treillis flou distributif*

$$\begin{aligned}\min_r(x, \max_r(y, z)) &= \max_r(\min_r(x, y), \min_r(x, z));\\ \max_r(x, \min_r(y, z)) &= \min_r(\max_r(x, y), \max_r(x, z)).\end{aligned}$$

3.4 Caractérisations des treillis flous distributifs

Nous rappelons les notations suivantes pour un treillis flou $(T, r, \wedge_r, \vee_r)$: S_T^r (respectivement, I_T^r) est l'ensemble de ses éléments $\sup_r$-irréductibles (respectivement, $\inf_r$-irréductibles), S_x^r (respectivement, I_x^r) est l'ensemble des éléments $\sup_r$-irréductibles inférieurs ou égaux (respectivement, $\inf_r$-irréductibles supérieurs ou égaux) à un élément x de T, pour $s \in S_T^r$ et $i \in I_T^r$.

Définition 3.2 *Soit X une partie d'un ensemble ordonné (A, r). On dit que $x \in A$ est le r-infimum de X si X est minorée et si l'ensemble de ses minorants admet x pour maximum. On le note $\bigwedge_r X$. De même, X a un r-supremum y si X est majorée et si l'ensemble de ses majorants admet y pour minimum. On le note $\bigvee_r X$.*

Théorème 3.1 *(Théorème de caractérisations des treillis flous distributifs) Un treillis flous $(T,\ r,\ \wedge_r,\ \vee_r)$ est distributif si et seulement si il vérifie l'une quelconque des propriétés suivantes :*

1. *pour tous $x, y, z \in T$, $x \wedge_r (y \vee_r z) = (x \wedge_r y) \vee_r (x \wedge_r z)$,*

2. *pour tous $x, y, z \in T$, $x \vee_r (y \wedge_r z) = (x \vee_r y) \wedge_r (x \vee_r z)$,*

3. *pour tous $x, y, z \in T$, $(x \wedge_r y) \vee_r (y \wedge_r z) \vee_r (z \wedge_r x) = (x \vee_r y) \wedge_r (y \vee_r z) \wedge_r (z \vee_r x)$,*

4. *pour tous $x, y, z \in T$, $(x \wedge_r z = y \wedge_r z$ et $x \vee_r z = y \vee_r z) \implies x = y$.*

5. *pour tous $s \in S_T^r$, $X \subseteq T$, $r(s, \bigvee_r X) > 0$ implique $r(s, x) > 0$ pour au moins un élément x de X,*

6. *pour tous $x, y \in T$, on a $S_{x \vee_r y}^r = S_x^r \cup S_y^r$,*

7. *pour tous $i \in I_T^r$, $X \subseteq T$, $r(\bigwedge_r X, i) > 0$ implique $r(x, i) > 0$ pour au moins un élément $x \in X$,*

8. *pour tous* $x, y \in T$*, on a* $I_x^r \cup I_y^r = I_{x \wedge_r y}^r$*,*

Preuve. On doit montrer que dans tout treillis distributif, les propriétés (1) à (8) sont équivalentes.

(1) $\implies$ (2) : supposons (1) vraie et soient $x, y, z \in T$.

On a

$$\begin{aligned}
(x \vee_r y) \wedge_r (x \vee_r z) &= [(x \vee_r y) \wedge_r x] \vee_r [(x \vee_r y) \wedge_r z] \quad (\textit{par } (1)) \\
&= x \vee_r [z \wedge_r (x \vee_r y)] \quad (\textit{par absorption et commutativité}) \\
&= x \vee_r [(z \wedge_r x) \vee_r (z \wedge_r y)] \quad (\textit{par } (1)) \\
&= [x \vee_r (z \wedge_r x)] \vee_r (z \wedge_r y) \quad (\textit{par associativité}) \\
&= x \vee_r (y \wedge_r z) \quad (\textit{par absorption et commutativité}).
\end{aligned}$$

L'implication (2) $\implies$ (1)

Supposons $x \vee_r (y \wedge_r z) = (x \vee_r y) \wedge_r (x \vee_r z)$ pour tous x, y, z *de* T.

Alors

$$(x \wedge_r y) \vee_r (x \wedge_r z) = ((x \wedge_r y) \vee_r x) \wedge_r ((x \wedge_r y) \vee_r z).$$

Or

$$\begin{aligned}
(x \wedge_r y) \vee_r x &= x \vee_r (x \wedge_r y) \\
&= x \quad \textit{par absorption.}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
(x \wedge_r y) \vee_r z &= z \vee_r (x \wedge_r y) \\
&= (z \vee_r x) \wedge_r (z \vee_r y).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(x \wedge_r y) \vee_r (x \wedge_r z) &= x \wedge_r ((z \vee_r x) \wedge_r (z \vee_r y)) \\
&= (x \wedge_r (z \vee_r x)) \wedge_r (z \vee_r y) \quad \textit{par associativité} \\
&= x \wedge_r (z \vee_r y) \quad \textit{par absorption.}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$x \wedge_r (z \vee_r y) = (x \wedge_r z) \vee_r (x \wedge_r y).$$

L'implication (2) $\implies$ (3)

$$\begin{aligned}
(x \wedge_r y) \vee_r (y \wedge_r z) \vee_r (z \wedge_r x) &= ([(x \wedge_r y) \vee_r (y \wedge_r z)] \vee_r z) \wedge_r ([(x \wedge_r y) \vee_r (y \wedge_r z)] \vee_r x) \\
&\quad (\textit{par } (2)) \\
&= [(x \wedge_r y) \vee_r z] \wedge_r [(x \vee_r (y \wedge_r z)] \\
&\quad (\textit{par absorption et commutativité}) \\
&= [(x \vee_r z) \wedge_r (y \vee_r z)] \wedge_r [(x \vee_r y) \wedge_r (x \vee_r z)] \quad (\textit{par } (2)) \\
&= (x \vee_r y) \wedge_r (y \vee_r z) \wedge_r (z \vee_r x) \\
&\quad (\textit{par associativité et idempotence}).
\end{aligned}$$

L'implication (3) $\implies$ (1)

Si (3) est vraie, on en déduit aisément que T vérifie la propriété suivante (M) de modularité : $\forall x, y, z \in T$,

$$r(x,z) > 0 \implies x \vee_r (y \wedge_r z) = (x \vee_r y) \wedge_r z.$$

On a aussi, compte tenu de (3),

$$x \wedge_r [(x \wedge_r y) \vee_r (y \wedge_r z) \vee_r (z \wedge_r x)] = x \wedge_r [(x \vee_r y) \wedge_r (y \vee_r z) \wedge_r (z \vee_r x)].$$

En réorganisant le premier membre de cette égalité et en simplifiant le second, on trouve :

$$x \wedge_r ((y \wedge_r z) \vee_r [(x \wedge_r y) \vee_r (z \wedge_r x)]) = x \wedge_r (y \vee_r z),$$

avec

$$r((x \wedge_r y) \vee_r (z \wedge_r x), x) > 0,$$

ce qui permet d'utiliser la commutativité et (M) pour réécrire le premier membre :

$$\begin{aligned} ([(x \wedge_r y) \vee_r (z \wedge_r x)] \vee_r (y \wedge_r z)) \wedge_r x &= [(x \wedge_r y) \vee_r (z \wedge_r x)] \vee_r (y \wedge_r z \wedge_r x) \\ &= (x \wedge_r y) \vee_r (x \wedge_r z). \end{aligned}$$

D'où finalement,

$$(x \wedge_r y) \vee_r (x \wedge_r z) = x \wedge_r (y \vee_r z).$$

L'implication (1) $\implies$ (4)

Supposons (1) vraie et soient $x, y, z \in T$.

On a

$$\begin{aligned} x \wedge_r (y \vee_r z) &= x \wedge_r (x \vee_r z) && \text{car } y \vee_r z = x \vee_r z \\ &= x && \textit{par absorption.} \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} x \wedge_r (y \vee_r z) &= (x \wedge_r y) \vee_r (x \wedge_r z) && \textit{par } (1) \\ &= (x \wedge_r y) \vee_r (y \wedge_r z) && \text{car } y \vee_r z = x \vee_r z \\ &= ((x \wedge_r y) \vee_r y) \wedge_r ((x \wedge_r y) \vee_r z) && \textit{par } (1) \\ &= y \wedge_r ((x \wedge_r y) \vee_r z) \\ &= y \vee_r (y \wedge_r z) = y \end{aligned}$$

Donc $x = y$.

$(1) \implies (5)$: *si* $s \in S_T^r$ *et* $r(s, \bigvee_r X) > 0$, *on a* $s = s \wedge_r (\bigvee_r X) = \bigvee_{r(x \in X)} (s \wedge_r x)$ par distributive et, s est $\sup_r$-irréductible, on a $s = s \wedge_r x$ pour au moins un élément x de X. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons vu les concepts d'ensembles et des relations floues à partir de la présentation des propriétés et des résultats concernant ce genre d'ensembles et des relations. Puis on a essayé de généraliser le théorème de caractérisations des treillis distributifs pour treillis flous distributifs. Nous constatons que les propriétés des treillis et treillis distributifs selon les définitions utilisées dans ce mémoire se généralisent d'une manière naturelle et analogue au cas des treillis flous.

Nous signalons par ailleurs que les résultats consernant les caractérisations des treillis flous distributifs demeurent encore ouvertes.

Bibliographie

[Ber95] B. M. Bernadette, la logique floue et ses applications, Addison-Wesley, Paris, 1995.

[Bil92] A. Billot, *Economic theory of fuzzy equilibria,* Lecture Notes in Economics and Mathematical systems-373, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Bly05] T. S. Blyth, *Lattices and ordered algebraic structures.* Springer-Verleg, London, 2005.

[BBJ07] U. Bodenhofor, B. Bernard, F. Janos, (2007), *A compendium of fuzzy weak orders: Representations and constructions, Fuzzy Sets and Systems,* 158, pp. 811-829.

[CLM07] N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet, *Ensembles ordonnés finis concepts, résultats et usages,* Springer-Verleg, Berlin Heidelberg, 2007.

[DP02] B. A. Davey, H. A. Priestiey, *lattices and order,* Second edition, Cambridge Universit Press 2002.

[DP00] D. Dubois, H. Prade, (2000), *Fundamentals of Fuzzy Sets,* Kluwer Academic Publishers,Dordrecht.

[Kun00] S. Kundu, (2000), *Similarity relations, fuzzy linear orders and fuzzy partial orders, Fuzzy Sets and Systems,* 109, pp. 419-428.

[LZ06] H. L. Lai, D. X. Zhang, *Many-valued complete distributivity,* arXiv:math. CT/0603590, 2006.

[Ovc95] S. V. Ovchinnikov, (1995), *Similarity relations, Fuzzy partitions, and fuzzy ordering, Fuzzy Sets and Systems,* 40, pp.107-126.

[Ovc00] S. V. Ovchinnikov, *An introduction to Fuzzy relations*, in D. Dubois, H.Prade, *Fundamentals of fuzzy sets*, The Handbooks of fuzzy sets, vol. 7, Kluwer

Academic Publisher, Boston, 2000, pp. 233-259.

[ŠT07] B. Šešelja, A. Tepavcevic, *Fuzzifying closur systems and fuzzy lattices,* in: A. Aijun (Ed), Proc. 11th Internat. Conf. on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing (RSFDGRC 2007), Lecture Notes in Computer Science/Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol. 4482, Springer, Berlin, 2007, pp. 111-118.

[Sch02] B. Schroder, *Ordered sets*, BirkhauserBoston, First edition, December 6, 2002.

[SZ10] A. Stouti, L. Zedam, *On the α-fuzzy orders,* J. Fuzzy Math, 18(1)(2010), pp. 179-191.

[Ven92] P. Venugopalan, (1992), *Fuzzy ordered sets, Fuzzy Sets and Systems,* 46(1992), pp. 221-226.

[XZF08] W. X. Xie,Q. Y. Zhang, L. Fan, *The Dedekind-Macneille completions for fuzzy posets, Fuzzy Sets and Systems.* in press, doi:10.1016/j.fss.2008.12.002.

[Zad71] L. A. Zadeh, (1971), *Similarity relations and fuzzy orderings,* Info. Sci, 3, pp. 177-200.

[Zad65] L. A. Zadeh, (1965), *Fuzzy sets, Inform and Control*, 8, pp. 338-353.

[Zim91] H. J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its applications,* kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1991.

[Zha08] Q. Y. Zhang,et al, (2008), *Fuzzy complete lattices, Fuzzy Sets and Systems,* doi:10.1016/j.fss.2008.12.001.

[ZS12] L. Zedam, A. Stouti, (2012), *Fuzzy orders in the real line,* J. Math. Stat, 2(8), pp. 211-215.

Résumé

Dans ce mémoire, on rappelle des notions relatives aux sous-ensembles flous, aux relations et relations d'ordres flous, aux treillis flous et en donnant des exemples éclaircissant la différence entre des notions floues et des notions classiques et les opérations algébriques sur les sous-ensembles flous. Le but de ce mémoire est de généraliser le théorème de caractérisations des treillis distributifs pour les treillis flous distributifs.

Mots-Clés : Relation d'ordre, Treillis distributif, Ensemble flou, Relation d'ordre floue, Treillis flou distributif.

Abstract

In this memory, we recall the notions of fuzzy sets, fuzzy ordre relations, fuzzy lattices and we give some examples. The aim of this memory is to generalize the theorem of characterizations of crisp lattices to distributive fuzzy lattice.

Key words : Order relation, Distributive Lattice, Fuzzy Set, Fuzzy order relation, Distributive fuzzy Lattice.