



# UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

## MEMOIRE

Présenté pour l'Obtention du Diplôme de

## MAGISTER

En Génie Mécanique

Option : Energétique

PAR

Mr. BOUNNAH YOUNES

## SUJET

# CALCUL DES COEFFICIENTS STATIQUES ET DYNAMIQUES D'UN PALIER HYBRIDE EN REGIME LAMINAIRE ET TURBULENT

Soutenu publiquement le : 01/12/2011 Devant le jury composé de :

Mr. MEZIANI Salim	Professeur, Université Mentouri, Constantine	Président
Mr. LARBI Salah	Professeur, Ecole Nationale Polytechnique	Rapporteur
Mr. BOUCHOUCHA Ali	Professeur, Université Mentouri, Constantine	Examineur
Mr. BEGHIDJA El Hadi	Professeur, Université Mentouri, Constantine	Examineur
Mr. FARSI Chaouki	Maître de conférences, Université de M'sila	Examineur

Promotion 2001/2002

## RESUME

Une analyse numérique a été menée, au cours de ce travail, afin d'étudier le champ de pression et les caractéristiques statique et dynamiques d'un palier hybride (type de paliers reposant sur les principes hydrodynamiques et hydrostatiques) à quatre alvéoles équidistants, alimentés en lubrifiant par des capillaires, et ce, dans les deux régimes d'écoulement laminaire et turbulent.

La discrétisation de l'équation de Reynolds statique, et l'équation de Reynolds dynamique perturbée analytiquement, à été faite par le biais de la méthode des éléments finis, et le tout a été validé par le code de calcul PHMEF (programmé en PASCAL OBJET avec un parallélisme des calculs).

**Mots clés :** Tribologie, Lubrification, Palier, lubrification hydrodynamique, Lubrification hydrostatique, Lubrification hybride, Equation de Reynolds, Films minces visqueux, Méthode des éléments finis, Simulation.

---

## ABSTRACT

A numerical analysis was conducted in this work to study the pressure field and the static and dynamic characteristics of a hybrid journal bearing (type of journal bearings based on the principles of hydrodynamic and hydrostatic) with four equidistant recess supplied with lubricant by capillaries, and this, in both laminar flow and turbulent flow.

The discretization of the static Reynolds equation and dynamic Reynolds equation, analytically perturbed, was made by means of the finite element method and the whole has been validated by the computer code PHMEF (programmed in Object Pascal with parallel calculations).

**Keywords:** Tribology, Lubrication, Journal bearing, Hydrodynamic lubrication, Hydrostatic lubrication, Hybrid lubrication, Reynolds equation, Viscous thin films, Finite Element Method, Simulation.

---

## ملخص

في هذه الدراسة أقيم تحليل رقمي و الذي مكننا من دراسة مجال الضغط كذا الخصائص السكونية و الديناميكية لحامل هجين ( حامل يرتكز على مبادئ هيدروديناميكية و هيدرو ستاتيكية ) ذو اربعة مجوفات متباعدة هذه الأخيرة مزودة باستمرار بسائل التشحيم عبر مسامات ، وفقا لنظامي التدفق الرقائقي و المضطرب .

ان تجزئة معادلة رينولدز السكونية و معادلة رينولدز الديناميكية المطبق عليها اضطراب تحليلي قد اقيمت بفضل طريقة العناصر المتناهية ، وهذا كله تم المصادقة عليه بواسطة البرنامج المعلوماتي PHMEF ( مبرمج بلغة باسكال بنظام توازي العمليات الحسابية ) .

الكلمات المفاتيح : علم الاحتكاك ، التشحيم، حامل ، التشحيم الهيدروديناميكي، التشحيم الهيدرو ستاتيكي ، التشحيم الهجين، معادلة رينولدز، الأغشية اللزجة الرقيقة ، طريقة العناصر المتناهية ، المحاكات .

# SOMMAIRE

## NOMENCLATURE

<b><u>INTRODUCTION GENERALE</u></b> .....	01
<b><u>I- CONTEXTE BIBLIOGRAPHIQUE</u></b> .....	04
<b>I-2- Historique</b> .....	04
<b>I-3- Conclusion</b> .....	09
<b><u>II – MODELISATION MATHEMATIQUE DE LA LUBRIFICATION HYBRIDE</u></b> .....	10
<b>II-1- Equation de Reynolds généralisée en régime laminaire</b> .....	10
II-1-1- Equations de base de la lubrification.....	10
II-1-2- Equation généralisée des films minces visqueux.....	11
II-1-3- Equation de Reynolds généralisée.....	13
II-1-3-1- Equation de Reynolds en coordonnées cartésiennes.....	14
II-1-3-1- Equation de Reynolds en coordonnées cylindriques.....	15
II-1-4- Application à un système arbre coussinet.....	16
<b>II-2- Equation de Reynolds en régime turbulent</b> .....	16
IV-2-1- Modèle Bulk-Flow pour un écoulement turbulent d'un film mince.....	16
<b>II-3- Caractéristiques géométriques d'un palier hybride</b> .....	19
<b>II-4- Conclusion</b> .....	20
<b><u>III – MODELES MATHEMATIQUES UTILISES</u></b> .....	21
<b>III-1- Hypothèses</b> .....	22
<b>III-2- Caractéristiques statiques d'un palier hybride</b> .....	22
III-2-1- Equation de Reynolds en régime statique laminaire.....	22
III-2-2- Equation de Reynolds en régime statique turbulent.....	22
III-2-3- Coefficients statiques.....	23
III-2-3-1- Charge et angle de calage.....	23
III-2-3-2- Couple de frottement.....	23
III-2-3-3- Débit sortant.....	24
III-2-3-4- Nombre de Sommerfeld.....	24
<b>III-3- Caractéristiques dynamique d'un palier hybride</b> .....	24
III-3-1- Equation de Reynolds en régime dynamique laminaire.....	24
III-3-2- Equation de Reynolds en régime dynamique turbulent.....	26
III-3-3- Coefficients dynamiques.....	26
III-3-3-1- Modélisation linéaire des coefficients dynamiques.....	26
III-3-3-2- Méthode des perturbations.....	28
III-3-3-2-1- Forces additionnelles.....	29
III-3-3-2-2- Coefficients de raideur.....	30
III-3-3-2-3- Coefficients d'amortissement.....	30
<b>III-4 – Conclusion</b> .....	30

<b><u>IV – RESOLUTION NUMERIQUE</u></b> .....	31
<b>IV-1- Présentation de la méthode des éléments finis (MEF)</b> .....	31
<b>IV-2- Calcul des caractéristiques statiques d’un palier hybride</b> .....	35
IV-2-1- Résolution de l’équation de Reynolds pour un écoulement laminaire	35
IV-2-1-1- Discrétisation de l’équation de Reynolds par la MEF.....	38
IV-2-1-2- Organigramme de résolution.....	45
IV-2-2- Résolution de l’équation de Reynolds pour un écoulement turbulent	45
IV-2-2-1- Discrétisation par la MEF.....	45
IV-2-2-2- Organigramme de résolution.....	47
IV-2-3- Discrétisation et calcul des coefficients statiques.....	49
IV-2-3-1- Expression de la pression dans un élément fini.....	49
IV-2-3-2- Charge et angle de calage.....	49
IV-2-3-3- Couple de Frottement.....	50
IV-2-3-4- Débits sortant.....	51
IV-2-3-5- Nombre de Sommerfeld.....	51
<b>IV-3- Calcul des caractéristiques dynamiques d’un palier hybride</b> .....	51
IV-3-1- Résolution de l’équation de Reynolds pour un écoulement laminaire	51
IV-3-1-1- Discrétisation par la MEF.....	51
IV-3-1-2- Organigramme de résolution.....	56
IV-3-2- Résolution de l’équation de Reynolds pour un écoulement turbulent	57
IV-3-2-1- Discrétisation par la MEF.....	57
IV-3-2-2- Organigramme de résolution.....	59
IV-3-3- Discrétisation et calcul des coefficients dynamiques.....	60
IV-3-3-1- Forces additionnelles.....	60
IV-3-3-2- Coefficients de raideur.....	60
IV-3-3-3- Coefficients d’amortissement.....	61
<b>IV-4- Conclusion</b> .....	61
<b><u>V – RESULTATS ET DISCUSSION</u></b> .....	62
<b>V-1 – Introduction</b> .....	62
<b>V-2 – Présentation du logiciel de simulation</b> .....	62
V-2-1– Programmation.....	62
<b>V-3 – Résultats et discussion</b> .....	65
V-3-1 – Profil de pression.....	66
V-3-2 – Coefficients statiques et dynamiques en régime laminaire.....	67
V-3-3 – Coefficients statiques et dynamiques en régime turbulent.....	72
<b>V-4 – Conclusion</b> .....	76
<b><u>VIII – CONCLUSION GENERALE</u></b> .....	77
<b><u>IX – REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u></b> .....	79

# NOMENCLATURE

Symbole	Définition	Unité de mesure
L	Longueur du palier	mm
R	Rayon du palier	mm
D	Diamètre de palier	mm
e	Excentricité	mm
C	Jeu radial	mm
$\varepsilon$	Excentricité relative (e/C)	mm
$\mu$	Viscosité dynamique	Pa.s
$\rho$	Masse volumique	Kg/m <sup>3</sup>
Pa	Pression alvéolaire	Pa
P <sub>s</sub>	Pression externe	Pa
P	Pression dans le film lubrifiant	Pa
a <sub>alv</sub>	Distance entre l'alvéole et les bords du coussinet	mm
b <sub>alv</sub>	Distance inter-alvéolaire	mm
r, d	Rayon et diamètre du capillaire	mm
ℓ	Longueur du tube d'alimentation capillaire	mm
X, Y, Z	Coordonnées cartésiennes	Unité
r, θ, Z	Coordonnées cylindriques	Unité
h	Hauteur du film lubrifiant	mm
Φ	Angle de calage	° (deg)
W	Charge appliquée sur l'arbre	N
W <sub>x</sub> , W <sub>y</sub>	Composantes de la charge appliquée sur l'arbre	N
C <sub>f</sub>	Coupe de frottement	N.m
Q	Débit	m <sup>3</sup> /s
S	Nombre de Sommerfeld	
Re	Nombre de Reynolds	
G <sub>x</sub> , G <sub>z</sub>	Coefficients de perte de charge pour un écoulement turbulent	
K <sub>ij</sub>	Coefficients de raideurs i,j = [x y]	N/m
C <sub>ij</sub>	Coefficient d'amortissement i,j=[x y]	N/m.s
F <sub>x</sub> , F <sub>y</sub>	Composantes des réactions dues à la charge	N
A <sub>ij</sub>	Coefficients de la matrice globale (MEF)	
B <sub>i</sub>	Coefficients du vecteur global (Mef)	
a, b	Les pas du maillage	mm
ξ, η	Coordonnées de l'élément de référence	Unité
J	Jacobien de transfert	
ω	Vitesse angulaire	rad/s
N	Vitesse de rotation	tr/mn

---

# **INTRODUCTION GENERALE**

Le frottement est un phénomène physique parfois nécessaire, mais le plus souvent préjudiciable au fonctionnement des machines en particulier lorsque celles-ci sont sollicitées par de très grandes charges. En effet, il provoque non seulement l'usure précoce des pièces mécaniques mais aussi et surtout la perte d'énergie que l'on doit nécessairement compenser par un dispositif moteur extérieur.

Pour combattre le frottement, l'homme a dû, de tout temps, utiliser des huiles d'origine animale ou végétale et ensuite minérale : c'est ce qu'on appelle la lubrification.

Si autrefois la lubrification n'était qu'une simple solution pour retarder l'usure des pièces et prolonger ainsi la durée de vie des machines, elle s'est imposée à l'heure actuelle comme science à part entière dans le domaine de la mécanique. L'objet de la lubrification est celui de créer une séparation onctueuse entre deux surfaces en contact, de façon à ce que le frottement soit transmis au fluide de lubrification dont la propriété principale est la viscosité.

Généralement, avant le mouvement des surfaces, le contact est rigide, mais dès que celles-ci se mettent en mouvement, le fluide lubrifiant pénètre entre elles et crée un film mince et visqueux (contact onctueux), qui absorbe alors le frottement dû à la différence soit des vitesses des deux surfaces, soit des sens de leurs mouvements et le transforme ainsi en cisaillement entre ses couches.

L'une des applications, les plus indispensables, de la lubrification est le graissage des paliers dont le premier type est le palier hydrodynamique: celui-ci est lubrifié grâce au mouvement relatif de l'arbre dans le coussinet créant ainsi à la fois une portance et une stagnation du fluide au niveau respectivement de l'arbre et du coussinet. C'est ainsi qu'un film très mince de lubrifiant vient s'intercaler entre l'arbre et le coussinet.

Si ce type de palier a rencontré une large application, il n'en demeure par moins que des problèmes persistent, il s'agit :

- du contact direct de l'arbre et du coussinet au moment du démarrage bien avant l'établissement du film d'huile ;
- de la non résistance aux grandes charges ;

en plus, il peut y avoir des coupures de film de lubrification en cas de faibles vitesses.

Pour remédier à tous ces inconvénients, on a pensé à la lubrification par film complet dont la permanence est assurée par injection du lubrifiant dans plusieurs alvéoles situés sur la périphérie du coussinet et ce, grâce à des pompes externes : c'est ce qui a conduit à la réalisation du premier palier hydrostatique. Celui ci a donné de très bons résultats du point de vue des coefficients de raideur, ce qui a permis un meilleur guidage. Par ailleurs, le film d'huile reste établi même si les organes du palier ne sont pas en mouvement.

Cependant, et malgré cette efficacité indéniable, des inconvénients demeurent. Pour les surmonter, on doit mettre en place une très grande installation pour l'alimentation de ces alvéoles mais, ceci nécessite des pompes à haute pression, ce qui rend évidemment le système

non rentable sur le plan énergétique. Pour cela, on a pensé au palier hybride qui représente une nouvelle génération de paliers résultant de la superposition des deux premiers types de paliers (hydrodynamique et hydrostatique) et ce, en prenant soin de rapprocher les diamètres de l'arbre et du coussinet pour le palier hydrostatique, tout en respectant un jeu minimal.

De cette façon, et à mesure que la vitesse croît, on assiste à une augmentation sensible de la pression ; ce qui permet, par voie de conséquence, de réaliser un gain appréciable de cette dernière.

D'ailleurs, on assiste ces derniers temps à une large application du palier hybride que l'on le rencontre aussi bien dans les réacteurs nucléaires N4 , que dans les turbopompes ou encore les turbines qui fonctionnent dans des milieux très agressifs. Sa durée de vie est estimée à 40 ans [7].

Pourtant, malgré toutes ces améliorations dues à l'emploi régulier de lubrifiants, on constate que les vilebrequins et les arbres des moteurs et turbines subissent toujours les effets néfastes du frottement, après une certaine durée de fonctionnement ; ce qui justifie le recours à la rectification.

Cependant, s'il est vrai qu les vilebrequins et les arbres des moteurs sont conçus de telle sorte qu'ils puissent être rectifiés même à plusieurs reprises, il n'en demeure pas moins que cela nécessite à chaque fois de calculer la section minimale de l'arbre qui doit résister aux sollicitations du mécanisme et en même temps de changer les coussinets et les joints. Par ailleurs, cette rectification présente de gros inconvénients dans la mesure où elle conduit à un changement de propriétés du palier qui risque de provoquer des vibrations et des chocs ; ce qui, par conséquent, est, à la fois, néfaste et dangereux pour le fonctionnement des machines, en plus, cela engendre un véritable gaspillage d'énergie.

Pourtant, c'est la seule méthode employée jusqu'à présent en Algérie par la plupart des entreprises industrielles.

Cette méthode consiste à procéder par expérience (test) pour les cas de montage de paliers les plus courants, afin d'établir des abaques pour chaque type de paramètres. Cependant, et en plus du fait que cette méthode par test, prend beaucoup de temps et qu'elle est onéreuse, l'utilisation des abaques a montré ses limites dans le sens où elle ne résout pas tous les cas qui peuvent se présenter.

C'est, d'ailleurs, pourquoi la SONELGAZ s'est complètement désintéressée de cette méthode et a opté, en fin de compte, pour le changement systématique de vilebrequins des moteurs d'amorçage des turbines à gaz et ce, tous les trois ans environ. S'il est vrai que cela lui occasionne des pertes financières importantes, en revanche, cela lui permet de gagner considérablement sur le temps qui demeure, tout de même, un facteur économique déterminant.

Mais, dans tous les cas de figures, le problème reste entier et la question que l'on se pose est la suivante: comment peut-on résoudre tous les cas de montage de paliers qui peuvent se présenter sans occasionner des pertes de temps et de sommes d'argent colossales qui ne peuvent que nuire à la bonne marche des entreprises ?

On pense que la réponse réside dans la mise au point d'un logiciel pouvant traiter tous les cas imaginables qu'il s'agisse du régime laminaire ou turbulent même si, toutefois, cela manque, quelque peu, de précision. Autrement dit, il s'agit de passer de la méthode par test, longue et coûteuse, bien que plus précise, à la méthode théorique mathématique qui consiste en la résolution de l'équation de Reynolds. Evidemment cette résolution ne se fait pas par la méthode analytique pour la simple raison qu'il s'agit là d'une équation aux dérivées partielles de type elliptique et par conséquent, il est indispensable d'employer les méthodes numériques comme la méthode des éléments finis (MEF) ou encore la méthode des différences finies (MDF).

Pour ce faire, on doit procéder de la manière suivante:

- 1 – établir les modèles mathématiques nécessaires à l'étude du palier hybride pour les cas laminaire et turbulent ;
- 2 – résoudre les équations de Reynolds dans les cas laminaire et turbulent et calculer les coefficients statiques et dynamiques ;
- 3 – concevoir un logiciel de simulation et discuter les résultats obtenus.

Afin de mener le travail à bien, on a jugé utile de faire une étude du palier à quatre alvéoles conventionnels qui comportera deux grandes parties, dont la plus grande sera consacrée à la résolution des équations de Reynolds par la méthode des éléments finis et comprendra les chapitres suivants :

- 1 – Modélisation mathématique de la lubrification hybride
- 2 – Modèles mathématiques utilisés
- 3 – Résolution numérique.

La deuxième partie sera réservée à la conception du logiciel de calcul et à la comparaison des résultats qu'on aura obtenus avec les résultats expérimentaux afin de prouver leur fiabilité. Elle sera composée des chapitres suivants :

- 1 – Présentation du logiciel de simulation
- 2 – Résultats et discussion.

Ce sera l'aboutissement logique de ce travail qui pourra, et nous avons la prétention de le croire, contribuer à résoudre le problème en question, pour le moins épineux en améliorant le temps d'intervention, d'une part, et en épargnant aux entreprises des pertes financières considérables, d'autres parts.

## CHAPITRE I

# CONTEXTE BIBLIOGRAPHIQUE

Dans un travail de recherche, l'étude bibliographique est plus que nécessaire dans la mesure où elle permet d'abord de situer le problème dans le temps ensuite de mieux le cerner pour enfin orienter l'investigation comme il se doit.

Au risque de se répéter, cette étude est axée sur la lubrification qui constitue une branche de la tribologie. Le mot tribologie n'est apparu qu'en 1968. Il vient du mot Grec « *Tribos* » qui veut dire « frottement ». Donc la traduction littérale du mot tribologie est « *la science du frottement* ».

L'objectif de la tribologie est celui d'étudier le frottement entre deux surfaces en mouvement, les méthodes de lubrification et l'usure des éléments de machines.

### I-1 – HISTORIQUE :

Si l'on fait une petite rétrospective, on se rend compte que durant le dernier quart du siècle passé, de nombreux travaux relatifs au thème du frottement ont été réalisés et ont conduit à différents résultats qui, pour la nécessité de la recherche scientifique appliquée, ont été remis à chaque fois en cause et ce, dans le but d'approcher le plus possible la meilleure solution qui répond aux attentes des industriels.

On va donc citer quelques-uns de ces travaux en respectant l'ordre chronologique pour mieux marquer l'évolution dans le temps de la recherche sur la lubrification.

Tout d'abord, les travaux réalisés avant 1950 ne concernaient, quasiment, que les paliers hydrodynamiques ainsi que la recherche des équations caractéristiques de la lubrification. On remarque aussi que ces études ne traitaient que du régime laminaire. C'est pour cela qu'on a choisi l'année 1950, là où la théorie de turbulence fut établie, comme point de départ de cette étude bibliographique.

En 1950, Constantinescu [1] et Elrod [2] ont établi un modèle mathématique appelé par Hirs [3] en 1973 « Bulk-Flow » ou Flux de Masse pour déterminer la pression exercée sur le lubrifiant (le film) pour un régime turbulent. L'équation établie est non linéaire ce qui empêche d'avoir une solution analytique.

En 1971, C. Charcosset [4], de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, étudie des paliers et des butées comportant plusieurs orifices (alvéoles). Il constata que pour un meilleur guidage de l'arbre il faut augmenter le nombre d'alvéoles mais en contre partie il faut accroître la surface du coussinet ainsi que la puissance de la pompe d'alimentation ou utiliser plusieurs pompes, ce qui complique la construction du système. Il propose, alors, de mettre autant d'orifices dans la direction de la charge maximale.

En 1974, Jean Frène [5], de l'Institut National des Sciences Appliquées, étudie un palier travaillant dans un régime d'écoulement turbulent. Il a essayé de vérifier le critère de Taylor dans les écoulements entre deux cylindres coaxiaux de rayons très voisins et il a cherché à caractériser la transition entre le régime des tourbillons de Taylor et le régime turbulent. Il a aussi défini ces différentes transitions dans le cas des cylindres excentrés. Il a ensuite appliqué les critères de transition

ainsi définis aux calculs de la charge, du couple résistant et du débit axial d'un palier fonctionnant en régime non laminaire. Il a ainsi confirmé les résultats obtenus par les résultats expérimentaux.

Durant la même année, Pan étudie la pression et le cisaillement ainsi que les débits dans le film de lubrification d'un palier à injection par alvéoles du lubrifiant qui a donné une meilleure stabilité donc une meilleure rigidité.

En 1976, Contantinescu et Galetuse montrent, dans leur travail publié dans « ASME Journal of Lubrification Technology » que les effets d'inertie du fluide de lubrification à la sortie des alvéoles se traduisent par une chute de pression, donc une diminution de l'épaisseur du film d'huile et par là même, un contact arbre-coussinet.

En 1978, M. ROBIN [6], étudie la lubrification des paliers de longueur finie et l'influence des additifs de viscosité. Il a ainsi mis en évidence l'effet Weissenberg dans les lubrifiants (apparition de forces normales au plan de cisaillement). Il a étudié le phénomène expérimentalement à l'aide d'un Rheogoniomètre pour un palier lubrifié avec une huile minérale pure, ensuite il a expliqué la différence du comportement d'un fluide Newtonien et d'un fluide non-Newtonien.

Le travail de recherche de Daniel Nicolas [7], en 1982, à l'Institut National des Sciences Appliquées (l'INSA) de Lyon, publié dans le Traité [B5 325] de « Techniques de l'Ingénieur », comporte une étude détaillée sur les paliers hybrides à quatre alvéoles conventionnels. Dans cette étude, il a procédé à la comparaison entre deux types de paliers du point de vue de la charge (chargé et non-chargé), dans les cas statique et dynamique, pour un régime laminaire et turbulent : la résolution des équations s'est faite analytiquement et numériquement (sauf pour le régime turbulent).

Dans la même année, Tipei étudie un palier hybride du point de vue de la pression et des débits au niveau des alvéoles avec des rainures étroites. Son travail est publié dans « ASME Journal of Lubrification Technology ».

En 1983, J. P. Chaomleffel [8], prend comme sujet de recherche l'influence des forces d'inertie en lubrification hybride. Il a procédé par étude théorique puis expérimentale pour la confirmation des résultats.

En 1985, J.P. Chaomleffel et B. Bou-Said [9], au Laboratoire de Mécanique des Contacts de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, déterminent le champ de pression ainsi que la matrice de rigidité d'un palier hybride en utilisant la méthode des éléments finis.

Durant la même année, S. ZEROUALI [10], élabore un logiciel de calcul pour la conception assistée des paliers hydrodynamiques, en tenant compte des déformations dues à la pression.

Au cours de la même année, J.P. Chaomleffel et D. Nicolas [11], montrent, à l'aide de mesure des vitesses de rotation, que le champ de pression n'était pas constant dans l'alvéole (d'un palier hydrostatique ou hybride), ce qui a suscité, par la suite, un intérêt pour les études numériques telles que celles menées par Andrés et Velthuis en 1991.

En 1989, Bonneau Olivier [12] étudie le comportement statique et dynamique de lignes d'arbres montées sur paliers fluides. Il a constaté que la lubrification joue un grand rôle dans l'amortissement des chocs surtout entre arbre-coussinet et la limitation des vibrations du rotor.

En 1990, Mohamed Hocine [13], de l'Institut de Génie Mécanique de Toulouse, développe l'étude des comportements des fluides à grandes vitesses de rotation ; car la théorie laminaire de Reynolds n'était plus exploitable. L'élaboration d'une théorie permettant l'approche des caractéristiques des paliers lubrifiés par des fluides non Newtoniens, doit reposer sur la loi fondamentale du comportement du fluide correspondant ; or pour les fluides non Newtoniens il n'existe pas de loi de comportement universelle. Sachant que la loi choisie doit interagir avec le phénomène de turbulence, il est indispensable que cette loi présente une expression mathématique relativement simple. Donc Il a sélectionné la loi en puissance (Law of Power). Il a ensuite abordé l'étude de la turbulence, mais comme ce phénomène complexe est décrit par plusieurs modèles, il a donc exposé principalement ceux ayant été appliqués aux paliers. Il lui semblait que le modèle K<sup>ε</sup> et le modèle énergie cinétique sont les plus satisfaisants et permettent l'intégration facile de la loi de comportement du fluide choisi. La résolution des équations est faite numériquement par la méthode des différences finies.

Durant la même année, Thierry Friou [14], de l'Université de Poitiers, étudie les effets thermiques dans un palier à patins oscillants qui fonctionne sous des charges et vitesses très élevées, ce qui fait diminuer la viscosité du lubrifiant et par conséquent la portance du palier. De plus, les températures ont pour effet de déformer, par dilatation thermique, les solides contigus au film d'huile. De ce fait, Friou a vu juste en développant une théorie thermohydrodynamique, afin de déterminer avec précision le comportement de tels paliers en fonctionnement. A l'aide d'un logiciel bidimensionnel, il a fait la résolution de l'équation de Reynolds ainsi que l'équation de la chaleur caractérisant les solides composant le palier.

San Andrés et Velthuis [15], en 1991, réalisent une étude paramétrique pour un écoulement laminaire et incompressible. Ce travail porte sur un alvéole de palier hybride modélisé en deux dimensions, sur la vitesse de la paroi mobile ainsi que sur la pression d'alimentation dans l'injecteur représentant les paramètres de l'étude. Les résultats montrent que la distribution de la pression au sein de l'alvéole n'est pas constante et qu'elle dépend essentiellement de la prédominance de l'un ou de l'autre des paramètres.

En 1992 Bille Pascal [16], de l'Université de Poitiers, étudie le comportement des paliers hybrides théoriquement et expérimentalement par la mesure du couple et du champ de pression. Durant cette étude, il a établi un banc d'essai permettant la mesure du couple ainsi que la pression dans le palier et ce, pour confirmer les résultats théoriques.

En 1993, Young Tian [17] modélise numériquement et expérimentalement le problème de paliers fluides concernant le comportement dynamique, à l'aide de l'analyse linéaire et non linéaire par éléments finis pour les cas hydrostatiques et hybrides, dans les cas d'un écoulement laminaire et turbulent. Il a par la suite procédé à la réalisation d'un banc d'essai à mesure directe des grandeurs. Les résultats entre l'expérience et la théorie présentent une bonne concordance qualitative.

Dans toutes ces études qu'on a passé en revues, la compressibilité du lubrifiant n'a été prise en compte qu'en 1994, par Ali Mohamed Ali [18] de l'Université de Poitiers qui étudia un palier hybride avec un fluide de lubrification compressible, ce qui a donné de remarquables variations du champ de

pression, ainsi qu'un changement des coefficients dynamiques dans le cas des grandes vitesses de rotation.

Au cours de la même année, Joseph Absi [19] étudie les paliers à rainures expérimentalement puis par une modélisation numérique bi et tridimensionnelle de l'écoulement. Le caractère tridimensionnel de l'écoulement et les profils paraboliques du champ de vitesse obtenus, valident les hypothèses de Reynolds. Dans ce cas, Joseph Absi confirme qu'on peut maintenir le lubrifiant dans un palier à rainures en chevron sans élément d'étanchéité aussi bien pour les fluides incompressibles que compressibles.

En 1995, Saad-Eddin Attar [20] réalise une étude expérimentale sur le comportement du fluide dans et à la frontière des alvéoles. Les mesures ont été faites sur une machine d'essai de paliers hybrides et sur un dispositif simulant l'écoulement au voisinage d'un changement de section en régime hydrostatique. Des modèles simples déduits des approches théoriques et des résultats expérimentaux sont proposés. Il montra, par les mesures de couples, que pour des nombres de Reynolds moyennement élevés, la contribution des alvéoles au couple peut atteindre 50%. Les résultats expérimentaux montrent que l'on peut schématiser la variation de la pression par un coefficient de perte de charge. Ce coefficient décroît très rapidement si le nombre de Reynolds est inférieur à 100, puis décroît très lentement et tend vers 1.45 lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 1000.

En 1996, Olivier Bonneau et Jean Frêne [21] procèdent à un calcul non linéaire de paliers fluides et notamment de film amortisseur (squeeze film damper). L'arbre est considéré rigide ou déformable. Cette flexibilité de l'arbre est prise en compte par la méthode des éléments finis. Le calcul non linéaire s'effectue dans une base modale de l'arbre de façon à réduire le nombre de degrés de liberté (ce modèle a été développé au Laboratoire de Mécanique des Structures de l'INSA de Lyon). La réponse de l'arbre, lors d'une montée en vitesse, peut être obtenue et l'influence de nombreux paramètres peut être étudiée (géométrie du film, viscosité, charges statique et dynamique, montée en vitesse...).

Au cours de la même année (1996), Braun et Lattime [22] effectuent leur étude sur un palier hybride dont l'écoulement est laminaire et incompressible. Ils se sont intéressés aux zones de circulation présentes au sein d'un alvéole modélisé en deux dimensions. Ils ont montré que la pression reste constante pour les cavités profondes.

Durant la même année (1996), Braun et Dzodzo [23] reprennent l'étude précédente, mais cette fois-ci en modélisant l'alvéole en trois dimensions, mais ils ont abouti aux mêmes résultats que la modélisation en deux dimensions concernant l'effet des conditions de fonctionnement ainsi que l'influence de la géométrie sur le profil de pression.

En 1997, Monmousseau Pascal [24] étudie le régime transitoire dû au changement de conditions de fonctionnement (vitesse de rotation, charge). Il constata que la durée du régime transitoire est fonction des états initiaux et finaux ainsi que la durée du processus d'évolution. Une comparaison a été réalisée dans le cas d'un palier à patins oscillants soumis à une séquence d'accélération entre des résultats expérimentaux obtenus sur le dispositif d'essai du laboratoire et une modélisation numérique déduite de la résolution des principales équations reflétant les phénomènes mécaniques et thermiques.

En 1998, Sharma et Sinhasan [25] présentent une étude théorique des paliers hybrides en régime laminaire à quatre alvéoles de formes différentes (rectangulaire, circulaire, elliptique et triangulaire) et

dont la surface occupée est de 30% de la surface totale. Cette étude a montré que le palier comportant des alvéoles rectangulaires présente de meilleures caractéristiques statiques que celui comportant des alvéoles circulaires mais, en contrepartie, ce dernier a la raideur directe la plus élevée tandis que le palier à alvéoles triangulaires est caractérisé par la bonne stabilité.

Durant la même année, Kucinski Bogdan-Radu [26] consacre une partie de son mémoire à l'étude des paliers en régimes transitoires. Une attention spéciale a été accordée à l'analyse des circonstances engendrant le serrage des paliers non-chargés, consécutifs aux déformations thermiques subies par les éléments solides (arbre et coussinet). Plusieurs modèles de calcul ont été créés, notamment un modèle global analytique et un modèle complet, dont la résolution est faite par la méthode des éléments finis. Un modèle bidimensionnel thermoelastodynamique a été présenté pour le cas des paliers fonctionnant avec une excentricité importante, ce qui permet de prendre en compte la variation de la viscosité du lubrifiant suivant l'épaisseur du film. Une deuxième partie de ce mémoire est consacrée à l'étude du cas où le lubrifiant comporte des impuretés solides (déchets).

En 2000, Optasanu Virgil [27] réalise un dispositif expérimental pour étudier les paliers sous chargement dynamique. Ce dispositif respecte la cinématique du système bielle manivelle et utilise des modèles simplifiés de bielles. Il fournit des résultats sur les phénomènes élastodynamiques sous chargement dynamique. La photoélasticimétrie est utilisée pour visualiser l'état des contraintes générées dans la structure du modèle de bielle par la pression hydrodynamique. La modélisation numérique montre une très bonne concordance.

Lors du XV<sup>ème</sup> Congrès Français de la Mécanique à Nancy, du 3 au 7 septembre 2001 Ahmed Alsayed, Mihai Arghir, Daniel Nicolas [28] de l'Université de Poitiers, Laboratoire de Mécanique des Solides présentent une étude numérique sur l'influence de la forme des poches sur les performances d'un palier hybride à quatre alvéoles. Les poches sont considérées comme étant suffisamment profondes pour que l'inclinaison et l'emplacement de l'injection ne jouent aucun rôle et que la pression y soit constante. Les résultats sont obtenus par l'intégration de l'équation de Reynolds à l'aide de la méthode des volumes finis non structurée. Il y a été démontré que dans certaines conditions, la modification de la forme des alvéoles peut avoir des conséquences intéressantes sur les caractéristiques des paliers hybrides.

Dans le même congrès, Mathieu Helene, Mihai Arghir et Jean Frène [29] exposent une étude qui porte sur l'analyse du profil de pression dans un alvéole de palier hybride ainsi que sur l'identification des différentes pertes de charges singulières (positives ou négatives) dues aux forces d'inertie. Il a été également question de la position de zones de re-circulations au sein de l'alvéole en fonction des conditions de fonctionnement du palier. L'écoulement laminaire dans un seul alvéole est étudié, le fluide est considéré comme incompressible et isotherme. Ils en ont déduit qu'au voisinage des alvéoles, la pression est une pression hydrostatique pure.

Au cours du même congrès, Jean Bouyer et Michel Fillon [30] présentent une étude sur les paliers hydrodynamiques au mésalignement, qui est une perturbation entraînant une modification de leurs performances. Les expérimentations sont réalisées sur un palier lisse de 100 mm de diamètre pour des vitesses allant jusqu'à 4000 tr/min et une charge statique maximale de 9000 N. L'application d'un couple de mésalignement variant en intensité et en direction entraîne l'augmentation des températures, la diminution de la pression maximale dans le plan médian et la réduction très sensible de l'épaisseur

minimale du film. Le palier offre moins de résistance au mésalignement lorsque la charge est faible car les effets hydrodynamiques sont alors moins importants.

En 2002, A. Alsayed, M. Arghir, A. Blouin, A. Francisco, J. Frène et P. Maspeyrot, D. Nicolas [31] réalisent une modélisation de différents contacts lubrifiés :

- contact lubrifié à l'eau dans les céramiques ;
- analyse des organes de support en milieu cryogénique (palier hybride);
- investigation du champ de pression dans un alvéole ;
- analyse de l'effet des macro – rugosités des surfaces dans un film mince.

Au séminaire du 19 février 2002 organisé au LMS, Ahmed Alsayed [32] présente une étude portant sur la résolution numérique de l'équation de Reynolds pour les situations où l'épaisseur du film contient des discontinuités. La solution est obtenue par une approche de volumes finis et permet d'inclure les effets d'inertie décrits par l'équation de Bernoulli généralisée. Il a montré que les relations classiques de discrétisation en volumes finis (sans discontinuité) sont contenues comme un cas particulier. Les résultats numériques sont ensuite comparés avec des solutions analytiques et, outre la concordance exacte, il a montré aussi que les propriétés de conservation sont rigoureusement respectées même lorsque le champ de pression est discontinu. Une application typique (patin d'une butée à poches) montre l'impact de la prise en compte des discontinuités du film et des effets d'inertie associés sur les performances de la butée.

## **I-2- CONCLUSION**

A la suite de cette revue bibliographique, nous pouvons noter que, malgré les efforts considérables fournis par les chercheurs, les variations des paramètres de la lubrification n'ont pas toutes, été, prises en considération car dans la majeure partie de leurs calculs, ils utilisaient des hypothèses simplificatrices comme le fait de négliger la compressibilité ou la variation de la température ou encore la viscosité.

Presque tous les logiciels de simulation conçus ne traitent que le cas hydrodynamique. En plus, la plupart des chercheurs, utilisent la méthode des différences finies. Ce qui prend énormément de temps pour converger à une solution sachant qu'il faut encore étudier la stabilité et les conditions de convergence pour ne pas diverger dans le calcul.

Ceci justifie l'idée de concevoir un logiciel de calcul basé sur une méthode qui permet d'aboutir plus rapidement à la solution : il s'agit de la méthode des éléments finis.

CHAPITRE IIMODELISATION MATHEMATIQUE  
DE LA LUBRIFICATION HYBRIDE

Depuis que Reynolds a mis en évidence la théorie de la lubrification en régime laminaire, les recherches ont cessé jusqu'à ce que, Elord [2] et Contentinescu [1] prennent en main le problème de la turbulence.

La différence entre l'équation de Reynolds en régime laminaire et turbulent est dans l'apparition de nouveaux coefficients multiplicateurs, ce qui complique de plus en plus l'équation du point de vue résolution.

II – 1 – EQUATION GENERALISEE DE REYNOLDS EN REGIME LAMINAIRE :II-1-1- Equations de base de la lubrification :

Les équations générales des films minces visqueux permettent, et ce, en tenant compte des conditions géométriques et cinématiques, de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince et en particulier sa portance.

Elles sont déduites des équations de la mécanique des milieux continus, appliquées à un fluide newtonien et qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :

- la loi de conservation de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (\text{II-1})$$

- la loi fondamentale de la dynamique :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II-2})$$

- la loi de comportement rhéologique pour un fluide newtonien :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \theta) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{II-3})$$

- la loi de conservation de l'énergie pour un fluide newtonien :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \alpha T \frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II-4})$$

NB : dans ces expressions  $x_i$  et  $t$  sont les variables d'espace et de temps,  $u_i$  les composantes de la vitesse,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $f_i$  les forces massiques extérieures,  $\sigma_{ij}$  le tenseur des contraintes,  $K$  le coefficient de conductibilité thermique du fluide,  $T$  sa température,  $p$  la pression,

$\epsilon_{ij}$  le tenseur des taux de déformation,  $\theta$  le taux de dilatation cubique,  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker et où  $\lambda$  et  $\mu$ , coefficient de Navier, sont des fonctions de l'espace et du temps.

**II-1-2- Equation généralisée des films minces visqueux :**

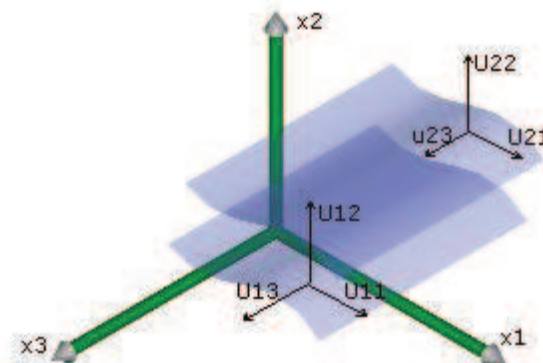
Dans le cas où la température ne varie pas selon l'épaisseur du film et si l'on suppose, comme c'est généralement le cas, que la viscosité  $\mu$  et la masse volumique  $\rho$  du fluide ne sont fonction que de la température et de la pression, on peut écrire :

$$\mu = \mu(T, p) \text{ et } \rho = \rho(T, p)$$

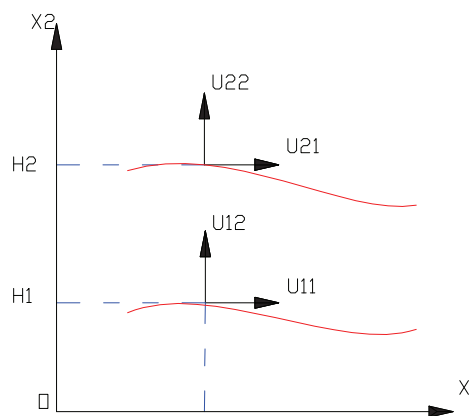
$$T = T(x_1, x_3, t) \text{ et } p = p(x_1, x_3, t)$$

ce qui implique :

$$\mu = \mu(x_1, x_3, t) \text{ et } \rho = \rho(x_1, x_3, t) \tag{II-5}$$



(a)



(b)

**Fig II-1 – Mouvement relatif de deux surfaces adjacentes**

L'équation des films minces visqueux généralisée sera donc de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} \left( G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( G \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] \\
&\quad - \rho_2 U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \rho_1 U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} [U_{23}(R_2 - F) + U_{13}F] - \rho_2 U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \rho_1 U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \\
&\quad + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} + \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12}
\end{aligned} \tag{II-6}$$

où :

$$\begin{aligned}
R &= \int_{H_1}^{x_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi \\
F &= \frac{1}{J_2} \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} dx_2 \\
G &= \frac{1}{J_2} \int_{H_1}^{H_2} \frac{R x_2}{\mu} dx_2 - I_2 F
\end{aligned} \tag{II-7}$$

et :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{H_1}^{x_2} \frac{\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} d\xi \\
J &= \int_{H_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)}
\end{aligned} \tag{II-8}$$

pour :

$$x_2 = H_1 \quad \text{ou} \quad x_2 = H_2 \quad \Rightarrow \quad I = J = 0$$

### Interprétation physique :

Cette équation est la forme la plus générale de l'équation de Reynolds. Pour l'obtenir, il a été nécessaire de poser les hypothèses suivantes :

- 1- le milieu est continu ;
- 2- le fluide est Newtonien ;
- 3- l'écoulement est laminaire ;

- 4- les forces massiques extérieures sont négligeables ;
- 5- les forces d'inerties sont négligeables ;
- 6- il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois de contact ;
- 7- la courbure générale du contact est négligée ;
- 8- l'épaisseur du film d'huile mesurée dans la direction  $Ox_2$  est toujours très faible.

☞ Le terme : 
$$\frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction  $x_1$  pour une section de dimension  $H_2 - H_1$  suivant  $x_2$  et unité suivant  $x_3$ .

☞ Le terme : 
$$\frac{\partial}{\partial x_3} [U_{23}(R_2 - F) + U_{13}F] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( G \frac{\partial p}{\partial x_3} \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction  $x_3$  pour une section de dimension  $H_2 - H_1$  suivant  $x_2$  et unité suivant  $x_1$ .

On constate que, le premier terme correspond au débit dû au déplacement des parois (écoulement de Couette), le second terme correspond au débit dû au gradient de pression (écoulement de Poiseuille).

☞ Le terme : 
$$\rho_1 \left( U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - U_{12} \right) - \rho_2 \left( U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - U_{22} \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction  $x_2$  pour une section unité. Les trois premiers termes de cette expression caractérisent respectivement l'effet de l'inclinaison dans la direction  $x_1$ , de l'inclinaison dans la direction  $x_3$  et de la vitesse dans la direction  $x_2$  de la surface  $S_1$  ; les trois autres, l'effet de la surface  $S_2$ .

☞ Le terme : 
$$\frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t}$$

représente l'effet transitoire dû à la compressibilité du fluide.

En appliquant les équations (II-5) sur l'équation (II-6) cette dernière se simplifie sensiblement et elle prend la forme usuelle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \rho \frac{(H_2 - H_1)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \rho \frac{(H_2 - H_1)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right] = & 6 \frac{\partial}{\partial x_1} [\rho (U_{11} + U_{21})(H_2 - H_1)] - 12 \rho U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + 12 \rho U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \\ & + 6 \frac{\partial}{\partial x_3} [\rho (U_{13} + U_{23})(H_2 - H_1)] - 12 \rho U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + 12 \rho U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \\ & + 12 \rho (U_{22} - U_{12}) + 12 (H_2 - H_1) \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

### **II-1-3- Equation de Reynolds généralisée :**

Lorsque la vitesse d'une paroi de contact est tangente en tous les points à cette paroi (cas fréquent en lubrification), l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi, on peut poser  $H_1 = 0$  et  $H_2 = h$  (voir la figure II-2).

Sur la paroi 1 :	$y = 0$	$u = U_1$	$v = V_1$	$w = W_1$
Sur la paroi 2 :	$y = h$	$u = U_2$	$v = V_2$	$w = W_2$

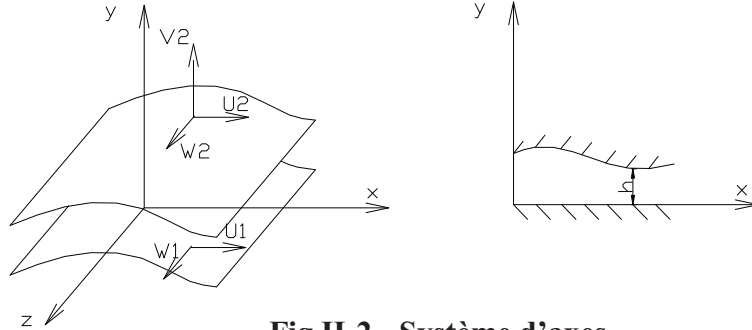


Fig II-2 - Système d'axes

L'équation de Reynolds prend donc les formes développées ci-après:

### II-1-3-1- Equation de Reynolds en coordonnées cartésiennes :

En coordonnées cartésiennes, l'équation de Reynolds s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 6\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ &+ 6h \frac{\partial}{\partial x} \{ \rho(U_1 + U_2) \} + 6h \frac{\partial}{\partial z} \{ \rho(W_1 + W_2) \} \\ &+ 12\rho V_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

Champ de vitesse :

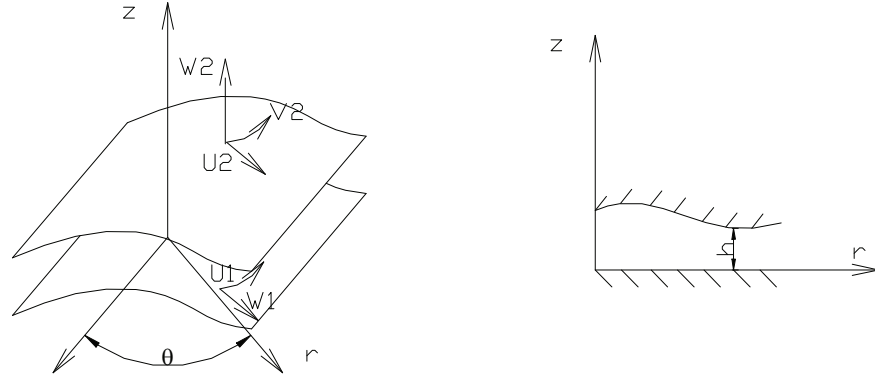
$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{h-y}{h} U_1 + \frac{y}{h} U_2 \\ w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) + \frac{h-y}{h} W_1 + \frac{y}{h} W_2 \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

Les contraintes de cisaillements seront représentées par les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y-h) + (U_2 - U_1) \frac{\mu}{h} \\ \tau_{yz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y-h) + (W_2 - W_1) \frac{\mu}{h} \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

**II-1-3-2- Equation de Reynolds en coordonnées cylindriques :**

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  pour une épaisseur  $h$  mesurée dans la direction  $oz$  l'équation de Reynolds s'écrit :

**fig II-3- Système d'axes**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\rho h^3}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) &= 6r\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial r} + 6\rho(V_1 - V_2) \frac{\partial h}{\partial \theta} \\ &+ 6\rho r h \frac{\partial}{\partial r} \{ \rho(U_1 + U_2) \} + 6h \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \rho(V_1 + V_2) \} \\ &+ 6\rho h(U_1 + U_2) + 12\rho r W_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

Les composantes du champ de vitesse sont les suivantes:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(z-h) + \frac{h-z}{h} U_1 + \frac{z}{h} U_2 \\ w &= \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} z(z-h) + \frac{h-z}{h} V_1 + \frac{z}{h} V_2 \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

Les contraintes de cisaillement dans le fluide:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial r} (2z-h) + (U_2 - U_1) \frac{\mu}{h} \\ \tau_{yz} &= \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial p}{\partial \theta} (2z-h) + (V_2 - V_1) \frac{\mu}{h} \end{aligned} \quad (\text{II-15})$$

**II-1-4- Application à un système arbre coussinet :**

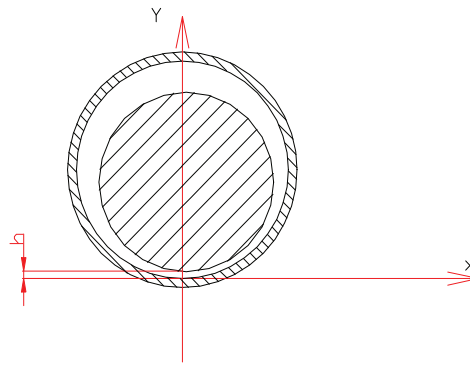
On applique cette équation (II-10) sur un palier (arbre – coussinet) lubrifié par un fluide incompressible. Les conditions aux limites qu'on va appliquer à l'équation sont les suivantes :

$$U_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad V_1 = 0 \quad V_2 = V \quad W_1 = 0 \quad W_2 = 0$$

$$\rho = \text{Cte}$$

L'équation de Reynolds pour un écoulement laminaire et en régime dynamique est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} + 12V \quad (\text{II-16})$$



**Fig II-4 – Schéma d'un palier**

**II-2- EQUATION DE REYNOLDS EN REGIME TURBULENT :**

Un écoulement turbulent est un écoulement irrégulier dont les paramètres caractérisant ce dernier (Vitesse, pression, température..) varient d'une façon aléatoire dans l'espace dimensionnel et temporel (Hinze 1959).

La turbulence est un type d'écoulement qui se produit à haut nombre de Reynolds, ce n'est pas une propriété d'un fluide particulier. La turbulence parvient souvent sous une forme d'instabilité de l'écoulement laminaire si le nombre Reynolds devient trop grand. Ces instabilités sont en rapport avec l'interaction des forces visqueuses et des forces d'inertie.

Dans cette partie on va modéliser l'équation de Reynolds appliquée à un système arbre coussinet en régime turbulent et ce en utilisant le modèle mathématique Bulk-Flow.

**II-2-1-Le modèle Bulk-Flow pour un écoulement turbulent d'un film mince :**

Ce modèle a été proposé par Hires en 1974 pour la modélisation de la turbulence dans un film mince visqueux. Ce modèle ne permet pas d'analyser la turbulence dans tous ses détails de façon théorique mais il se base sur les relations empiriques obtenues expérimentalement.

Cette analyse a pour but de relier les contraintes de cisaillement dans le film aux composantes de vitesse du fluide.

Avant d'étudier en détail ce modèle, il est important de détailler les équations de mouvement en utilisant les composantes du Bulk-Flow :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-17})$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho u'v' \right\} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-18})$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \frac{\partial w}{\partial y} - \rho w'v' \right\} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-19})$$

dont  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{zy}$  sont les contraintes de cisaillement dues à la viscosité et à la turbulence.

Les conditions aux limites pour la vitesse en bas et haut du film sont :

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \Rightarrow u=v=0 \\ y=h \Rightarrow u=\omega R = U \quad w=0 \quad v=\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{dh}{dx} \end{array} \right| \quad (\text{II-20})$$

Les composantes du modèle Bulk-Flow sont définies comme étant la moyenne des vitesses du film :

$$V_x = \frac{1}{h} \int_0^h u dy \quad V_y = \frac{1}{h} \int_0^h v dy \quad (\text{II-21})$$

On note que cette procédure implique une intégration spatiale et temporelle des équations (II-17), (II-18) et (II-19) :

$$\frac{\partial}{\partial x} (hV_x) + \frac{\partial}{\partial z} (hV_z) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-22})$$

$$\left[ -h \frac{\partial p}{\partial x} + \tau_{xy} \right]_0^h = -h \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta \tau_{xy} \quad (\text{II-23})$$

$$\left[ -h \frac{\partial p}{\partial z} + \tau_{zy} \right]_0^h = -h \frac{\partial p}{\partial z} + \Delta \tau_{zy} \quad (\text{II-24})$$

$\Delta \tau_{xy}$  et  $\Delta \tau_{zy}$  représentent la différence de la contrainte de cisaillement entre le bas et le haut du film ; pour un écoulement laminaire on aura :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \tau_{xy} = \tau_{xy}|_0^h = -\frac{12\mu}{h} \left( V_x - \frac{U}{2} \right) = h \frac{\partial p}{\partial x} \\ \Delta \tau_{zy} = \tau_{zy}|_0^h = -\frac{12\mu}{h} (V_z) = h \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (\text{II-25})$$

Dans les écoulements turbulents, en utilisant la même analogie utilisée précédemment concernant les effets de la viscosité, on accepte que  $\Delta\tau_{xy}$  et  $\Delta\tau_{zy}$ , sont reliés aux composant d'un écoulement moyen :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau_{xy}=\tau_{xy}|_0^h &= -\frac{\mu}{h} \left( k_x V_x - k_j \frac{U}{2} \right) = h \frac{\partial p}{\partial x} \\ \Delta\tau_{zy}=\tau_{zy}|_0^h &= -\frac{\mu}{h} (k_z V_z) = h \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-26})$$

dont  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_j$  sont les paramètres de cisaillement dans un écoulement turbulent d'un film mince. On remarque qu'en posant  $k_x = k_y = k_j = 12$  les équations se réduisent à celle d'un écoulement laminaire.

Des équations(II-26) il vient :

$$\left. \begin{aligned} V_z &= -G_z \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} & \text{où} & \quad G_z = \frac{1}{k_z} \\ V_x &= -G_x \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + G_j \frac{U}{2} & \text{où} & \quad G_x = \frac{1}{k_x} \text{ et } G_j = \frac{k_j}{k_x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-27})$$

donc, l'écoulement turbulent du film mince montre les deux types d'écoulements fondamentaux :

- Un écoulement de Poiseuille dû à la pression
- Un écoulement de Couette dû aux effets de la viscosité

En substituant les valeurs des vitesses du Bulk-Flow (II-27) dans l'équation(II-22) on aboutit à l'équation de Reynolds en régime turbulent sans effets d'inertie :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{G_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{G_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial}{\partial x} (h G_j) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II-28})$$

On note que l'équation(II-28) préserve la même forme que l'équation classique de Reynolds pour un écoulement laminaire et incompressible(II-16).

En pratique, pour deux surfaces d'un palier opérant à faible excentricité :

$$\left\{ \begin{aligned} G_x = G_z &= \frac{6.8}{R_p^{0.681}} \\ G_j &= 1 \end{aligned} \right. \quad (\text{II-29})$$

$$R_p = \frac{\rho U h}{\mu} \quad (\text{II-30})$$

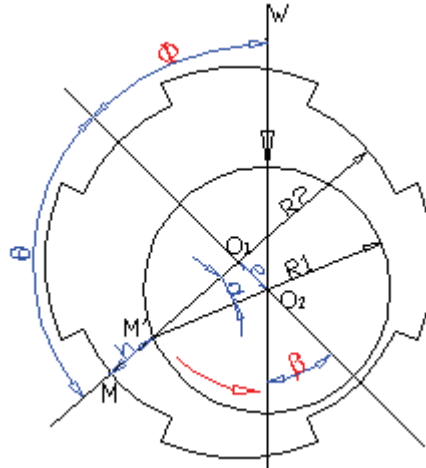
donc l'équation(II-28) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{G_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{G_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II-31})$$

C'est l'équation de Reynolds usuelle dans les problèmes de lubrification en régime dynamique, tandis que pour le cas statique on n'a qu'à poser  $\frac{\partial}{\partial t}=0$ .

En posant  $G_x = G_z = \frac{1}{12}$  on revient à l'équation de Reynolds pour un écoulement incompressible laminaire (II-16).

### II-3 – CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES D'UN PALIER HYBRIDE :



**Fig II-5 - Géométrie du palier hybride**

#### II-3-1- Excentricité maximale (Jeu diamétral) :

L'excentricité maximale est le jeu restant entre l'arbre et le coussinet. Elle est donnée par :

$$C = R_2 - R_1 \quad (\text{II-32})$$

dont :

R1 : Rayon de l'arbre

R2 : Rayon du coussinet (Voir fig II-5)

#### II-3-2- Excentricité :

C'est la distance entre le centre de l'arbre et celui du coussinet, elle prend pour valeur minimale 0 et pour valeur maximale C. Elle est définie par :

$$e = O_1O_2 \quad (\text{II-33})$$

où :

O1 : Centre de l'arbre

O2 : Centre du coussinet

#### II-3-3- Excentricité relative :

L'excentricité relative est un paramètre qui nous permet de prévoir le contact arbre coussinet. Elle est exprimée par :

$$\varepsilon = \frac{e}{C} \quad (\text{II-34})$$

$\varepsilon$  Varie de 0 jusqu'à 1, et on distingue les trois cas possibles:

- $\varepsilon = 0$  Le palier est non chargé ;
- $\varepsilon = 1$  Le palier est au repos ;
- $0 < \varepsilon < 1$  Le palier est chargé.

### II-3-4- Hauteur du film lubrifiant :

Pour calculer la hauteur du film lubrifiant, on va appliquer les règles de la géométrie. En se référant à la figure(II-5), on distingue le triangle  $\langle O_1O_2M' \rangle$ .

En appliquant la règle du sinus au triangle  $\langle O_1O_2M' \rangle$  on aura :

$$\frac{\sin \alpha}{e} = \frac{\sin \theta}{R_1} = \frac{\sin \beta}{O_2M'}$$

or,

$$\sin \alpha = \frac{e}{R_1} \sin \theta \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left( \frac{e}{R_1} \right)^2 \sin^2 \theta$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left( \frac{e}{R_1} \right)^2 \sin^2 \theta} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{e}{R_1} \right)^2 \sin^2 \theta$$

En pratique :  $\frac{e}{R_1}$  est de l'ordre de  $10^{-3}$  ce qui permet de conclure que :  $\frac{1}{2} \left( \frac{e}{R_1} \right)^2 \sin^2 \theta \ll \ll 1$

D'autre part :

$$h = R_2 - O_2M' \text{ et } \beta = \theta - \alpha$$

$$h = R_2 - \left[ \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \right] R_1 \quad \text{et} \quad \sin \beta = \sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha$$

donc:

$$h = R_2 - R_1 \left[ 1 - \frac{e}{R_1} \cos \theta \right] = (R_2 - R_1) + e \cos \theta$$

$$h = C + e \cos \theta = C \left( 1 + \frac{e}{C} \cos \theta \right)$$

La hauteur du film lubrifiant sera calculée à partir de la formule suivante :

$$h = C (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (\text{II-35})$$

### II-4 – CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons étudié l'équation des films minces visqueux sous ces différentes formes et ce en régime laminaire et turbulent ainsi que la géométrie du palier hybride. Dans le chapitre suivant nous allons sélectionner les modèles mathématiques propres à notre cas à savoir la lubrification hybride.

## *CHAPITRE III*

# MODELES MATHÉMATIQUES UTILISES

Un palier hybride est une superposition de deux types de paliers: un palier lisse hydrodynamique et un autre hydrostatique. Il comporte plusieurs alvéoles qui débitent le lubrifiant à haute pression pour limiter les vibrations de l'arbre dans le coussinet.

Ce type de paliers a connu une large application : le rotor de la pompe primaire des réacteurs nucléaires N4 est guidé par un palier hybride fonctionnant sur ce principe et lubrifié par de l'eau pressurisée à une température voisine de 280°. On les utilise aussi dans le guidage des broches de machines à outils de haute précision ainsi que dans les turbines à gaz, les turbopompes...

Les principaux inconvénients de ce type de paliers sont le coût et l'encombrement. En plus, il est indispensable d'avoir une source de pression disponible pour faire fonctionner le palier.

Parmi les avantages des paliers hybrides on peut souligner :

- les deux surfaces sont toujours séparées par un film fluide, même lorsqu'elles sont immobiles, ce qui rend, théoriquement, l'usure nulle et assure, ainsi, une très grande durée de vie. Le phénomène de frottement saccadé (Stick - Slip) est supprimé;
- la pression est distribuée sur une très grande surface, il n'y a pas de concentration de pression;
- comme la portance ne résulte pas du mouvement seulement des surfaces, les effets des imprécisions d'usinage sont atténués surtout dans le cas des liquides.

Dans ce chapitre, on va appliquer les conditions aux limites aux équations trouvées dans le chapitre précédent et donner les expressions caractérisant les coefficients statiques :

- charge ;
- angle de calage ;
- couple de frottement ;
- débits.

et les coefficients dynamiques:

- la matrice de rigidité ;
- la matrice d'amortissement ;
- les forces de liaison.

**III-1 – HYPOTHESES :**

Nous allons formuler quelques hypothèses afin de simplifier les équations et faciliter la résolution de ces dernières.

- 1- le milieu est continu ;
- 2- le fluide est Newtonien ;
- 3- les forces massiques extérieures sont négligeables ;
- 4- les forces d'inerties sont négligeables ;
- 5- il n'y a pas de glissement entre le fluide lubrifiant et les parois du contact ;
- 6- la courbure générale du contact est négligée ;
- 7- la viscosité du fluide lubrifiant est constante ;
- 8- la masse volumique du fluide lubrifiant est constante.

**III-2 – CARACTERISTIQUES STATIQUES D'UN PALIER HYBRIDE :**

Pour pouvoir calculer les caractéristiques statiques d'un palier hybride, il faut déterminer le champ de pression dans le film lubrifiant, et ce par la résolution de l'équation de Reynolds, ce qui nous oblige d'écrire les formes usuelles de cette dernière.

**III-2-1 – Equation de Reynolds en régime statique laminaire :**

Reprenons l'équation (II-16). En appliquant les hypothèses formulées précédemment on abouti à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} + 12\mu V \quad (\text{III-1})$$

Au régime permanent, l'écoulement ne dépend pas du temps, donc:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow V = \frac{\partial h}{\partial t} = 0$   
L'équation (III-1) se réduit à:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III-2})$$

C'est l'équation de Reynolds en régime statique pour un écoulement laminaire.

**III-2-2 – Equation de Reynolds en régime statique turbulent :**

En appliquant les hypothèses précédentes à l'équation (II-31) on aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 G_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \mu \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III-3})$$

pour un régime d'écoulement statique  $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = 0$ , donc l'équation (III-3) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 G_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \mu \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III-4})$$

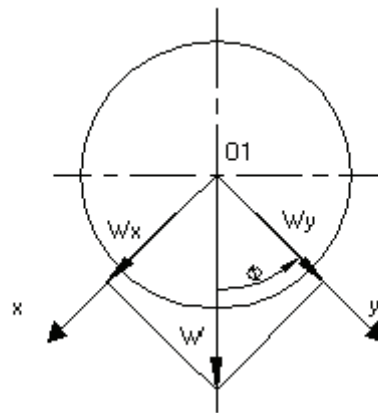
C'est l'équation de Reynolds en régime statique pour un écoulement turbulent.

### III-2-3 – Coefficients statiques :

#### III-2-3-1 – Charge et angle de calage :

C'est la valeur de la charge (  $W$  ), que peut supporter le palier. Elle est obtenue par intégration du champ de pression dans le film lubrifiant, donc elle est obtenue par le calcul du volume encastré entre la surface du champ de pression et le contact:

$$W = \int_S p \, dS \quad (\text{III-5})$$



**Figure III-1 – Composantes de la charge**

Les composantes de la charge seront de la forme suivante:

$$\begin{cases} W_x = \int_0^L \int_0^{2\pi R} p \sin \theta \, dx dz \\ W_y = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} p \cos \theta \, dx dz \end{cases} \quad (\text{III-6})$$

L'angle de calage est donné par l'expression suivante :

$$\Phi = \text{Arctg} \left( \frac{W_x}{W_y} \right) \quad (\text{III-7})$$

#### III-2-3-2 – Couple de frottement :

Le couple de frottement ou le couple résistant est donné sous la forme de l'intégrale suivante:

$$C_f = \iint_{\Omega} R \tau_{xy} \Big|_{y=h} \, dS \quad (\text{III-8})$$

En remplaçant  $\tau_{xy}$  par son expression (II-12), on aura:

$$C_f = R \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} h + \mu \frac{U}{h} \right\} dx dz \quad (\text{III-9})$$

### **III-2-3-3- Débit sortant :**

Le débit sortant des deux faces du palier est exprimé par la formule suivante:

$$Q = 2 \iint_{\Omega} w|_{z=L} dx dy \quad (\text{III-10})$$

L'expression de  $W$  est donnée par l'équation (II-11). En remplaçant cette dernière dans l'équation (III-10), on aura:

$$Q = \iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) dx dy \quad (\text{III-11})$$

$$Q = \frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi R} \left[ \frac{\partial p}{\partial z} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{h y^2}{2} \right) \right]_0^h dx \quad (\text{III-12})$$

### **III-2-3-4 – Nombre de Sommerfeld :**

C'est un nombre sans dimension caractérisant la vitesse d'un palier, que ce soit hydrodynamique ou hybride.

$$S = \frac{\mu L D N}{W} \left( \frac{R}{C} \right)^2 \quad (\text{III-13})$$

## **III-3 – CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES D'UN PALIER HYBRIDE :**

### **III-3-1 – Equation de Reynolds en régime dynamique laminaire :**

En régime dynamique, le centre de l'arbre décrit une orbite située à l'intérieur d'un cercle dont le rayon est égal au jeu radial. Sa position vis-à-vis du centre du coussinet, point supposé fixe, peut être repérée:

- par ses coordonnées cartésiennes:

$$\vec{OO}_a = X\vec{X} + Y\vec{Y} \quad (\text{III-14})$$

- par ses coordonnées polaires:

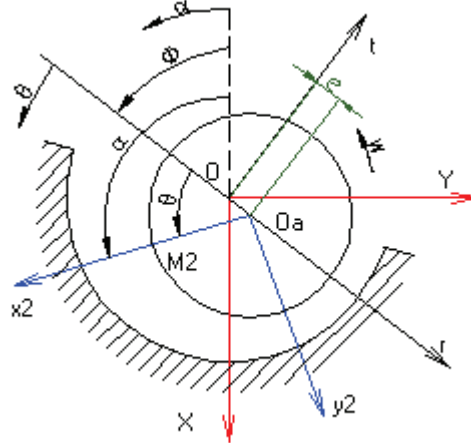
$$\vec{OO}_a = e\vec{r}, \quad \Phi = (\vec{X}, \vec{r}) \quad (\text{III-15})$$

Le choix du système de coordonnées est dicté par la nature du problème à résoudre. Si l'on recherche la trajectoire du centre de l'arbre pour une charge dynamique quelconque, les variables  $(X, Y)$  sont bien adaptées. Par contre le calcul des coefficients dynamiques peut parfois être réduit si on utilise les variables  $(e, \Phi)$ .

**III-3-1-1 – Paramétrage (X,Y):**

On utilise la coordonnée angulaire  $\alpha$  dont l'origine est située sur l'axe X L'épaisseur du film s'écrit:

$$h=C+(X\cos\alpha+Y\sin\alpha) \tag{III-16}$$



**Figure III-2 – Repérage pour l'étude dynamique**

Le centre de l'arbre est repéré par l'équation (V-75), en dérivant cette équation par rapport au temps, on aura la vitesse de ce dernier:

$$\vec{V}(O_a)=\dot{X}\vec{X}+\dot{Y}\vec{Y} \tag{III-17}$$

La vitesse du point M<sub>2</sub> qui appartient à la surface de l'arbre est donnée par :

$$\vec{V}(M_2)=-\left(\dot{X}\cos\alpha+\dot{Y}\sin\alpha\right)\vec{x}_2+\left(R\omega+\dot{X}\sin\alpha-\dot{Y}\cos\alpha\right)\vec{y}_2 \tag{III-18}$$

dont:

$$\alpha = \theta + \Phi$$

d'où les composantes des vitesses:

$$\begin{cases} U_2=(R\omega+\dot{X}\sin\alpha-\dot{Y}\cos\alpha)-\left(\dot{X}\cos\alpha+\dot{Y}\sin\alpha\right)\frac{dh}{dx} \\ V_2=\left(\dot{X}\cos\alpha+\dot{Y}\sin\alpha\right)+\left(R\omega+\dot{X}\sin\alpha-\dot{Y}\cos\alpha\right)\frac{dh}{dx} \end{cases} \tag{III-19}$$

et l'équation de Reynolds devient:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu\left[\omega\frac{dh}{d\alpha}+2\dot{X}\cos\alpha+2\dot{Y}\sin\alpha\right] \tag{III-20}$$

**III-3-1-2 – Paramétrage (e,Φ) :**

On utilise la coordonnée angulaire  $\theta$  dont l'origine est située sur l'axe r (Voir fig 2). L'épaisseur du film lubrifiant est donnée par:

$$h = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (\text{III-21})$$

le changement de variable:

$$\begin{cases} X = e \cos \Phi \\ Y = e \sin \Phi \\ \alpha = \theta + \Phi \end{cases} \quad (\text{III-22})$$

conduit à:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[ (\omega - 2\dot{\Phi}) \frac{dh}{d\theta} + 2\dot{\varepsilon} \cos \theta \right] \quad (\text{III-23})$$

**III-3-2 – Equation de Reynolds en régime dynamique turbulent :**

En procédant de la même manière nous allons aboutir aux équations suivantes en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires.

**III-3-2-1 – Paramétrage (X,Y):**

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h^3 G_x \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[ \omega \frac{dh}{d\alpha} + 2\dot{X} \cos \alpha + 2\dot{Y} \sin \alpha \right] \quad (\text{III-24})$$

**III-3-1-2 – Paramétrage (e,Φ) :**

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 G_x \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[ (\omega - 2\dot{\Phi}) \frac{dh}{d\theta} + 2\dot{\varepsilon} \cos \theta \right] \quad (\text{III-25})$$

**III-3-3 – Coefficients dynamiques :****III-3-3-1 – Modélisation linéaire des coefficients dynamiques:**

Dans l'analyse dynamique d'une ligne d'arbre de machine tournante, le comportement du palier est gouverné par les forces engendrées par le film lubrifiant et qui s'oppose au mouvement de l'arbre. Dans le cas général, celles-ci sont obtenues par intégration du champ de pression calculé à partir de l'équation de Reynolds écrite en régime dynamique. Ces forces étant des fonctions non linéaires de la position et de la vitesse du centre de l'arbre, l'analyse exacte d'un système rotor - palier est donc très complexe puisqu'elle nécessite la résolution simultanée des équations relatives au mouvement du rotor et celle relative au comportement hybride du rotor.

Cette étude peut être simplifiée si on suppose que le rotor est parfaitement rigide et si on se limite aux petits déplacements au voisinage d'une position d'équilibre statique. La première hypothèse qui correspond au cas d'un rotor rigide, permet de comparer entre elles les différentes configurations de paliers, tandis que la seconde hypothèse, qui correspond à la théorie linéaire, permet d'étudier la stabilité d'un point d'équilibre.

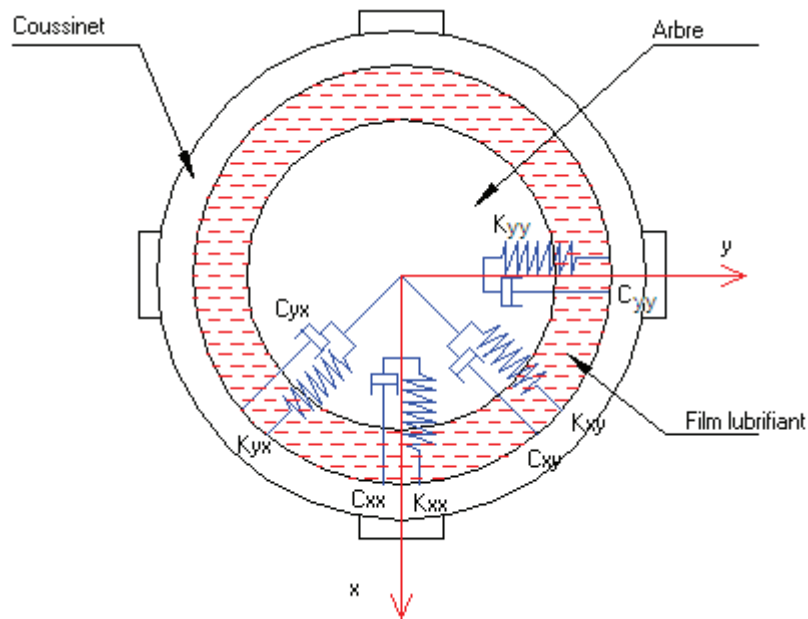
Si on envisage des petits déplacements,  $x$ ,  $y$  et des petites vitesses de déplacement  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  au voisinage de la position d'équilibre statique  $x_0$ ,  $y_0$ , on peut écrire :

$$\begin{cases} F_x(x_0+x, y_0+y, \dot{x}, \dot{y}) = F_x(x_0, y_0, 0, 0) + x \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + y \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) + \dot{x} \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right) + \dot{y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right) + \dots \\ F_y(x_0+x, y_0+y, \dot{x}, \dot{y}) = F_y(x_0, y_0, 0, 0) + x \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) + y \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \dot{x} \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right) + \dot{y} \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right) + \dots \end{cases} \quad (III-26)$$

où  $F_x$  et  $F_y$  représentent les composantes, selon les axes  $x$  et  $y$ , de l'action du fluide sur le rotor.

En se limitant au premier ordre, les relations précédentes peuvent se mettre sous forme matricielle.

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x(x_0+x, y_0+y, \dot{x}, \dot{y}) - F_x(x_0, y_0, 0, 0) \\ F_y(x_0+x, y_0+y, \dot{x}, \dot{y}) - F_y(x_0, y_0, 0, 0) \end{Bmatrix} = -[K_{ij}] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - [C_{ij}] \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (III-27)$$



**Figure III-3 – Représentation dynamique du film lubrifiant**

Où  $f_x$  et  $f_y$  représentent les forces additionnelles engendrées par les déplacements et les vitesses de déplacements élémentaires ( $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ ). Les coefficients  $k_{ij}$  et  $c_{ij}$  correspondent respectivement aux raideurs et aux amortissements dus à l'existence du film lubrifiant. On remarquera que  $F_x(x_0, y_0, 0, 0)$  est équivalente à  $F_0$  et que la composante  $F_y(x_0, y_0, 0, 0)$  est

nulle. Les coefficients dynamiques sont donc obtenus par identification des équations (III-20), (III-23) en régime laminaire et (III-24), (III-25) en régime turbulent :

$$\begin{cases} K_{ij} = - \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{O_{as}} \\ C_{ij} = - \left( \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \right)_{O_{as}} \end{cases} \quad (III-28)$$

Dans ces relations:

-  $\vec{F}$  représente l'action du fluide sur l'arbre :

$$\begin{cases} F_x(x_0, y_0, O, O) = F_0 = -W_0 \\ F_y(x_0, y_0, O, O) = 0 \end{cases} \quad (III-29)$$

si la charge extérieure  $\vec{W}$  est telle que :  $\vec{W} = W_0 \vec{X}$ .

Le premier indice indique la direction de la force, le second celle du déplacement ou de la vitesse de déplacement. L'existence de termes croisés, traduit le fait que dans un palier, en général, l'action du fluide n'est pas colinéaire au déplacement.

Cette modélisation du film lubrifiant par huit coefficients dynamiques a été utilisée dès 1959 par Hori [67] pour décrire le comportement d'un palier infiniment long.

### **III-3-3-2 – Méthode des perturbations :**

Le paramétrage en (X, Y) décrit dans le paragraphe (V-3-1-1) est bien adapté pour cette approche. En régime stationnaire, le centre de l'arbre occupe une position d'équilibre caractérisé par ses coordonnées  $x_0$  et  $y_0$ , on note  $h_0$  l'épaisseur du film. En régime dynamique le mouvement du centre de l'arbre est décrit par les amplitudes  $x$  et  $y$  mesurées à partir de la position d'équilibre statique. Dans ces conditions, l'épaisseur du film peut s'écrire:

$$h = h_0 + x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad (III-30)$$

Le mouvement du centre de l'arbre engendre une perturbation du champ de pression. Les déplacements restant petits, on a:

$$p = p_0 + p \text{ avec } p = p_x x + p_y y + p_{\dot{x}} \dot{x} + p_{\dot{y}} \dot{y} \quad (III-31)$$

où  $p$  est la pression en régime stationnaire. Le report des équations (III-30) et (III-31) dans les équations de Reynolds en régime laminaire et turbulent (III-23), (III-25), et un développement limité au premier ordre conduit à deux systèmes de cinq équations aux dérivées partielles le premier dérivé de l'équation (III-23) et le second dérivé de l'équation (III-25).

*En régime laminaire :*

$$\left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h_0^3 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h_0^3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_x \\ p_y \\ p_{\dot{x}} \\ p_{\dot{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\mu\omega \frac{\partial h_0}{\partial \alpha} \\ -6\mu\alpha \left( \sin\alpha + 3 \frac{\cos\alpha}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \alpha} \right) - 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\cos\alpha}{h_0} \right) \\ 6\mu\alpha \left( \cos\alpha - 3 \frac{\sin\alpha}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \alpha} \right) - 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\sin\alpha}{h_0} \right) \\ 12\mu\cos\alpha \\ 12\mu\sin\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{III-32})$$

*En régime turbulent :*

$$\left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h_0^3 G_x \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h_0^3 G_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_x \\ p_y \\ p_{\dot{x}} \\ p_{\dot{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mu\omega \frac{\partial h_0}{\partial \alpha} \\ -\frac{1}{2} \mu\omega \left( \sin\alpha + \frac{1}{4} \frac{\cos\alpha}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{4} \mu \frac{h_0^3}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\cos\alpha}{h_0} \right) \\ \frac{1}{2} \mu\omega \left( \cos\alpha - \frac{1}{4} \frac{\sin\alpha}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{4} \mu \frac{h_0^3}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\sin\alpha}{h_0} \right) \\ \mu \cos\alpha \\ \mu \sin\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{III-33})$$

Les conditions aux limites qu'il faut adjoindre à la résolution de cette équation sont les suivantes:

- aux extrémités libres:

$$p_0 = p_{\text{ext}} \quad ; \quad p_x = p_y = p_{\dot{x}} = p_{\dot{y}} = 0 \quad (\text{III-34})$$

- au niveau des alvéoles:

$$p_0 = p_{\text{ext}} \quad ; \quad p_x = p_y = p_{\dot{x}} = p_{\dot{y}} = 0 \quad (\text{III-35})$$

La résolution des équations aux dérivées partielles relatives à une perturbation permet de connaître les champs de pression  $p_0$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_{\dot{x}}$ ,  $p_{\dot{y}}$  et de déduire les coefficients de raideur et amortissement.

### **III-3-3-2-1 – Force additionnelle :**

La force additionnelle sera calculée après avoir trouvé le champ de pression  $p_0$  et ce par la résolution de la première équation des systèmes (III-32) et (III-33).

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \end{Bmatrix} = \iint_{\Omega} p_0 \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} R d\alpha dz \quad (\text{III-36})$$

### III-3-3-2-2- Coefficients de raideur :

La matrice des coefficients de raideur est donnée par :

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} \quad (\text{III-37})$$

Après avoir calculer les champs de pression  $p_x$  et  $p_y$ , les coefficients de raideurs seront calculés d'après les expressions suivantes

$$\begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial F_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = -\iint_{\Omega} p_x \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} R d\alpha dz \quad (\text{III-38})$$

$$\begin{Bmatrix} K_{xy} \\ K_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial y} \\ -\frac{\partial F_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = -\iint_{\Omega} p_y \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} R d\alpha dz \quad (\text{III-39})$$

### III-3-3-2-3- Coefficients d'amortissement :

La matrice des coefficients d'amortissement est exprimée par :

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{pmatrix} \quad (\text{III-40})$$

Après avoir calculé les champs de pression  $p_x$  et  $p_y$ , les coefficients d'amortissement seront calculés d'après les formules suivantes :

$$\begin{Bmatrix} C_{xx} \\ C_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \\ -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \end{Bmatrix} = -\iint_{\Omega} p_x \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} R d\alpha dz \quad (\text{III-41})$$

$$\begin{Bmatrix} C_{xy} \\ C_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \\ -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \end{Bmatrix} = -\iint_{\Omega} p_y \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} R d\alpha dz \quad (\text{III-42})$$

## III-4 – CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons montré les équations, dans le cas statique et dynamique en régime laminaire et turbulent, que nous allons résoudre par la méthode des éléments finis, ainsi que la méthode de calcul des coefficients statiques et dynamiques du palier hybride.

## CHAPITRE IV

# RESOLUTION NUMERIQUE

Dans ce chapitre nous allons discrétiser et résoudre les équations de Reynolds appliquées au palier hybride afin de pouvoir calculer les coefficients statiques et dynamiques.

La résolution des équations aux dérivées partielles sera faite par la méthode des éléments finis (MEF).

### IV-1 – PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

#### IV-1-1- Principe de la méthode :

Pour résoudre un problème classique (équation différentielle, ou aux dérivées partielles),  $Lu=f$  il faut passer par les étapes suivantes :

- 1- Ecrire le problème sous forme variationnelle ;
- 2- Décomposition du domaine de résolution  $D$  en de petits sous domaines  $D_j$  appelés éléments finis ;
- 3- Construire une base locale :  $B=\{\varphi_j; j=0, \dots, N\}$  dont :
  - $\varphi_j$  : fonction polynômiale par morceaux
  - $\varphi_j = 1$  si  $x = x_j$  dont  $x_j$  est un sommet de  $D_j$  ;
  - $\varphi_j = 0$  si  $x \neq x_j$ ;
- 4- La solution à trouver  $u(x)$  est approchée par une fonction continue dans le domaine  $D$  et polynômiale dans chaque élément fini  $D_j$  ;
- 5- En reportant la solution approchée  $\tilde{u}(x)$  dans le problème variationnel  $a(u,v)=b(v)$  avec  $v = \varphi_j$  on obtient un système linéaire (système discret) :

$$A\tilde{u}=b \text{ ou } \sum_{j=0}^N a_{ij}\tilde{u}_j=b_i$$

$$a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), b_i = b(\varphi_i)$$

$a_{ij} = 0$  si  $x_i, x_j$  ne sont pas contigus, c'est à dire  $x_i, x_j$  n'appartiennent pas au même élément.

#### IV-1-2- Formulation variationnelle :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$(PC) \begin{cases} Lu=f \\ x \in \Sigma \Rightarrow Mu=g \end{cases} \quad (IV-1)$$

$M, L$  : opérateurs différentiels linéaires.

Au lieu de résoudre le (PC) (IV-1) directement on cherche la fonction  $u$  de telle sorte que le résidu  $(Lu-f)$  soit orthogonal à toute fonction  $v$  c'est à dire que :

$$\int_D (Lu-f)v dx = 0 \tag{IV-2}$$

pour toute fonction v vérifiant les conditions limites homogènes  $Mv = 0$ .

Donc : (IV-1) et (IV-2) sont équivalents.

En intégrant par parties on aura :

$$\int_D (Lu-f)v dx = a(u,v) - b(v) \tag{IV-3}$$

Où  $a(u,v)$  est une forme bilinéaire (linéaire selon chaque argument)  $b(v)$  fonctionnelle linéaire de v.

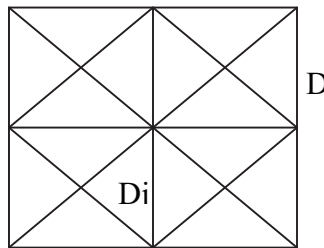
Donc le problème variationnel sera de la forme :

$$\begin{cases} a(u,v) = b(v) \\ Mv|_{\Sigma} = 0, \quad Mu|_{\Sigma} = g \end{cases} \tag{IV-3}$$

**IV-1-3 – Décomposition du domaine de résolution :**

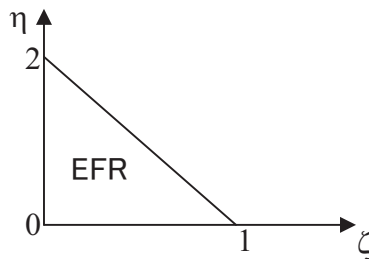
**IV-1-3-1 – Eléments finis triangulaires :**

La triangulation signifie la décomposition du domaine de résolution en éléments finis triangulaire.



**Figure IV-1 – Triangulation du domaine de résolution**

Le travail direct sur les éléments finis physique s'avère très difficile et très long c'est pour cela qu'on se réfère à un élément fini de référence qui facilitera la tâche.



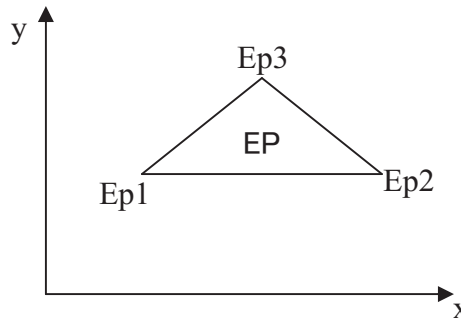
**Figure IV-2 – Elément fini de référence**

**Remarque :**  $\overline{01}=1$ ,  $\overline{02}=1$  et  $\overline{12}=\sqrt{2}$

Les fonctions de base appliquées aux nœuds d'un élément de référence sont les suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_0=1-\zeta-\eta \\ \lambda_2=\zeta \\ \lambda_3=\eta \end{cases} \quad (IV-4)$$

Prenons un élément fini du domaine D de la figure IV-1 :



**Figure IV-3 – Élément physique (EP) du domaine de résolution**

Les relations entre les variables (x,y) caractérisant les coordonnées des nœuds de l'élément physique et les variables (ζ,η) exprimant les coordonnées de l'élément de référence sont les suivantes :

$$\begin{cases} x=\sum_{i=0}^2 x_{E_{pi+1}} \lambda_i \\ y=\sum_{i=0}^2 y_{E_{pi+1}} \lambda_i \end{cases} \quad (IV-5)$$

Le Jacobien de passage entre les deux repères est le suivant :

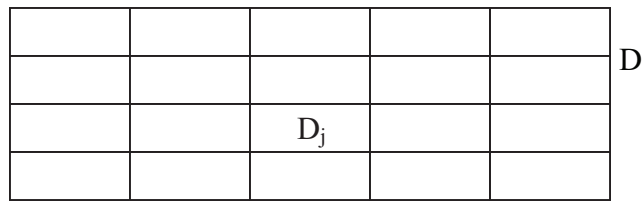
$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (IV-6)$$

Soient  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  les valeurs de  $u$  aux sommets de l'élément physique  $Ep_1$ ,  $Ep_2$  et  $Ep_3$  respectivement. L'expression de la solution dans un élément est donnée par :

$$u=\sum_{i=0}^3 u_{i+1} \lambda_i \quad (IV-7)$$

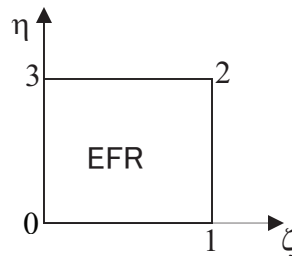
**IV-1-3-1 – Éléments finis rectangulaires :**

On décompose le domaine de résolution en éléments finis rectangulaires, ce qui augmente la précision de la solution car elle sera décrite par quatre nœuds.



**Figure IV-4 – Décomposition rectangulaire du domaine de résolution**

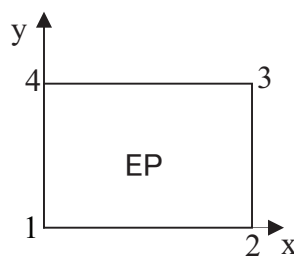
L'écriture du système discret est très difficile en utilisant les éléments finis physique, il est préférable de travailler sur un élément de référence de côté 1 qui facilitera le calcul.



**Figure IV-5 – Élément fini de référence**

Les fonctions de base appliquées aux nœuds de l'élément de référence sont les suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_0 = (1-\zeta)(1-\eta) \\ \lambda_1 = \zeta(1-\eta) \\ \lambda_2 = \zeta\eta \\ \lambda_3 = \eta(1-\zeta) \end{cases} \quad (IV-8)$$



**Figure IV-6 – Élément fini physique**

Les relations entre les coordonnées (x,y) de l'élément physique et celles de l'élément de référence (zeta,eta) sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = x_1 + a\zeta \\ y = y_1 + b\eta \end{cases} \quad (IV-9)$$

Dont : a est la longueur de l'élément fini physique, et b est la hauteur.

Le Jacobien de passage entre les deux repère est le suivant :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad (\text{IV-10})$$

La solution dans un élément sera donnée par l'expression suivante :

$$u = \sum_{i=0}^4 u_{i+1} \lambda_i \quad (\text{IV-11})$$

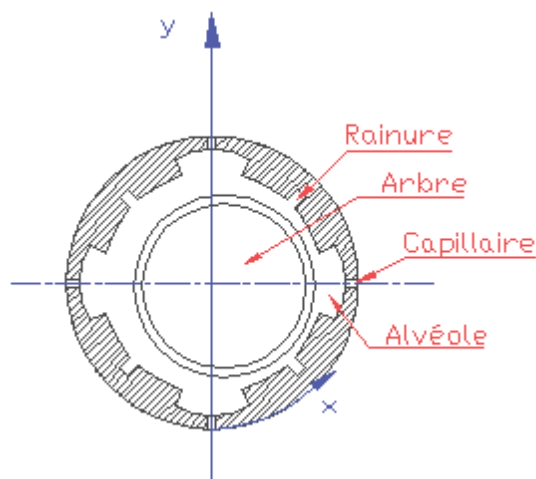
Dont u1, u2, u3, et u4 sont les solutions aux sommets de l'élément physique 1, 2, 3 et 4.

## IV-2- CALCUL DES CARACTERISTIQUES STATIQUES D'UN PALIER HYBRIDE :

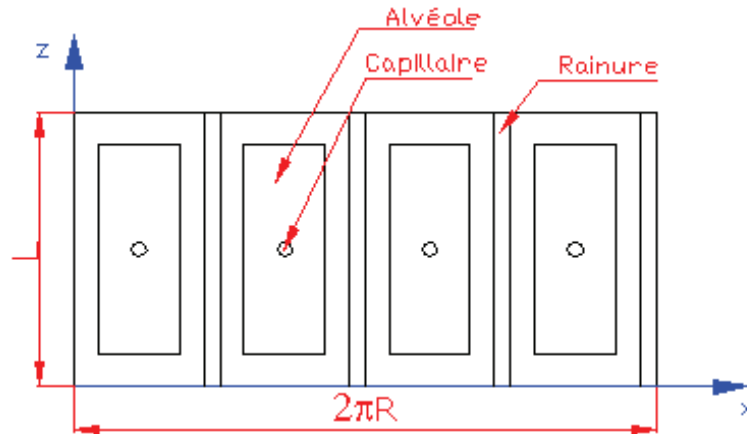
### IV-2-1 – Résolution de l'équation de Reynolds pour un écoulement laminaire :

#### IV-2-1-1 – Conditions aux limites :

Pour ce cas, il est recommandé de développer le palier afin de rendre la résolution plus facile, et de pouvoir travailler en coordonnées cartésiennes.



*a- Palier hybride (coupe frontale)*



*b- Palier hybride développé*

**Figure IV-7 - Palier hybride (Description et dimensions)**

Pour calculer la pression dans un alvéole, il faut appliquer la formule suivante:

$$P_a = \frac{P_s}{\left(1 + \frac{K_Q}{K_C} h^3\right)} \quad (\text{IV-12})$$

dont:

$P_s$  : est la pression au niveau du capillaire;

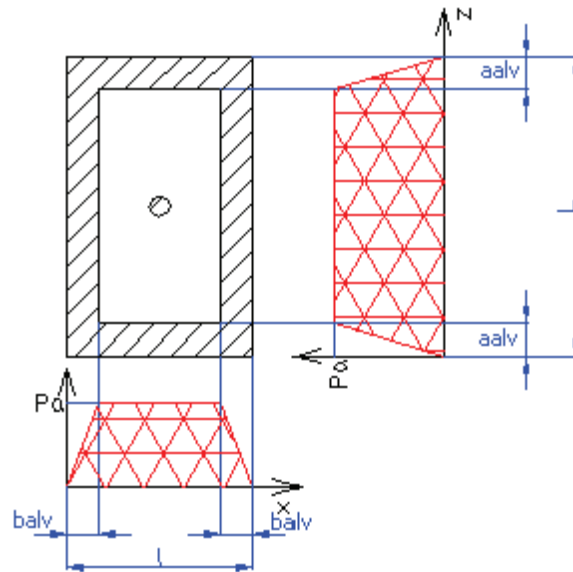
$h$  : La hauteur du film d'huile;

$$K_Q = \frac{1}{6a} \frac{\pi D}{4} \quad (\text{IV-13})$$

$$K_C = \frac{\pi r^4}{8l} \quad (\text{IV-14})$$

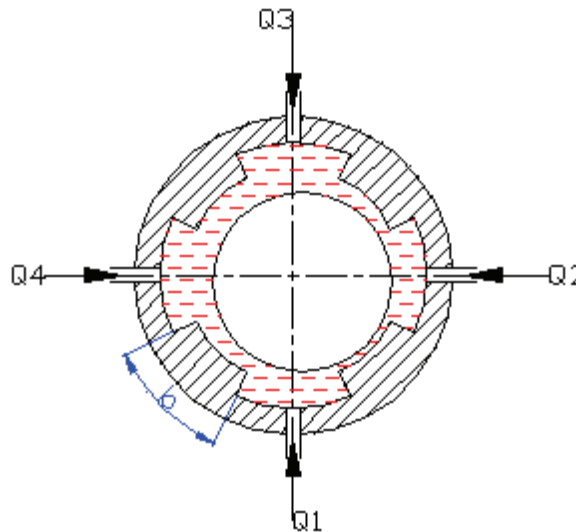
Mais lorsque l'arbre est sollicité par une charge il sera désaxé et la pression n'est pas la même dans tous les alvéoles, c'est pour cela qu'il faut déterminer la pression dans les alvéoles pour une excentricité quelconque.

Le profil de pression dans un alvéole prend une forme trapézoïdale (Voir figure IV-8)



**Figure IV-8 – Pression et dimensions de l'alvéole**

#### **IV-2-1-2 – Calcul de la pression dans les alvéoles pour une excentricité quelconque :**



**Figure IV-9 – Palier chargé**

Si le palier est non chargé (n'est pas sollicité), la pression reste la même dans tous les alvéoles et ne varie pas car il n'y a pas de pression hydrodynamique. Mais dans le cas du palier chargé, la pression est différente dans tous les alvéoles car l'excentricité de l'arbre fait couler une quantité de lubrifiant qui remonte ou descend d'un alvéole à un autre: ce qui fait augmenter ou diminuer la pression.

On calcule, dans cette partie, la pression au niveau des alvéoles pour un palier hybride à quatre alvéoles.

De la loi de conservation des débits, on a :

**Débit à travers le capillaire = Débit dû à l'effet hydrostatique + Débit dû à l'effet hydrodynamique** (IV-15)

Pour un palier à n alvéoles :

$$\frac{K_c}{\mu}(P_s - P_i) = \frac{\pi R C^3}{12 \mu a m} \left[ 4H_i^3 P_i + \frac{nm}{2}(P_i - P_{i+1})\bar{H}_i^3 + \frac{nm}{2}(P_i - P_{i-1})\bar{H}_{i-1}^3 \right] + \frac{\pi D N C}{2}(L-a)(\bar{H}_i - \bar{H}_{i-1}) \quad (IV-16)$$

dont :

$$\begin{cases} H_i = 1 - \varepsilon \cos \left[ \frac{2\pi(i-1)}{n} \right] \\ \bar{H}_i = 1 - \varepsilon \cos \left[ \frac{2\pi(2i-1)}{n} \right] \\ m = \frac{na(L-a)}{\pi D b} \end{cases} \quad (IV-17)$$

Au niveau des alvéoles la pression hydrodynamique est négligeable.

Pour un palier à quatre alvéoles, on aura quatre équations :

$$\begin{cases} \frac{K_c}{\mu}(P_s - P_1) = \frac{\pi R C^3}{12 \mu a m} [4H_1^3 P_1 + 2m(P_1 - P_2)H_2^3 + 2m(P_1 - P_4)H_4^3] \\ \frac{K_c}{\mu}(P_s - P_2) = \frac{\pi R C^3}{12 \mu a m} [4H_2^3 P_2 + 2m(P_2 - P_3)H_3^3 + 2m(P_2 - P_1)H_1^3] \\ \frac{K_c}{\mu}(P_s - P_3) = \frac{\pi R C^3}{12 \mu a m} [4H_3^3 P_3 + 2m(P_3 - P_4)H_4^3 + 2m(P_3 - P_2)H_2^3] \\ \frac{K_c}{\mu}(P_s - P_4) = \frac{\pi R C^3}{12 \mu a m} [4H_4^3 P_4 + 2m(P_4 - P_1)H_1^3 + 2m(P_4 - P_3)H_3^3] \end{cases} \quad (IV-18)$$

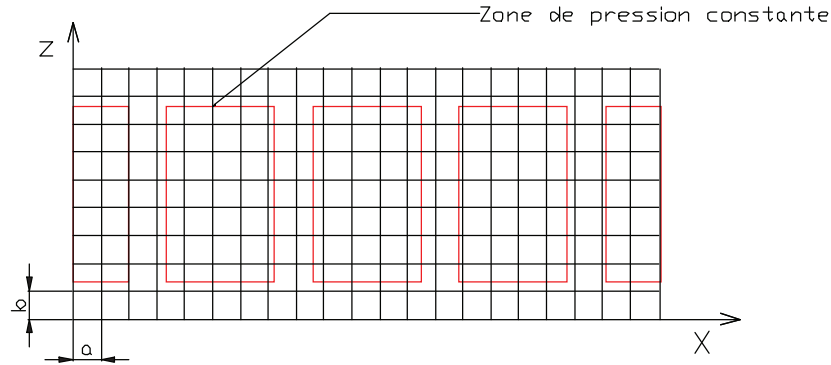
Pour avoir la pression dans chacun des alvéoles, il faut résoudre le système d'équations (IV-19).

#### **IV-2-1-3 – Discrétisation de l'équation de Reynolds par la MEF :**

Résumons les conditions aux limites dans le tableau suivant :

<i>Position</i>	<i>Pression</i>
X=0, Z=0	P=0
X=0, Z=L	P=0
X=2πR, Z=0	P=0
X=2πR, Z=L	P=0
Au niveau de l'alvéole i	P=P <sub>i</sub>
Au niveau des rainures	P=0
où : $\frac{\partial P}{\partial X} < 0$	P=0

Le domaine de résolution est un palier à quatre alvéoles (voir fig IV-10). Pour pouvoir trouver le problème variationnel caractérisant l'équation (III-2), on choisit un maillage. Les éléments du maillage seront de forme quadrilatérale.



**Figure IV-10 – Découpage de la surface du coussinet en éléments finis**

Pour établir le problème variationnel, on multiplie l'équation (III-2) par une fonctionnelle  $v$ , agissant de la même manière que la pression  $p$  dans le même élément fini, et on intègre par parties.

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right\} v dx dz = \iint_{\Omega} 6 \mu U v \frac{dh}{dx} dx dz \quad (IV-19)$$

En appliquant la formule de Green sur l'équation (V-20) on aura:

$$-\iint_{\Omega} \left\{ h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} dx dz + \oint_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial n} d\Sigma = \iint_{\Omega} 6 \mu U v \frac{dh}{dx} dx dz \quad (IV-20)$$

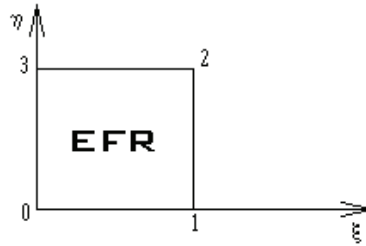
dont :

- $\Omega$  : est le domaine de résolution;
- $\Sigma$  : la frontière du domaine de résolution.

La pression est nulle au niveau de la frontière  $\Sigma$  donc le gradient de pression est nul sur cette frontière, donc l'équation (V-21) devient:

$$-\iint_{\Omega} \left\{ h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} dx dz = \iint_{\Omega} 6 \mu U v \frac{dh}{dx} dx dz \quad (IV-21)$$

utilisant un élément fini de référence pour faciliter la tâche du point de vue de la résolution:



**Figure IV-11 – Élément de référence**

La base locale de l'élément EFR est:

$$B = \begin{cases} \lambda_0 = (1-\zeta)(1-\eta) \\ \lambda_1 = \zeta(1-\eta) \\ \lambda_2 = \zeta\eta \\ \lambda_3 = \eta(1-\zeta) \end{cases} \quad (\text{IV-22})$$

Les relations entre les coordonnées  $(x, z)$  et  $(\zeta, \eta)$  sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = x_0 + a\zeta \\ z = z_0 + b\eta \end{cases} \quad (\text{IV-23})$$

$x_0$  et  $z_0$  sont les coordonnées du premier nœud d'un élément.

Par conséquent, on aura:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \zeta} = a \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{a} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} = b \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{b} \end{cases} \quad (\text{IV-24})$$

donc:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{cases} \quad (\text{IV-25})$$

Pour passer du repère  $(x, z)$  au repère  $(\zeta, \eta)$  il faut calculer le Jacobien de passage:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab \quad (\text{IV-26})$$

En posant:

$$\begin{cases} p=\lambda_i \\ v=\lambda_j \end{cases} \quad (\text{IV-27})$$

En remplaçant les équations (IV-25), (IV-26) et (IV-27) dans l'équation (IV-21) on aboutit à:

$$-\iint_{\Omega} \left\{ h^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} + h^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial z} \frac{\partial \lambda_j}{\partial z} \right\} dx dz = \iint_{\Omega} 6\mu U \lambda_i \frac{dh}{dx} dx dz \quad (\text{IV-28})$$

donc le problème variationnel prend une forme bilinéaire de la forme:

$$a_{ij}=b_i \quad (\text{IV-29})$$

dont:

$$h=C(1+\varepsilon \cos \theta)=C \left[ 1+\varepsilon \cos \left( \frac{x_0+a\zeta}{R} \right) \right] \quad (\text{IV-30})$$

On calcule les coefficients de la matrice caractéristique  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{00} &= -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{a}{b} \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\zeta d\eta = \iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} (\eta-1)^2 + \frac{a}{b} (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta \\ &= -\int_0^1 h^3 \left[ \frac{b}{a} \left( \frac{\eta^3}{3} - \eta^2 + \eta \right) + \frac{a}{b} (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\bar{a}_{00} = -\int_0^1 h^3 \left[ \frac{b}{3a} + \frac{a}{b} (\zeta-1)^2 \right] d\zeta} \quad (\text{IV-31})$$

$$\bar{a}_{01} = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = \iint_{\Omega} h^3 \left[ -\frac{b}{a} (\eta-1)^2 - \frac{a}{b} \zeta (\zeta-1) \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{01} = \int_0^1 h^3 \left[ \frac{b}{3a} + \frac{a}{b} \zeta (\zeta-1) \right] d\zeta} \quad (\text{IV-32})$$

$$\bar{a}_{02} = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} \eta (\eta-1) + \frac{a}{b} \zeta (\zeta-1) \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{02} = \int_0^1 h^3 \left[ \frac{b}{6a} - \frac{a}{b} \zeta (\zeta-1) \right] d\zeta} \quad (\text{IV-33})$$

$$\bar{a}_{03} = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} \eta (1-\eta) - \frac{a}{b} (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta$$

$$\bar{a}_{03} = \int_0^1 h^3 \left[ \frac{a}{b} (\zeta - 1)^2 - \frac{b}{6a} \right] d\zeta \quad (IV-34)$$

$$\bar{a}_{12} = - \iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = - \iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} \eta (1 - \eta) - \frac{a}{b} \zeta^2 \right] d\zeta d\eta$$

$$\bar{a}_{12} = \int_0^1 h^3 \left[ \frac{a}{b} \zeta^2 - \frac{b}{6a} \right] d\zeta \quad (IV-35)$$

$$\bar{a}_{23} = - \iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = - \iint_{\Omega} h^3 \left[ -\frac{b}{a} \eta^2 + \frac{a}{b} \zeta (1 - \zeta) \right] d\zeta d\eta$$

$$\bar{a}_{23} = \int_0^1 h^3 \left[ \frac{b}{3a} - \frac{a}{b} \zeta (1 - \zeta) \right] d\zeta \quad (IV-36)$$

**Remarque:** Les intégrales de (IV-29) jusqu'à (V-34) se feront par la méthode des trapèzes directement sur ordinateur.

On a aussi:

- $\bar{a}_{00} = \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \bar{a}_{33}$
- $\bar{a}_{01} = \bar{a}_{10}$
- $\bar{a}_{02} = \bar{a}_{20} = \bar{a}_{13} = \bar{a}_{31}$
- $\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21}$
- $\bar{a}_{23} = \bar{a}_{32}$

Maintenant, on calcule les coefficients  $b_i$ :

$$\bar{b}_0 = ab \iint_{\Omega} 6\mu U \lambda_0 \frac{dh}{dx} d\zeta d\eta = ab \iint_{\Omega} 6\mu U (1 - \zeta)(1 - \eta) \frac{dh}{dx} d\zeta d\eta$$

$$\bar{b}_0 = \frac{3ab\mu UC\varepsilon}{R} \int_0^1 (\zeta - 1) \sin \left[ \frac{x_0 + a\zeta}{R} \right] d\zeta \quad (IV-37)$$

$$\bar{b}_1 = ab \iint_{\Omega} 6\mu U \lambda_1 \frac{dh}{dx} d\zeta d\eta = ab \iint_{\Omega} 6\mu U \zeta (1 - \eta) \frac{dh}{dx} d\zeta d\eta$$

$$\bar{b}_1 = \frac{3ab\mu UC\varepsilon}{R} \int_0^1 \zeta \sin \left[ \frac{x_0 + a\zeta}{R} \right] d\zeta \quad (IV-38)$$

$$\bar{b}_2 = ab \iint_{\Omega} 6\mu U \lambda_2 \frac{dh}{dx} d\zeta d\eta = ab \iint_{\Omega} 6\mu U \zeta \eta \frac{dh}{dx} d\zeta d\eta$$

$$\bar{b}_2 = -\frac{3ab\mu UC\varepsilon}{R} \int_0^1 \zeta \sin\left[\frac{x_0+a\zeta}{R}\right] d\zeta \tag{IV-39}$$

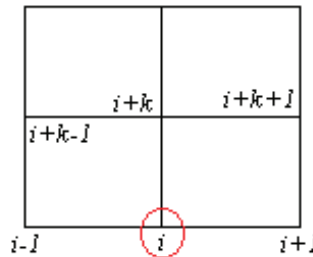
$$\bar{b}_3 = ab \iint_{\Omega} 6\mu U \lambda_3 \frac{dh}{dx} d\zeta d\eta = ab \iint_{\Omega} 6\mu U \eta (1-\zeta) \frac{dh}{dx} d\zeta d\eta$$

$$\bar{b}_3 = \frac{3ab\mu UC\varepsilon}{R} \int_0^1 (\zeta-1) \sin\left[\frac{x_0+a\zeta}{R}\right] d\zeta \tag{IV-40}$$

**Remarque :** Les intégrales de (V-37) jusqu'à (V-40) se feront par la méthode des trapèzes directement sur ordinateur.

Pour calculer les coefficients  $a_{ij}$  de la matrice caractéristique de l'équation (IV-21), On cumule pour chaque nœud appartenant à plusieurs éléments les coefficients  $\bar{a}_{ij}$ . Il en est de même pour les coefficients du vecteur  $b$ .

a) Pour un nœud sur la frontière:



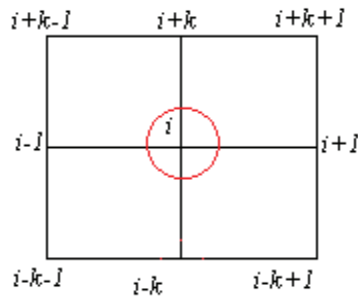
**Figure IV-12 – Nœud sur la frontière**

Le cumul des coefficients pour le nœud  $i$  sera calculé de la manière suivante:

$$\begin{cases} a_{ii} = \bar{a}_{00} + \bar{a}_{11} \\ a_{i,i-1} = \bar{a}_{01} \\ a_{i,i+1} = \bar{a}_{01} \\ a_{i,i+k} = \bar{a}_{12} + \bar{a}_{03} \\ a_{i,i+k-1} = \bar{a}_{02} \\ a_{i,i+k+1} = \bar{a}_{02} \end{cases} \tag{IV-41}$$

$$b_i = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 \tag{IV-42}$$

b) Pour un nœud au milieu:



**Figure IV-13 – Nœud au milieu**

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ii} = \bar{a}_{00} + \bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} + \bar{a}_{33} \\ a_{i,i-k} = \bar{a}_{12} + \bar{a}_{03} \\ a_{i,i+l} = \bar{a}_{01} + \bar{a}_{23} \\ a_{i,i+k} = \bar{a}_{12} + \bar{a}_{03} \\ a_{i,i-l} = \bar{a}_{01} + \bar{a}_{23} \\ a_{i,i-k-l} = a_{i,i-k+l} = a_{i,i+k-l} = a_{i,i+k+l} = \bar{a}_{02} \end{array} \right. \quad (IV-43)$$

$$b_i = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 \quad (IV-44)$$

Enfin, on obtient le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & \dots & \dots & a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ \dots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (IV-45)$$

D’après les conditions aux limites sur la pression, on va réduire les équations du système d’équations (IV-45) car la pression est connue sur la frontière et au niveau des alvéoles et des rainures.

Soit  $P_k$  la pression exercée sur le nœud  $k$ . Si  $P_k$  est connue alors on peut réduire le système d’équation, afin de faciliter la résolution, en procédant comme suit:

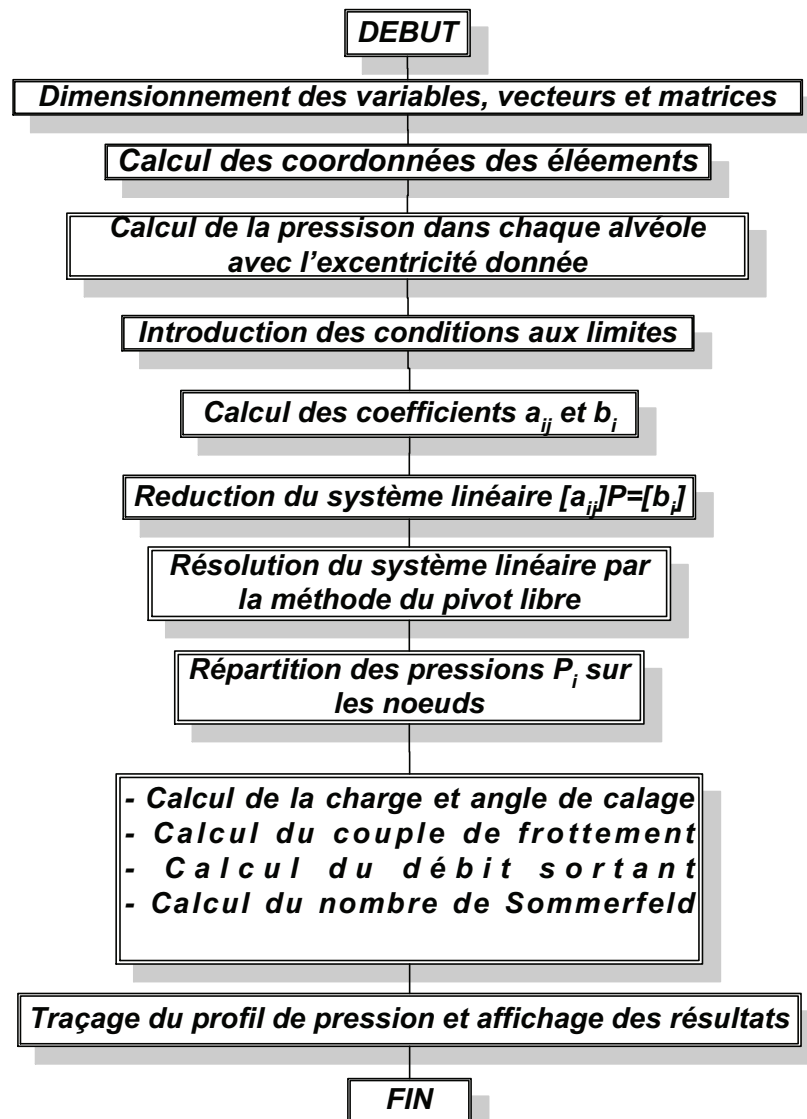
- $b_i = b_i - a_{ki} P_k$  (IV-46)
- éliminer la  $k^{\text{ième}}$  équation caractérisant le nœud  $k$

La résolution du système d’équations sera faite par la méthode du pivot libre.

La résolution du système d’équations (IV-45) permet d’avoir le champ de pression dans tous les nœuds du maillage.

**IV-2-1-4 – Organigramme de résolution :**

L'organigramme de résolution de l'équation aux dérivées partielles appliquée à un palier hybride en régime statique pour un écoulement laminaire est le suivant :



**Figure IV-14 – Organigramme de Résolution (Régime statique – laminaire)**

**V-2-2- Résolution de l'équation de Reynolds pour un écoulement turbulent :****IV-2-2-1- Discrétisation par la MEF :**

En régime turbulent, on procède comme de la même manière qu'en régime laminaire mais cette fois il faut faire intervenir le nombre de Reynolds car il doit être supérieur à 2000 et ajouter les coefficients multiplicateurs caractérisant la turbulence  $G_x$  et  $G_z$ .

L'équation de Reynolds en régime statique turbulent est celle déduite dans le chapitre précédent, l'équation (III-4).

En utilisant la méthode (MEF), le problème variationnel sera de la forme :

$$-\iint_{\Omega} \left\{ h^3 G_x \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} + h^3 G_z \frac{\partial \lambda_i}{\partial z} \frac{\partial \lambda_j}{\partial z} \right\} dx dz = \iint_{\Omega} 6 \mu U \lambda_i \frac{dh}{dx} dx dz \quad (IV-47)$$

$G_x$  et  $G_z$  sont exprimés par les équations (II-29).

En la base locale (IV-22), on calcule les coefficients  $a_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{00} &= -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} G_x \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{a}{b} G_z \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\zeta d\eta = \iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} (\eta-1)^2 + \frac{a}{b} (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta \\ &= -\int_0^1 h^3 \left[ \frac{b}{a} G_x \left( \frac{\eta^3}{3} - \eta^2 + \eta \right) + \frac{a}{b} G_z (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{a}_{00} = -\int_0^1 h^3 \left[ \frac{b}{3a} G_x + \frac{a}{b} G_z (\zeta-1)^2 \right] d\zeta} \quad (IV-48)$$

$$\bar{a}_{01} = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} G_x \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = \iint_{\Omega} h^3 \left[ -\frac{b}{a} G_x (\eta-1)^2 - \frac{a}{b} G_z \zeta (\zeta-1) \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{01} = \int_0^1 h^3 \left[ \frac{b}{3a} G_x + \frac{a}{b} G_z \zeta (\zeta-1) \right] d\zeta} \quad (IV-49)$$

$$\bar{a}_{02} = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} G_x \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} G_x \eta (\eta-1) + \frac{a}{b} G_z \zeta (\zeta-1) \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{02} = \int_0^1 h^3 \left[ \frac{b}{6a} G_x - \frac{a}{b} G_z \zeta (\zeta-1) \right] d\zeta} \quad (IV-50)$$

$$\bar{a}_{03} = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} G_x \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} G_x \eta (1-\eta) - \frac{a}{b} G_z (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{03} = \int_0^1 h^3 \left[ \frac{a}{b} G_z (\zeta-1)^2 - \frac{b}{6a} G_x \right] d\zeta} \quad (IV-51)$$

$$\bar{a}_{12} = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} G_x \frac{\partial \lambda_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} G_x \eta(1-\eta) - \frac{a}{b} G_z \zeta^2 \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{12} = \int_0^1 h^3 \left[ \frac{a}{b} G_z \zeta^2 - \frac{b}{6a} G_x \right] d\zeta} \quad (IV-52)$$

$$\bar{a}_{23} = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ \frac{b}{a} G_x \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\iint_{\Omega} h^3 \left[ -\frac{b}{a} G_x \eta^2 + \frac{a}{b} G_z \zeta(1-\zeta) \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{23} = \int_0^1 h^3 \left[ \frac{b}{3a} G_x - \frac{a}{b} G_z \zeta(1-\zeta) \right] d\zeta} \quad (IV-53)$$

Les coefficients  $b_i$  restent les mêmes que ceux du régime laminaire.

$$\boxed{\bar{b}_0 = \frac{3ab\mu UC\varepsilon}{R} \int_0^1 (\zeta-1) \sin \left[ \frac{x_0+a\zeta}{R} \right] d\zeta} \quad (IV-54)$$

$$\boxed{\bar{b}_1 = \frac{3ab\mu UC\varepsilon}{R} \int_0^1 \zeta \sin \left[ \frac{x_0+a\zeta}{R} \right] d\zeta} \quad (IV-56)$$

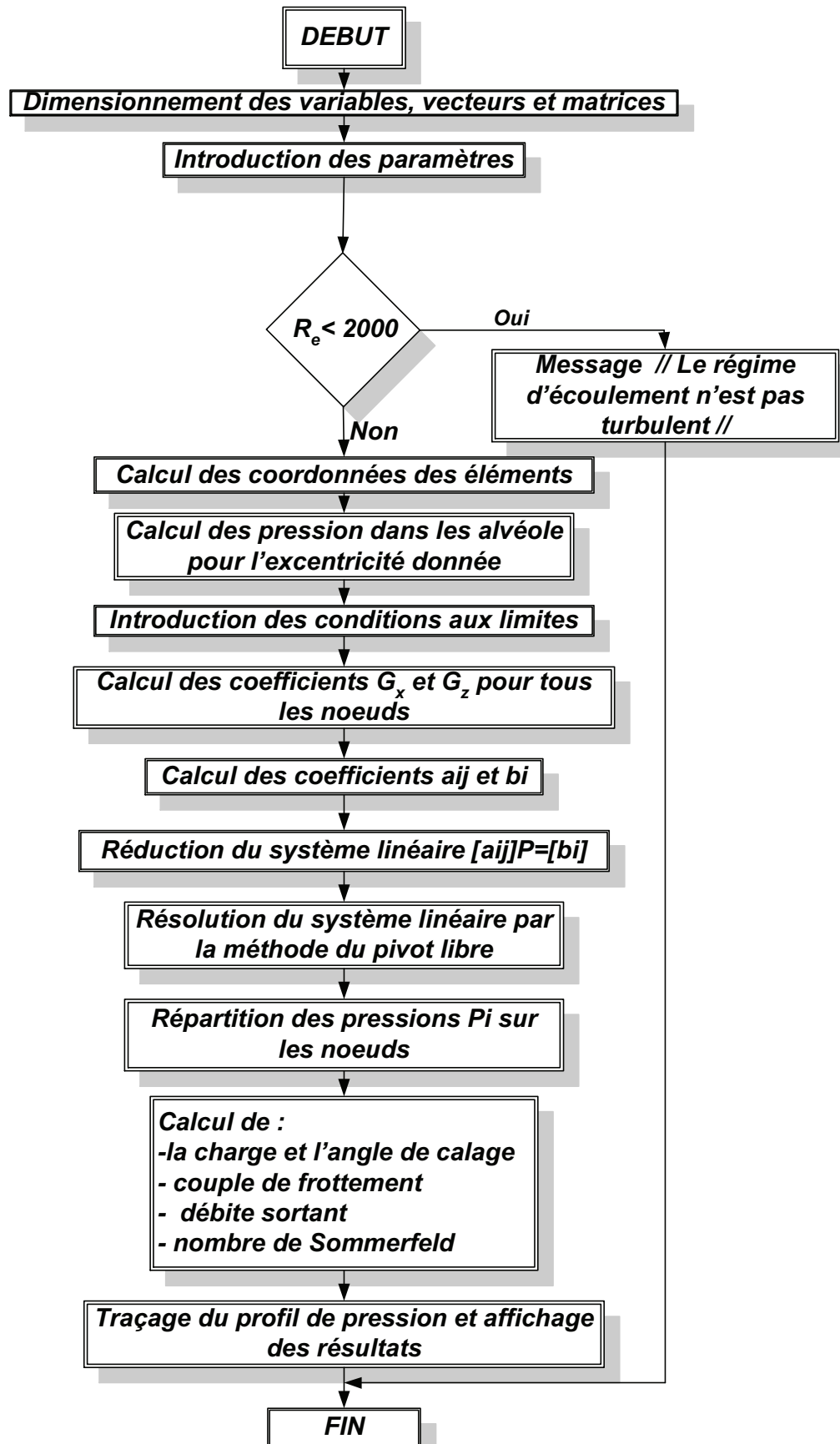
$$\boxed{\bar{b}_2 = \frac{3ab\mu UC\varepsilon}{R} \int_0^1 \zeta \sin \left[ \frac{x_0+a\zeta}{R} \right] d\zeta} \quad (IV-57)$$

$$\boxed{\bar{b}_3 = \frac{3ab\mu UC\varepsilon}{R} \int_0^1 (\zeta-1) \sin \left[ \frac{x_0+a\zeta}{R} \right] d\zeta} \quad (IV-58)$$

Le cumul des coefficient  $a_{ij}$  et  $b_i$  se fait comme expliqué précédemment dans les expressions (IV-41), (IV-42), (IV-43) et (IV-44).

#### **IV-2-2-2- Organigramme de résolution :**

L'organigramme de résolution de l'équation aux dérivées partielles appliquée à un palier hybride en régime statique pour un écoulement turbulent est le suivant :



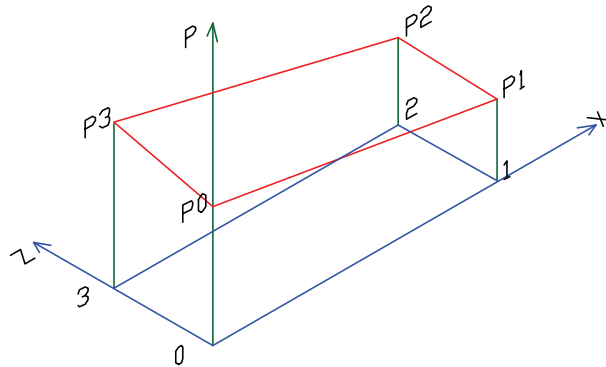
**Figure IV-15 – Organigramme de Résolution (Régime statique – turbulent)**

### IV-2-3- Discrétisation et calcul des coefficients statiques :

Dans cette partie on va calculer les coefficients statiques en utilisant les champs de pression discrets trouvés par l'application des organigrammes précédents.

#### IV-2-3-1 – Expression de la pression dans un élément fini :

Les relations donnant les coefficients statiques sont donnés sous forme intégrale, mais le champ de pression qu'on trouve, après résolution par la MEF, est discret ce qui impose l'approche de la pression par une fonction sur chaque élément fini et après intégration on cumule sur tous les éléments.



**Figure IV-16 – Profil de pression sur un seul élément fini**

L'expression de la pression sur un élément fini est donnée par :

$$P = \sum_0^3 \lambda_i P_i = (1-\zeta)(1-\eta)P_0 + \zeta(1-\eta)P_1 + \zeta\eta P_2 + \eta(1-\zeta)P_3 \quad (\text{IV-59})$$

Le mode de calcul reste le même pour les deux régime d'écoulement (laminaire et turbulent).

#### IV-2-3-2- Charge et angle de calage :

*La charge :*

En remplaçant l'équation (IV-59) dans l'équation (III-6) on trouve :

$$\begin{cases} W_x = \sum_i \tilde{W}_{xi} \\ W_y = \sum_i \tilde{W}_{yi} \end{cases} \quad (\text{IV-60})$$

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_X &= ab \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (1-\zeta)(1-\eta)P_0 + \zeta(1-\eta)P_1 + \zeta\eta P_2 + \eta(1-\zeta)P_3 \right\} \sin\theta \, ab \, d\zeta d\eta \\
&= ab \left[ \left( P_0 \int_0^1 (1-\eta) d\eta \int_0^1 (1-\zeta) \sin\theta d\zeta \right) + \left( P_1 \int_0^1 (1-\eta) d\eta \int_0^1 \zeta \sin\theta d\zeta \right) + \left( P_2 \int_0^1 \eta d\eta \int_0^1 \zeta \sin\theta d\zeta \right) + \left( P_3 \int_0^1 \eta d\eta \int_0^1 (1-\zeta) \sin\theta d\zeta \right) \right] \\
&= ab \left[ \left( \frac{P_0}{2} \int_0^1 (1-\zeta) \sin\theta d\zeta \right) + \left( \frac{P_1}{2} \int_0^1 \zeta \sin\theta d\zeta \right) + \left( \frac{P_2}{2} \int_0^1 \zeta \sin\theta d\zeta \right) + \left( \frac{P_3}{2} \int_0^1 (1-\zeta) \sin\theta d\zeta \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{W}_X = \frac{ab}{2} \int_0^1 \left[ (P_0 + P_3)(1-\zeta) + (P_1 + P_2)\zeta \right] \sin\theta d\zeta} \quad (IV-61)$$

De la même manière, on trouve la deuxième composante de la charge appliquée sur un élément fini du contact:

$$\boxed{\tilde{W}_Y = \frac{ab}{2} \int_0^1 \left[ (P_0 + P_3)(1-\zeta) + (P_1 + P_2)\zeta \right] \cos\theta d\zeta} \quad (IV-62)$$

La résultante sera exprimée par la formule suivante:

$$\boxed{W = \sqrt{W_X^2 + W_Y^2}} \quad (IV-63)$$

*L'angle de calage :*

$$\Phi = \text{Arctg} \left( \frac{W_X}{W_Y} \right) \quad (IV-64)$$

### **IV-2-3-3- Couple de Frottement :**

On calcule, d'abord, le couple de frottement pour un élément fini. On remplace l'équation (IV-59) dans (III-9) et on fait le changement de repère vers celui de référence:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_f &= \frac{bR}{2} \iint_{\Omega} \left[ (\eta-1)P_0 + (1-\eta)P_1 + \eta P_2 - \eta P_3 \right] h d\zeta d\eta + \mu U \iint_{\Omega} \frac{1}{h} d\zeta d\eta \\
\tilde{C}_f &= \frac{bR}{2} \int_0^1 \left[ (\eta-1)P_0 + (1-\eta)P_1 + \eta P_2 - \eta P_3 \right] d\eta \int_0^1 h d\zeta + ab\mu U \int_0^1 d\eta \int_0^1 \frac{1}{h} d\zeta \\
&= \frac{bRC}{4} [P_1 - P_0 + P_2 - P_3] \int_0^1 \left( 1 + \varepsilon \cos \left[ \frac{x_0 + a\zeta}{R} \right] \right) d\zeta + \frac{ab\mu U}{C} \int_0^1 \frac{d\zeta}{1 + \varepsilon \cos \left[ \frac{x_0 + a\zeta}{R} \right]} \\
&= \frac{bRC}{4} [P_1 - P_0 + P_2 - P_3] \left[ \zeta + \frac{2}{a} \varepsilon \sin \left[ \frac{x_0 + a\zeta}{R} \right] \right]_0^1 + \frac{ab\mu U}{C} \int_0^1 \frac{d\zeta}{1 + \varepsilon \cos \left[ \frac{x_0 + a\zeta}{R} \right]} \\
&= \frac{bRC}{4} [P_1 - P_0 + P_2 - P_3] \left[ 1 + \frac{2}{a} \varepsilon \left\{ \sin \left[ \frac{x_0 + a}{R} \right] - \sin \left[ \frac{x_0}{R} \right] \right\} \right] + \frac{ab\mu U}{C} \int_0^1 \frac{d\zeta}{1 + \varepsilon \cos \left[ \frac{x_0 + a\zeta}{R} \right]}
\end{aligned}$$

donc:

$$\tilde{C}_f = \frac{bRC}{4} [P_1 - P_0 + P_2 - P_3] \left[ 1 + \frac{2\varepsilon}{a} \left\{ \sin \left[ \frac{x_0 + a}{R} \right] - \sin \left[ \frac{x_0}{R} \right] \right\} \right] + \frac{ab\mu U}{C} \int_0^1 \frac{d\zeta}{1 + \varepsilon \cos \left[ \frac{x_0 + a\zeta}{R} \right]} \quad (IV-65)$$

$$C_f = \sum \tilde{C}_f \quad (IV-66)$$

#### **IV-2-3-4- Débits sortant :**

En remplaçant l'équation de la pression approchée (IV-59) pour un élément fini on aura :

$$\tilde{Q} = -\frac{a}{6\mu b} \int_0^1 \left[ h^3 \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] d\zeta = -\frac{a}{6\mu b} \int_0^1 \left[ h^3 [(\zeta - 1)P_0 - \zeta P_1 + \zeta P_2 + (1 - \zeta)P_3] \right] d\zeta$$

donc le volume, pour un élément fini, sera:

$$\tilde{Q} = -\frac{aC^3}{\mu b} \int_0^1 \left[ 1 + \varepsilon \cos \left( \frac{x_0 + a\zeta}{R} \right) \right]^3 [(\zeta - 1)P_0 - \zeta P_1 + \zeta P_2 + (1 - \zeta)P_3] d\zeta \quad (V-66)$$

Le débit global est la somme des débits de tous les éléments finis composant le contact:

$$Q = 2\sum \tilde{Q} \quad (V-67)$$

#### **IV-2-3-5- Nombre de Sommerfeld :**

Le nombre de Sommerfeld n'est calculé qu'à partir de l'équation (III-13)

### **IV-3-CALCUL DES CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES D'UN PALIER HYBRIDE**

#### **IV-3-1- Résolution de l'équation de Reynolds pour un écoulement laminaire :**

##### **IV-3-1-1- Discrétisation par la MEF :**

La discrétisation des équations (III-32) par éléments finis sera faite comme dans les parties précédentes : il faut, dans un premier temps établir le problème variationnel et dans un deuxième temps écrire la base locale et enfin calculer les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_i$ .

Le problème variationnel:

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h_0^3 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h_0^3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} v d\alpha dz = \iint_{\Omega} 6\mu\omega v \frac{dh_0}{d\alpha} d\alpha dz$$

En appliquant le théorème de Green:

$$\iint_{\Omega} h_0^3 \left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_0}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} d\alpha dz = \iint_{\Omega} 6\mu\omega v \frac{dh_0}{d\alpha} d\alpha dz$$

La base locale est la même que celle décrite précédemment en (IV-22).

$$\iint_{\Omega} h_0^3 \left\{ \frac{b}{aR^2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \eta} \right\} d\zeta d\eta = \iint_{\Omega} 6ab\mu\omega \varepsilon \sin\theta v d\zeta d\eta$$

De la même manière, le système d'équations sera de la forme:

$$-\iint_{\Omega} h_0^3 \left\{ \frac{b}{aR^2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \eta} \right\} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_x \\ p_y \\ p_{\dot{x}} \\ p_{\dot{y}} \end{pmatrix} d\zeta d\eta = \begin{cases} -\iint_{\Omega} 6ab\mu\omega \varepsilon \sin\theta \lambda_j d\zeta d\eta \\ \iint_{\Omega} ab \left\{ -6\mu\omega \left( \sin\alpha - 3\varepsilon \frac{\cos\alpha}{h_0} \sin\theta \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} \left[ \sin\alpha - \frac{\varepsilon \sin\theta}{h_0^2} \right] \right\} \lambda_j d\zeta \\ \iint_{\Omega} ab \left\{ 6\mu\omega \left( \cos\alpha + 3\varepsilon \frac{\sin\alpha}{h_0} \sin\theta \right) - 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} \left[ \cos\alpha - \frac{\varepsilon \sin\theta}{h_0^2} \right] \right\} \lambda_j d\zeta \\ \iint_{\Omega} 12ab\mu \cos\alpha \lambda_j d\zeta d\eta \\ \iint_{\Omega} 12ab\mu \sin\alpha \lambda_j d\zeta d\eta \end{cases}$$

(IV-68)

C'est la formulation variationnelle du problème.

On calcule les coefficients  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{00} &= -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{a}{b} \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\zeta d\eta = \iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} (\eta-1)^2 + \frac{a}{b} (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta \\ &= -\int_0^1 h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} \left( \frac{\eta^3}{3} - \eta^2 + \eta \right) + \frac{a}{b} (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta \end{aligned}$$

donc:

$$\boxed{\bar{a}_{00} = -\int_0^1 h_0^3 \left[ \frac{b}{3aR^2} + \frac{a}{b} (\zeta-1)^2 \right] d\zeta} \quad (IV-69)$$

$$\bar{a}_{01} = -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = \iint_{\Omega} h_0^3 \left[ -\frac{b}{aR^2} (\eta-1)^2 - \frac{a}{b} \zeta (\zeta-1) \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{01} = \int_0^1 h_0^3 \left[ \frac{b}{3aR^2} + \frac{a}{b} \zeta (\zeta-1) \right] d\zeta} \quad (IV-70)$$

$$\bar{a}_{02} = -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} \eta(\eta-1) + \frac{a}{b} \zeta(\zeta-1) \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{02} = \int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{b}{6aR^2} - \frac{a}{b} \zeta(\zeta-1) \right] d\zeta} \quad (\text{IV-71})$$

$$\bar{a}_{03} = -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} \eta(1-\eta) - \frac{a}{b} (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{03} = \int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{a}{b} (\zeta-1)^2 - \frac{b}{6aR^2} \right] d\zeta} \quad (\text{IV-72})$$

$$\bar{a}_{12} = -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} \eta(1-\eta) - \frac{a}{b} \zeta^2 \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{12} = \int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{a}{b} \zeta^2 - \frac{b}{6aR^2} \right] d\zeta} \quad (\text{IV-73})$$

$$\bar{a}_{23} = -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ -\frac{b}{aR^2} \eta^2 + \frac{a}{b} \zeta(1-\zeta) \right] d\zeta d\eta$$

$$\boxed{\bar{a}_{23} = \int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{b}{3aR^2} - \frac{a}{b} \zeta(1-\zeta) \right] d\zeta} \quad (\text{IV-74})$$

On calcule maintenant les coefficients  $b_i$  pour les cinq équations:

pour la première équation, on aura:

$$b_{i1} = -\iint_{\Omega} 6ab\mu\omega\epsilon \sin\theta \lambda_i d\zeta d\eta$$

en utilisant la base locale B on aura:

$$b_{01} = -3ab\mu\omega\epsilon \int_0^1 \sin(\alpha - \Phi)(1-\zeta) d\zeta$$

donc:

$$\boxed{b_{01} = -3ab\mu\omega\epsilon \int_0^1 \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi)(1-\zeta) d\zeta} \quad (\text{IV-75})$$

En procédant de la même manière on aura:

$$\boxed{b_{11} = -3ab\mu\omega \int_0^1 \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) \zeta d\zeta} \quad (IV-76)$$

$$\boxed{b_{21} = -3ab\mu\omega \int_0^1 \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) \zeta d\zeta} \quad (IV-77)$$

$$\boxed{b_{31} = -3ab\mu\omega \int_0^1 \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) (1-\zeta) d\zeta} \quad (IV-78)$$

On calcule les coefficients  $b_i$  de la deuxième équation:

$$b_{i2} = \iint_{\Omega} ab \left\{ -6\mu\alpha \left( \sin\alpha - 3\varepsilon \frac{\cos\alpha}{h_0} \sin\theta \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} \left[ \sin\alpha - \frac{\varepsilon \sin\theta}{h_0^2} \right] \right\} \lambda_j d\zeta d\eta$$

En utilisant la base locale B on aura pour un seul élément:

$$K_0 = \frac{1}{a} \left[ \frac{P_{01} - P_{00}}{3} + \frac{P_{02} - P_{03}}{6} \right]$$

$$\boxed{b_{02} = ab \int_0^1 \left\{ -3\mu\alpha \left( \sin(\alpha_0 + a\zeta) - 3\varepsilon \frac{\cos(\alpha_0 + a\zeta)}{h_0} \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} K_0 \left[ \sin(\alpha_0 + a\zeta) - \frac{\varepsilon \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi)}{h_0^2} \right] \right\} (1-\zeta) d\zeta} \quad (IV-79)$$

$$\boxed{b_{12} = ab \int_0^1 \left\{ -3\mu\alpha \left( \sin(\alpha_0 + a\zeta) - 3\varepsilon \frac{\cos(\alpha_0 + a\zeta)}{h_0} \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} K_0 \left[ \sin(\alpha_0 + a\zeta) - \frac{\varepsilon \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi)}{h_0^2} \right] \right\} \zeta d\zeta} \quad (IV-80)$$

$$\boxed{b_{22} = ab \int_0^1 \left\{ -3\mu\alpha \left( \sin(\alpha_0 + a\zeta) - 3\varepsilon \frac{\cos(\alpha_0 + a\zeta)}{h_0} \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} K_0 \left[ \sin(\alpha_0 + a\zeta) - \frac{\varepsilon \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi)}{h_0^2} \right] \right\} \zeta d\zeta} \quad (IV-81)$$

$$\boxed{b_{32} = ab \int_0^1 \left\{ -3\mu\alpha \left( \sin(\alpha_0 + a\zeta) - 3\varepsilon \frac{\cos(\alpha_0 + a\zeta)}{h_0} \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} K_0 \left[ \sin(\alpha_0 + a\zeta) - \frac{\varepsilon \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi)}{h_0^2} \right] \right\} (1-\zeta) d\zeta} \quad (IV-82)$$

On calcule les coefficients  $b_i$  de la troisième équation:

$$b_{i3} = \iint_{\Omega} ab \left\{ -6\mu\alpha \left( \cos\alpha - 3\varepsilon \frac{\sin\alpha}{h_0} \sin\theta \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} \left[ \cos\alpha - \frac{\varepsilon \sin\theta}{h_0^2} \right] \right\} \lambda_j d\zeta d\eta$$

En utilisant la base locale B, on aura pour un seul élément:

$$K_1 = \frac{1}{a} \left[ \frac{P_{01} - P_{00}}{6} + \frac{P_{02} - P_{03}}{3} \right]$$

$$b_{03} = ab \int_0^1 \left\{ -3\mu\alpha \left( \cos(\alpha_0 + a\zeta) - 3\varepsilon \frac{\sin(\alpha_0 + a\zeta)}{h_0} \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} K_1 \left[ \cos(\alpha_0 + a\zeta) - \frac{\varepsilon \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi)}{h_0^2} \right] \right\} (1-\zeta) d\zeta \quad (IV-83)$$

En procédant de la même manière, on abouti à :

$$b_{13} = ab \int_0^1 \left\{ -3\mu\alpha \left( \cos(\alpha_0 + a\zeta) - 3\varepsilon \frac{\sin(\alpha_0 + a\zeta)}{h_0} \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} K_1 \left[ \cos(\alpha_0 + a\zeta) - \frac{\varepsilon \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi)}{h_0^2} \right] \right\} \zeta d\zeta \quad (IV-84)$$

$$b_{23} = ab \int_0^1 \left\{ -3\mu\alpha \left( \cos(\alpha_0 + a\zeta) - 3\varepsilon \frac{\sin(\alpha_0 + a\zeta)}{h_0} \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} K_1 \left[ \cos(\alpha_0 + a\zeta) - \frac{\varepsilon \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi)}{h_0^2} \right] \right\} \zeta d\zeta \quad (IV-85)$$

$$b_{33} = ab \int_0^1 \left\{ -3\mu\alpha \left( \cos(\alpha_0 + a\zeta) - 3\varepsilon \frac{\sin(\alpha_0 + a\zeta)}{h_0} \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi) \right) + 3\mu \frac{h_0^3}{R^2} K_1 \left[ \cos(\alpha_0 + a\zeta) - \frac{\varepsilon \sin(\alpha_0 + a\zeta - \Phi)}{h_0^2} \right] \right\} (1-\zeta) d\zeta \quad (IV-86)$$

Pour la quatrième équation:

$$b_{i4} = \iint_{\Omega} 2ab\mu \cos\alpha \lambda_j d\zeta d\eta$$

$$b_{04} = 6ab\mu \int_0^1 \cos(\alpha_0 + a\zeta) (1-\zeta) d\zeta \quad (IV-87)$$

$$b_{14} = 6ab\mu \int_0^1 \cos(\alpha_0 + a\zeta) \zeta d\zeta \quad (IV-88)$$

$$b_{04} = 6ab\mu \int_0^1 \cos(\alpha_0 + a\zeta) \zeta d\zeta \quad (IV-89)$$

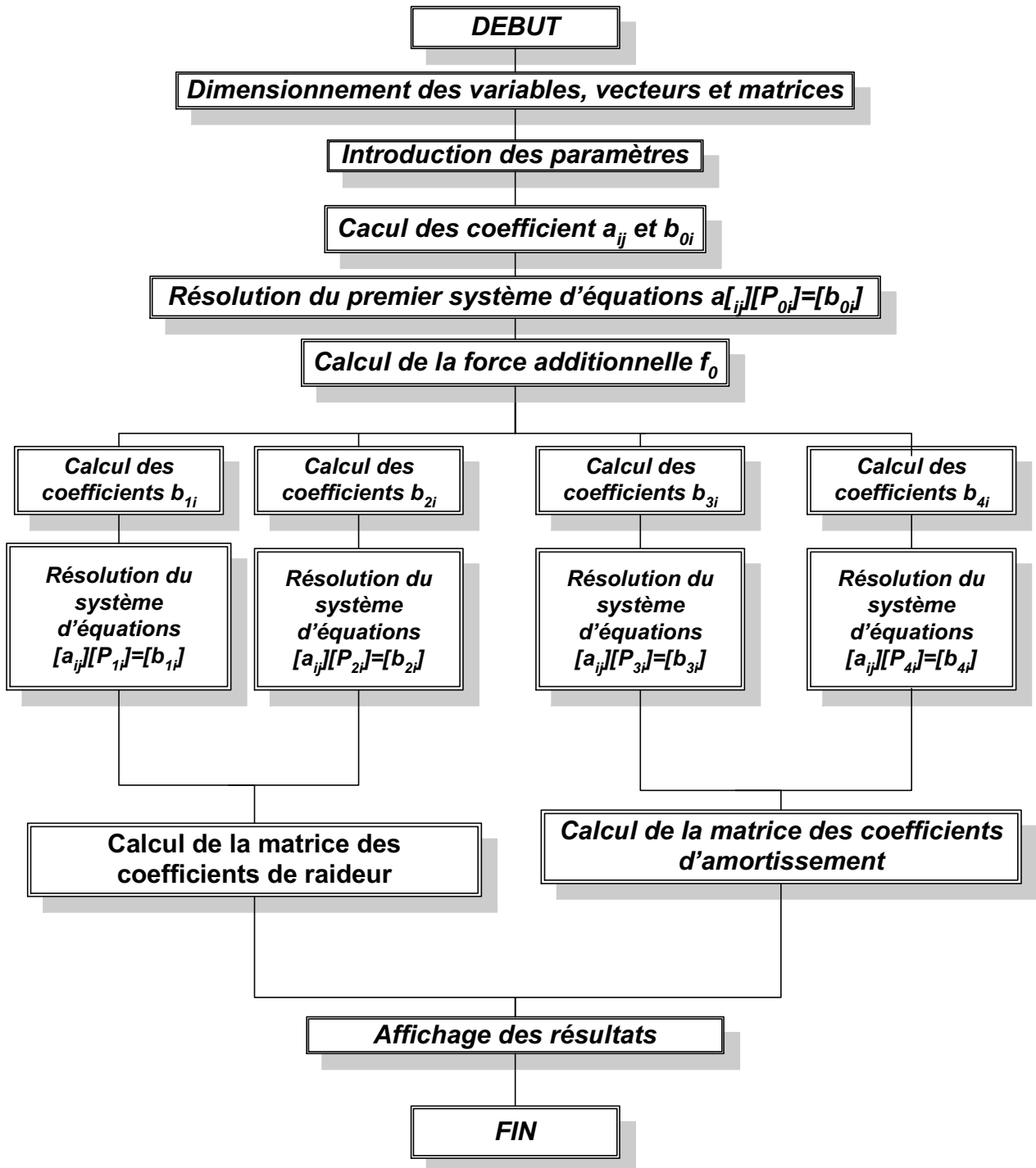
$$b_{04} = 6ab\mu \int_0^1 \cos(\alpha_0 + a\zeta) (1-\zeta) d\zeta \quad (IV-90)$$

On va, maintenant, résoudre les systèmes d'équations en employant la méthode du pivot libre.

**Remarque:** On cumule les coefficients des cinq équations en utilisant les équations (IV-41), (IV-42), (IV-43) et (IV-44).

**IV-3-1-2- Organigramme de résolution :**

L'organigramme suivant représente les pas à suivre pour résoudre l'équation de Reynolds en régime dynamique – laminaire.



**Figure IV-17 – Organigramme de Résolution (Régime Dynamique – Laminaire)**

**IV-3-2- Résolution de l'équation de Reynolds pour un écoulement turbulent :**

**IV-3-2-1- Discrétisation par la MEF :**

On va, maintenant, discrétiser les équations (III-33), pour pouvoir calculer les coefficients de raideur et d'amortissement.

Le problème variationnel:

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h_0^3 G_x \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h_0^3 G_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} v d\alpha dz = \iint_{\Omega} 6\mu\omega v \frac{dh_0}{d\alpha} d\alpha dz$$

En appliquant le théorème de Green:

$$\iint_{\Omega} h_0^3 \left\{ \frac{1}{R^2} G_x \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + G_z \frac{\partial p_0}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} d\alpha dz = \iint_{\Omega} 6\mu\omega v \frac{dh_0}{d\alpha} d\alpha dz$$

La base locale est la même que celle décrite précédemment en (IV-22).

$$\iint_{\Omega} h_0^3 \left\{ \frac{b}{aR^2} G_x \frac{\partial \lambda_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \eta} \right\} d\zeta d\eta = \iint_{\Omega} 6ab\mu\omega \varepsilon \sin\theta v d\zeta d\eta$$

De la même manière, le système d'équations sera de la forme:

$$-\iint_{\Omega} h_0^3 \left\{ \frac{b}{aR^2} G_x \frac{\partial \lambda_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \eta} \right\} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} d\zeta d\eta = \begin{cases} -\iint_{\Omega} \frac{1}{2} ab\mu\omega \varepsilon \sin\theta \lambda_j d\zeta d\eta \\ \iint_{\Omega} ab \left\{ -\frac{1}{2} \mu\omega \left( \sin\alpha - 3\varepsilon \frac{\cos\alpha}{h_0} \sin\theta \right) + \frac{1}{4} \mu \frac{h_0^3}{R^2} \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} \left[ \sin\alpha - \frac{\varepsilon \sin\theta}{h_0^2} \right] \right\} \lambda_j d\zeta d\eta \\ \iint_{\Omega} ab \left\{ \frac{1}{2} \mu\omega \left( \cos\alpha + 3\varepsilon \frac{\sin\alpha}{h_0} \sin\theta \right) - \frac{1}{4} \mu \frac{h_0^3}{R^2} \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} \left[ \cos\alpha - \frac{\varepsilon \sin\theta}{h_0^2} \right] \right\} \lambda_j d\zeta d\eta \\ \iint_{\Omega} ab\mu \cos\alpha \lambda_j d\zeta d\eta \\ \iint_{\Omega} ab\mu \sin\alpha \lambda_j d\zeta d\eta \end{cases} \quad (IV-91)$$

C'est la formulation variationnelle du problème.

On calcule les coefficients  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{00} &= -\iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{a}{b} G_z \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\zeta d\eta = \iint_{\Omega} h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x (\eta-1)^2 + \frac{a}{b} G_z (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta \\ &= \int_0^1 \int_0^1 h_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x \left( \frac{\eta^3}{3} - \eta^2 + \eta \right) + \frac{a}{b} G_z (\zeta-1)^2 \right] d\zeta d\eta \end{aligned}$$

donc:

$$\bar{a}_{00} = -\int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{b}{3aR^2} G_x + \frac{a}{b} G_z (\zeta - 1)^2 \right] d\zeta \quad (\text{IV-92})$$

$$\bar{a}_{01} = -\int_{\Omega} \int_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = \int_{\Omega} \int_0^3 \left[ -\frac{b}{aR^2} G_x (\eta - 1)^2 - \frac{a}{b} G_z \zeta (\zeta - 1) \right] d\zeta d\eta$$

$$\bar{a}_{01} = \int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{b}{3aR^2} G_x + \frac{a}{b} G_z \zeta (\zeta - 1) \right] d\zeta \quad (\text{IV-93})$$

$$\bar{a}_{02} = -\int_{\Omega} \int_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\int_{\Omega} \int_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x \eta (\eta - 1) + \frac{a}{b} G_z \zeta (\zeta - 1) \right] d\zeta d\eta$$

$$\bar{a}_{02} = \int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{b}{6aR^2} G_x - \frac{a}{b} G_z \zeta (\zeta - 1) \right] d\zeta \quad (\text{IV-94})$$

$$\bar{a}_{03} = -\int_{\Omega} \int_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\int_{\Omega} \int_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x \eta (1 - \eta) - \frac{a}{b} G_z (\zeta - 1)^2 \right] d\zeta d\eta$$

$$\bar{a}_{03} = \int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{a}{b} G_z (\zeta - 1)^2 - \frac{b}{6aR^2} G_x \right] d\zeta \quad (\text{IV-95})$$

$$\bar{a}_{12} = -\int_{\Omega} \int_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x \frac{\partial \lambda_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\int_{\Omega} \int_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x \eta (1 - \eta) - \frac{a}{b} G_z \zeta^2 \right] d\zeta d\eta$$

$$\bar{a}_{12} = \int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{a}{b} G_z \zeta^2 - \frac{b}{6aR^2} G_x \right] d\zeta \quad (\text{IV-96})$$

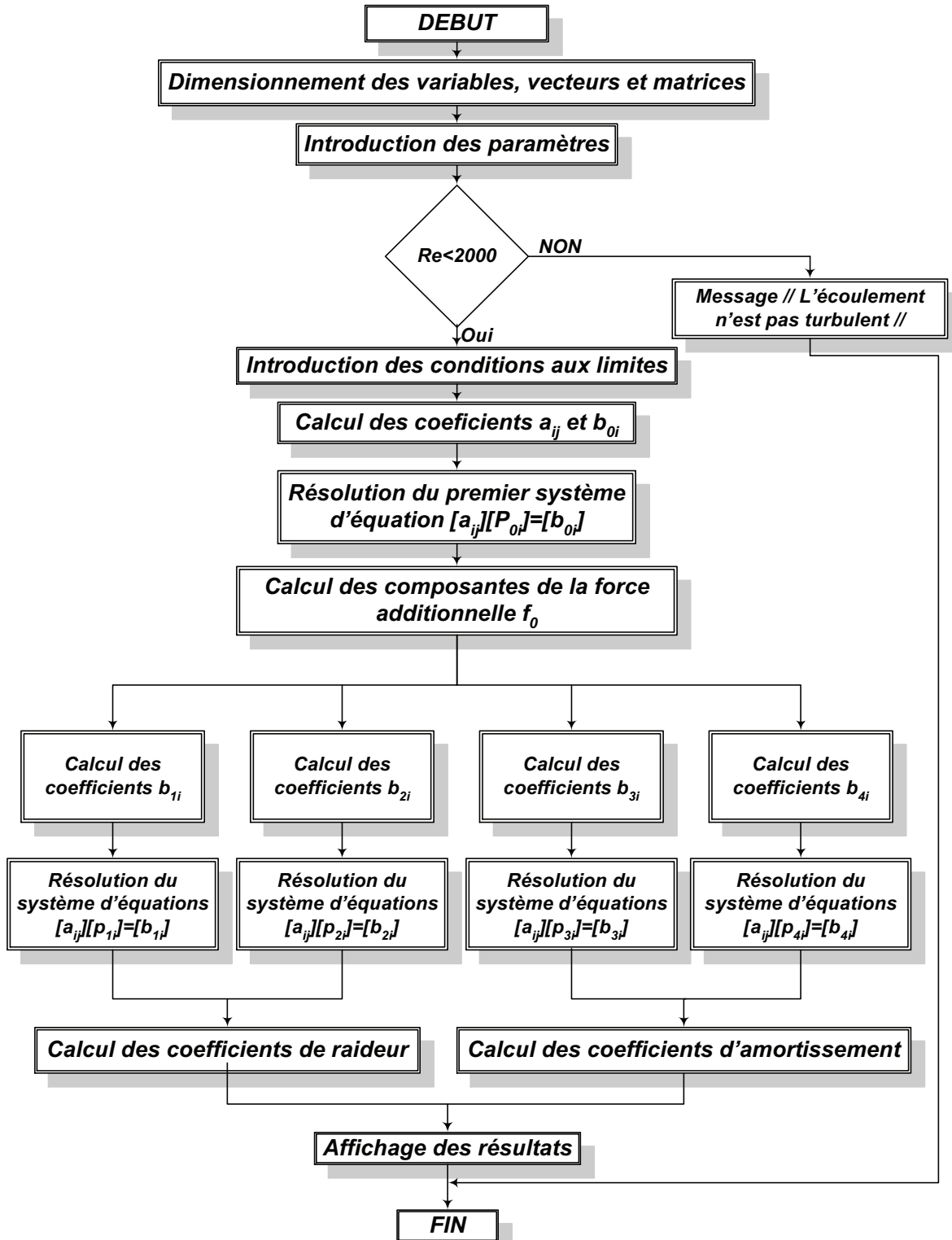
$$\bar{a}_{23} = -\int_{\Omega} \int_0^3 \left[ \frac{b}{aR^2} G_x \frac{\partial \lambda_2}{\partial \zeta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \zeta} + \frac{a}{b} G_z \frac{\partial \lambda_2}{\partial \eta} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \eta} \right] d\zeta d\eta = -\int_{\Omega} \int_0^3 \left[ -\frac{b}{aR^2} G_x \eta^2 + \frac{a}{b} G_z \zeta (1 - \zeta) \right] d\zeta d\eta$$

$$\bar{a}_{23} = \int_0^1 \int_0^3 \left[ \frac{b}{3aR^2} G_x - \frac{a}{b} \zeta (1 - \zeta) G_z \right] d\zeta \quad (\text{IV-97})$$

Les coefficients  $b_i$  seront calculés de la même manière qu'en régime laminaire.

Après avoir calculé les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_i$  des cinq équations, on va résoudre les systèmes d'équations et obtenir ainsi les champs de pression :  $p_0$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ , ces derniers nous permettent de calculer la matrice de raideur et celle d'amortissement.

**IV-3-2-2 – Organigramme de résolution :**



**Figure IV-18 – Organigramme de Résolution (Régime Dynamique – turbulent)**

### **IV-3-3- DISCRETISATION ET CALCUL DES COEFFICIENTS DYNAMIQUES :**

#### **IV-3-3-1- Les expression approchées des champs de pression dans un élément fini :**

Après avoir calculé les valeurs de  $p_0$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_x'$ ,  $p_y'$  dans chaque nœud du maillage utilisé pour la résolution, on procède, maintenant, au calcul des coefficients dynamiques.

La forme approchée dans l'élément de  $p_0$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_x'$ ,  $p_y'$  sont:

$$\begin{cases} p_0 = (1-\zeta)(1-\eta)p_{00} + \zeta(1-\eta)p_{10} + \zeta\eta p_{20} + \eta(1-\zeta)p_{30} \\ p_x = (1-\zeta)(1-\eta)p_{0x} + \zeta(1-\eta)p_{1x} + \zeta\eta p_{2x} + \eta(1-\zeta)p_{3x} \\ p_y = (1-\zeta)(1-\eta)p_{0y} + \zeta(1-\eta)p_{1y} + \zeta\eta p_{2y} + \eta(1-\zeta)p_{3y} \\ p_x' = (1-\zeta)(1-\eta)p_{0x'} + \zeta(1-\eta)p_{1x'} + \zeta\eta p_{2x'} + \eta(1-\zeta)p_{3x'} \\ p_y' = (1-\zeta)(1-\eta)p_{0y'} + \zeta(1-\eta)p_{1y'} + \zeta\eta p_{2y'} + \eta(1-\zeta)p_{3y'} \end{cases} \quad (IV-98)$$

#### **IV-3-3-2- Forces additionnelles :**

Pour discrétiser l'expression intégrale (III-36) de la force additionnelle on procède de la manière suivante :

En variables discrètes :

$$\begin{cases} \tilde{F}_x = Rab \int_0^1 \int_0^1 [(1-\zeta)(1-\eta)p_{00} + \zeta(1-\eta)p_{10} + \zeta\eta p_{20} + \eta(1-\zeta)p_{30}] \cos(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta d\eta \\ \tilde{F}_y = Rab \int_0^1 \int_0^1 [(1-\zeta)(1-\eta)p_{00} + \zeta(1-\eta)p_{10} + \zeta\eta p_{20} + \eta(1-\zeta)p_{30}] \sin(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta d\eta \end{cases} \quad (IV-99)$$

$$\begin{cases} \tilde{F}_x = \frac{Rab}{2} \int_0^1 [(1-\zeta)(p_{00} + p_{30}) + \zeta(p_{10} + p_{20})] \cos(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta \\ \tilde{F}_y = \frac{Rab}{2} \int_0^1 [(1-\zeta)(p_{00} + p_{30}) + \zeta(p_{10} + p_{20})] \sin(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta \end{cases} \quad (IV-100)$$

#### **IV-3-3-3- Coefficients de raideur :**

En remplaçant les champs de pression  $p_0$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_x'$ ,  $p_y'$  par leurs expression discrètes dans les équations (III-38) et (III-39) on aura :

$$\begin{cases} \tilde{K}_{xx} = \frac{Rab}{2} \int_0^1 [(1-\zeta)(P_{0x} + P_{3x}) + \zeta(P_{1x} + P_{2x})] \cos(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta \\ \tilde{K}_{yx} = -\frac{Rab}{2} \int_0^1 [(1-\zeta)(P_{0x} + P_{3x}) + \zeta(P_{1x} + P_{2x})] \sin(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta \end{cases} \quad (IV-101)$$

$$\begin{cases} \tilde{K}_{xy} = \frac{Rab}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(1-\zeta)(P_{0y} + P_{3y}) + \zeta(P_{1y} + P_{2y})] \cos(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta d\eta \\ \tilde{K}_{yy} = \frac{Rab}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(1-\zeta)(P_{0y} + P_{3y}) + \zeta(P_{1y} + P_{2y})] \sin(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta d\eta \end{cases} \quad (IV-102)$$

#### **IV-3-3-4- Coefficients d'amortissement :**

En remplaçant les champs de pression  $p_0$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_{\tilde{x}}$ ,  $p_{\tilde{y}}$  par leurs expression discrètes dans les équations (III-41) et (III-42) on aura :

$$\begin{cases} \tilde{C}_{xx} = \frac{Rab}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(1-\zeta)(P_{0x} + P_{3x}) + \zeta(P_{1x} + P_{2x})] \cos(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta d\eta \\ \tilde{C}_{yx} = \frac{Rab}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(1-\zeta)(P_{0x} + P_{3x}) + \zeta(P_{1x} + P_{2x})] \sin(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta d\eta \end{cases} \quad (IV-103)$$

$$\begin{cases} \tilde{C}_{xy} = \frac{Rab}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(1-\zeta)(P_{0y} + P_{3y}) + \zeta(P_{1y} + P_{2y})] \cos(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta d\eta \\ \tilde{C}_{yy} = \frac{Rab}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(1-\zeta)(P_{0y} + P_{3y}) + \zeta(P_{1y} + P_{2y})] \sin(\alpha_0 + a\zeta) d\zeta d\eta \end{cases} \quad (IV-104)$$

#### **IV-4 – CONCLUSION**

Dans ce chapitre nous avons discrétiser les équations de la lubrification par la méthode des éléments finis, dans le chapitre suivant nous allons voir le logiciel de résolution PHMEF et les résultats obtenus par ce dernier.

## CHAPITRE V

# RESULTATS ET DISCUSSION

### V-1 – INTRODUCTION :

Le but de cette étude est de concevoir un logiciel de simulation qui servira à la résolution de l'équation de Reynolds et le calcul des coefficients statiques et dynamiques d'un palier hybride pour un écoulement laminaire et turbulent.

### V-2- PRESENTATION DU LOGICIEL DE SIMULATION :

#### V-2-1 – Programmation :

Notre logiciel PHMEF fonctionne en multitâche, il utilise la technologie Thread qui exploite toutes les ressources du microprocesseur, diminuant ainsi le temps de calcul.

Le logiciel PHMEF se partage en six parties, deux parties visuelles :

- Interface utilisateur ;
- Surface de traçage ;

Et quatre parties non visuelle :

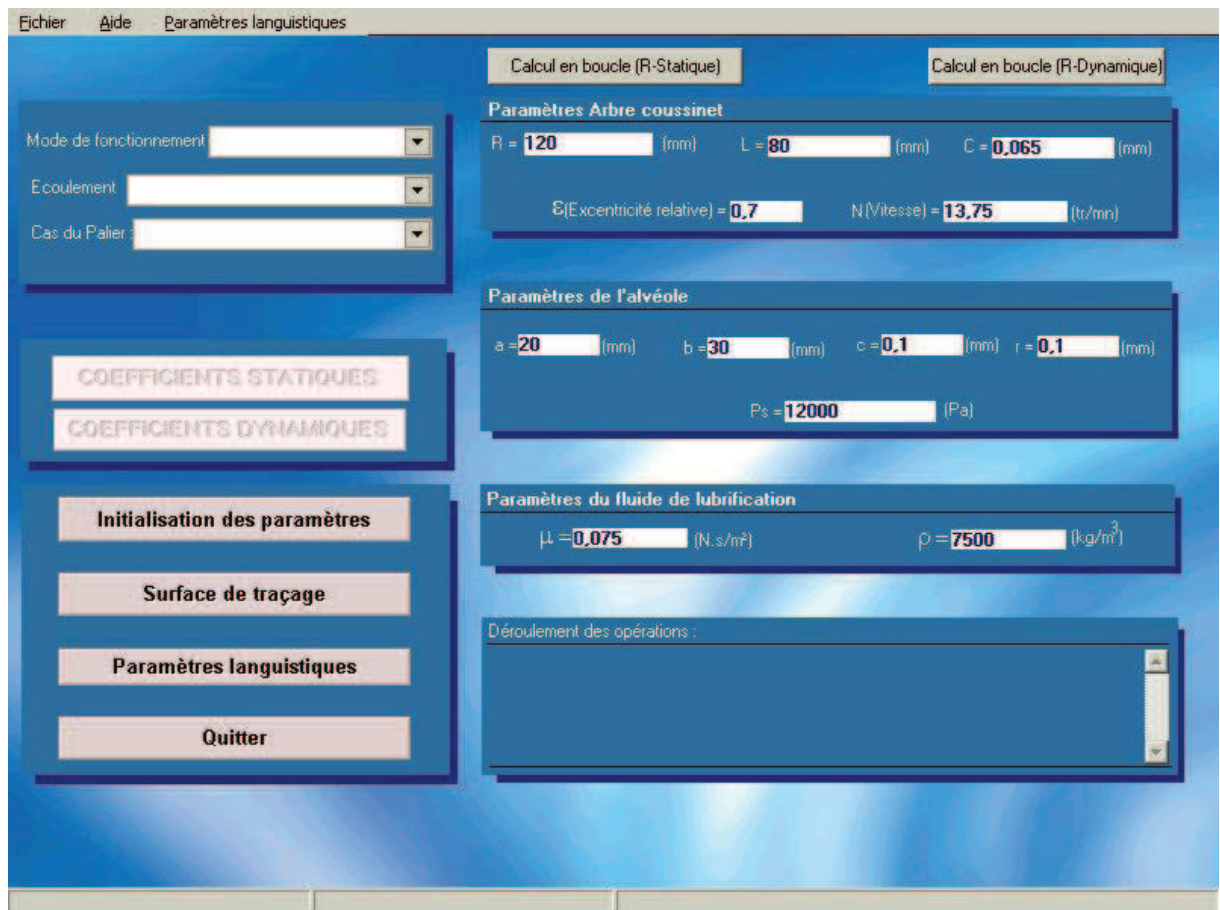
- Modules de calcul :
  - o Module d'intégration numérique ;
  - o Module de résolution des systèmes d'équations ;
  - o Module de différentiation ;
  - o Module de calcul par la méthode des éléments finis ;
  - o Module de calcul en boucle.
- Moteur 3D OpenGL ;
- Module de liaison Microsoft :
  - o Module de liaison Excel (MS Office 2000) ;
  - o Module de liaison Internet Explorer ;
- Assemblage multi-thread des fonctions utilisées.

#### V-2-1-1 – Composants visuels :

##### V-2-1-1-1- Interface utilisateur :

L'interface utilisateur a été conçue de telle sorte qu'elle soit très facile à utiliser même par un amateur en informatique.

Elle comporte la fenêtre principale de démarrage qui est représentée sur la figure suivante :



**Figure V-1 : Interface utilisateur**

Dans la liste état de fonctionnement, on y trouve comme option :

- L'état statique : pour déterminer les caractéristiques statiques ;
- L'état dynamique : pour calculer les coefficients dynamiques.

Dans la liste Ecoulement, on y trouve les deux régimes d'écoulement :

- Laminaire ;
- Turbulent.

Dans la liste cas du palier on distingue deux cas :

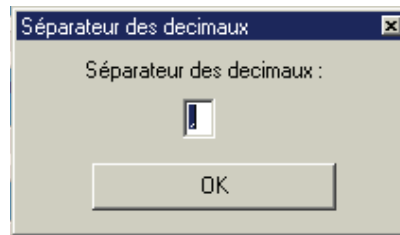
- Le cas non chargé, où l'excentricité est nulle ;
- Le cas chargé, où l'excentricité est variable.

Dans les panneaux : paramètres arbre coussinet, paramètres de l'alvéole, paramètres du fluide de lubrification on introduit les valeurs en modifiant les valeurs données comme exemple par le logiciel.

En appuyant sur :

- le bouton coefficients statiques on amorce le calcul des coefficients statiques ;
- le bouton coefficients dynamiques on commence le calcul des coefficients dynamiques ;
- le bouton Initialisation des paramètres on remplace les valeurs données par l'utilisateur par celles du logiciel, et on remet tous les compteurs à zéro ;
- le bouton surface de traçage nous affiche la surface de traçage du profil de pression (voir plus loin);

- le bouton Paramètres linguistiques une boîte de dialogue s'affiche (fig V-2) pour déterminer le type de séparateur des décimaux que le système sur lequel PHMEF est installé ;

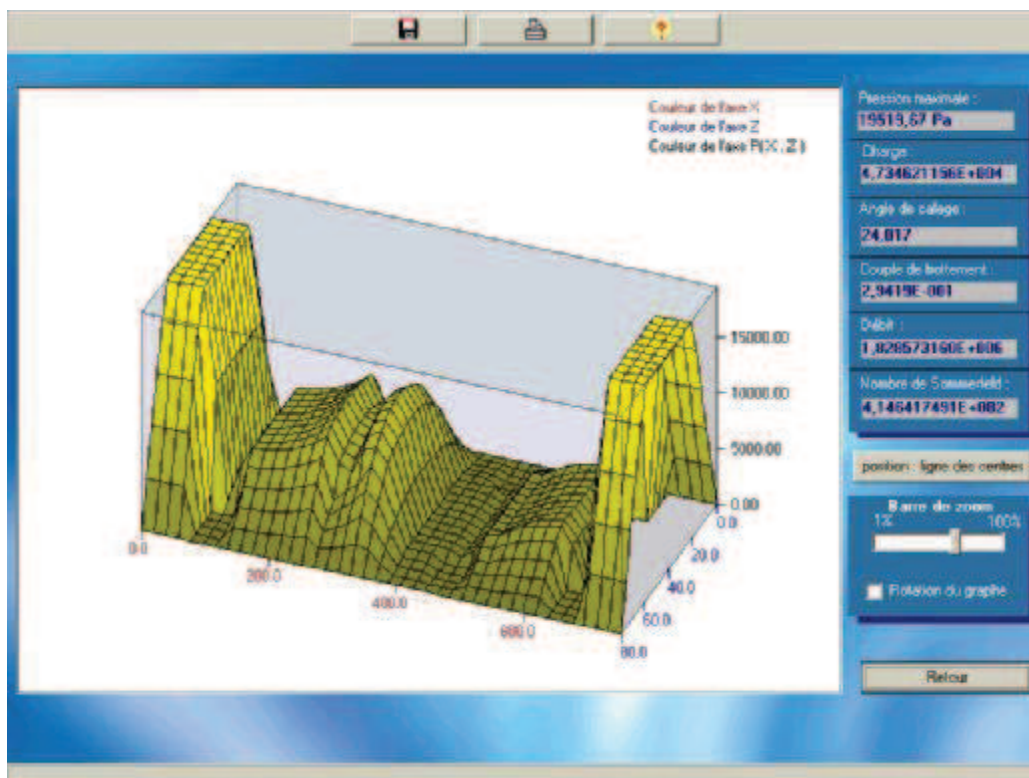


**Figure V-2 : Boîte de dialogue séparateur des décimaux**

- le bouton calcul en boucle (R- Statique), fait le calcul en boucle sur l'excentricité relative ( $\varepsilon = 0..0,9$ ) et affiche les résultats statiques sur une table Excel ;
- le calcul en boucle (R- Dynamique), fait le calcul en boucle sur l'excentricité relative ( $\varepsilon = 0..0,9$ ) et affiche les résultats dynamiques sur une table Excel;

### **V-2-1-1-2 – Surface de traçage :**

Sur cette surface on effectue le traçage du profil de pression ainsi que l'affichage des résultats statiques (fig V-3) :



**Figure V-3 : Surface de traçage**

On peut enregistrer le profil de pression dans un fichier image de type JPEG ainsi que l'impression des résultats statiques dans un tableau.

La barre de zoom nous permet de zoomer avant ou arrière sur le profil de pression.

**V-2-1-2 – Composants non visuels :****V-2-1-2-1 – Modules de calcul :**

Les modules de calcul utilisés sont :

- **Module d'intégration numérique** : il se base sur la méthode des trapèzes (voir annexe) ;
- **Module de résolution des systèmes d'équations linéaires** : qui se base sur la méthode de Gauss (la méthode du pivot, voir annexe) ;
- **Module de différentiation numérique** : il utilise la méthode de Taylor (voir annexe) ;
- **Module de calcul par éléments finis** : Ce module nous permet de déterminer la pression dans chaque élément du palier ;
- **Module de calcul en boucle** : c'est un module qui répète les calculs plusieurs fois pour la variation d'une variable donnée.

**V-2-1-2-2 – Moteur 3D OpenGL :**

Le moteur 3D OpenGL est utilisé pour l'affichage des objets en 3 dimensions et ce en ajoutant un troisième axe dans la plateforme graphique, manipuler les rendus de couleurs et gérer l'affichage des objets par priorité visuelle.

**V-2-1-2-3 – Module de liaison Microsoft :**

Les modules de liaison utilisés sont les suivants :

- **Module de liaison Excel (MS Office 2000)** : Ce module permet l'affichage des résultats calculés par le module de calcul en boucle sur une table Excel.
- **Module de liaison Internet Explorer** : Ce module permet l'affichage des résultats sur une page web.

**V-2-1-2-4 – Module d'assemblage multi – thread :**

Ce module permet d'exécuter plusieurs procédures à la fois, l'appel des procédures se fait par priorité pour ne pas engendrer une violation d'accès au niveau des plages occupées par d'autres applications en cours d'exécution.

**V-3 – RESULTATS ET DISCUSSION :**

Nous allons prendre comme exemple le palier hybride suivant :

**Les paramètres du palier**

R = 152.5 mm

L = 305 mm

C = 0.277 mm

**Les paramètres de l'alvéole :**

a = 25.5 mm

b = 64.083 mm

c = 0

r = 15.5

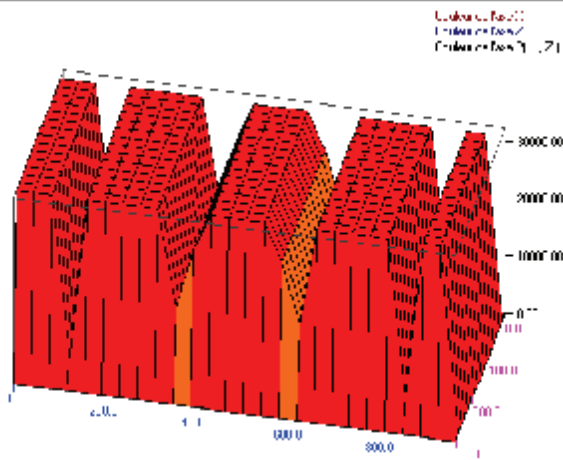
$P_s = 2.99 \times 10^{-5}$  Pa

**Les Paramètres du fluide de lubrification :**

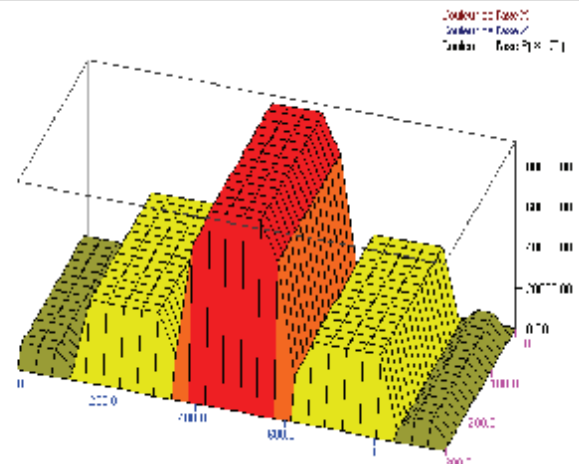
$\mu = 0.215 \times 10^{-3}$  N.s/m<sup>2</sup>

**V-3-1 – PROFILES DE PRESSION :**

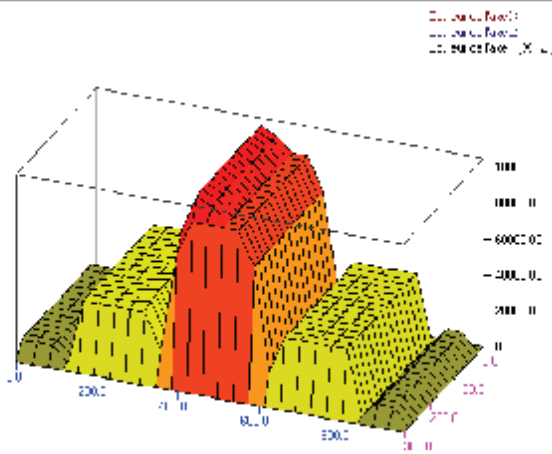
Nous allons présenter sous forme de graphes en 3D la distribution de la pression sur le coussinet du palier.



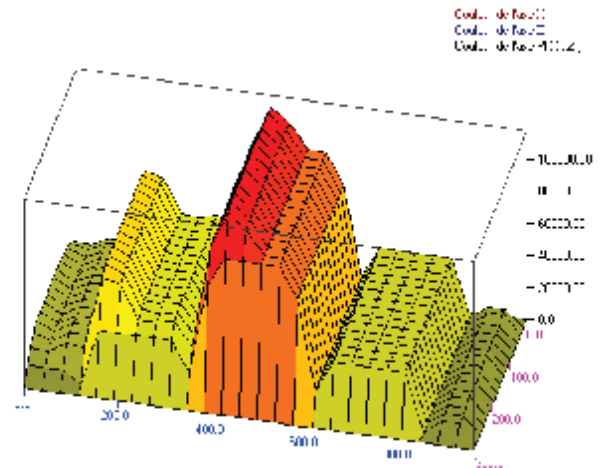
4-a)  $\epsilon = 0$  et  $N = 0$



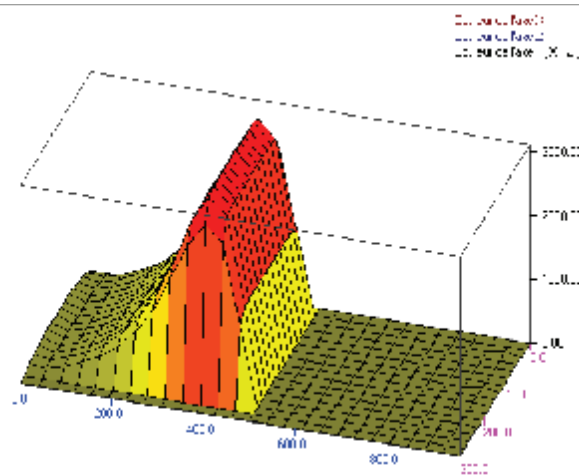
4-b)  $\epsilon = 0.5$  et  $N = 0$



4-c)  $\epsilon = 0.5$  et  $N = 500 \text{ tr/mn}$



4-d)  $\epsilon = 0.5$  et  $N = 1000 \text{ tr/mn}$



4-e)  $\epsilon = 0.5$  et  $N = 500 \text{ tr/mn}$   $P_s = 0$

**Figure V – 4 – Distribution de la pression sur le coussinet du palier  
Pour de différentes vitesses avec et sans chargement**

### V-3-1-1 – DISCUSSION :

Pour un palier non chargé, présenté sur la figure V-4-a, ( $\varepsilon = 0$ ) et pour une vitesse nulle, nous remarquons que la pression est uniformément répartie tout au long du coussinet.

Pour un palier chargé ( $\varepsilon = 0.5$ ), présenté sur la figure V-4-b, et pour une vitesse nulle, nous remarquons que la pression maximale est au niveau de l'alvéole dont l'épaisseur du film d'huile est minimale.

Pour les deux cas précédents (figures V-4 –a et b) le palier est *purement Hydrostatique*.

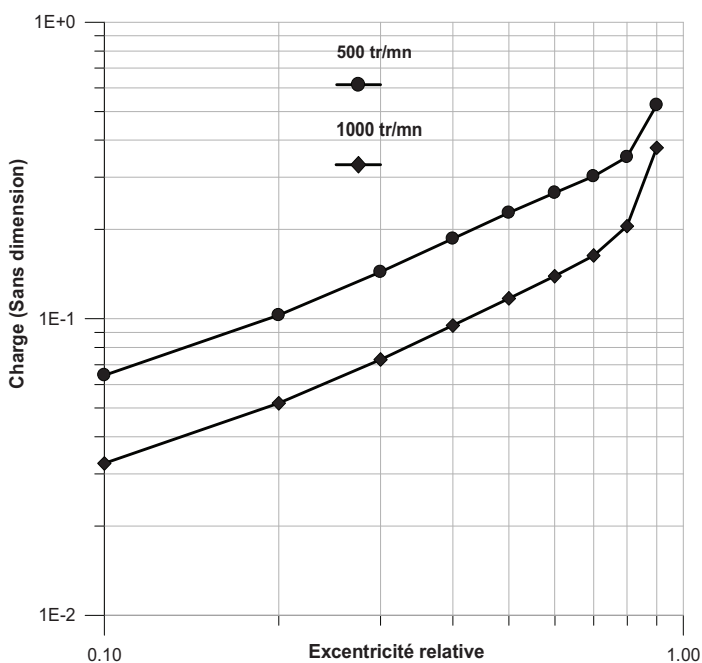
Pour des vitesses de rotation de l'arbre  $N = 500$  tr/mn et  $N = 1000$  tr/mn (Figures V-4-c et d) nous remarquons que l'effet hydrodynamique apparaît et vient s'ajouter à l'effet hydrostatique provoquant ainsi la hausse de la pression. Pour ces deux cas on dit que le palier est *Hybride* (Hydrodynamique + Hydrostatique).

En supprimant la pression d'alimentation  $P_s = 0$  (figure V-4 e), nous apercevons qu'il ne reste que l'effet hydrodynamique. Pour ce cas on dit que le palier est *purement Hydrodynamique*.

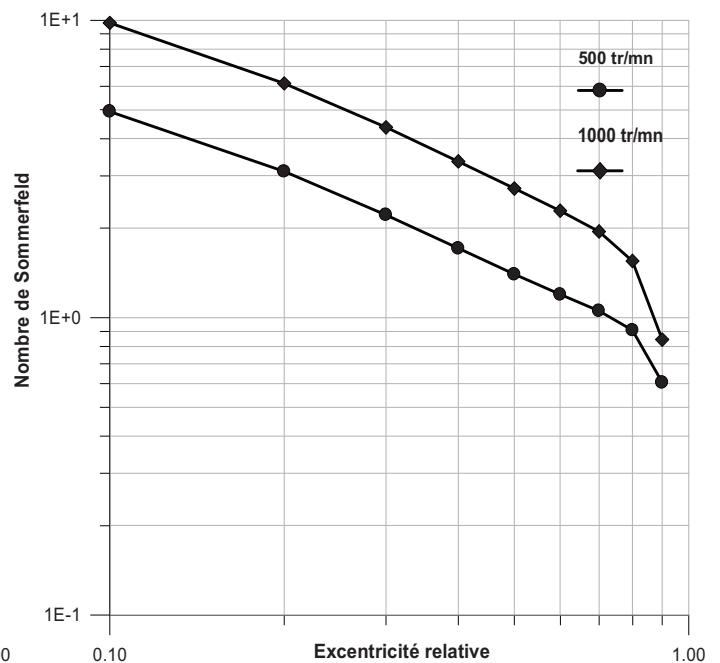
### V-3-2 – COEFFICIENTS STATIQUES ET DYNAMIQUES EN REGIME LAMINAIRE :

Nous allons tracer les coefficients, statiques et dynamiques, obtenus sous forme de courbes en fonction de l'excentricité relative  $\varepsilon$  et ce pour  $N = 500$  tr/mn et  $N=1000$  tr/mn.

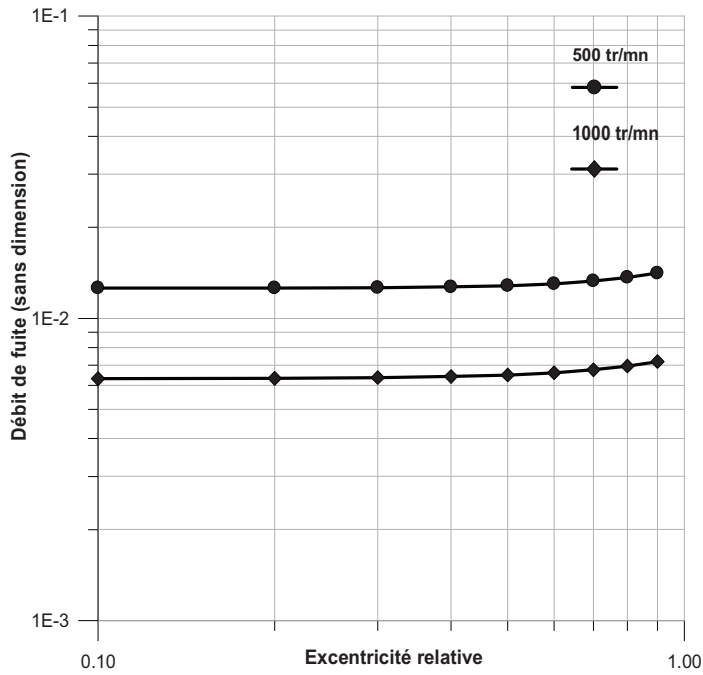
#### V-3-2-1- Coefficients statiques :



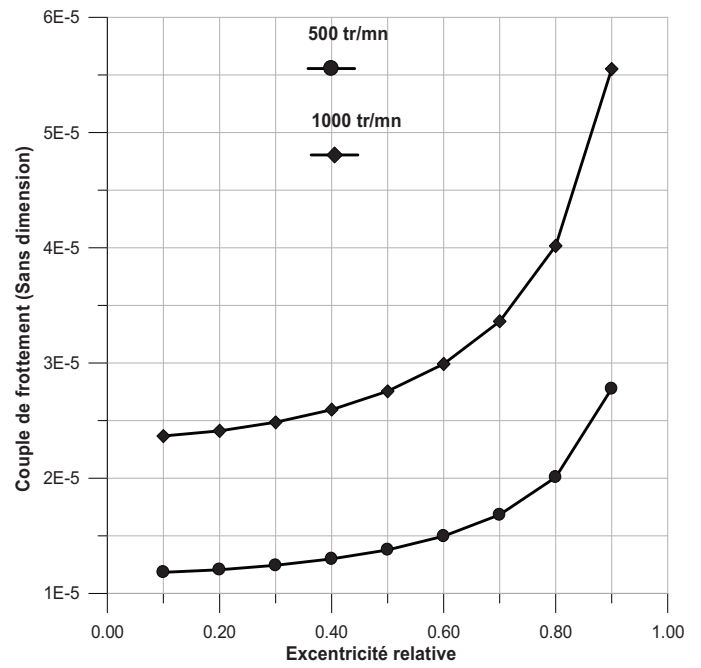
5-a) Charge en fonction de  $\varepsilon$



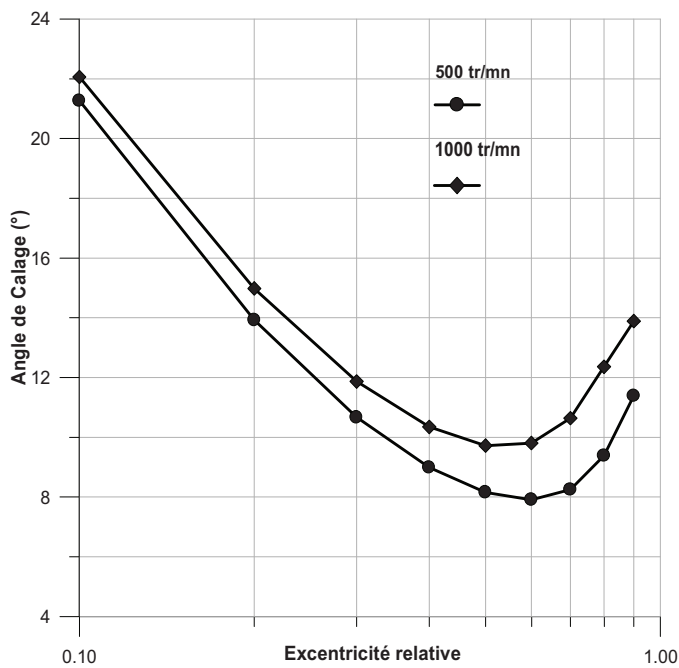
5-b) Nombre de Sommerfeld en fonction de  $\varepsilon$



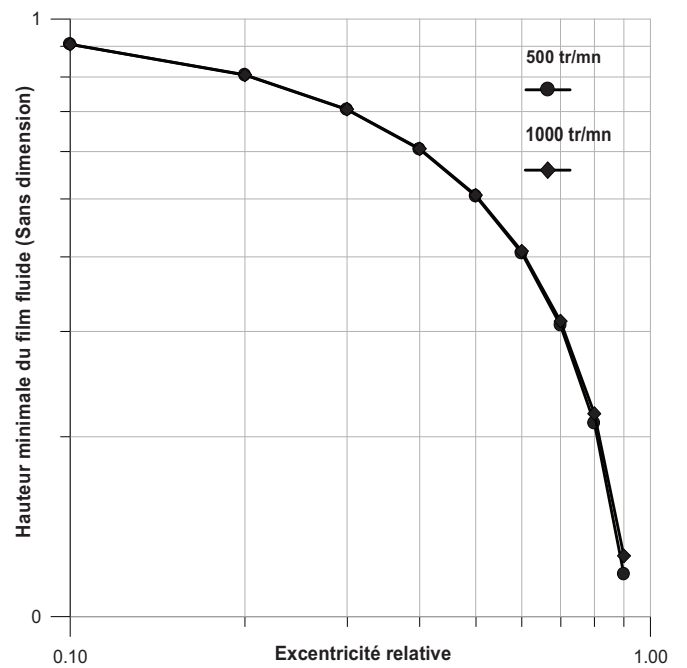
5-c) Débit de fuite en fonction de  $\epsilon$



5-d) Couple de frottement en fonction de  $\epsilon$



5-e) Angle de calage en fonction de  $\epsilon$



5-f) Hauteur minimale du film fluide en fonction de  $\epsilon$

**Figure V-5 – Coefficients statiques en fonction de l'excentricité relative**

**Discussion des coefficients statiques :**

L'augmentation de la charge  $W$  appliquée sur l'arbre fait accroître l'excentricité de ce dernier et la diminution du nombre de Sommerfeld (voir figures V-5-a et V-5-b). La hausse de l'excentricité relative fait augmenter l'écrasement du film d'huile entre l'arbre et le coussinet et par conséquent :

- a- L'accélération de l'échappement du fluide de lubrification par les frontières du coussinet augmentant ainsi le débit de fuite  $Q_a$  (Voir figure V-5-c).
- b- L'arbre tend à rentrer en contact avec le coussinet ce qui fait augmenter le couple de frottement  $C_a$ . Pour des excentricités élevées le couple de frottement augmente considérablement (voir figure V-5-d).
- c- La croissance du couple de frottement empêche le décalage de l'arbre dans le sens de rotation, ce qui entraîne la diminution de l'angle de calage  $\phi$  (voir figure V-5-e)
- d- La diminution de la hauteur minimale du film fluide  $h_{\min}$  (Voir figure V-5-f)

L'accroissement de la vitesse de rotation de l'arbre provoque :

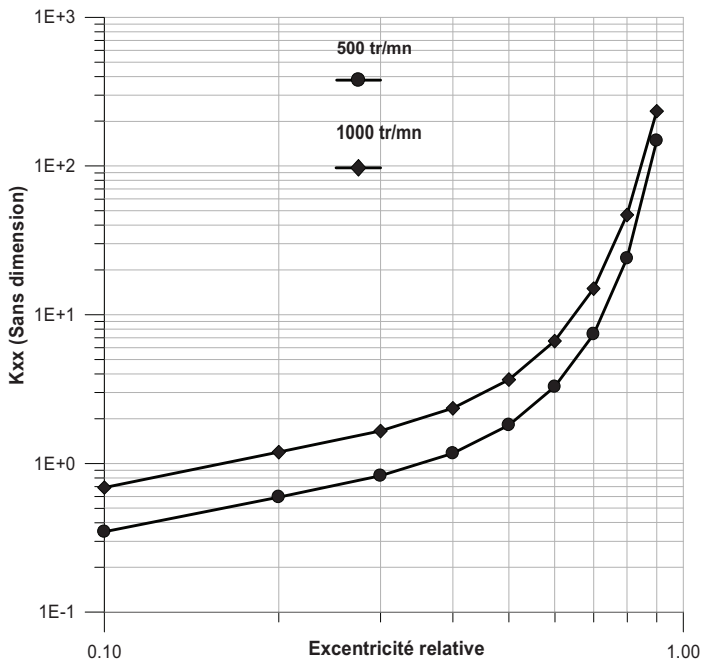
- a- La diminution de la charge que l'arbre peut supporter (voir figure V-5-a), cela est dû à l'augmentation de l'angle de calage  $\phi$  (voir figure V-5-e), et comme :

$$h_{\min} = c(1-\varepsilon \cdot \cos(\phi)) \quad \phi \nearrow \Rightarrow \cos(\phi) \searrow \Rightarrow \varepsilon = \frac{1 - \frac{h_{\min}}{c}}{\cos(\phi)} \nearrow \Rightarrow W \searrow;$$

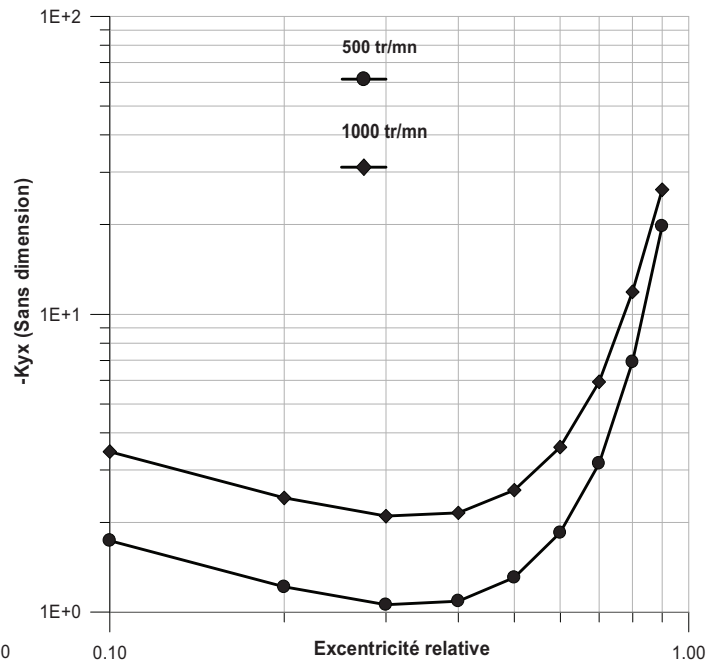
- b- L'augmentation de la circulation du film fluide entre l'arbre et le coussinet ou débit radial caractérisé par une partie de l'équation de Reynolds  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right)$  diminuant ainsi le débit de fuite  $Q_a$  (Voir figure V-5-c) ;
- c- L'augmentation rapide de l'excentricité relative ce qui provoque la croissance du couple de frottement (Voir figure V-5-d)
- d- L'augmentation du moment, dû à la circulation du fluide de lubrification, appliqué sur l'arbre augmentant ainsi l'angle de calage  $\phi$  (Voir figure V-5-e) et par conséquent la diminution de la hauteur du film fluide (Voir figure V-5-f)

**V-3-2-2-Coefficients dynamiques :**

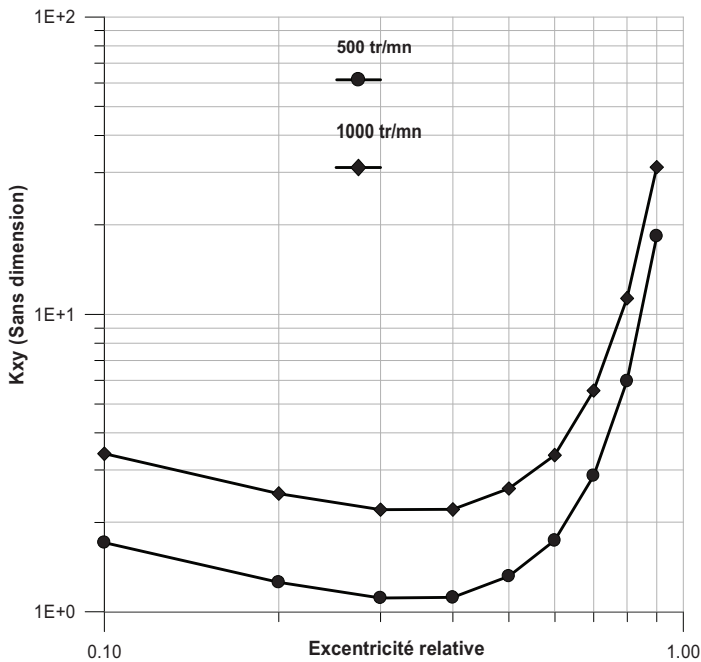
**Coefficients de raideur :**



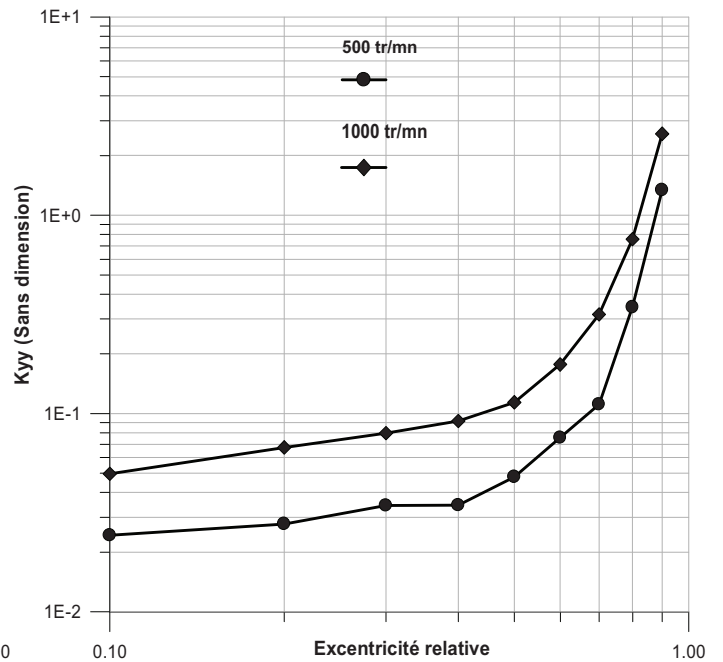
**6-a)  $K_{xx}$  en fonction de  $\epsilon$**



**6-b)  $-K_{yx}$  en fonction de  $\epsilon$**



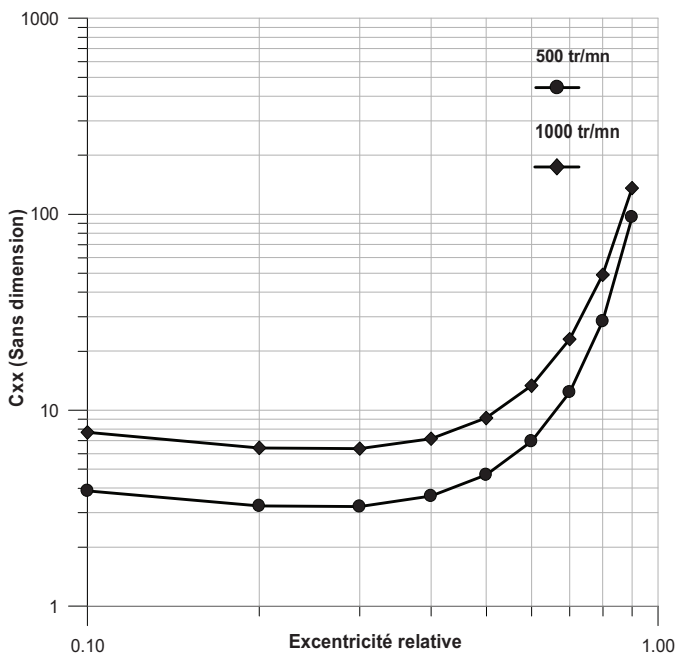
**6-c)  $K_{xy}$  en fonction de  $\epsilon$**



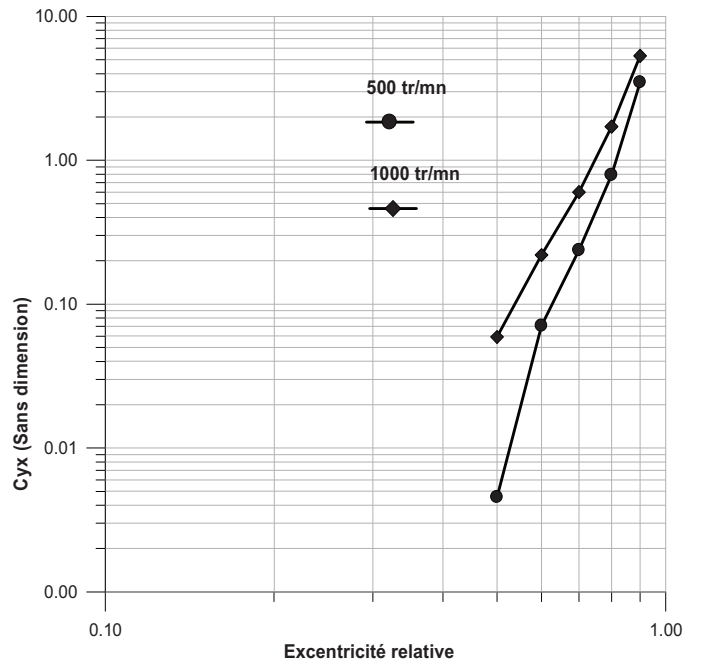
**6-d)  $K_{yy}$  en fonction de  $\epsilon$**

**Figure V-6 – Coefficients de raideur en fonction de l'excentricité relative**

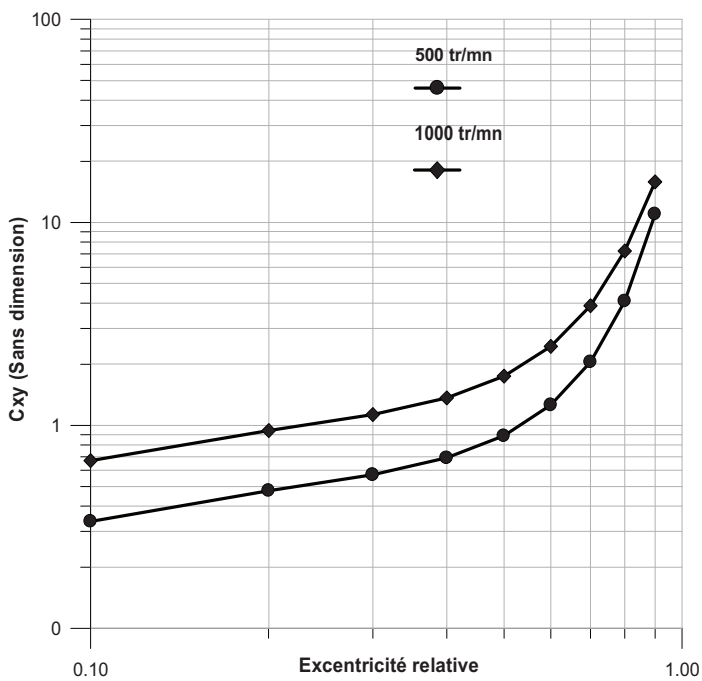
Coefficients d'amortissement :



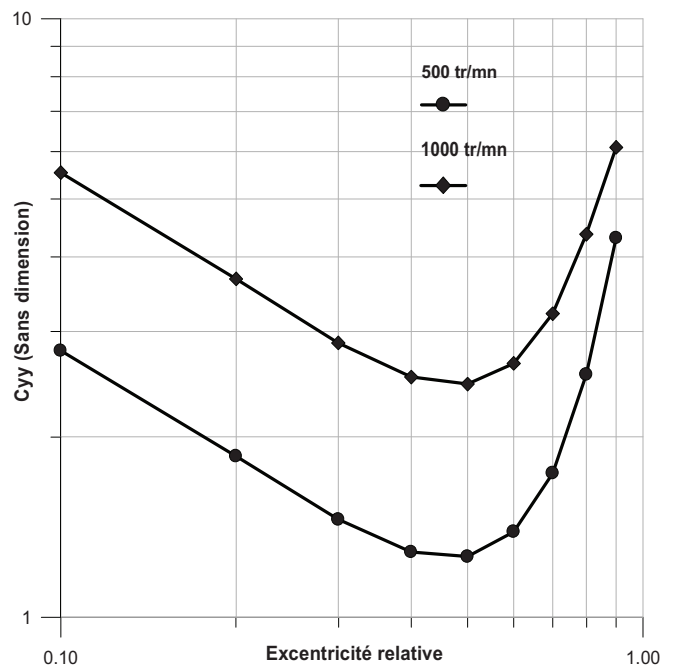
7-a)  $C_{xx}$  en fonction de  $\epsilon$



7-b)  $C_{yx}$  en fonction de  $\epsilon$



7-c)  $C_{xy}$  en fonction de  $\epsilon$



7-d)  $C_{yy}$  en fonction de  $\epsilon$

**Figure V-7 – Coefficients d'amortissement en fonction de l'excentricité relative**

**Discussion des coefficients dynamiques :**

Pour de faibles vitesses de rotation le palier fonction en régime hydrostatique pur, et on remarque que pour des excentricités qui tendent vers 0 :

- Les coefficients de raideurs croisés  $-K_{yx} \cong K_{xy}$ , la matrice de raideur est antisymétrique (Voir figures V-6-b et V-6-c) ;
- Les coefficients d’amortissement  $C_{xx} \cong C_{yy}$  et  $C_{yx} \cong C_{xy} \cong 0$ , la matrice d’amortissement est symétrique (Voir figures V-7-a, b,c ,d)

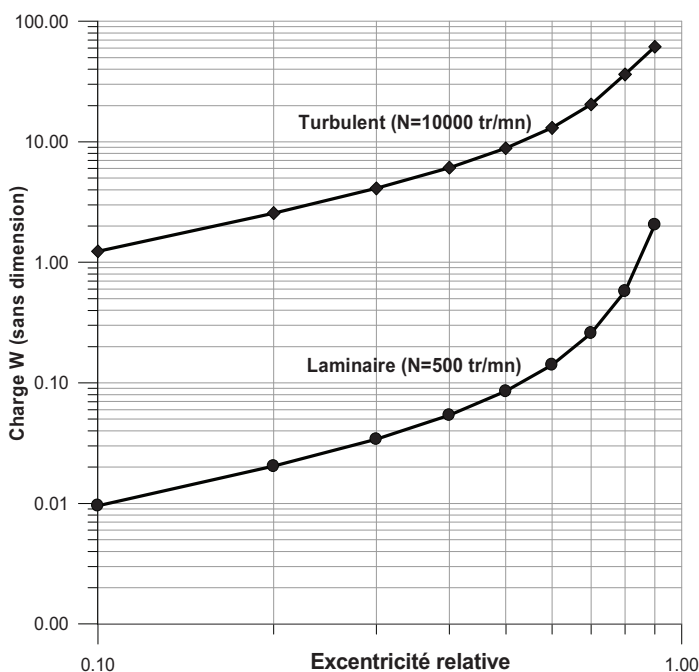
Lorsque l’excentricité relative augmente l’effet hydrodynamique se superpose à l’effet hydrostatique causant l’augmentation des coefficients de raideurs et d’amortissements et l’apparition des termes croisés dans la matrice d’amortissement (Voir figure V-6 et V-7).

Quand la vitesse de rotation augmente l’effet hydrodynamique fait augmenter la pression de plus en plus, ce qui provoque l’augmentation des coefficients de raideurs et d’amortissement (Voir figure V-7 et V-7).

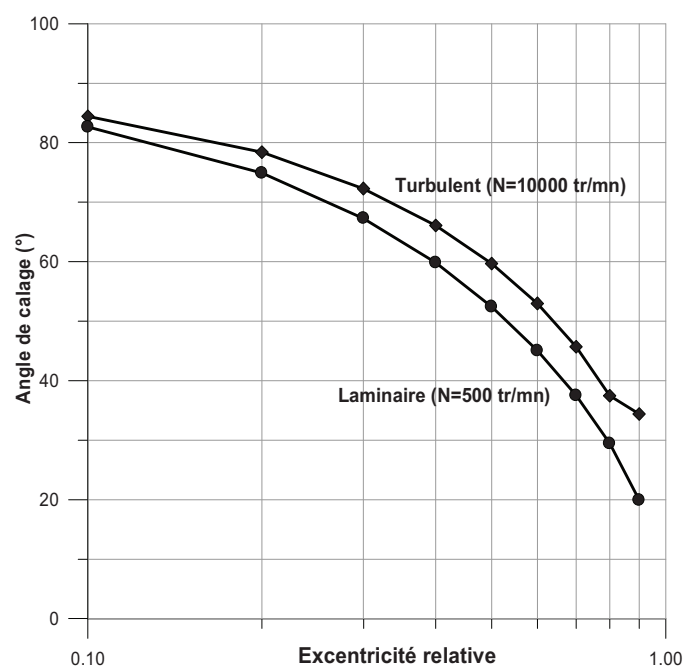
**V-3-3- COEFFICIENTS STATIQUES ET DYNAMIQUE EN REGIME TURBULENT :**

Nous allons tracer les coefficients statiques et dynamiques pour de différents nombres de Reynolds (Nombre de Reynolds local situ au niveau de la plus faible épaisseur du film fluide).

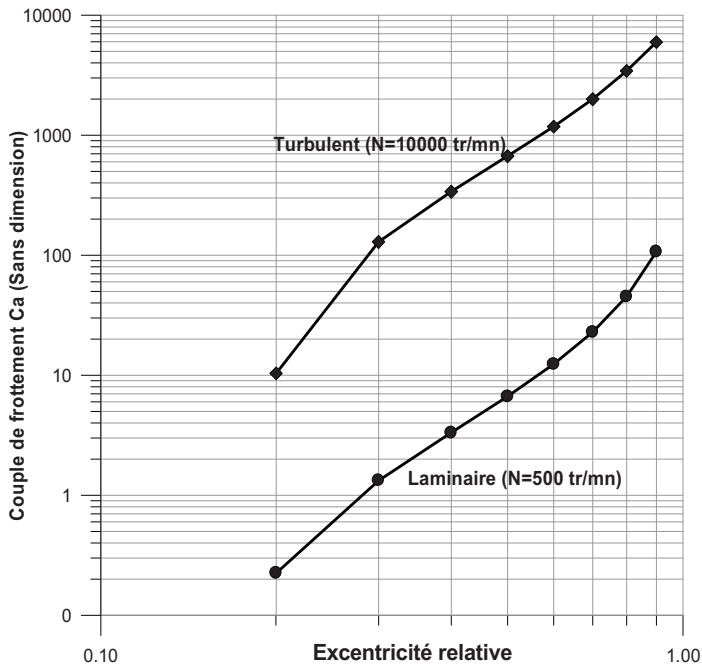
**V-3-3-1 – Coefficients statiques :**



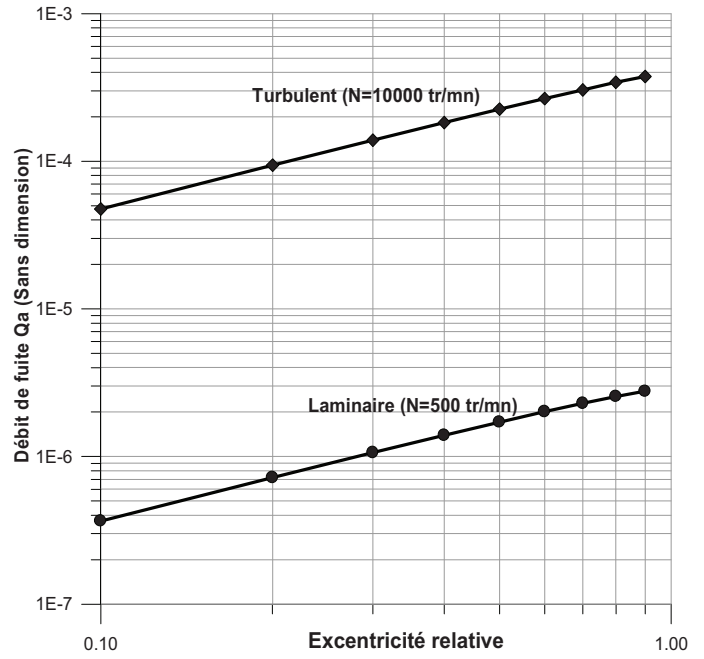
a) Charge en fonction de  $\epsilon$



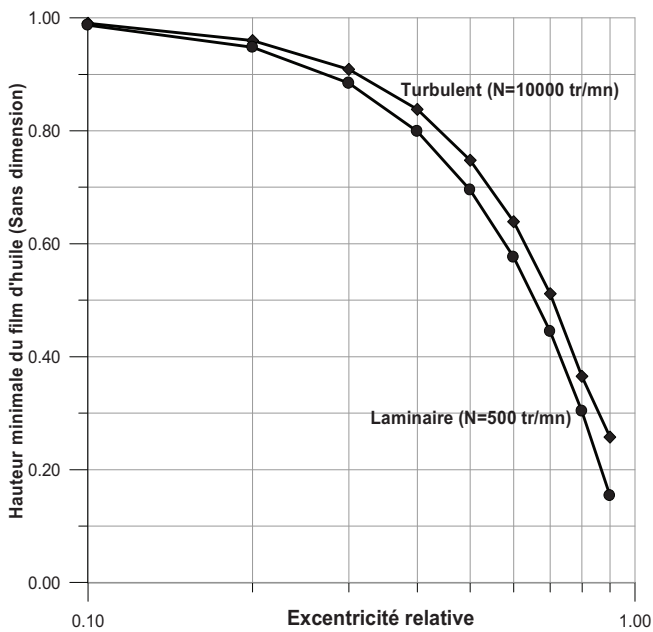
b) Angle de calage en fonction de  $\epsilon$



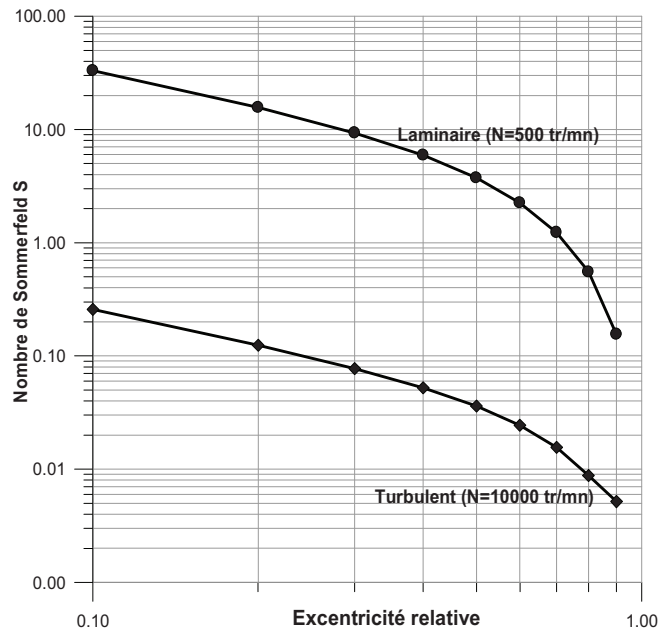
c) Couple de frottement en fonction de  $\epsilon$



d) Débit de fuite en fonction de  $\epsilon$



e) Hauteur minimale du film d'huile en fonction de  $\epsilon$

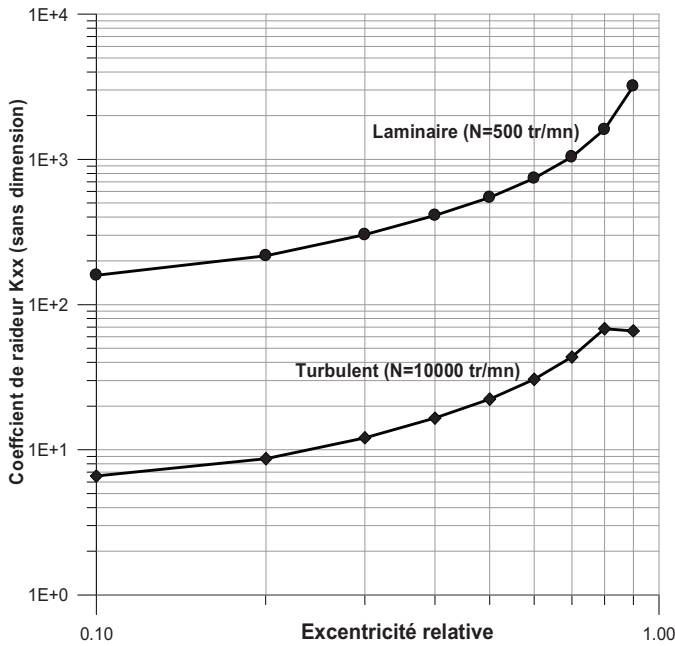


f) Nombre de Sommerfeld en fonction de  $\epsilon$

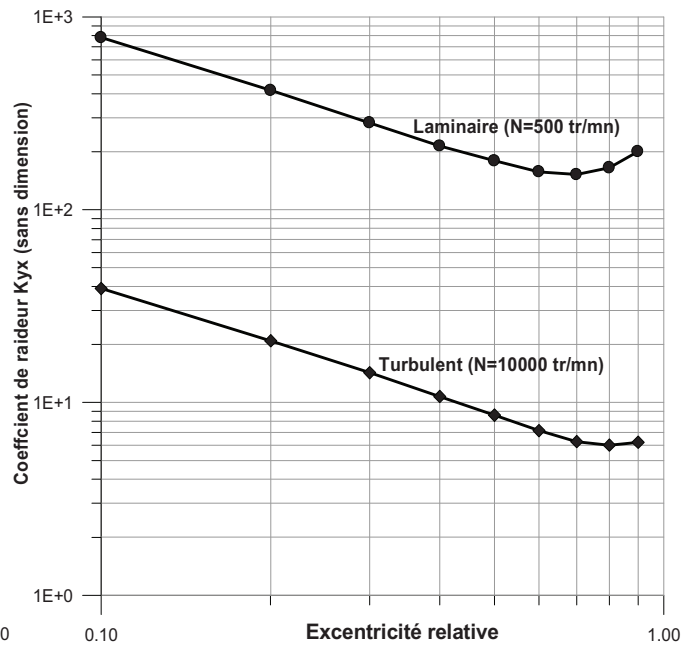
**Figure V-8 – Coefficients statiques en fonction de l'excentricité relative  $\epsilon$  en régime laminaire et turbulent**

**V-3-3-2 – Coefficients dynamiques :**

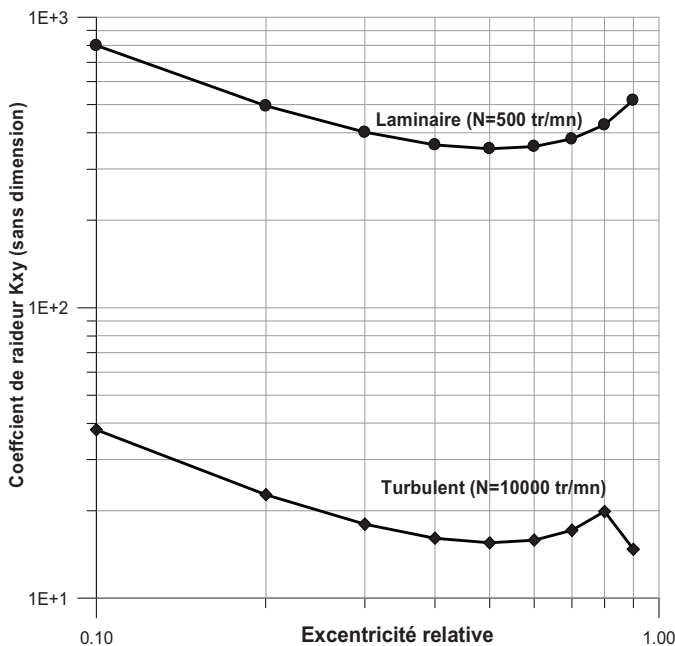
**Coefficients de raideur :**



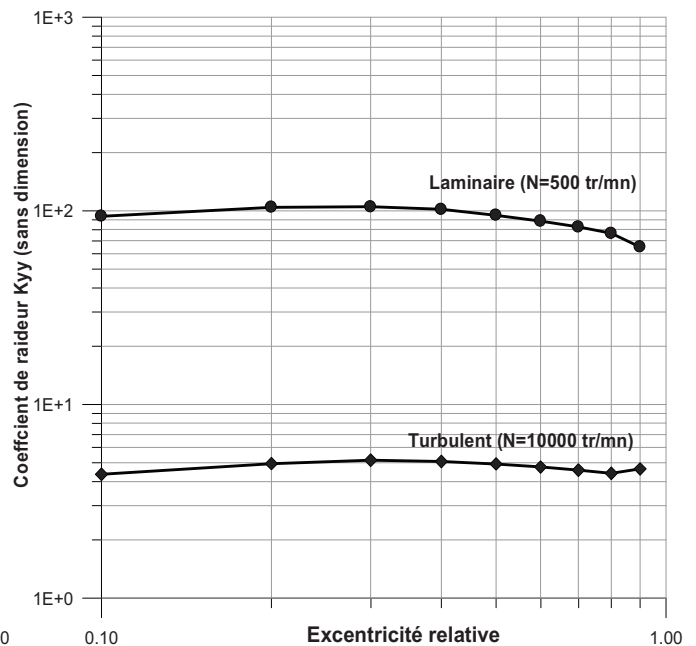
a)  $K_{xx}$  en fonction de  $\epsilon$



b)  $K_{yx}$  en fonction de  $\epsilon$



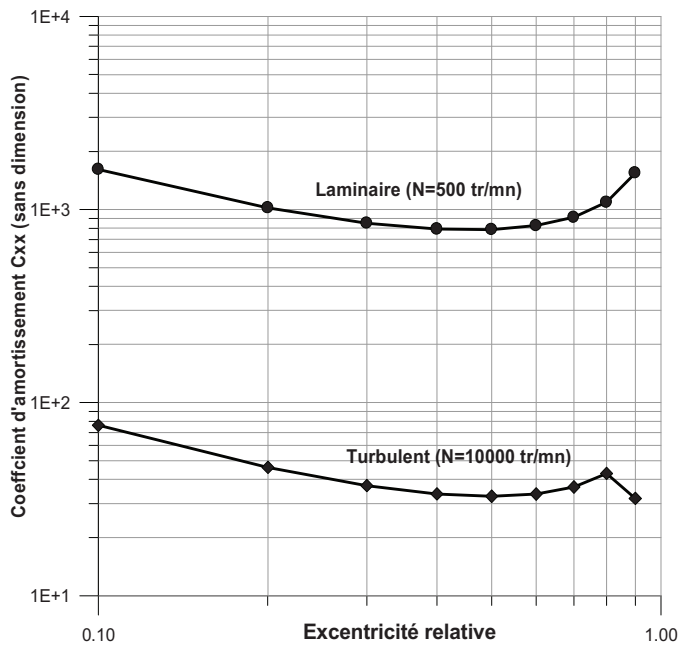
c)  $K_{xy}$  en fonction de  $\epsilon$



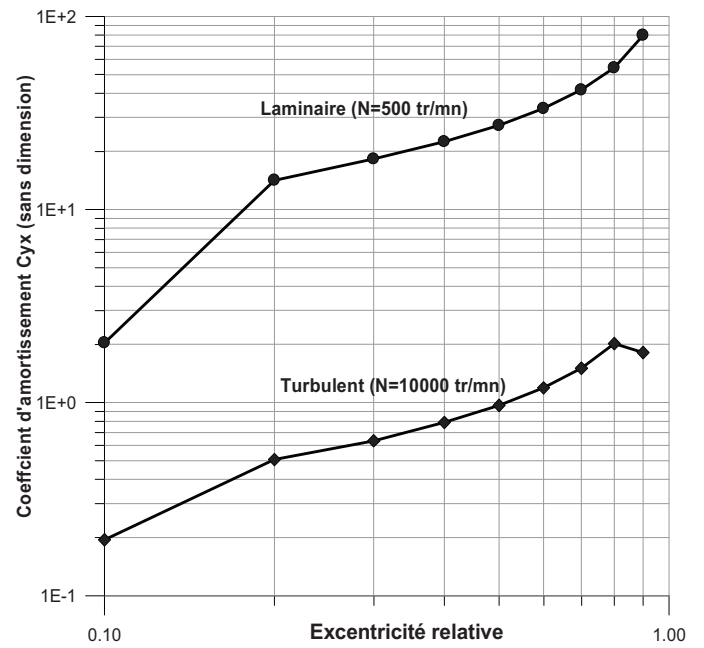
d)  $K_{yy}$  en fonction de  $\epsilon$

**Figure V-9 – Coefficient de raideur en fonction de l'excentricité relative en régime laminaire et turbulent**

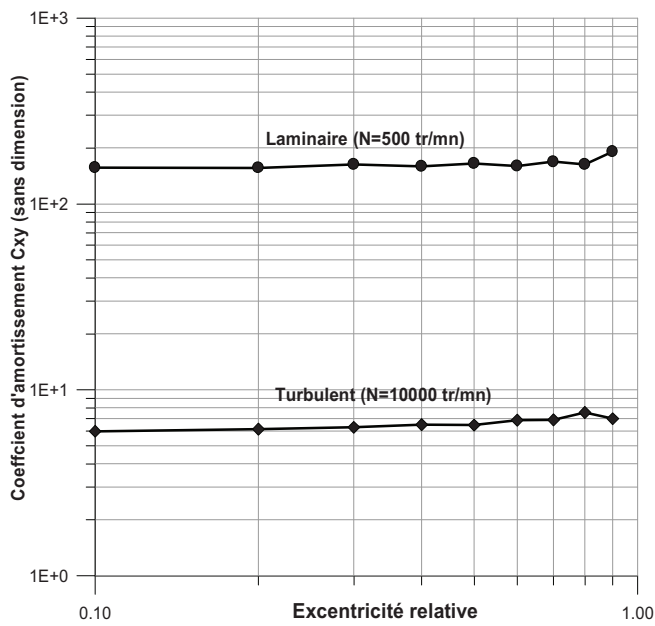
**Coefficient d'amortissement :**



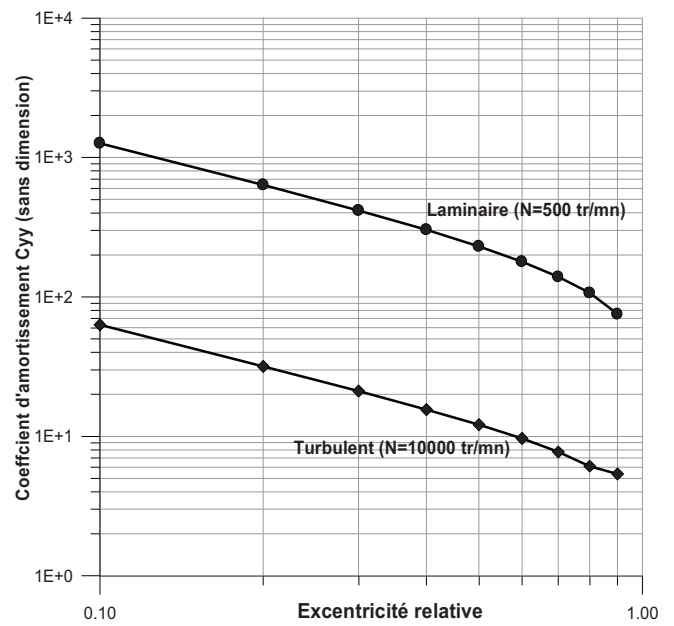
a)  $C_{xx}$  en fonction de  $\epsilon$



b)  $C_{yx}$  en fonction de  $\epsilon$



c)  $C_{xy}$  en fonction de  $\epsilon$



d)  $C_{yy}$  en fonction de  $\epsilon$

**Figure V-10 – Coefficients d’amortissement en fonction de l’excentricité relative en régime laminaire et turbulent**

### **Discussion des résultats obtenus :**

Pour des vitesses élevées nous constatons que le palier peut supporter des charges plus importantes qu'en régime laminaire (Figure V-8-a).

La croissance de la vitesse, donc du nombre de Reynolds local, fait augmenter l'angle de calage (Figure V-8-b), cette augmentation se traduit par une diminution de la stabilité vibratoire du palier.

La figure V-8-c donne la variation du couple de frottement en fonction de l'excentricité relative. On constate une augmentation très importante de la valeur du couple lorsque le nombre de Reynolds atteint des valeurs élevées.

La figure V-8-d montre que le débit axiale ou débit de fuite augmente par le changement du régime. Ceci s'explique physiquement, pour un palier en régime non laminaire la viscosité apparente diminue à cause de l'augmentation de la pression et de la vitesse ce qui accélère la fuite du fluide de lubrification par les frontières du coussinet, donc l'augmentation du débit de fuite.

En régime turbulent nous remarquons qu'il y a eu une diminution considérable dans les coefficients dynamiques adimensionnés (Figures V-9 et V-10) :

- La diminution des coefficients de raideur (Figure V-9) se traduit par la diminution de la densité apparente causée par l'augmentation de la vitesse et la pression.
- La décroissance des coefficients d'amortissement (Figure V-10) est expliquée par la diminution de la viscosité apparente du fluide de lubrification qui est dû à l'augmentation de la vitesse donc de la pression dans le film fluide.

### **V-4 – Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté le logiciel de calcul PHMEF ainsi que les résultats obtenus par ce dernier et nous avons constaté que :

- Le palier hybride possède les meilleures coefficients de raideurs et d'amortissement ;
- La turbulence fait augmenter les coefficients statiques et diminue sensiblement les coefficients dynamiques du palier hybride.

## **CONCLUSION GENERALE**

La lubrification a toujours constitué un véritable sujet de préoccupation pour les savants et chercheurs dans le domaine de la mécanique.

C'est ainsi, qu'après la mise en évidence de la première équation de la lubrification en régime laminaire [5] par Osborne Reynolds, les chercheurs ont, et à partir d'hypothèses simplificatrices, essayé de trouver des solutions à la dite équation; mais ces dernières n'étaient valables que pour des cas particuliers.

Le développement des méthodes de calcul et de résolution numériques (éléments finis, différences finies) ainsi que des systèmes informatiques, a permis aux chercheurs de prendre en considération plusieurs conditions comme les pressions externes, la température, la turbulence, la variation de la charge et d'aboutir à des résultats très proches de la réalité.

Pour notre part, nous avons fait le choix d'étudier un palier hybride à quatre alvéoles conventionnels uniformément repartis sur la périphérie du coussinet. Notre objectif est de réaliser un logiciel qui permet de calculer les coefficients statiques et dynamiques en régime laminaire et turbulent de ce palier et ce évidemment à partir de la résolution de l'équation de Reynolds.

Pour ce faire, nous avons été amenés à suivre la démarche qui consiste :

- à faire la modélisation mathématique de la lubrification hybride et de définir les conditions aux limites ;
- à procéder à la discrétisation de l'équation de Reynolds par la méthode des éléments finis ;
- enfin à réaliser le logiciel PHMEF qui pourrait servir au calcul du champ de pression et des coefficients statiques et dynamiques pour les deux régimes d'écoulement (laminaire, turbulent) du palier hybride.

Les résultats obtenus, (voir chapitre V), ont révélé le constat suivant :

- 1- Le palier hybride, présente des coefficients de raideur très importants par rapport à ceux des paliers hydrostatiques et hydrodynamiques ;
- 2- La charge supportée est très importante surtout en régime turbulent ;

- 3- Les coefficients de raideur, en régime turbulent, s'affaiblissent, d'où l'instabilité du palier en particulier lorsqu'il s'agit de charges importantes ;
- 4- La vitesse accroît l'effet hydrodynamique et par voie de conséquence, les coefficients de raideur ; mais ceci n'est vrai que dans le cas où le nombre de Reynolds reste dans la plage des écoulements laminaires ;
- 5- Le débit de fuite est très important, ce qui exige le montage de joint annulaire sur les bords du coussinet.

Le privilège de ce travail théorique est celui de nous avoir permis, d'une part, de maîtriser la méthode des éléments finis pour la résolution des équations aux dérivées partielles ; d'autre part ; de réaliser ce qui est plus important pour nous, à savoir, le logiciel PHMEF qui utilise un maillage dynamique pouvant contenir jusqu'à mille éléments, en plus, il a la possibilité de faire le calcul des coefficients statiques et dynamiques ainsi que le calcul et le traçage 3D du champ de pression en un temps restreint, ce qui constitue tout de même une performance.

Toutefois, nous avons constaté, durant notre travail, que certaines insuffisances persistaient, et qu'elles constituaient des facteurs très importants pouvant modifier les performances du palier hybride, il s'agit, entre autres, de la variation de la température, le messalignement et les irrégularités de forme. Cependant, nous ne disposons ni de moyens ni de temps nécessaire pour les étudier dans le cadre de ce mémoire ; ils peuvent en revanche constituer un sujet d'étude intéressant pour un autre travail de recherche.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- Constantinescu V.N. – *Analysis of Bearings Operating in the Turbulent Flow Regime*. ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 82, pp. 139-151, 1962.
- 2- Elrod, H.G et C.W. Ng – *A Theory for Turbulent Films and its Applications to Bearings*. ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 89, pp. 346-362, 1967.
- 3- Hirs, G.G. – *A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricant Films*. ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 94, pp. 137-146, 1973.
- 4- CHARCOSSET C – *Butées et paliers hydrostatiques alimentés par des séries d'orifices*. ENSAM, Paris, 1971.
- 5- FRENE J. - *Régimes d'écoulement non laminaire en films minces : application aux paliers lisses*. Thèse de doctorat, I.N.S.A. Lyon, 1974.
- 6- ROBIN M. – *Etude de la lubrification des paliers de longueur finie. Influence des additifs de viscosité*, Thèse de docteur ingénieur, Paris, 1978.
- 7- DANIEL N. – *Contribution à l'étude du comportement des paliers hybrides*. [B5325], Techniques de l'ingénieur, 1982.
- 8- CHAOMLEFFEL J.P. – *Influence des forces d'inertie en lubrification hybride*, Thèse de docteur ingénieur, I.N.S.A, Lyon, 1983.
- 9- BOU-SAID B. – *La lubrification à basse pression par la méthode des éléments finis. Application aux paliers*. ASME, Vol 94, N° 4, 1985.
- 10- ZEROUALI E. – *Contribution à l'étude des paliers fluides*. Thèse de doctorat, Toulouse, 1985.
- 11- CHAOMELEFFEL J. P., NICOLA D., - *Experimental investigation in hybrid journal bearing*, Vol 19, N°5, 1986.
- 12- BONNEAU O. – *Comportement statique et dynamique de ligne d'arbre montée sur paliers fluides, influence des caractéristiques des paliers*, Thèse de doctorat, Poitiers, 1989.
- 13- MOHAMED H. – *Comportement des paliers fluides en écoulement turbulent de fluides non newtoniens*, Thèse de doctorat, Toulouse, 1990.
- 14- FRIOU T., – *Contribution à l'étude des phénomènes thermiques dans les paliers hydrodynamiques. Application au cas des paliers à patins oscillants*. Thèse de doctorat, Poitiers, 1990.
- 15- SAN ANDERS L., VELTHUIS L., - *Laminar Flow in a Recess of a Hydrostatic Bearing*, STLE Paper No. 91TC3B3, STLE/ASME Tribology Conference.1991.

- 16- BILLE P., - *Contribution à l'étude du comportement des paliers hybrides : mesure du couple et du champ de pression*. Thèse de doctorat, Poitiers, 1992.
- 17- Tian Y. – *Modélisation statique et dynamique des paliers fluides par la méthode des éléments finis et comparaison expérimentale*, Thèse de doctorat, Compiègne, 1993.
- 18- MOHAMED A. – *Contribution à l'étude des paliers hybrides : prise en compte de la compressibilité du fluide dans les alvéoles*. Thèse de doctorat, Poitiers, 1994.
- 19- ABSI J. – *Les paliers à rainures : approche expérimentale et simulation numérique*, Thèse de doctorat, Poitiers, 1994.
- 20- ATTAR S.E – *Palier hybride : contribution des alvéoles au champ de pression et au couple de frottement*. Thèse de doctorat, Poitiers, 1995.
- 21- BONNEAU O., FRENE J. – *Comportement dynamique des rotors, interaction Film-Structure*, Laboratoire mécanique des solides, Montpellier, 1996.
- 22- BRAUN M. J., M. ET LATTIME S. – *Some Qualitative and Quantitative Aspects of Flow in a Hydrostatic Journal Bearing Pocket*. FED-Vol. 239, Fluid Engineering Division Conference, 4 ASME, pp 109-114, 1996.
- 23- BRAUN M. J., DZODZO, M. – *Three Dimensional Flow and Pressure Patterns in a Hydrostatic Journal Bearing Pocket*, Journal of Tribology, 119, pp 711-719, 1996.
- 24- MONMOUSSEAU P. – *Etude thermoélastohydrodynamique des paliers à patins oscillants en régime transitoire*. Thèse de doctorat, Poitiers, 1997.
- 25- SINHASAN R. SHARMA S.C. et Jain S.C., *Performance Characteristics Of an Externally Pressurized Capillary Compensated Flexible Journal Bearings*, Trib. Int'l., 22, 4, PP 283-293.1998.
- 26- KUCINSCHI B.R. – *Etude des instabilités thermiques des paliers à frottement fluide*, Thèse de doctorat, Poitiers, 1998.
- 27- OPTASANU V. – *Modélisations expérimentale et numérique de la lubrification des paliers opérants sous chargement dynamique*, Thèse de doctorat, Poitiers, 2000.
- 28- ALSAYED A., ARGHIR M., NICOLAS D. – *Contribution à l'étude des paliers hybrides non conventionnels*. XVème Congrès Français de Mécanique, I.N.S.A Lyon, 2001.
- 29- HELENE M., ARGHIR M, FRENE J. – *Etude du profil de pression dans une alvéole de palier hybride*. XVème Congrès Français de Mécanique, I.N.S.A Lyon, 2001.
- 30- BOUYER J., FILLON M. – *Effets du mésalignement sur les performances d'un palier hydrodynamique – aspects expérimentaux*. XVème Congrès Français de Mécanique, I.N.S.A Lyon, 2001.

- 31- ALSAYED A., ARGHIR M., BLOUIN A., FRANCISCO A., FRENE J., MASPEYROT P., NICOLAS D. – *Modélisation de différents contacts lubrifiés*. Rapport d'activité du laboratoire mécanique des solides, Poitiers, 2002.
- 32- ALSAYED A, *Résolution de l'équation de Reynolds pour des épaisseurs discontinues du film*, Séminaire mécanique du contact et structure et interfaces, Laboratoire Mécanique des Solides, Poitiers, 2002.
- 33- HASHIMOTO, H., S. WADA, M. SUMITOMO, *The Effects of Fluid Inertia Forces on the Dynamic Behaviour of Short Journal Bearings in Super laminar Flow Regime*, *ASME Journal of Tribology*, Vol. 110, pp.539-547, 1989.
- 34- SIMON, F., AND J. FRENE, *Analysis for Incompressible Flow in Annular Pressure Seals*, *ASME Journal of Tribology*, Vol. 114, pp. 431-438, 1992.
- 35- I. F. SANTOS, F. Y. WATANABE, *Feasibility of influencing the dynamic fluid film coefficients of a multirecess journal bearing by means of active hybrid lubrication*, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. Vol.25 N°:2, Rio de Janeiro, 2003.