

REPUBLICQUE ALGERIENNE
DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF
M'SILA
FACULTÉ DE MATHMATIQUE ET
INFORMATIQUE
Département de Mathématiques



Mémoire de master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Quelques opérateurs Lipschitziens sommants

Présenté par :
Zitouni Aicha

Devant les membres de jury :

Saadi Khalil	Prof	Université Mohamed Boudiaf M'sila	Président
Belaala Maatougui	MCB	Université Mohamed Boudiaf M'sila	Rapporteur.
Yahi Rachid	MCB	Université Mohamed Boudiaf M'sila	Examineur

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à toutes les personnes qui m'ont apportées une aide pour la réalisation de ce travail de recherche.

Principalement à :

Mon directeur de mémoire Dr.Maatougui Belaala pour ses précieux conseils, ses orientations, ses remarques judicieuses à l'égard de ce modeste travail.

Aux membres de jury :Pr.Khalil Saadi (président) et Dr.Rachid Yahi(examineur) qui ont accepté de lire, d'évaluer ce travail et de participer à cette soutenance.

A mes parents et toute ma famille.

Mes vifs remerciements et ma profonde gratitude sont particulièrement joints à mes très chères amies Nadhira, Chima.

Table des matières

Notations	iii
Intoduction	1
1 Préliminaires et généralités	3
1.1 Les applications linéaires	3
1.2 Applications linéaires p-sommants	4
1.2.1 Idéal d'opérateur linéaire	4
1.3 Opérateurs lipschitziens	5
1.3.1 Théorème de linéarisation (Weaver1999)	8
2 Opérateurs Lipschitziens p-sommants	9
2.1 Factorisation de Pietsch	9
2.2 Relation entre opérateurs Lipschitziens p-sommants et linéaires p-sommants	13
3 Opérateurs strictement Lipschitziens p-sommants et Lipschitziens M-strictement p-sommants	14
3.1 Introduction et préliminaire	14
3.2 Caractérisation des opérateurs Lipschitziens strictement p-sommants	17
3.2.1 Notations	17
3.3 Opérateurs strictement Lipschitziens p-nucléaires	22
3.4 Opérateurs Lipschitziens strictement (p,r,s)-sommants	24
4 Opérateurs Lipschitziens ϕ-sommants	26
4.1 Opérateur linéaire ϕ -sommant	26
4.1.1 Fonction module	26
4.1.2 Opérateur linéaire ϕ -sommant	27
4.1.3 Théorème de domination de Pietsch	27
4.2 Opérateurs Lipschitziens ϕ -sommants	28
Conclusion	33
Bibliographie	34

Notations

\mathbb{K}	Le corps des nombres réels ou complexe
\mathbb{R}_+	L'ensemble des nombres réels non négatives
$\mathcal{L}_f(X, Y)$	L'ensemble d'opérateurs linéaires de rang finie
$\Pi_p(X, Y)$	L'ensemble d'opérateurs linéaires p-sommants
$\Pi_p^L(X, Y)$	L'ensemble d'opérateurs linéaires Lipschitziens p-sommants
$B(E, F)$	L'ensemble d'opérateurs linéaires continus (bornés) entre E et F.
$\mathcal{L}(E, F)$	L'ensemble d'opérateurs linéaire entre E et F
E^*	Le dual topologique de E
E'	Le dual algébrique de E
B_{E^*}	La boule unité de E^*
$B_{X^\#}$	La boule unité de $X^\#$
$M(X)$	L'espace linéaire de tous les molécules de X
$Lip_0(X, Y)$	L'ensemble de tous les opérateurs Lipschitziens entre X, Y qui s'annulent à 0.
$X^\# = Lip_0(X, \mathbb{R})$	Le dual Lipschitzien de l'espace métrique pointé X
$\mathcal{A}(X)$	L'espace de Arens-Eelles de X
T^*	L'adjoint d'opérateur linéaire de T
\hat{T}	La linéarisation de l'opérateur lipschitzien T
$T^\#$	L' adjoint d'opérateur Lipschitzien de T
T^t	Le transposé d'opérateur Lipschitzien
$\mathcal{F}(X)$	Espace libre Lipschitzien de X.
$\Pi_{p,r,s}^L$	L' ensemble de tous les opérateurs Lipschitziens (p,r,s)-sommants ($1 \leq p, r, s < \infty$).
D_p	L'ensemble de tous les opérateurs Cohen stongly p-sommants ($1 \leq p < \infty$)
Π_p^{SL}	L'ensemble d'opérateurs Lipschitziens strictement p-sommants ($1 \leq p < \infty$)
$F \otimes E$	Le produit tensoriel entre E et F
$X \boxtimes Y$	Le produit tensoriel Lipschitzien entre X et Y
d_p et g_p	Normes tensoriels de Chavet -Saphar.
\mathcal{N}_p	L'ensemble d'opérateurs p-nucleaires
\mathcal{N}_p^{SL}	L'ensemble d'opérateurs Lipschitziens strictement p-nucleaires
Π_p^ϕ	L'ensemble d'opérateurs ϕ -sommants
Π_ϕ^L	L'ensemble d'opérateurs Lipschitziens ϕ -sommants
$S(M)$	La sphère unité de M.

Introduction

La notion d'opérateur linéaire p-sommant remonte à Grothendieck dans les années 1950 pour p=1, mais en 1967 et 1968 les oeuvres classiques de Peitsch ont illustré les précieuses idées de Grothendieck et ont clairement contribué au développement vigoureux de cette notion.

Ils connaissaient le concept d'opérateur linéaire p-sommant T entre deux espaces de Banach X et Y comme suit : s'il existe une constante positive C telle que

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{i=1}^n \subset X$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

$$\pi_p(T) = \inf \{C : C \text{ vérifiant (1)}\}$$

$\Pi_p(X, Y)$ l'espace d'opérateurs p-sommants dont un espace de Banach muni de la norme $\pi_p(T)$ il est Banach.

Dans l'année 2009 Jeffrey D. Farmer and William B. Johnson ont donné une version non linéaire d'opérateurs p-sommants, lesquelles sont appelées opérateurs Lipschitziens p-sommants, ils ont prouvé que les opérateurs p-sommants opérateurs Lipschitziens p-sommants sont les mêmes dans le cas linéaire. Ils ont défini un Opérateur Lipschitzien P-sommant T entre espace métrique pointé X, et espace de Banach E, comme suit : T est Lipschitzien p-sommant, s'il existe une constante positive C telle que : $\forall (x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X, \forall (a_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}^+$

On a :

$$\sum_{i=1}^n a_i \|T(x_i) - T(y_i)\|^p \leq C^p \sup_{f \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p \quad (2)$$

On note

$$\pi_p^L(T) = \inf \{C : C \text{ vérifiant (2)}\}$$

L'espace des opérateurs Lipschitziennes p-sommants de X dans E est noté $\Pi_p^L(X, E)$.

En dernières années, M. Belaala et K. Saadi, pour améliorer les opérateurs Lipschitziens strictement p-sommants ont donné des nouvelles caractérisations, ils ont modifié cette définition pour construire d'autres classes d'applications appelées opérateurs Lipschitziens strictement p-nucléaires et Lipschitziens strictement (p,r,s)-sommants.

En 2017 à partir de la définition d'opérateur ϕ -sommant entre espace de Banach tel que ϕ est la fonction module donné par R.KHalil et W.Deeb , M.belaala a inspiré de cette définition la notion d'opérateurs Lipschitziens ϕ -sommant entre deux espaces métriques , comme le suivant,

S'il existe une constante $C \geq 0$. tel que quel que soit le choix des points $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n$ dans X et le choix des nombres $(a_i)_{i=1}^n$ dans R^+ , on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n a_i \phi(d(T(x_i), T(x'_i))) \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n a_i \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|)$$

L'infimum de ces constantes C est noté $\pi_\phi^L(T)$.

l'espace d'opérateurs Lipschitziens ϕ -sommants de X dans Y est noté $\Pi_\phi^L(X, Y)$.

Il a donné une version non linéaire du théorème de domination de Peitsch.

Notre travail intitulé " **quelques opérateurs Lipschitziens sommants** " est consacré à la géométrie non linéaire et plus particulièrement aux opérateurs Lipschitziens sommants , il est composé de quatre chapitres

Dans le premier chapitre on va présenter des rappels, définitions et propriétés sur les applications linéaires et l'opérateurs linéaires p-sommants et Lipschitziens.

Le deuxième chapitre est consacré à la version non linéaire d'opérateurs p-sommants introduite par D.Farmer et W.B.Johnson à savoir la propriété d'idéale et le théorème de domination de Pietsch .

Le troisième chapitre : on présente une nouvelle caractérisation d'opérateurs Lipschitziens strictement p-sommants, l'opérateurs Lipschitziens strictement p-nucléaires et opérateurs Lipschitziens strictement(p,r,s)-sommants , introduite par de M.Belaala et k.Saadi dans l'article [2]

Le quatrième chapitre (dernier chapitre) ,on va étudier les opérateurs linéaires ϕ -sommants entre espaces de Banach, en donnant une version non linéaire introduite par M. Belaala du théorème de domination de Pietsch pour cette classe et quelques propriétés de ces opérateurs.

Chapitre 1

Préliminaires et généralités

Dans ce chapitre on va rappeler les notions suivantes : Application linéaires, applications linéaires p-sommants et opérateurs Lipschitziens lesquelles nous aident dans les chapitres suivants.

1.1 Les applications linéaires

Définition 1.1.1 :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} .

Soit T une application de E dans F .

On dit que T est linéaire si :

pour toutes x et y dans E et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\begin{aligned}T(x + y) &= T(x) + T(y) \\T(\lambda x) &= \lambda T(x)\end{aligned}$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F .

Cas particuliers 1.1.2 :

1. L'application linéaire T de E dans E est appelée endomorphisme de E .
L'espace vectoriel des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$
2. L'application linéaire T de E dans \mathbb{K} est appelée forme linéaire sur E .
L'espace vectoriel des formes linéaires sur E est appelé dual algébrique de E et noté $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Définition 1.1.3 :

Soit X et Y deux espaces normés et soit $T : X \rightarrow Y$ une application linéaire.

T est continue (bornée) s'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \forall x \in X. \tag{1.1}$$

On note $\mathcal{B}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues.

On définit une norme d'opérateurs sur $\mathcal{B}(X, Y)$ par :

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|_Y \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_Y\end{aligned}$$

On a également :

$$\|T\| = \inf\{C : C \text{ vérifiant (1.1)}\}$$

On note $E^* = B(X, \mathbb{K})$ laquelle est appelée dual topologique de X .
on a $E^* \subset E'$.

Théorème 1.1.4 :

Soient X et Y deux espaces de Hilbert , et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors il existe une application linéaire unique $T^* \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que :

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \langle T(x), y \rangle_Y = \langle x, T^*(y) \rangle_X$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T .

Définition 1.1.5 :

Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est tel que $T = T^*$. On dit que l'opérateur autoadjoint par définition de la norme d'opérateur

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|T^*(y)\|$$

1.2 Applications linéaires p-sommants

Définition 1.2.1 :

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est de rang fini si , elle est somme fini d'opérateurs de la forme :

$$\begin{aligned} x^*(.)y : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto x^*(x)y \end{aligned}$$

Où $x^* \in X^*$ et $y \in Y$.

L'application $x^*(.)y$ est continue de norme $\|y\| \|x^*\|$ car :

$$\begin{aligned} \|x^*(.)y\| &= \sup_{x \in B_X} \|x^*(.)y\| \\ &= \|y\| \sup_{x \in B_X} |x^*(x)| \\ &= \|y\| \|x^*\| \end{aligned}$$

1.2.1 Idéal d'opérateur linéaire

Définition 1.2.2 :

Un idéal d'opérateurs linéaires I est une classe d'opérateurs tel que pour tous X et Y Banach on a :

1. $I(X, Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X, Y)$
2. $\mathcal{L}_f(X, Y) \subset I(X, Y)$
3. Propriété d'idéal :

Si $T \in I(X, Y)$, $u \in \mathcal{L}(E, X)$ $v \in \mathcal{L}(Y, F)$ on a : $v \circ T \circ u \in I(X, Y)$ de plus si $\|\cdot\|_I : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait :

i)- $(I(X, Y), \|\cdot\|_I)$ est un sous espace normé(Banach).

ii)- $\|id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \lambda \longmapsto id_K(\lambda) = \lambda\| = 1$

iii)- $\|v \circ T \circ u\|_I \leq \|v\| \|T\|_I \|u\|$ Alors $(I(X, Y), \|\cdot\|_I)$ s'appel idéal de Banach des opérateurs linéaires.

Alors $(I(X, Y), \|\cdot\|_I)$ s'appel idéal de Banach des opérateurs linéaires.

Proposition 1.2.3 :

Soit I idéal normé , Alors , $\|T\| \leq \|T\|_I$ pour tout $T \in I$.

Définition 1.2.4 :

Soient X, Y , deux Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. On dit que T est p -sommant ($1 \leq p < \infty$) si,

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C \geq 0, \quad \text{telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{i=1}^n \subset X \\ (\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

On note

$$\Pi_p(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaires } p\text{-sommants} \}$$

et

$$\pi_p(T) = \inf\{C : C \text{ vérifiant (1.2)}\}$$

Remarque 1.2.5 :

Pour tout $T \in \Pi_p(X, Y)$, l'inégalité (1.2) équivalente à

$$(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{pour tout } (x_i)_{i=1}^n \subset X.$$

Théorème 1.2.6 :

Soit X, Y deux espaces de Banach soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ alors T est p -sommant ($1 \leq p \leq \infty$) si et seulement si il existe une probabilité μ sur K est une constante C tel que

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_K |\langle x, \xi \rangle|^p d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition 1.2.7 :

Soient $p, q \in [1, \infty[$ et X, Y deux espaces de Banach.

Si $p \leq q$ alors : $\Pi_p(X, Y) \subset \Pi_q(X, Y)$

1.3 Opérateurs lipschitziens

Définition 1.3.1 :[9]

Une application $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ entre deux espaces métriques est dite lipschitzienne (C -Lipschitzienne) s'il existe une constante $C > 0$ et pour tout $x, y \in X$ on a :

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y)$$

1. Si $C = 1$: l'application f est appelée non expansive
2. Si $C < 1$ l'application f est appelée contractante .

Pour une application f on definit la constante Lipschitzienne par

$$\|f\|_{Lip} = Lip(f) := \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}$$

Définition 1.3.2 :[1]

Soit (X, d, e) un espace métrique pointé
Une molécule sur X est une application $m : X \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini telle que

$$\sum_{x \in \text{supp}(m)} m(x) = 0$$

On note par $M(X)$ l'espace vectoriel de toutes les molécules sur X .

On peut écrire

$$m = \sum_{j=1}^l \lambda_j (1_{\{x_j\}} - 1_{\{x'_j\}})$$

Et

$$m = \sum_{j=1}^l \lambda_j m_{x_j x'_j}$$

$$\|m\|_{\mathcal{M}(X)} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda_i| d(x_i, x'_i) \text{ sur toutes les représentations} \right\}$$

Il s'ensuit que $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(X)}$ est une norme sur l'espace $\mathcal{M}(X)$.

On note par $\mathcal{A}(X, d_X)$ le complété de l'espace normé $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(X)})$.

Proposition 1.3.3 :[9]

1. Soient X, Y deux espaces métriques et f, g deux fonctions lipschitziennes de X dans Y . Alors

$$Lip(f + g) \leq Lip(f) + Lip(g)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} d((f + g)(x), (f + g)(y)) &= |(f + g)(x) - (f + g)(y)| \\ &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq Lip(f)d(x, y) + Lip(g)d(x, y) \\ &\leq d(x, y)(Lip(f) + Lip(g)) \end{aligned}$$

$\implies f + g$ est Lipschitzienne

2. Soit (X, d) un espace métrique et $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions Lipschitziennes, alors

$$\text{Lip}(af) = |a| \text{Lip}(f)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \text{Lip}(af) &= \sup_{x \neq y} \frac{d(af(x), af(y))}{d(x, y)} \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{|af(x) - af(y)|}{d(x, y)} \\ &= |a| \text{Lip}(f) \end{aligned}$$

3. Soit X, Y, Z trois espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux opérateurs lipschitziens .Alors

$$\text{Lip}(f \circ g) = \text{Lip}(f)\text{Lip}(g)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) &= d(g(f(x)), g(f(y))) \\ &\leq \text{Lip}(g)d(f(x), f(y)) \implies g \circ f \text{ est Lipschitzienne.} \\ &\leq \text{Lip}(g)\text{Lip}(f)d(x, y) \end{aligned}$$

4. $\text{Lip}(fg) \leq \|f\|_\infty \text{Lip}(g) + \|g\|_\infty \text{Lip}(f)$

Preuve :

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)| |g(x) - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)| \\ &\leq |f(x)| \text{Lip}(g)d(x, y) + |g(y)| \text{Lip}(f)d(x, y) \\ \frac{f(x)g(x) - f(y)g(y)}{d(x, y)} &\leq |f(x)| \text{Lip}(g) + |g(y)| \text{Lip}(f) \\ \sup_{x \neq y} \frac{f(x)g(x) - f(y)g(y)}{d(x, y)} &\leq \sup_n |f(x)| \text{Lip}(g) + \sup_n |g(y)| \text{Lip}(f) \\ \implies \text{Lip}(fg) &\leq \|f\|_\infty \text{Lip}(g) + \|g\|_\infty \text{Lip}(f) \end{aligned}$$

5. Soit X un espace métrique et $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux opérateurs Lipschitzien .Alors $\text{Lip}(\frac{1}{f}) \leq \frac{\text{Lip}(f)}{a^2}$ si $|f(x)| \geq a > 0, \forall x \in X$

Preuve :

soit $x, y \in X$ on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| &\leq \frac{|f(y) - f(x)|}{|f(x)f(y)|} \\ &\leq \frac{|f(y) - f(x)|}{a^2} \\ &\leq \frac{\text{Lip}(f)}{a^2} d(x, y) \end{aligned}$$

$$\implies \text{Lip}(\frac{1}{f}) \leq \frac{\text{Lip}(f)}{a^2}$$

6. Soient X, Y deux espaces métriques , f et f_n deux fonctions Lipschitziennes de X dans Y

On suppose que f_n converge simplement vers f , Alors

$$\text{Lip}(f) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Lip}(f_n).$$

Preuve : $f_n \xrightarrow{c.s} f \iff \forall x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x), f_n(y)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Lip}(f_n)d(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} Lip(f_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} Lip(f_n) \text{ et ceci } \forall x, y \in X \\ \implies \sup_{x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} Lip(f_n) \\ \implies Lip(f) &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} Lip(f_n). \end{aligned}$$

Définition 1.3.4 :

Soit (X, d, e) un espace métrique pointé

On note $Lip_0(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ application Lipschitzienne tel que } f(e) = 0\}$

L'espace $(Lip_0(X), Lip(\cdot))$ est un espace de Banach

On note aussi $(Lip_0(X), Lip(\cdot))$ par $X^\#$ Il appelé le dual Lipschitzien

$$E^* \subset E' \subset E^\#$$

1.3.1 Théorème de linéarisation (Weaver1999)

Théorème 1.3.1 :[9]

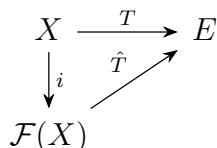
Soient (X, d, e) un espace métrique pointé , E espace de Banach et $T : X \rightarrow E$ une application Lipschitzienne avec $T(e) = 0$

Alors : $\exists!$ application linéaire continue

$$\hat{T} : \mathcal{F}(X) \rightarrow E$$

tel que :

$$T = \hat{T} \circ i \text{ et } \|\hat{T}\| = Lip(T) .$$



Chapitre 2

Opérateurs Lipschitziens p-sommants

2.1 Factorisation de Pietsch

Opérateur Lipschitzien p-sommant

Définition 2.1.1 :

Soient (X, d, e) un espace métrique pointé, E espace de Banach. ($1 \leq p < \infty$)

Une application Lipschitzienne $T : (X, d, e) \rightarrow E$, est dite Lipschitzienne p -sommante s'il existe une constante positive C telle que :
 $\forall (x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X, \forall (a_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}^+$

On a :

$$\sum_{i=1}^n a_i \|T(x_i) - T(y_i)\|^p \leq C^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p \quad (2.1)$$

On note

$$\pi_p^L(T) = \inf \{C : C \text{ vérifiant (2.1)}\}$$

et

$\Pi_p^L(X, E) = \{l' \text{ espace des applications Lipschitziennes } p\text{-sommants de } X \text{ dans } E\}$.

$\Pi_p^L(X, E)$ est un espace de Banach muni de la norme $\pi_p^L(\cdot)$

Remarque 2.1.2 :

Si on restreint à $a_i = 1$ on a la même définition.

Proposition 2.1.3 :

La boule unité $B_{X^\#}$ est compacte pour la topologie de la convergence simple :

$$B_{X^\#} = \{f \in Lip_0(X) \mid Lip(f) \leq 1\}$$

Proposition 2.1.4 : (Propriété d'idéal)

Soient X, Y, E et F des espaces métriques, $S : E \rightarrow F$ et $R : Y \rightarrow X$ deux fonctions Lipschitziennes et $T : X \rightarrow E$ un opérateur Lipschitzien p -sommant, alors $S \circ T \circ R$ est Lipschitzien p -sommant et

$$\pi_p^L(STR) \leq Lip(S)\pi_p^L(T)Lip(R)$$

Preuve 2.1.5 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|STR(z_i) - STR(z'_i)\|_F^p &\leq Lip(s)^P \sum_{i=1}^n \|TR(z_i) - TR(z'_i)\|_E^p \\ &\leq Lip(s)^P \pi_p^L(T) \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n |f(R(z_i)) - f(R(z'_i))|^p \\ &\leq Lip(s)^P \pi_p^L(T) Lip(R)^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{f(R(z_i))}{Lip(R)} - \frac{f(R(z'_i))}{Lip(R)} \right|^p \\ &\leq Lip(s)^P \pi_p^L(T) Lip(R)^p \sup_{g \in B_{Y^\#}} \sum_{i=1}^n |g(z_i) - g(z'_i)|^p \end{aligned}$$

$$\implies STR \text{ est } p\text{-sommant et } \pi_p^L(STR) \leq Lip(s)\pi_p^L(T)Lip(R)$$

Théorème 2.1.6 :

Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire entre deux espaces métrique X et Y , ($1 \leq p < \infty$)

Si T est linéaire p -sommant alors T Lipschitzien p -sommant

Preuve 2.1.7

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|T(a_i(x_i - y_i))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \xi, a_i(x_i - y_i) \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i \|T(x_i) - T(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n a_i |\xi(x_i) - \xi(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(T) \sup_{f \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^n a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\implies \pi_p^L(T) \leq \pi_p(T)$$

Théorème 2.1.8 : [5] (Théorème de domination de Pietsch)

Soient $1 \leq p < \infty$, $T : X \rightarrow Y$ application entre espaces métriques et $C \geq 0$. les propriétés suivantes sont équivalentes,

- 1) T est Lipschitzienne p -sommant et $\pi_p^L(T) \leq C$

2) Il existe une mesure de probabilité μ sur $B_{X^\#}$ telle que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C \left(\int_{B_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}$$

3) Pour toute application isométrique J de Y dans un espace 1- injectif Z le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} L_\infty(\mu) & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & L_p(\mu) & & \\ \uparrow i & & \downarrow \tilde{T} & & \\ X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & Z \end{array}$$

avec $Lip(\tilde{T}) \leq C$

Preuve 2.1.9 :

La propriété 1) \Rightarrow 2) :

On suppose que $\pi_p^L(T) = 1$

Soit \mathcal{C} le cône convexe dans $C(\mathcal{B}_{X^\#})$ des fonctions de la forme

$$\phi_{a_i, x_i, y_i}(f) = \left\{ \sum_{i=1}^n C^p a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p - a_i \|T(x_i) - T(y_i)\|^p \right\}$$

où $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_i, y_i \in X$ l'ensemble \mathcal{M} est un cône convexe. En effet , soit ϕ_1, ϕ_2 dans \mathcal{M} et $a \in [0, 1]$ tel que :

$$\phi_{(1(a_{1i}), (x_{1i}), (y_{1i}))}(f) = \sum_{i=1}^{n_1} C^p a_{1i} |f(x_{1i}) - f(y_{1i})|^p - a_{1i} \|T(x_{1i}) - T(y_{1i})\|^p$$

et

$$\phi_{(a_{2i}, (x_{2i}), (y_{2i}))}(f) = \sum_{i=1}^{n_2} C^p a_{2i} |f(x_{2i}) - f(y_{2i})|^p - a_{2i} \|T(x_{2i}) - T(y_{2i})\|^p$$

il en résulte que pour $a \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} a\phi &= a\phi_{((a_{1i}), (x_{1i}), (y_{1i}))}(f) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} C^p a a_{1i} |f(x_{1i}) - f(y_{1i})|^p - a a_{1i} \|T(x_{1i}) - T(y_{1i})\|^p \\ &= \phi_{((a a_{1i}), (x_{1i}), (y_{1i}))}(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &= \sum_{i=1}^{n_1} C^p a_{1i} |f(x_{1i}) - f(y_{1i})|^p - a_{1i} \|T(x_{1i}) - T(y_{1i})\|^p \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_2} C^p a_{2i} |f(x_{2i}) - f(y_{2i})|^p - a_{2i} \|T(x_{2i}) - T(y_{2i})\|^p \\ &= \sum_{i=1}^n C^p a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p - a_i \|T(x_i) - T(y_i)\|^p \end{aligned}$$

enfin on a :

$$\phi_1 + \phi_2 = \sum_{i=1}^n C^p a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p - a_i \|T(x_i) - T(y_i)\|^p$$

avec $n = n_1 + n_2$

$$a_i = \begin{cases} a_{1i} & \text{si } 1 \leq i \leq n_1 \\ a_{2i} & \text{si } n_1 + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} x_{1i} & \text{si } 1 \leq i \leq n_1 \\ x_{2i} & \text{si } n_1 + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} y_{1i} & \text{si } 1 \leq i \leq n_1 \\ y_{2i} & \text{si } n_1 + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Par hypothèse, le cône convexe \mathcal{C} est disjoint du négatif venir et $\mathcal{C}_- = \{\psi \in C(\mathcal{B}_{X^\#}) : \psi(f) < 0, \forall f \in \mathcal{B}_{X^\#}\}$.

qui est un sous-ensemble convexe ouvert de $C(\mathcal{B}_{X^\#})$.

Par le théorème de Hahn-Banach forme analytique "grand théorème de séparation" et de Riez "théorème de représentation", il existe un Radon-Borel fini signé (une mesure de Radon-Borel signée sur le compact est finie) mesure $\mu \neq 0$ et un réel α tel que pour tout $\phi \in \mathcal{C}$ et $\phi \in \mathcal{C}_-$, nous avons :

$$\int_{\mathcal{B}_{X^\#}} \psi(f) d\mu(f) \leq \alpha \leq \int_{\mathcal{B}_{X^\#}} \phi(f) d\mu(f)$$

Parce que $0 \in \mathcal{C}$ et les constantes négatives sont dans \mathcal{C}_- , nous pouvons donc calculer $\alpha = 0$. Aussi, on a

$\int_{\mathcal{B}_{X^\#}} \psi(f) d\mu(f) \leq 0$, $\psi \in \mathcal{C}_- \iff \mu \geq 0$. On peut mettre $\mu(\mathcal{B}_{X^\#}) = 1$, si ce n'est pas le cas on divise par $\lambda(\mathcal{B}_{X^\#})$. En particulier on prend

$$\phi(f) = C^p |f(x) - f(y)|^p - \|T(x) - T(y)\|^p$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_{X^\#}} \psi(f) d\mu(f) &= \int_{\mathcal{B}_{X^\#}} C^p |f(x) - f(y)|^p \|T(x) - T(y)\|^p d\mu(f) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Cela implique

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C \left(\int_{\mathcal{B}_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}$$

La propriété 2) \implies 3)

Soit $i : X \longrightarrow L_\infty(\mathcal{B}_{X^\#}, \mu)$ le plongement isométrique naturel qui est l'identité formelle de $C(\mathcal{B}_{X^\#})$ dans $L_\infty(\mathcal{B}_{X^\#}, \mu)$ composé avec i_X .

Alors 2) dit que la norme de Lipschitz de \tilde{T} restreinte à $i_p(i(X))$ est bornée par C , qui est 3).

La propriété 3) \implies 1)

Par ce qui précède, nous avons

$$\begin{aligned} \pi_p^L(T) = \pi_p^L(jT) &\leq \text{Lip}(\tilde{T}) \pi_p^L(i_p) \text{Lip}(i) \\ &\leq \text{Lip}(\tilde{T}) \pi_p(i_p) \text{Lip}(i) \\ &\leq \text{Lip}(\tilde{T}) \\ &\leq C \end{aligned}$$

Théorème 2.1.10 : (Théorème d'inclusion)

Soient X, Y deux espaces métriques, $T : X \rightarrow Y$ est Lipschitzien p -sommant et $1 \leq p < q < +\infty$, alors

$$\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T) \text{ et } \Pi_p^L(X, Y) \subset \Pi_q^L(X, Y)$$

Démonstration 2.1.11 :

$T : X \rightarrow Y$ est Lipschitzien p -sommant

$p \leq q$, d'où $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$, donc il existe $r \geq 1$ tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$

De théorème (2.1.8) on a

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \pi_p^L(T) \left(\int_{B_{X\#}} |f(x) - f(y)|^p \cdot 1^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}, \forall x, y \in X.$$

On utilise l'inégalité de Hölder on trouve

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \pi_p^L(T) \left(\int_{B_{X\#}} |f(x) - f(y)|^q \cdot 1^q d\mu(f) \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{B_{X\#}} 1^r d\mu(f) \right)^{\frac{1}{r}}$$

T est Lipschitzien q -sommant et $\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T)$. ■

2.2 Relation entre opérateurs Lipschitziens p -sommants et linéaires p -sommants

Dans cette section nous montrons que la norme d'opérateur Lipschitzien p -sommant est la même que sa norme d'opérateur p -sommant. Ceci justifie que la notion d'opérateur sommant lipschitzien soit en réalité une généralisation du concept d'opérateur linéaire p -sommant.

Théorème 2.2.1 :

Soit T un opérateur Lipschitzien de X dans Y , si T est linéaire continu et $1 \leq p < \infty$.

Alors $\pi_p^L(T) = \pi_p(T)$.

Chapitre 3

Opérateurs strictement Lipschitziens p-sommants et Lipschitziens M-strictement p-sommants

3.1 Introduction et préliminaire

Dans ce chapitre ,nous basons notre travail sur l'article [2] de M.Belaala et K.saadi , on introduit quelques notations principales et on va faire un rappel des définitions sur les opérateurs linéaires p-sommants , les opérateurs Cohen strongly p-sommants et l'opérateurs p-nucléaires lesquels on aura besoin dans l'étude d'opérateurs Lipschitziens , en suite on va étudier la caractérisation des opérateurs strictement Lipschitziens p-sommants , les opérateurs M-strictement Lipschitziens et les opérateurs Lipschitziens p-nucléaires.

Définition 3.1.1 :

L'espace libre Lipschitzien sur X , noté $\mathcal{F}(X)$ est l'étendue linéaire fermée des formes linéaires $\delta_{(x,y)}$ de $Lip_0(X)^$*

telles que : $\delta_{(x,y)}(f) = f(x) - f(y)$, $\forall f \in Lip_0(X)$

c'est à dire :

$$\mathcal{F}(X) = \overline{\text{span} \{ \delta_{(x,y)} : x, y \in X \}}^{Lip_0(X)^*}$$

nous avons $X^\# = \mathcal{F}(X)^$ tient isométriquement via l'application*

$$\varphi_X(f)(m) = m(f), f \in X^\# \text{ et } m \in \mathcal{F}(X)$$

Théorème 3.1.2 :

Soit X un espace métrique pointé , E un espace de Banach, on note $Lip_0(X, E)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions Lipschitziennes (opérateurs Lipschitziens) $T : X \rightarrow E$ tel que $T(0) = 0$ avec addition ponctuelle et norme de Lipschitzien.

Notons que pour tout $T \in Lip_0(X, E)$, alors il existe une unique application linéaire (linéarisation de T) $\hat{T} : \mathcal{F}(X) \rightarrow E$ telle que $\hat{T} \circ \delta_X = T$ et $\|\hat{T}\| = Lip(T)$

ie, le schéma suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E \\ \downarrow \delta_X & \nearrow \hat{T} & \\ \mathcal{F}(X) & & \end{array}$$

Où δ_X est le plongement canonique tel que $\langle \delta_X(X), f \rangle = \delta_{(x,0)}(f) = f(x)$ pour $f \in X^\#$.

Si X est un espace de Banach et $T : X \rightarrow E$ est un opérateur linéaire, alors l'opérateur linéaire correspondant \hat{T} donné par

$$\hat{T} = T \circ \beta_X$$

où $\beta_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow X$ est une application de quotient linéaire qui vérifie $\beta_X \circ \delta_X = id_X$ et $\|\beta_X\| \leq 1$.

Théorème 3.1.3 :

Soit X, Y deux espaces métriques. Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur Lipschitzien, alors il existe un opérateur linéaire unique \tilde{T} tel que le schéma suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \downarrow \delta_X & & \downarrow \delta_Y \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\tilde{T}} & \mathcal{F}(Y) \end{array} \tag{3.1}$$

$$i;e : \delta_Y \circ T = \tilde{T} \circ \delta_X$$

Définition 3.1.4 :

Soient X, Y deux espaces métriques et $T : X \rightarrow Y$ une application Lipschitzienne qui préserve l'élément distingué :

On définit $T^\#$ l'adjoint d'opérateur Lipschitzien par :

$$\begin{aligned} T^\# : Y^\# &\rightarrow X^\# \\ g &\mapsto T^\#(g) = g(T(x)) = (g \circ T)(x) \quad , \forall g \in Y^\# \text{ et } x \in X \end{aligned}$$

Définition 3.1.5 :

Un opérateur transposé Lipschitzien $T^t : E^* \rightarrow X^\#$ est la restriction de $T^\#$ dans E^* . nous avons :

$$T^\# = \varphi_X^{-1} \circ \tilde{T}^* \circ \varphi_Y \quad T^t = \varphi_X^{-1} \circ \hat{T}^* \tag{3.2}$$

Définition 3.1.6 : [4]

Soit X un espace métrique et E espace de Banach, on note $X \boxtimes E$ le produit tensoriel Lipschitzien de X et E .

Cet espace est engendré par les formes linéaires $\delta_{(x,y)} \boxtimes e$ sur $Lip_0(X : E^*)$ définies par :

$$\delta_{(x,y)} \boxtimes e(f) = \langle \delta_{(x,y)}(f), e \rangle = \langle \delta_{(x,0)}(f) - \delta_{(y,0)}(f), e \rangle = \langle f(x) - f(y), e \rangle$$

Définition 3.1.7 :

Soit E un espace de Banach, B_E désigne sa boule unitaire fermée et E^* son dual (topologique). Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $l_p^n(E)$ l'espace de Banach de toutes les suites $(e_i)_{i=1}^n \subset E$ avec la norme

$$\|(e_i)_i\|_{l_p^n(E)} = \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et $l_p^{n,w}(E)$ l'espace de Banach de toutes les suites faibles $(e_i)_{i=1}^n \subset E$ avec la norme

$$\|(e_i)_i\|_{l_p^{n,w}(E)} = \sup_{e^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^n \langle e_i, e^* \rangle^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $E = \mathbb{K}$ on écrit simplement l_p^n et $l_p^{n,w}$

Nous rappelons quelques définitions dont nous aurons besoin dans la suite : Soit $1 \leq p \leq \infty$ et p^* son conjugué, i.e. $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1)$.

Soit E, F deux espaces de Banach et $R : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire,

1. On dit que R un opérateur linéaire Cohen strongly p- sommant s' il existe une constante $C > 0$ tel que pour toutes suites $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ et $(Y_i^*)_{i=1}^n \subset F^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^n |\langle R(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \| (x_i) \|_{l_p^n(E)} \| (y_i^*) \|_{l_{p^*}^{n,w}} \quad (3.3)$$

On note par $\mathcal{D}_p(E, F)$ la classe d'opérateur Cohen strongly p-sommant de E dans F , laquelle est un espace de Banach avec la norme $d_p(R)$.

2. On dit que R un opérateur linéaire p- nucléaire s' il existe une constante $C > 0$ tel que pour toutes suites $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ et $(Y_i^*)_{i=1}^n \subset F^*$, on ait :

$$\sum_{i=1}^n |\langle R(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \| (x_i) \|_{l_p^n(E)} \| (y_i^*) \|_{l_{p^*}^{n,w}(F^*)} \quad (3.4)$$

On note par $\mathcal{N}_p(E, F)$ la classe d'opérateurs p-nucléaires de E dans F , c'est un espace de Banach avec la norme $N_p(R)$.

On a un autre définition R est p-nucléaire si et seulement si $R = R_1 \circ R_2$ tel que R_1 Cohen strongly p-sommant et R_2 p-sommant .

3. Un opérateur linéaire R est (p,r,s) -sommant s'il existe un constante C positive tel que pour tout $(x_i)_i \in X$ et pour tout $(y_i^*)_i \in F^*$, on a

$$\| (\langle R(x_i), y_i^* \rangle) \|_{l_p^n} \leq C \| (x_i) \|_{l_r^n(E)} \| (y_i^*) \|_{l_s^{n,w}(F^*)}$$

La classe la d'opérateurs (p,r,s)-sommant de E dans F ,noté par $\Pi_{p,r,s}(E, F)$ c'est un espace de Banach muni de la norme $\pi_{p,r,s}(R)$.

3.2 Caractérisation des opérateurs Lipschitziens strictement p-sommants

3.2.1 Notations

La norme tensorielle de Chevet-Saphar est définie en espace de Banach par

$$d_p(u) = \inf \left\{ \|(x_i)_i\|_{l_p^{n,w}(E)} \|(y_i)_i\|_{l_p^n(F)} \right\}$$

Où l'infimum prend sur toutes les représentations de u sous la forme

$u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$, la norme tensoriel définie comme suit :

$$g_p\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) = d_p^t\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) = d_p\left(\sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i\right)$$

Pour tout $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k \in X \boxtimes E$, on note par A_u l'ensemble e toutes les représentations de $u \in \mathcal{F}(X) \otimes E$, ie :

$$A_u = \left\{ m = ((m_i)_{i=1}^n, (e_i)_{i=1}^n) : n \in \mathbb{N}, m_i \in \mathcal{F}(X), e_i \in E : u = \sum_{i=1}^n m_i \otimes e_i \right\} \quad (3.5)$$

puisque la linéarisation \hat{T} peut être vue comme $\mathcal{F}(X) \otimes E^*$, alors

$$\sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle = \hat{T}\left(\sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \otimes s_k^*\right)$$

on pose $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k^*$ alors pour tout $m \in A_u$ on a :

$$\sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle = \hat{T}\left(\sum_{i=1}^{n_1} m_i \otimes e_i^*\right) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle &= \hat{T}\left(\sum_{i=1}^{n_1} m_i \otimes e_i^*\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \langle \hat{T}(m_i), e_i^* \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \langle \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)), e_i^* \rangle \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} m_i &= \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i^j \delta_{(x_i^j, y_i^j)} \\ &= \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j \delta_{(x_i^j, y_i^j)} \end{aligned}$$

Avec $n_2 = \max_{i=1}^{n_1} k_i$ et les termes entre k_i et n_2 sont nuls.

Or soit α une norme tensorielle définie entre deux espaces de Banach, par [[7], théorème 3.1], il existe une norme croisé α^L qui définit le produit tensoriel Lipschitzien $X \boxtimes E$ comme suit

$$\alpha^L\left(\sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k\right) = \alpha\left(\sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \otimes s_k\right) \quad (3.7)$$

alors $\sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \otimes s_k \in \mathcal{F}(X) \otimes E$.

On considère la norme d_p , on peut définir d_p^L comme suit

$$\begin{aligned} d_p^L &= d_p\left(\sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \otimes s_k\right) \\ &= \inf_{m=((m_i)_{i=1}^n, (e_i)_{i=1}^n) \in A_u} \left\{ \|m_i\|_{l_p^{n,w}(\mathcal{F}(X))} \|(e_i)_i\|_{l_p^n(E)} \right\} \end{aligned}$$

Définition 3.2.1 :[7]

Soit $1 \leq p \leq \infty$, un opérateur Lipschitzien $T : X \longrightarrow E$ est dit Lipschitzien strictement p -sommant s'il existe une constante positive C tel que pour toute $x_k, y_k \in X$ et $s_k^* \in E^*$ ($1 \leq k \leq l$) on a

$$\left| \sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle \right| \leq C d_p^L(u), \quad (3.8)$$

où $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k), (y_k)} \boxtimes s_k^*$,

On note par $\Pi_p^{SL}(X, E)$ l' espace de Banach de tous les opérateurs Lipschitziens strictement p -sommants de X dans E , dont la norme $\pi_p^{SL}(T)$ est la plus petite constante vérifiant(3.8) .

Si on considère des opérateurs linéaires définis sur des espaces de Banach on a montré dans ([7] la proposition 3.8) que les trois notions : p -sommant, Lipschitzien p -sommant, Lipschitzien strictement p -sommant coïncident.

Théorème 3.2.2 :

Soient $1 \leq p \leq \infty$, X un espace métrique pointé , E un espace de Banach et $T : X \longrightarrow E$ opérateur Lipschitzien , les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1) T est Lipschitzien strictement p -sommant .
- 2) \hat{T} est p -sommant.
- 3) Il existe un constante $C > 0$ et μ probabilité de Radon dans $B_{X^\#}$ tel que $\forall (x^j)_{j=1}^n, (y^j)_{j=1}^n \subset X$ et $(\lambda^j)_{j=1}^n \subset \mathbb{K}; (n \in N^*)$, ona

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda^j (T(x^j) - T(y^j)) \right\| \leq C \left(\int_{B_{X^\#}} \left| \sum_{j=1}^n \lambda^j (f(x^j) - f(y^j)) \right|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.9)$$

- 4) Il existe un constante $C > 0$ tel que $\forall (x_i^j)_{i=1}^{n_1}, (y_i^j)_{i=1}^{n_1} \subset X$ et $(\lambda_i^j)_{i=1}^{n_1} \subset \mathbb{K}$, ($1 \leq j \leq n_2$) ;($n_1, n_2 \in N^*$) , on a

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(\left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{f \in X^\#} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(y_i^j)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.10)$$

Démonstration 3.2.3 :

- 1) \Rightarrow 2) (de le théorème 3.5 dans[7])

Supposons que $\hat{T} \in \Pi_p(\mathcal{F}(X); E)$. soit $x_i, y_i \in X$ et $e_i^* \in E^*$ ($1 \leq i \leq n$) , on pose $u = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i), (y_i)} \boxtimes e_i^*$, alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i) - T(y_i), e_i^* \rangle \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \langle \hat{T}(\delta_{(x_i), (y_i)}), e_i^* \rangle \right| \\ &\leq \left\| \hat{T} \right\|_{\Pi_p} d_p(\phi(u)) = \left\| \hat{T} \right\|_{\Pi_p} d_p(u) \end{aligned}$$

Donc T est Lipschitzien strictement p -sommant et

$$\|T\|_{\Pi_p^{SL}} \leq \|\hat{T}\|_{\Pi_p}$$

2) \Rightarrow 1)

Supposons que $T \in \Pi_p^{SL}(X, E)$ soit $m_i \in \mathcal{F}(X)$ ($m_i = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i^j \delta_{(x_i^j, y_i^j)}$); $\lambda_i^j \in \mathbb{R}$ et $e_i^* \in E$ ($1 \leq i \leq n$)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle \hat{T}(m_i), e_i^* \rangle \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \langle T(x_i^j) - T(y_i^j), \lambda_i^j e_i^* \rangle \right| \\ &\leq \|T\|_{\Pi_p^{SL}} d_p^L(u) = \|T\|_{\Pi_p^{SL}} d_p^L(\phi(u)) \end{aligned}$$

Où

$$u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i^j \delta_{(x_i^j, y_i^j)} \boxtimes e_i^*$$

Alors $\phi(u) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes e_i^*$ Donc \hat{T} est p -sommant et $\|\hat{T}\|_{\Pi_p} \leq \|T\|_{\Pi_p^{SL}}$.

On applique le théorème de Pietsch d'opérateur linéaire p -sommant il existe une mesure de Radon μ dans $B_{X^\#}$ tel que pour tout $m \in \mathcal{F}$

$$\|\hat{T}(m)\| \leq c \left(\int_{B_{X^\#}} |f(m)|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Soit $(x^j)_{j=1}^n, (y^j)_{j=1}^n \subset X$ et $(\lambda^j)_{j=1}^n \subset \mathbb{K}$, on pose

$$m = \sum_{j=1}^n \lambda^j \delta_{(x^j, y^j)} \in \mathcal{F}(X)$$

Alors

$$\left\| \hat{T} \left(\sum_{j=1}^n \lambda^j \delta_{(x^j, y^j)} \right) \right\| \leq C \left(\int_{B_{X^\#}} \left| f \left(\sum_{j=1}^n \lambda^j \delta_{(x^j, y^j)} \right) \right|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}$$

ainsi

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda^j (T(x^j)) - (T(y^j)) \right\| \leq C \left(\int_{B_{X^\#}} \left| \sum_{j=1}^n \lambda^j (f(x^j)) - (f(y^j)) \right|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}$$

3) \Rightarrow 4) :

Soit $(x_i^j)_{i=1}^{n_1}, (y_i^j)_{i=1}^{n_1} \subset X$ et $(\lambda_i^j)_{i=1}^{n_1} \subset \mathbb{K}$, ($1 \leq j \leq n_2$), par (3.9) on a pour tout ($1 \leq i \leq n_1$)

$$\left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j)) - (T(y_i^j)) \right\| \leq C \left(\int_{B_{X^\#}} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j)) - (f(y_i^j)) \right|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} \left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j)) - (T(y_i^j)) \right\|^p &\leq C \int_{B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j)) - (f(y_i^j)) \right|^p d\mu(f) \\ &\leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j)) - (f(y_i^j)) \right|^p \end{aligned}$$

En fin , on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} \left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j)) - (T(y_i^j)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{f \in X^\#} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j)) - (f(y_i^j)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

4) \Rightarrow 1), soit $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k^* \in X \boxtimes E^*$, Soit A_u l'ensemble définie en (3.5) .
Soit $m = ((m_i)_{i=1}^{n_1}, (e_i)_{i=1}^{n_2}) \in A_u (m_i = \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j \delta_{(x_i^j, y_i^j)})$ par (3.6)

$$\left| \sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \langle \lambda_i^j (T(x_i^j)) - (T(y_i^j)), e_i^* \rangle \right|$$

par Hölder

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left\| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j)) - (T(y_i^j)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \|e_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} . \\ &\leq C \sup_{f \in X^\#} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j)) - (f(y_i^j)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \|e_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} . \\ &\leq C \| (m_i) \|_{l_p^{n_1, w}(\mathcal{F}(X))} \| (e_i^*) \|_{l_{p^*}^{n_1}(E)} \end{aligned}$$

On prend l'infimum sur toutes les représentation de $m \in A_u$, on obtient :

$$\left| \sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle \right| \leq C d_p^L(u),$$

Alors T est strictement Lipschitzien p -sommant .

Si on pose $n_2 = 1$ dans la formule (3.10) on obtient exactement la définition d'opérateur Lipschitzien p -sommant .

Définition 3.2.4 :

Soient $1 \leq p \leq \infty$, X et Y deux espaces métriques .

Un opérateur Lipschitzien $T : X \longrightarrow Y$ est dit Lipschitzien M -strictement p -sommant s'il existe une constante positive C telle que pour toute $x_k, y_k \in X$ et $g_k \in Y^\#$ ($1 \leq k \leq l$) , on a

$$\left| \sum_{k=1}^l g_k (T(x_k)) - g_k (T(y_k)) \right| \leq C d_p^L(u), \quad (3.11)$$

où $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k), (y_k)} \boxtimes g_k \in X \boxtimes Y^\#$, Y est un espace de Banach, pour $y^* \in Y^*$ on $Lip(y^*) = \|y^*\|$, alors

$$\| (y_i^*) \|_{l_{p^*}^{n_1}(Y^\#)} = \| (y_i^*) \|_{l_{p^*}^{n_1}(Y^*)} \quad (3.12)$$

Par conséquent , la définition ci-dessous conduit au cas d'opérateurs Lipschitziens strictement p -sommants .

Comme caractérisation intéressante des opérateurs M -strictement Lipschitziens p -sommants, nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.2.5 :

soient $1 \leq p \leq \infty$, X et Y deux espaces métriques. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $T : X \longrightarrow Y$ est M -strictement Lipschitzien p -sommant
 2. La linéarisation d'opérateur $\tilde{T} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ est p -sommant.
 3. L'opérateur adjoint de Lipschitz $T^\# : Y^\# \longrightarrow X^\#$ est Cohen strongly p -sommant.
- pour la preuve nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.6 :

Soit X un espace métrique pointé et E, F deux espaces de Banach, on suppose que E et F sont isométriquement isomorphes via a certaine application Q .

soit $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k \in X \boxtimes E$, alors

$$d_p^L(u) = d_p^L(w),$$

lorsque $w = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes Q(s_k) \in X \boxtimes F$.

Preuve 3.2.7 :

L'identification $\mathcal{F}(X) \otimes E = \mathcal{F}(X) \otimes F$ tient via la transformation

$$\sum_{i=1}^n m_i \otimes e_i \longmapsto \sum_{i=1}^n m_i \otimes Q(e_i)$$

soit $m = ((m_i)_{i=1}^n, (e_i)_{i=1}^n) \in A_u$, alors $\sum_{i=1}^n m_i \otimes Q(e_i) \in A_w$.
Rappelons que A_w était définie en (3.5). Nous avons

$$\begin{aligned} d_p^L(w) &\leq \|m_i\|_{l_p^{n,w}(\mathcal{F}(X))} \|(Q(e_i))_i\|_{l_{p^*}^n(F)} \\ &\leq \|m_i\|_{l_p^{n,w}(\mathcal{F}(X))} \|(e_i)_i\|_{l_{p^*}^n(E)} \end{aligned}$$

en prend l'infimum sur A_u , on trouve $d_p^L(w) \leq d_p^L(u)$

Preuve de proposition (3.2.5) :

1) \Rightarrow 2)

soit $(x_k)_l^{k=1} \subset X$ et $(f_k^*)_l^{k=1} \subset \mathcal{F}(Y^*)$, nous $\delta_Y \circ T$ est Lipschitzien strictement p -sommant, donc il existe $(g_k)_l^{k=1} \subset Y^\#$ tel que $f_k^* = Q_Y(g_k)$ pour tout $1 \leq k \leq l$, on utilise le lemme (3.2.6) nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^l \langle \delta_Y \circ T(x_k) - \delta_Y \circ T(y_k), f_k^* \rangle \right| &= \left| \sum_{k=1}^l \langle \delta_{(T(x_k), T(y_k))}, Q_Y(g_k) \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^l g_k(T(x_k)) - g_k(T(y_k)) \right| \\ &\leq C d_p^L(u) = C d_p^L(w) \end{aligned}$$

Où $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes g_k \in X \boxtimes Y^\#$ et $w = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes f_k^* \in X \boxtimes \mathcal{F}(Y)^*$.

Alors $\delta \circ T$ est Lipschitzien strictement p -sommant. Maintenant par la factorisation (3.1) on a :

$$\delta_Y \circ T = \tilde{T} \circ \delta_X$$

Ceci montre que la linéarisation de $\delta_Y \circ T$ est \tilde{T} , alors d'après le théorème (3.2.2) \tilde{T} est p-sommant.

2) \Rightarrow 3)

on a par (3.2)

$$T^\# = \varphi_X^{-1} \circ \tilde{T}^* \circ \varphi_Y$$

Donc par (??) et la propriété d'idéal, $T^\#$ est Cohen strongly p^* -sommant .

3.) \Rightarrow 1). supposons que $T^\#$ est Cohen strongly p^* -sommant .

soit $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes g_k \in X \boxtimes Y^\#$, alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^l g_k(T(x_k)) - g_k(T(y_k)) \right| &= \left| \sum_{k=1}^l \langle T^\#(g_k), \delta_{(x_k, y_k)} \rangle \right| \\ &\leq C g_p(\sum_{k=1}^l g_k \otimes \delta_{(x_k, y_k)}) \\ &\leq C d_p(\sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \otimes g_k) \\ &= C d_p^L(u) \end{aligned}$$

Donc T est M-strictement Lipschitz p-sommant.

3.3 Opérateurs strictement Lipschitziens p-nucléaires

Définition 3.3.1 :

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et E, F deux espaces de Banach, on définit la norme tensorielle w_p dans $E \otimes F$ par

$$w_p(u) = \inf \left\{ \|(x_i)\|_{l_p^{n,w}(E)} \|(y_i)\|_{l_{p^*}^{n,w}(F)} \right\},$$

tel que $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$, où l'infimum est porté sur toutes les représentations de u .

Définition 3.3.2 :

Soient X un espace métrique pointé, E espace de Banach,

$u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k \in X \boxtimes E$ et A_u l'ensemble définie dans (3.5). On considère

$$w_p^{SL}(u) = \inf_{m \in A_u} \left\{ \|(m_i)_i\|_{l_p^{n,w}(E)} \|(e_i)\|_{l_{p^*}^{n,w}(F)} \right\}$$

Définition 3.3.3 :

Soit $1 \leq p \leq \infty$, l'opérateur $T : X \rightarrow E$ est Lipschitzien strictement p -nucléaire si pour tout x_k, y_k et $s_k^* \in E^* (1 \leq k \leq l)$ on a

$$\left| \sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle \right| \leq C w_p^{SL}(u) \tag{3.13}$$

où $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k^*$. On note par $\mathcal{N}_p^{SL}(X, E)$ la classe d'opérateur Lipschitzien strictement p -nucléaires de X dans E

Théoreme 3.3.1 :

Soient $1 \leq p \leq \infty$, X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $T : X \rightarrow E$ un opérateur Lipschitzien. les propriétés suivantes sont équivalentes

1. T est Lipschitzien strictement p -nucléaire
2. la linéarisation d'opérateur \hat{T} est p -nucléaire d'autre part

$$\mathcal{N}_p^{SL}(X, E) = \mathcal{N}_p(\mathcal{F}(X), E)$$

Preuve 3.3.2 :

Supposons que \hat{T} est p -nucléaire. soit $x_k, y_k \in X$ et $e_k^* \in E^* (1 \leq k \leq l)$ on pose $u = \sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \boxtimes s_k^*$.

Soit A_u l'ensemble défini en (1.2). pour tout $m \in A_u$ par (2.2) on a

$$\sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle = \sum_{i=1}^{n_1} \langle \hat{T}(m_i), e_i^* \rangle$$

Maintenant, T est strictement Lipschitzien p -nucléaire. soit $m = ((m_i)_{i=1}^{n_1}), (e_i^*)_{i=1}^{n_1} \in A_u$ par (3.4) on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n_1} \langle \hat{T}(m_i), e_i^* \rangle \right| \\ &\leq N_p(\hat{T}) \| (m_i) \|_{l_p^{n_1, w}(\mathcal{F}(X))} \| (e_i^*) \|_{l_{p^*}^{n_1, w}(E)} \end{aligned}$$

pour prendre l'infimum de toutes les représentations de $m \in A_u$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^l \langle T(x_k) - T(y_k), s_k^* \rangle \right| &\leq N_p(\hat{T}) w_p \left(\sum_{k=1}^l \delta_{(x_k, y_k)} \otimes s_k^* \right) \\ &\leq N_p(\hat{T}) w_p^{SL}(u) \end{aligned}$$

Alors T est strictement Lipschitzien et p -nucléaire

$$N_p^{SL}(T) \leq N_p(\hat{T})$$

Inversement, soit $m_i \in \mathcal{F}(X)$ et $e_i^* \in E^* (1 \leq i \leq n_1)$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} \langle \hat{T}(m_i), e_i^* \rangle &= \sup_{(\xi_i)_{i \in B_{l_\infty}^{n_1}}} \left| \sum_{i=1}^{n_1} \xi_i \langle \hat{T}(m_i), e_i^* \rangle \right| \\ &= \sup_{(\xi_i)_{i \in B_{l_\infty}^{n_1}}} \left| \sum_{i=1}^{n_1} \xi_i \left\langle \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)), e_i^* \right\rangle \right| \\ &= \sup_{(\xi_i)_{i \in B_{l_\infty}^{n_1}}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} T(x_i^j) - T(y_i^j), \lambda_i^j \xi_i e_i^* \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{(\xi_i)_{i \in B_{l_\infty}^{n_1}}} N_p^{SL}(T) w_p^{SL}(u) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \delta_{(x_i^j, y_i^j)} \boxtimes \lambda_i^j \xi_i e_i^* \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \xi_i \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j \delta_{(x_i^j, y_i^j)} \boxtimes e_i^* \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \xi_i m_i \boxtimes e_i^* \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} \left| \langle \hat{T}(m_i), e_i^* \rangle \right| &\leq \sup_{(\xi_i)_{i \in B_{l_\infty}^{n_1}}} N_p^{SL}(T) \| m_i \|_{l_p^{n_1, w}(\mathcal{F}(X))} \| (e_i)_i \|_{l_{p^*}^{n_1, w}(E^*)} \\ &\leq N_p^{SL}(T) \| m_i \|_{l_p^{n_1, w}(\mathcal{F}(X))} \| (e_i)_i \|_{l_{p^*}^{n_1, w}(E^*)} \end{aligned}$$

Alors, par (3.4) \hat{T} est p -nucléaire et

$$N_p(\hat{T}) \leq N_p^{SL}(T)$$

3.4 Opérateurs Lipschitziens strictement (p,r,s)-sommants

Définition 3.4.1 :

Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach. $T : X \rightarrow E$ une application Lipschitzienne. T est Lipschitzienne (p,r,s) -sommant s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_i, (y_i)_i \subset X$, $(e_i^*)_i \subset E^*$ et $(\lambda_i)_i, (K_i)_i$ dans \mathbb{R}_+^* , ($1 \leq i \leq n$), on a :

$$\|(\lambda_i \langle T(x_i) - T(y_i), e_i^* \rangle)_i\|_{l_p^n} \leq C w_r^{Lip}((\lambda_i k_i^{-1}, x_i, y_i)_i) \|(k_i e_i^*)_i\|_{l_s^{n,w}(E^*)} \quad (3.14)$$

où $w_r^{Lip}((\lambda_i k_i^{-1}, x_i, y_i)_{i=1}^n)$ est Lipschitzien faible ρ -norme définie par

$$\begin{aligned} w_r^{Lip}((\lambda_i k_i^{-1}, x_i, y_i)_{i=1}^n) &= \sup_{f \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i (f(x_i) - f(y_i))|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \|\lambda_i \delta_{(x_i, y_i)}\|_{l_r^{n,w}(\mathcal{F}(X))} \end{aligned}$$

On note par $\Pi_{p,r,s}^L(X, E)$ l'espace de Banach de toutes les opérateurs Lipschitziens (p,r,s) -sommants muni par la norme $\pi_{p,r,s}^L(T)$ la plus petite constante C vérifier l'inégalité (3.14)

Définition 3.4.2 :

soient $0 < p, r, s < \infty$ tel que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$, X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Un opérateur Lipschitzien $T : X \rightarrow E$ est Lipschitzien strictement (p,r,s) -sommant s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i^j)_{i=1}^{n_1}, (y_i^j)_{i=1}^{n_2} \subset X$, $(e_i^*)_{i=1}^{n_1} \subset E^*$ et $(\lambda_i^j)_{i=1}^{n_1} \subset \mathbb{K}(j = 1, \dots, n_2)$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} \left| \left\langle \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)), e_i^* \right\rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(y_i^j)) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \|(e_i^*)\|_{l_s^{n_1,w}(E^*)} \quad (3.15)$$

La classe de tous les opérateurs strictement Lipschitziens (p, r, s) -sommants de X dans E est notée par $\Pi_{p,r,s}^{SL}(X, E)$, qui est un espace de Banach sa norme $\pi_{p,r,s}^L(T)$ est la plus petite constante C vérifiée l'inégalité (3.15)

Remarque 3.4.3 :

1) Si on pose $n_2 = 1$ on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} |\langle \lambda_i (T(x_i) - T(y_i)), e_i^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} |K_i^{-1} \lambda_i (f(x_i) - f(y_i))|^r \right)^{\frac{1}{r}} \|(K_i e_i^*)\|_{l_s^{n_1,w}(E^*)}$$

i.e.,

$$\Pi_{p,r,s}^{SL}(X, E) \subset \Pi_{p,r,s}^L(X, E)$$

2) Si $p = 1$, r et s vérifiant $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ la définition coïncide avec la définition Lipschitzien strictement r -nucléaire.

Théorème 3.4.4 :

Supposons que $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$, soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach, et $T : X \rightarrow E$ un opérateur Lipschitzien . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1) T est Lipschitzien strictement (p,r,s) -sommant .
- 2) \hat{T} est (p,r,s) -sommant. Dans ce cas on a

$$\pi_{p,r,s}(\hat{T}) = \pi_{p,r,s}^{SL}(T)$$

Preuve :

1) \Rightarrow 2) : Soit T un opérateur Lipschitzien strictement (p,r,s) -sommant. Soit $m_i \in \mathcal{F}(X)$ sous la forme $m_i = \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j \delta(x_i^j, y_i^j)$ et $e_1^*, \dots, e_{n_1}^* \in E^*$. Alors

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left| \langle \hat{T}(m_i), e_i^* \rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left| \langle \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)), e_i^* \rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_{p,r,s}^{SL}(T) \sup_{f \in B_{X\#}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} |f(m_i)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \| (e_i^*) \|_{l_s^{n_1,w}(E^*)} \\ &\leq \pi_{p,r,s}^{SL}(T) \| (m_i) \|_{l_r^{n_1,w}(\mathcal{F}(X))} \| (e_i^*) \|_{l_s^{n_1,w}(E^*)}. \end{aligned}$$

Alors, \hat{T} est (p,r,s) -sommant et on a

$$\pi_{p,r,s}(\hat{T}) \leq \pi_{p,r,s}^{SL}(T)$$

2) \Rightarrow 1) : soit $(x_i^j)_{i=1}^{n_1}, (y_i^j)_{i=1}^{n_1} \in X$, $(\lambda_i^j)_{i=1}^{n_1} \subset \mathbb{K} (j = 1, \dots, n_2)$ et chaque $e_1^*, \dots, e_{n_1}^* \in E^*$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (T(x_i^j) - T(y_i^j)), e_i^* \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left| \langle \hat{T}(m_i), e_i^* \rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_{p,r,s}^{SL}(\hat{T}) \| (m_i) \|_{l_r^{n_1,w}(\mathcal{F}(X))} \| (e_i^*) \|_{l_s^{n_1,w}(E^*)} \\ &\leq \pi_{p,r,s}^{SL}(\hat{T}) \sup_{f \in B_{X\#}} \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left| \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(y_i^j)) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \| (e_i^*) \| \end{aligned}$$

Alors, T est Lipschitzien (p,r,s) -sommant et on a

$$\pi_{p,r,s}^{SL}(T) \leq \pi_{p,r,s}(\hat{T}). \quad \blacksquare$$

Chapitre 4

Opérateurs Lipschitziens ϕ -sommants

Dans ce chapitre, nous allons étudier la classe des opérateurs Lipschitziens ϕ -sommants qui a été introduite par M. Belaala [3] en 2017 . Cette classe est une généralisation naturelle de celle du cas linéaire introduite par R. Khalil et W. Deeb[6] en 1987. On verra qu'elle vérifie également le théorème de factorisation de Pietsch et quelques propriétés.

4.1 Opérateur linéaire ϕ -sommant

4.1.1 Fonction module

Définition 4.1.1.1 : (Fonction module)[6]

Une fonction $\phi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ est appelée fonction module (modulus) si

1. ϕ est une fonction continue en $[0, \infty[$
2. $\phi(0) = 0$,
3. $\phi(x + y) \leq \phi(x) + \phi(y), \forall x, y \in [0, \infty$ (sous- additif),
4. ϕ est strictement croissante.

Propriété 4.1.1.2 :

De la définition de la fonction module, on peut trouver

1. Si ϕ une fonction module , alors ,
 - i. ϕ est bijective.
 - ii. ϕ^{-1} n 'est pas fonction module
2. La composition de deux fonctions modules est une fonction module et n'est pas commutative.
 $n \in \mathbb{N}^* : \phi \circ \dots \circ \phi$ est une fonction module et $\phi^n(\alpha x) \leq (n + \alpha)\phi^n(x), \alpha > 0$.

Exemple 4.1.1.3 :

Ces fonctions $\phi(x) = x^p$ et $\phi(x) = \ln(1 + x)$ pour $x \geq 0$ lorsque $0 < p \leq 1$ sont des fonctions modules.

Définition 4.1.1.4 :

Soient E, F deux espaces de Banach et ϕ une fonction module sur $[0, \infty)$. Considérons les deux espaces suivants :

$$1. l^\phi \langle E \rangle = \left\{ (x_n) : \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_n \phi |\langle x_n, x^* \rangle| < \infty, x_n \in E \right\},$$

$$2. l^\phi(F) = \{(x_n) : \sum_n \phi \|x_n\| < \infty, x_n \in F\}$$

Pour $x = (x_n) \in l^\phi \langle E \rangle$, on définit

$$\|x\|_\epsilon = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_n \phi |\langle x_n, x^* \rangle|$$

et pour $y = (y_n) \in l^\phi(F)$, on définit

$$\|y\|_\pi = \sum_n \phi \|y_n\|$$

Définition 4.1.1.5 :

Un opérateur linéaire $T : l^\phi \langle E \rangle \longrightarrow l^\phi(F)$ sera appelé métriquement borné si pour tout $x = (x_n) \in T : l^\phi \langle E \rangle$ il existe un $\lambda > 0$ tel que

$$\|T(x)\|_\epsilon \leq \lambda \|x\|_\epsilon$$

On note $L^\phi(E, F)$ l'espace de tout les opérateurs métriquement bornés de $l^\phi \langle E \rangle$ dans $l^\phi(F)$ de norme

$$\|T\|_\phi = \inf \{ \lambda : \|T(x)\|_\epsilon \leq \lambda \|x\|_\epsilon, x \in l^\phi \langle E \rangle \}$$

4.1.2 Opérateur linéaire ϕ -sommant

Définition 4.1.2.1 [6] :

Pour les espaces de Banach E et F , un opérateur linéaire borné $T : E \longrightarrow F$ est appelé ϕ -sommant si pour tout ensemble fini $(x_i)_{i=1}^n$ dans E il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^n \phi (\|T(x_i)\|) \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n \phi (|x^*(x_i)|). \quad (4.1)$$

4.1.3 Théorème de domination de Pietsch

Théorème 4.1.3.1 :

Soit $T \in L(E, F)$. Les éléments suivants sont équivalents :

- 1) $T \in \Pi^\phi(E, F)$.
- 2) Il existe $\lambda > 0$ et $\nu \in S(M)$ (la sphère de M) tel que

$$\phi \|T(x)\| \leq \lambda \int_{B_{E^*}} \phi |\langle x, x^* \rangle| d\nu(x^*)$$

Preuve 4.1.3.2 2) \Rightarrow 1) , évident

1) \Rightarrow 2) ,Soit $T \in \Pi^\phi(E, F)$ et $\lambda = \|T\|_\phi$ pour toute suite finie $(x_i)_{i=1}^n$ dans E , définissent l'application

$$\begin{aligned} Q : S(M) &\longrightarrow C \\ \mu &\longmapsto Q(\mu) = \sum_{i=1}^n \phi \|T(x_i)\| - \lambda \sum_{i=1}^n \int_{B_{E^*}} \phi |\langle x, x^* \rangle| d\mu. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Clairement, la fonction est convexe .De plus il existe un point $\mu_0 \in S(M)$ tel que. En effet choisir la mesure de dirac x_0^* l'endroit où

$$\sum_{i=1}^n \phi |\langle x_i, x_0^* \rangle| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n \phi |\langle x_i, x^* \rangle|$$

De plus ,si Q_1, \dots, Q_r est une collection de telles fonction définies par (4.2), alors pour toute $(a_1, \dots, a_r), \sum_{i=1}^r a_k = 1$ il existe Q défini de manière similaire, bien que $\sum_{i=1}^r a_k Q_k(u)$ pour tout $S(M)$.

D'où l'ensemble des fonction dans $S(M)$ défini par (4.2) satisfait le lemme de Fan's .Il existe donc une mesure dans $S(M)$ tel que $Q(v) \leq 0$ pour tout Q défini par (4.2).avec la suite associer, $x \in E$ on obtient

$$\phi \|T(x_i)\| \leq \lambda \int_{B_{E^*}} \phi |\langle x, x^* \rangle| dv. \quad \blacksquare$$

4.2 Opérateurs Lipschitziens ϕ -sommants

Définition 4.2.1 :[3]

Soit ϕ une fonction module et soit X, Y des espaces métriques pointés . Une application Lipschitzienne $T \in Lip(X, Y)$ est appelée ϕ - sommant s'il existe une constante $C \geq 0$. telle que quel que soit le choix des points $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n$ dans X et le choix des nombres $(a_i)_{i=1}^n$ dans R^+ , on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n a_i \phi(d(T(x_i), T(x'_i))) \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n a_i \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) \quad (4.3)$$

on note

$$\pi_\phi^L(T) = \{\inf C : C \text{ vérifiant}(4.3)\}$$

Rrmarque 4.2.2 :

La définition (4.2.1) est la même si on se restreint à $a_i = 1$

Lemme 4.2.3 :

Si (X, d) est un espace métrique pointé, on peut considérer une nouvelle métrique sur X en mettant $d_\phi = \phi \circ d$.

Preuve 4.2.4 : pour tout $x, y \in X$ on a

$$\begin{aligned} d_\phi(x, y) = 0 &\iff \phi \circ d(x, y) \\ &\iff d(x, y) = 0 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} d_\phi(x, y) &= \phi \circ d(x, y) \\ &= \phi \circ d(y, x) \\ &= d_\phi(y, x) \end{aligned}$$

pour tout $x, y, z \in X$ on a

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies \phi \circ d(x, z) \leq \phi \circ d(x, y) + \phi \circ d(y, z)$$

i.e. $d_\phi(x, z) \leq d_\phi(x, y) + d_\phi(y, z)$

On définit alors $Lip_\phi(X, Y) = Lip((X, \phi \circ d), (Y, \phi \circ d))$ et

$$Lip_\phi(T) = \sup \left\{ \frac{\phi(d(T(x), T(y)))}{\phi(d(x, y))} : x, y \in X, x \neq y \right\}$$

pour toutes $T \in Lip_\phi(X, Y)$. Les assertions suivantes peuvent être vérifiées facilement.

Proposition 4.2.5 :

Soit ϕ est une fonction module et X, Y sont des espaces métriques pointés.

1) $Lip(X, Y) \subset Lip_\phi(X, Y)$ et $Lip_\phi(T) \leq 1 + Lip(T)$ pour tous les $T \in Lip(X, Y)$.

2) $\Pi_\phi^L(X, Y) \subset Lip_\phi(X, Y)$ et $Lip_\phi(T) \leq \pi_\phi^L(T)$ pour tout $T \in \Pi_\phi^L(X, Y)$.

Preuve 4.2.6 :

1) Si $T \in Lip(X, Y)$, alors

$$d(T(x), T(y)) \leq Lip(T)d(x, y).$$

pour tout $x, y \in X$, et ainsi

$$\begin{aligned} \phi(d(T(x), T(y))) &\leq \phi(Lip(T)d(x, y)) \\ &\leq (1 + Lip(T))\phi(d(x, y)) \end{aligned}$$

Donc pour tout $x, y \in X$ et cela prouve 1)

2) Si $T \in \Pi_\phi^L(X, Y)$, on a

$$\sum_{i=1}^n \phi(d(T(x_i), T(y_i))) \leq \pi_\phi^L(T) \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(y_i)|) \quad (4.4)$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \subset X$. En particulier ($n=1$),

$$\begin{aligned} \phi(d(T(x), T(y))) &\leq \pi_\phi^L(T) \sup_{f \in B_{X^\#}} \phi(|f(x) - f(y)|) \\ &= \pi_\phi^L(T) \phi(d(x, y)), \end{aligned}$$

pour tout $x, y \in X$ et on obtient ainsi 2). Pour la dernière égalité ci dessus, notez que

$$\phi(d(x, y)) = \phi(|h_y(x) - h_y(y)|) \leq \sup_{f \in B_{X^\#}} \phi(|f(x) - f(y)|) \leq \phi(d(x, y))$$

où h_Y est la fonction dans $B_{X\#}$ définie par

$$h_y(z) = d(z, y) - d(0, y)$$

pour tout $z \in X$ on a

$$h_y(x) - h_y(y) = d(x, y)$$

■

Proposition 4.2.7 :

Soit ϕ une fonction module, soit X, Y, Z, W des espaces métrique pointé, soit $B \in \text{Lip}(X, Y), T \in \Pi_\phi^L(Y, Z)$ et $A \in \text{Lip}(Z, W)$. Alors $A \circ T \circ B \in \Pi_\phi^L(X, W)$ et

$$\pi_\phi^L(ATB) \leq \text{Lip}_\phi(A) \pi_\phi^L(T) (1 + \text{Lip}(B))$$

Preuve 4.2.8 :

pour tout $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n \subset X$, on utilise la définition d'opérateur Lipschitzien ϕ -sommant, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi(d(ATB(x_i), ATB(x'_i))) &\leq \text{Lip}_\phi(A) \sum_{i=1}^n \phi(d(TB(x_i), TB(x'_i))) \\ &\leq \text{Lip}_\phi(A) \pi_\phi^L(T) \sup_{g \in B_{Y\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|g(B(x_i)) - g(B(x'_i))|) \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité $\phi(at) \leq (1+a)\phi(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} \phi(|g(B(x_i)) - g(B(x'_i))|) &= \phi(\text{Lip}(B)) \left| \frac{g \circ B}{\text{Lip}(B)}(x_i) - \frac{g \circ B}{\text{Lip}(B)}(x'_i) \right| \\ &\leq (1 + \text{Lip}(B)) \phi \left| \frac{g \circ B}{\text{Lip}(B)}(x_i) - \frac{g \circ B}{\text{Lip}(B)}(x'_i) \right| \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{i=1}^n \phi(d(ATB(x_i), ATB(x'_i))) \leq \text{Lip}_\phi(A) \pi_\phi^L(T) (1 + \text{Lip}(B)) \sup_{f \in B_{X\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|)$$

Donc $ATB \in \Pi_\phi^L(X, Y)$ et $\pi_\phi^L(ATB) \leq \text{Lip}_\phi(A) \pi_\phi^L(T) (1 + \text{Lip}(B))$ ■

Théorème 4.2.9 :

Soient ϕ une fonction modulus et X, Y deux espaces métriques, $T : X \rightarrow Y$ un opérateur lipschitzien. Alors T est lipschitzien ϕ sommant si et seulement si il existe une constante $C > 0$ et une mesure de probabilité régulière μ sur $B_{X\#}$ telle que

$$\phi(d(T(x), T(x'))) \leq C \int_{B_{X\#}} \phi(|f(x) - f(x')|) d\mu(f)$$

pour tout $x, x' \in X$: Dans ce cas, $\pi_\phi^L(T)$ est le minimum de toutes les constantes C pour lequel une mesure existe.

Preuve 4.2.10 :

Supposons que $T \in \pi_\phi^L(X, Y)$ pour tout $(x_i)_{i=1}^n; (x'_i)_{i=1}^n \in X$ et $(\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}$; on définit la fonction $\varphi_{(\lambda_i, x_i, x'_i)_{i=1}^n} : B_{X^\#} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi_{(\lambda_i, x_i, x'_i)_{i=1}^n}(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(d(T(x_i); T(x'_i))) - \pi_\phi^L \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|)$$

Soit A l'ensemble constitué de telles fonctions, A est une partie convexe de $C(B_{X^\#})$, en effet soient

$\varphi_{(x_i, y_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}}$ et $\varphi_{(x'_j, y'_j, \beta_j)_{1 \leq j \leq m}} \in A$

tel que $\alpha_i > 0, x_i, x'_i \in X (1 \leq i \leq n), \beta_j > 0, y_j, y'_j \in X (1 \leq j \leq m)$ on a

$$\begin{aligned} \varphi_{(x_i, x'_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}}(f) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i C\phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(\|T(x_i) - T(x'_i)\|) \\ \varphi_{(y_j, y'_j, \beta_j)_{1 \leq j \leq m}}(f) &= \sum_{j=1}^m \beta_j C\phi(|f(y_j) - f(y'_j)|) - \sum_{j=1}^m \beta_j \phi(\|T(y_j) - T(y'_j)\|) \end{aligned}$$

alors,

$$\varphi_{(x_i, x'_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}}(f) + \varphi_{(y_j, y'_j, \beta_j)_{1 \leq j \leq m}}(f) =$$

$$\sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k C\phi(|f(z_k) - f(z'_k)|) - \sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k \phi(\|T(z_k) - T(z'_k)\|) \in A, \gamma_k > 0, z_k, z'_k \in X$$

Lequel

$$\begin{aligned} T(z_k) &= \begin{cases} T(x_k) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ T(y_{k-n}) & \text{si } n+1 \leq k \leq n+m \end{cases} \\ T(z'_k) &= \begin{cases} T(x'_k) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ T(y'_{k-n}) & \text{si } n+1 \leq k \leq n+m \end{cases} \\ \gamma_k &= \begin{cases} \alpha_k & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \beta_{k-n} & \text{si } n+1 \leq k \leq n+m \end{cases} \end{aligned}$$

soit $\lambda > 0$,

$$\lambda \varphi_{(x_i, x'_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}}(f) = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i C\phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) - \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i \phi(\|T(x_i) - T(x'_i)\|) \in A.$$

Maintenant en considère l'ensemble

$$B = \{\varphi \in C(B_{X^\#}) : \varphi(f) > 0, \forall f \in B_{X^\#}\}$$

Clairement, B est un sous-ensemble ouvert convexe de l'espace de Banach $C(B_{X^\#})$. De plus, A et B sont disjoint.

En effet, sinon, on pourrait trouver $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n$ dans X et $(\lambda_i)_{i=1}^n$ dans \mathbb{R} tel que $\varphi_{(\lambda_i, x_i, x'_i)_{i=1}^n}(f) > 0$ pour tout $f \in B_{X^\#}$, c'est-à-dire

$$\pi_\phi^L \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) < \pi_\phi^L \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(d(T(x_i), T(x'_i)))$$

pour tous les $f \in B_{X^\#}$. Mais puisque $B_{X^\#}$ est faiblement compact et que $f \mapsto \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|)$ est une fonction continue de $(B_{X^\#}, w^*)$ dans \mathbb{R} , on aurait

$$\pi_\phi^L \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) < \pi_\phi^L \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(d(T(x_i); T(x'_i)))$$

et ceci est impossible car T est dans $\Pi_\phi^L(X, Y)$.

Alors, par le théorème de séparation de Hahn Banach et le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure μ régulière de probabilité de Borel sur $B_{X^\#}$ et un scalaire $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{B_{X^\#}} \varphi_{(\lambda_i, x_i, x'_i)_{i=1}^n} d\mu(f) \leq c < \int_{B_{X^\#}} \varphi d\mu(f).$$

pour tout $\varphi_{(\lambda_i, x_i, x'_i)_{i=1}^n} \in A$ et tout $\varphi \in B$. Remarquons que $c = 0$.

En effet, $0 \leq c$ puisque la fonction nulle $\varphi_{(\lambda_i, x_i, x'_i)_{i=1}^n}$ est dans A ; et $c \leq 0$ puisque toutes les fonctions constantes positives sont dans B . Il s'ensuit que

$$\int_{B_{X^\#}} \varphi_{(1, x, x')}(f) d\mu(f) \leq 0$$

pour tout $x, x' \in X$, et puisque μ est une mesure de probabilité, nous concluons que

$$\phi(d(T(x), T(x'))) \leq \pi_\phi^L \int_{B_{X^\#}} \phi(|f(x) - f(x')|) d\mu(f)$$

pour tous $x, x' \in X$. Inversement, supposons que le deuxième énoncé du théorème soit vrai et soit $(x_i)_{i=1}^n, ((x'_i)_{i=1}^n \subset X$. Nous avons

$$\phi(d(T(x_i), T(x'_i))) \leq C \int_{B_{X^\#}} \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) d\mu(f)$$

pour $i = 1, \dots, n$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi(d(T(x_i), T(x'_i))) &\leq C \int_{B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) d\mu(f) \\ &\leq C \int_{B_{X^\#}} \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) d\mu(f) \\ &\leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|f(x_i) - f(x'_i)|) \end{aligned}$$

Donc $T \in \Pi_\phi^L(X, Y)$ et $\pi_\phi^L(T) \leq C$.

Enfin, il ressort de la preuve que $\pi_\phi^L(T)$ est la valeur minimale de C .

Proposition 4.2.11 :

Soit ϕ une fonction module, Soit X, Y deux espace métriques et $T \in \text{Lip}(X, Y)$. Si \hat{T} est ϕ -sommant, Alors T est Lipschitzien ϕ -sommant et $\pi_\phi^L(T) \leq \pi_\phi(\hat{T})$

Preuve 4.2.12 :

$$d(T(x), T(y)) = \|\delta_{T(x)} - \delta_{T(y)}\| = \|\hat{T}(\delta_x) - \hat{T}(\delta_y)\| = \|\hat{T}(\delta_x - \delta_y)\|$$

pour tout $x, y \in X$. Si T est ϕ -sommant, on a

$$\sum_{i=1}^n \phi(\|T(\gamma_i)\|) \leq \pi_\phi(\hat{T}) \sup_{F \in B_{\mathcal{F}(X)^*}} \sum_{i=1}^n \phi(|F(\gamma_i)|) \text{ pour chaque ensemble } (\gamma) \subset \mathcal{F}(X).$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi(d(T(x_i), T(y_i))) &\leq \pi_\phi(\hat{T}) \sup_{F \in B_{\mathcal{F}(X)^*}} \sum_{i=1}^n \phi(|F(\delta_{x_i} - \delta_{y_i})|) \\ &= \pi_\phi(\hat{T}) \sup_{F \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|Q_X(f)(\delta_{x_i} - \delta_{y_i})|) \\ &\leq \pi_\phi(\hat{T}) \sup_{F \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \phi(|F(x_i) - f(y_i)|). \end{aligned}$$

En conséquent, T est Lipschitzien ϕ -sommant et $\pi_\phi^L(T) \leq \pi_\phi(\hat{T})$ ■

Conclusion

Dans ce mémoire intitulé "**quelques opérateurs Lipschitziens sommants** " on a présenté quelques classes d'opérateurs non linéaires, en passant par les étapes suivantes :

le premier chapitre , Dans ce chapitre nous avons donné des définitions et propriétés sur les applications linéaires et l'opérateurs p-sommants et les opérateurs Lipschitziens p-sommants .

Le deuxième chapitre , est consacré à la version non linéaire d'un opérateur p-sommant introduite par D.Farmer et W.B.Johnson à savoir la propriété d'idéale et le théorème de domination de Pietsch qui ont montré que si en prend T un opérateurs linéaire alors la norme d'opérateur linéaire p-sommant et la même norme d'opérateur Lipschitzien p-sommant. et si la linéarisation \hat{T} de T est p -sommant alors T est Lipschitzien p-sommant

Le troisième chapitre : Ce chapitre est basé sur l'article de M.Belaala et k.Saadi où ils ont donné une nouvelle caractérisation d'opérateurs Lipschitziens strictement p-sommants, ils ont adopté cette définition à d'autres classes d'opérateurs Lipschitziens ,appelés Lipschitziens strictement p-nucléaires et opérateurs Lipschitziens strictement(p,r,s)-sommants.

A travers les démonstrations des théorèmes qui incluent la relation entre des opérateurs Lipschitziens strictement p-sommants et leur linéarisations été déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_p^{SL}(X, E) &= \mathcal{N}_p(\mathcal{F}(X), E) \\ \pi_{p,r,s}(\hat{T}) &= \pi_{p,r,s}^{SL}(T) \\ \mathcal{N}_p^{SL}(X, E) &\subset \Pi_p^{SL}(X, E) \subset \Pi_p^L(X, E) \\ \Pi_{p,r,s}^{SL}(X, E) &\subset \Pi_p^L(X, E)\end{aligned}$$

Le quatrième chapitre (dernier chapitre) . Dans ce chapitre on va étudier les opérateurs linéaires ϕ -sommants entre espaces métriques en donnant une version non linéaire du théorème de domination de Pietsch pour cette classe et quelques propriétés de ces opérateurs.

Bibliographie

- [1] D.Achour ,P.Rueda, E.A.Sanchez-Pérez and R.Yahi, *Lipschitz operator ideals and the approximation property* , J.Math Anal.Appl.436(2016),no.1,217-236.
- [2] M.Belaala and K.Saadi,*Further results on strictly Lipschitz summing Operators*.Maroccan Journal of Pure and Applied Analysis .(2022)-191-211.
- [3] M.Belaala ,*Lipschitz ϕ -summing operators*,Analele Universitatatii oradea Fasc. M atematica, Tom XXIV (2017), Issue No. 2, 175(180)
- [4] M.G .Cabrera-Padilla,J.A,Cahavez-Domingues, A.Jiménez-Vargas and M.Villegas-Vallecillos, *Lipschitz tensor product*, Khayyam J.Math.1(2015),no.2 , 185-218.
- [5] D.Farmer and William B. Johnson ,*Lipschitz p -summing opérators*(2009)2989-2995.
- [6] R.Khalil et W.Deeb, *ϕ -sommant opérators in banach space* , J.Math.Anal.Appl.127(1987),577-584.
- [7] K.Saadi, *On the composition idéals of Lipschitz mapping*, Banach J. Math.Anal.11(4)825-840
- [8] Y .Benyamini et J.Lindenstrausse ,*Geomeric non linear functiona analisys*,vol.1, Amer.Math.Soc.Coloque ., Publ.vol.48,Amer.Math.Soc, Providence, RI,2000.MR1727673(2001b :46001)
- [9] N.Weaver , *Lipschitz Algebra*, World Scientific, Singapore,1999.

المخلص

في هذه المذكرة التي تندرج في اطار التحليل الدالي وعلى وجه الخصوص هندسة فضاءات باناخ ، ومن ضمن المؤثرات غير الخطية قمنا بدراسة المؤثرات الليبشيتزية p جمعية . تطرقنا اولا الى التذكير بالمؤثرات الجمعية ومن بعدها المؤثرات الليبشيتزية p لجمعية ثم انطلاقا من تعريف المؤثرات الليبشيتزية الجمعية تماما والمؤثرات الليبشيتزية (p, r, s) جمعية ادخلنا تمييزات جديدة لهذه الاصناف وانهيينا العمل بدراسة مفهوم مؤثر ليبشيتزي ϕ جمعي .

الكلمات المفتاحية :

مؤثر ليبشيتزي p جمعي ، مؤثر ليبشيتزي تماما p -جمعي، ناظم موتري ، عامل بيتش.

Abstract

The context of this dissertation falls within the framework of functional analysis and more precisely the geometry of space of Banach. We have studies the nonlinear operator .First we discussed the generalization of the Lipschitz operator definition and from the definition of strictly Lipschitz operator summing. We have introduced new characterization. Finally we finished our work by the study of the notion of Lipschitz ϕ -summing operators.

Key words :

Lipschitz p -summing operator , strictly Lipschitz p -summing opérateur,strictly p -nuclear operator , norme tensor,Peitsch factorisation.