



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière Mathématiques:

Option : EDPs et applications

Par

LOUIFI Marwa

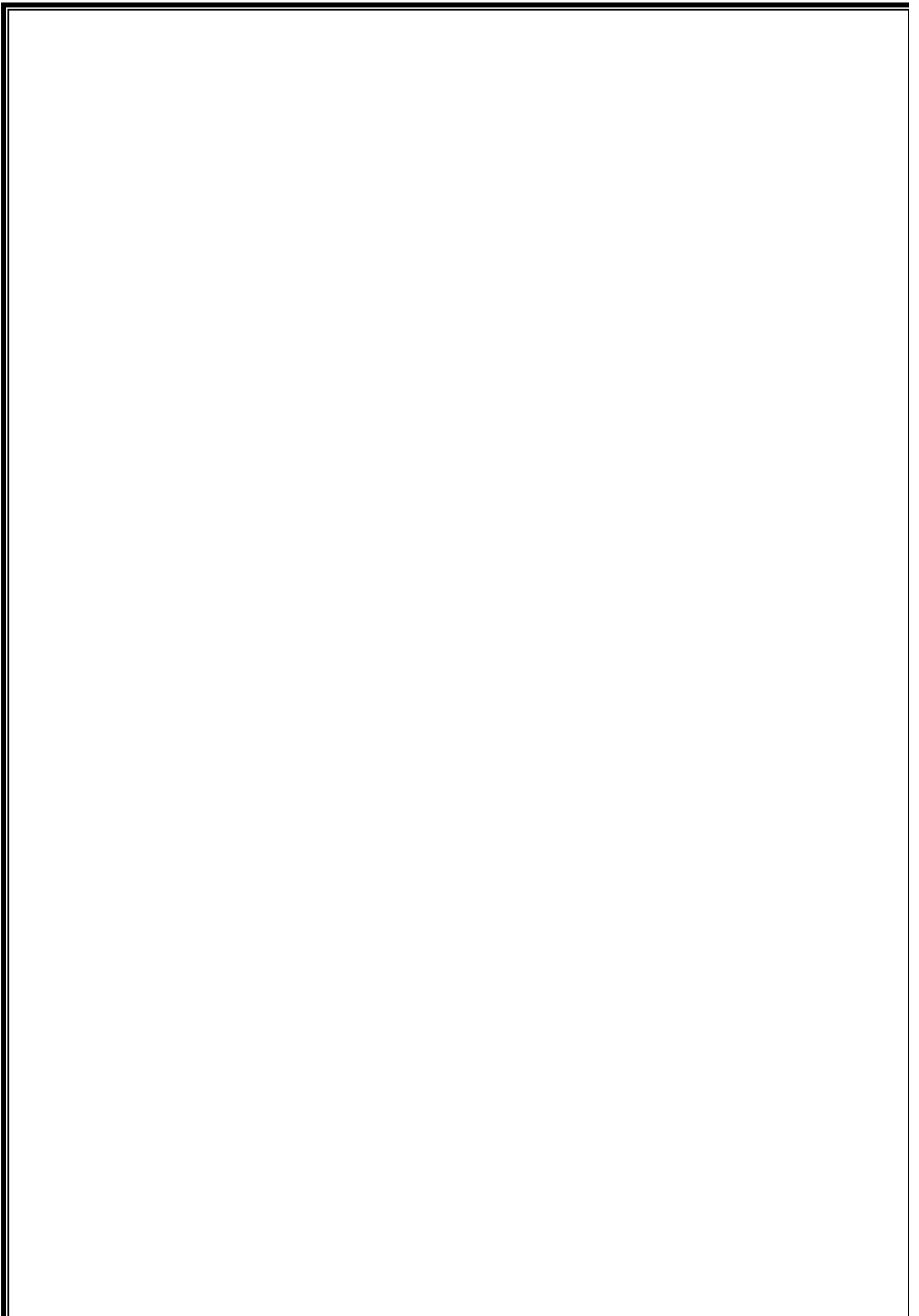
Sujet

**Existence d'une branche de bifurcation
d'une classe d'opérateurs potentiels**

Devant le jury :

Mr. Abderachid SAADI	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. Abdelhak MOKHTARI	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. Brahim BOUGHERARA	Prof. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2018 / 2019



Remerciements

Je remercie ALLAH le clément et le mésirécordieux.

Mes premiers remerciements vont à docteur **MOKHTARI Abdelhak** , qui a dirigé mes travaux de recherches avec beaucoup de patience et de gentillesse.

Je remercie vont également à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

SAADI Abderachid

BOUGHERARA Brahim

Je ne saura oublier de remercier l'ensemble des enseignants département de Mathématique qui ont participé dans notre formation.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

Table des matières

Notation	2
introduction	5
1 Préliminaire et notions de base	7
1.1 Espace fonctionnels	7
1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$	7
1.1.2 Espace de Sobolev	8
1.1.3 Injection de Sobolev	10
1.2 Dérivés d'une fonctionnelle et points critiques	11
1.2.1 Dérivé au sens de Gâteaux	11
1.2.2 Dérivé au sens de Fréchet	12
1.2.3 Points critiques	12
1.3 Rappel de Géométrie Différentiel	13
2 Résultat d'existence de point de bifurcation pour une classe d'opérateurs	14
2.1 Condition de Palais-Smale	14
2.2 Quelques opérateurs utiles	15
2.3 Lemme d'Ekeland et conséquence	17
2.4 Théorème d'existence	19
3 Applications sur un problème elliptique non linéaire avec un expo-	

sant critique de sobolev	30
3.1 Présentation du problème	30
3.2 Existence d'une branche de bifurcation du problème (3.1)	31
Conclusion	40

Notations

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}_+	ensemble des nombres réels positifs.
\mathbb{R}^N	espace de dimension N .
H	espace de Hilbert.
x	vecteur de \mathbb{R}^N , $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq N$.
dx	mesure de Lebesgue de dimension N .
Ω	ouvert de \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue.
$\bar{\Omega}$	la fermeture de Ω .
u	fonction mesurable définie de Ω dans \mathbb{R} .
∇u	gradient de u , $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$.
$\operatorname{div} v$	divergence du vecteur v , $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_N}$.
Δu	laplacien de u , $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$.
$C(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω .
$C^k(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω dont les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ sont continues sur Ω , k entier positif.
$C^1(\Omega, \mathbb{R})$	l'ensemble des fonctions différentiables et la dérivée est continue.
$C^\infty(\Omega)$	l'espace $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω , à support compact dans Ω .
$L^p(\Omega)$	$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_{\Omega} u ^p dx < \infty\}$ ($1 \leq p < \infty$, constant).
$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \exists c \geq 0 \text{ tel que } u(x) \leq c \text{ p.p. } x \in \Omega\}$.
p'	conjugué de Hölder de p , $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$.
p^*	l'exposant de Sobolev tel que : $p^* = \frac{Np}{N-p}$, avec $N > p$.

$W^{1,p}(\Omega)$	espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles au sens faible d'ordre 1 sont également dans $L^p(\Omega)$, muni de la norme $\ u\ _{W^{1,p}} = \sum \ \partial_i u\ _{L^p}$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, i.e. $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.
$H^1(\Omega)$	$u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$	$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.
p.p.	presque partout.
T.A.F	théorème des accroissements finis.
T.C.D	théorème de convergence dominé de Lebesgue.
S.C.I	Semi continue inférieur.
$E \hookrightarrow F$	E s'injecte continûment dans F .
$E \hookrightarrow_c F$	E s'injecte d'une manière compacte dans F .
\rightharpoonup	convergence faible.
\rightarrow	convergence forte .
E'	est le dual topologique de E ou l'espace des formes linéaire et continue sur E .
$E _S$	est la restriction de E à S , tel que E fonction définie sur un espace V et S partie de V .
$u \perp v$	u orthogonale à v .
F^\perp	l'orthogonale de l'ensemble F .

Introduction

La théorie de la bifurcation tente d'expliquer divers phénomènes découverts et décrits dans les sciences naturelles au cours des siècles. Le flambement de la tige d'Euler, l'apparition de vortex de Taylor et l'apparition d'oscillations dans un circuit électrique, par exemple, ont tous une cause commune : un paramètre physique spécifique franchit un seuil et cet événement force le système à organiser un nouvel état qui diffère considérablement de celui observé avant. Mathématiquement, il se produit ce qui suit : Les états observés d'un système correspondent à des solutions d'équations non linéaires modélisant le système physique.

Dans ce mémoire, on présente des travaux dans l'article [12] qui consiste à l'étude de la bifurcation pour la valeur propre principale d'une classe d'opérateurs de gradient possédant la condition Palais-Smale. L'existence de la branche de bifurcation est vérifiée en utilisant la compacité dans le sens de la condition Palais Smale et l'ordre de la non-linéarité chez l'opérateur. Ce résultat principal sera appliqué sur un problème elliptique semi linéaire avec un exposant critique de Sobolev .

Ce mémoire comprend trois chapitres et est organisé comme suit :

Dans **le premier chapitre**, nous avons présenté quelques outils de base qui sont utilisés par la suite. Et on a divisé ce chapitre en trois sections.

Dans la première section on introduit un rappel et certaines notions et propriétés des espaces de Lebesgue et l'espace de Sobolev, on présente dans la deuxième section, quelques définitions sur la notion de la différentiabilité et les points critiques et dans la troisième section nous avons donné un rappel sur quelque notion de la géométrie différentielle.

Le deuxième chapitre, consiste à présenter un critère de compacité qui s'appelle la condition de Palais Smale et quelques opérateurs qui seront utiles dans la suite, puis nous avons présenté le principe variationnel d'Ekeland et conséquence, en terminant ce chapitre par le théorème fondamental de ce travail avec une démonstration détaillée .

Dans **le troisième chapitre**, on donne une application qui s'inspire de l'article [11], plus précisément on s'intéresse à l'existence de point de bifurcation de problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u + |u|^{2^*-2} u) & \text{dans } \Omega; \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert de R^N .

Chapitre 1

Préliminaire et notions de base

Ce chapitre constitue un rappel de quelques préliminaires et résultats nécessaires pour la suite de ce travail. On citera en particulier certains résultats élémentaires des espaces fonctionnels.

1.1 Espace fonctionnels

1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue dx

Définition 1.1 (Voir [8]) Soit p un nombre réels avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

La quantité $\|\cdot\|_{L^p}$ définit une norme sur l'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ ce qui montre que $L^p(\Omega)$ est un espace normé.

Définition 1.2 On pose

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable. } \exists C > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

$L^\infty(\Omega)$ est un espace normé quand le muni par la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ C ; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \right\}.$$

Proposition 1.1 (Inégalité de Hölder) (Voir [8]) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $p \in [1, \infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Théorème 1.1 (Convergence dominée de Lebesgue T.C.D) (Voir [8])

Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que :

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω ,
2. il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Théorème 1.2 (Convergence dominée de Lebesgue inverse) (Voir [8])

Soient (f_n) une suite de L^p et $f \in L^p$, tels que : $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$. Alors, il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) telle que :

1. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω
2. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$ et p.p. sur Ω avec $h \in L^p$

Théorème 1.3 (Voir [8]) 1. $L^p(\Omega)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,

2. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$,

3. $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

1.1.2 Espace de Sobolev

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , on note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ et de support compacte inclus dans Ω .

1. On dit que g est une majorante intégrable des fonctions (f_n)

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.3 (voir [8]) Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i \in \overline{1, n} \right\}.$$

En particulier, pour $p = 2$, on pose :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,2}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ et } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

∇u est appelé la dérivé au sens faible de g .

L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme :

$$\| u \|_{W^{1,p}} = \| u \|_{L^p} + \| \nabla u \|_{L^p}.$$

(ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $[\| u \|_{L^p}^p + \| \nabla u \|_{L^p}^p]^{1/p}$).

Proposition 1.2 L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni par le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2},$$

la norme associée :

$$\| u \|_{H^1} = [\| u \|_{L^2}^2 + \| \nabla u \|_{L^2}^2]^{1/2}.$$

est équivalent à norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 1.3

1. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,
2. l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$,
3. l'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.4 ([8]) *Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, c'est à dire $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.*

On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est munit de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est munit du produit scalaire induit par $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.4 (Inégalité de Poincaré) ([8]) *Soit Ω un ouvert, borné alors il existe une constante C (dépendant de $|\Omega|$ et p) telle que :*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(\Omega)$.

1.1.3 Injection de Sobolev

Le but de cette section est de découvrir quelques injections continues et compactes concernant aux espaces de Sobolev. Rappelons qu'un opérateur linéaire T entre deux espaces vectoriels topologiques (par exemple normé) E et F est dit compact si l'image par T de toute partie bornée de E est relativement compacte (adhérence compacte) dans F . Plus précisément, pour toute suite (x_n) une suite bornée dans E , on peut extraire une sous suite $u_n = (T(x_{n_k}))_{n_k} \in N$ de la suite $u_n = T(x_n)$ converge dans F . Si E s'injecte continûment dans F , le caractère compacte de cette injection entraîne que toute suite faiblement convergente est fortement convergente dans l'espace d'arrivée.

Rappelons qu'un espace E s'injecte d'une manière **continue** dans F , signifie que l'injection canonique $j : E \rightarrow F$ est continue et on le note par $E \hookrightarrow F$, et on dit que E s'injecte d'une manière **compacte** dans F , signifie que l'injection $j : E \rightarrow F$ est compacte et on le note par $E \hookrightarrow_c F$.

Si $1 \leq p < N$, l'exposant critique de Sobolev de p est définie par :

$$p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

ou :

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Théorème 1.4 ([8]) Soit $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1 , borné, ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, on a :

1. Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$,
2. Si $p = N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$,
3. Si $p > N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.5 (Rellich-Kondrachov) ([8]) On suppose que Ω borné de classe C^1 . On a

1. Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow_c L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[$,
2. Si $p = N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow_c L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$,
3. Si $p > N$, alors $W^{1,p} \hookrightarrow_c L^\infty(\Omega)$.

1.2 Dérivés d'une fonctionnelle et points critiques

Dans ce que suit, on introduit quelques notions des dérivées pour des fonctions définies sur des espaces de Banach. Nous commençons par celle de la dérivée directionnelle.

1.2.1 Dérivé au sens de Gâteaux

Définition 1.5 ([9]) Soit X un espace de Banach, $\Omega \subseteq X$ un ensemble ouvert et soit $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que I est différentiable au sens de Gâteaux (G -différentiable) en $u \in \Omega$, s'il existe $A \in X'$ (A linéaire et continue), noté par

$I'_G(u)$ tel que, pour tout $v \in X$, où $I(u + tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $I'_G(u)$ existe c-à-d :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \langle A, v \rangle \quad (1.1)$$

si I est différentiable au sens de Gâteaux en u , il existe seulement une fonctionnelle linéaire vérifiant (1.1).

1.2.2 Dérivé au sens de Fréchet

Définition 1.6 ([9]) Soit X un espace de Banach, $\Omega \subseteq X$ un ensemble ouvert et soit $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que I est différentiable au sens de Fréchet en $u \in \Omega$, s'il existe $A \in X'$ tel que :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u + v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0,$$

ou

$$I(u + v) - I(u) = Av + o(\|v\|).$$

Si I est différentiable, alors A est unique et on note $I'(u) = A$. L'ensemble des fonctions différentiables sera noté $C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Proposition 1.5 ([9]) Soit $\Omega \subseteq E$ un ensemble ouvert, supposons que I est Gâteaux différentiable sur Ω et que I'_G est continue en $u \in \Omega$. Alors I est différentiable en u et on a : $I'_G(u) = I'(u)$.

Remarque 1.1 L'importance de la proposition (1.5) réside dans le fait qu'il est souvent techniquement plus facile de calculer la dérivée au sens de Gâteaux et ensuite de prouver qu'il est continu, plutôt que de prouver directement la différentiabilité au sens de Fréchet.

1.2.3 Points critiques

Définition 1.7 ([9]) Soient Ω un ouvert d'un espace de Banach X . Supposons que $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. On dit que $u \in \Omega$ est un **point critique** de I , si :

$$I'(u) = 0.$$

Si u n'est pas un point critique, alors on dit que u est un point régulier de I .

Si $c \in \mathbb{R}$, alors on dit que c est une valeur critique de I , s'il existe $u \in \Omega$ tel que

$$I(u) = c \text{ et } I'(u) = 0.$$

Si c n'est pas valeur critique, alors on dit que c est une valeur régulière de I .

1.3 Rappele de Géométrie Différentiel

Définition 1.8 (Variété) Supposons $k \geq 1$ un entier. Un ensemble $M \subseteq \mathbb{R}^N$ est dit variété de classe C^k de dimension m si, pour chaque $x \in M$, il existe un ensemble ouvert U contenant x et la fonction $F \in C^k(U, \mathbb{R}^{N-m})$ qui est régulier dans chaque point de U et $M \cap U = \{x : F(x) = 0\}$

Définition 1.9 (Variété Différentiable) Une variété différentiable de dimension M et de classe C^k est un sous-ensemble \mathcal{M} de \mathbb{R}^N ($N \geq M$) avec la propriété suivante :

Pour chaque $x \in \mathcal{M}$ il y a un voisinage \mathcal{W} de x (en \mathbb{R}^N) et un C^k -difféomorphisme ψ de \mathcal{W} en \mathbb{R}^N tel que

$$\psi(\mathcal{M} \cap \mathcal{W}) = \{y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N : y_{M+1} = \dots = y_N = 0\} \cap \psi(\mathcal{W})$$

Un voisinage relatif $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}$ avec ψ s'appelle une carte (locale) au point $x \in \mathcal{M}$. Les premières coordonnées $\mathcal{M} (y_1, \dots, y_M)$ sont appelées les coordonnées locales de x sur \mathcal{M} . La collection de toutes les cartes de \mathcal{M} est appelée un atlas de \mathcal{M} .

Rappelons par un résultat de Lusternik qui s'exprime sous forme moderne dans [3]

Théorème 1.6 ([12]) soit Φ et ψ deux fonctions dans $C^1(H, \mathbb{R})$. On pose $\mathcal{M}_c = \{u \in H : \psi(u) = c\}$ et supposons que $\nabla\psi(u) \neq 0$ pour $u \in \mathcal{M}_c$. Soit $\tau\mathcal{M}_c(\omega)$ la variété tangentielle de \mathcal{M}_c à ω . Supposons qu'il existe $u_0 \in \mathcal{M}_c$ tel que pour tout $v \in \tau\mathcal{M}_c(u_0)$, on a $\langle \Phi'(u_0), v \rangle = 0$. Alors $\Phi'(u_0) = k\psi'(u_0)$ pour certain $k \in \mathbb{R}$

Chapitre 2

Résultat d'existence de point de bifurcation pour une classe d'opérateurs

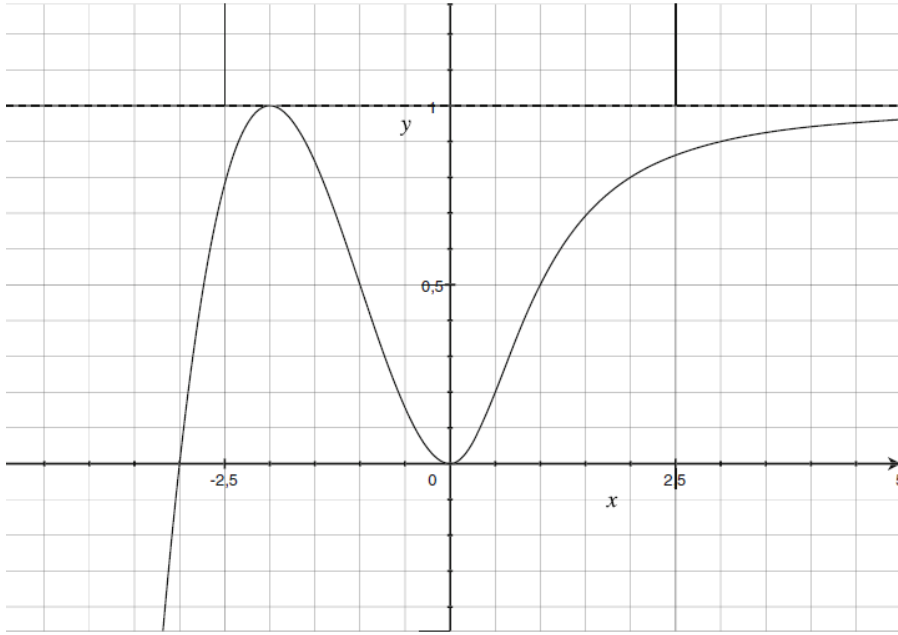
2.1 Condition de Palais-Smale

La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition à priori, à vérifier au cas par cas sur chaque fonctionnelle. Indépendamment de l'existence ou non des valeurs critiques. Elle sera par contre un ingrédient essentiel pour montrer cette existence dans un certain nombre de cas.

Définition 2.1 ([10]) Soit X un espace de Banach et $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Si $c \in \mathbb{R}$ on dit que I vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) si de toute suite u_n de X telle que :

$$I(u_n) \longrightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } I'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } X'.$$

Alors, on peut extraire une sous suite **convergente**.



Condition de Palais-Smale satisfaite au niveau $c = 0$ et pas en $c = 1$

2.2 Quelques opérateurs utiles

Notons que (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans un espace de Hilbert.

Proposition 2.1 (Adjoint) *pour chaque opérateur linéaire borné $A : H \rightarrow X$, il existe un unique opérateur linéaire borné $A^* : X' \rightarrow H$, tel que*

$$(A(u), v^*) = (u, A^*(v^*)), \text{ pour tout } u \in H \text{ et } v^* \in X'.$$

L'opérateur A^* est appelé opérateur **adjoint** de A .

Définition 2.2 (Auto Adjoint) *Un opérateur linéaire borné $A : H \rightarrow H$ est dit auto-adjoint, si $A = A^*$ c'est à dire*

$$(A(u), v) = (u, A(v)) \quad \forall u, v \in H$$

Définition 2.3 (Opérateur Complètement Continu) *Soit X un espace de Banach, soit U un ouvert de X , on dit que $A : \bar{U} \rightarrow X$ complètement continue si A est continue et compact.*

Définition 2.4 (Opérateur Potentiel) Soit X un espace de Banach, un opérateur $f : X \rightarrow X'$ est dite opérateur potentiel (opérateur gradient) sur l'ensemble $A \subset X$ s'il existe une fonctionnelle Gâteau différentiable $F : A \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$f(u) = F'_G(u)$$

cette fonctionnelle F est dite le potentiel de l'opérateur f dans A .

Si F est fréchet différentiable tel que :

$$f(u) = F'(u).$$

Alors f est appelé opérateur fortement potentiel et F est le potentiel fort de f

Théorème 2.1 (Hilbert-Schmidt) ([13]) Soit H un espace de Hilbert séparable et T un opérateur auto-adjoint compacte. Alors il existe une base orthonormale $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ où e_n est le vecteur propre de T .

Si

$$Te_n = \mu_n e_n \quad \text{et} \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n, \quad (2.1)$$

alors

$$Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (u, e_n) e_n. \quad (2.2)$$

La notion d'approximation des fonctionnelles liée de manière essentielle à la linéarisation d'un opérateur.

Définition 2.5 On dit que la fonctionnelle $\Phi(u)$ au voisinage de l'origine dans H est une approximation quadratique du $(1/2)(Tu, u)$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $\|u\| < \delta$, l'inégalité suivante est satisfait :

$$\left| \Phi(u) - \frac{1}{2}(Tu, u) \right| \leq \epsilon \|u\|^2 \quad (2.3)$$

Le lemme suivant est de Krasnosel'skii [7]

Lemme 2.1 Soit Φ' un opérateur linéaire qui est le gradient d'une fonctionnelle $\Phi(u)$ définie au voisinage de l'origine dans H . Soit Φ' un dérivé de Fréchet T à zéro. Alors le quadratique $(1/2)(Tu, u)$ se rapproche de la fonctionnelle $\Phi(u)$

2.3 Lemme d'Ekeland et conséquence

Définition 2.6 (S.C.I) Soit X un espace de Banach normé et $\Omega \subset X$, on dit qu'une fonctionnelle $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (S.C.I) au point x_0 , si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightarrow x_0$, on a

$$E(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(x_n).$$

Voici un résultat préliminaire important, c'est une version du principe variation d'Ekeland (Lemme 2.2)

Lemme 2.2 [12] Soit \mathcal{M} un espace métrique complet muni de la distance d et soit $E : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continue inférieure, bornée inférieurement. Alors, pour tout ϵ et $\delta > 0$ et tout $u \in \mathcal{M}$ avec

$$E(u) \leq \inf_{\mathcal{M}} E + \epsilon,$$

il existe $v \in \mathcal{M}$ strictement minimisant

$$E_v(\omega) \equiv E(\omega) + \frac{\epsilon}{\delta} d(v, \omega) \tag{2.4}$$

De plus, $E(v) \leq E(u)$, $d(u, v) \leq \delta$.

Une technique standard de la méthode variationnelle applique le principe variationnel d'Ekeland à une suite minimisante d'une fonctionnelle coercive semi-continue inférieurement où la fonctionnelle est minoré. Le principe variationnel d'Ekeland garantit ensuite une suite de Palais-Smale, qui produit un point presque critique, Voir par exemple [5].

On applique ici la même approche, adaptée pour une restriction à une variété, plutôt que sur un ensemble ouvert contenant un minimum local. La variété ici est la sphère.

Corollaire 2.1 Soit X un espace de Banach et on suppose que $S_\rho \subset X$ est la sphère de rayon ρ . Supposons que $E \in C^1(X)$ est borné inférieurement. Alors, il existe une

suite minimisante $\{v_m\}$ pour E dans S_ρ telle que

$$E(v_m) \rightarrow \inf_{S_\rho} E, \quad E|'_{S_\rho}(v_m) \rightarrow 0 \text{ dans } X' \quad (2.5)$$

lorsque $m \rightarrow \infty$, où $E|_{S_\rho}$ est la restriction de E à S_ρ . On note que pour tout $v \in S_\rho$ on a :

$$\| E|'_{S_\rho}(v) \| = \sup_{\omega \in \tau S_\rho(v)} \frac{|(E'(v), \omega)|}{\|\omega\|} \quad (2.6)$$

Démonstration. On choisit une suite arbitraire $\{\epsilon_m\}$, $\epsilon_m > 0$, $\epsilon_m \rightarrow 0$. On définit l'espace métrique S_ρ avec la distance $d(u, v) = \|u - v\|$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on choisit $u_m \in S_\rho$ tel que

$$E(u_m) \leq \inf_{S_\rho} E + \epsilon_m^2, \quad (2.7)$$

soit $\epsilon = \epsilon_m^2$, $\delta = \epsilon_m$ et on prend $v_m = v$, d'après le principe variationnel d'Ekeland, satisfaisant

$$E(v_m) \leq E(v_m + \omega) + \epsilon_m \|\omega\|_X \quad \forall v_m + \omega \in S_\rho,$$

par conséquent

$$\sup_{\substack{\|\omega\|_X \leq \delta \\ v_m + \omega \in S_\rho, \omega \neq 0}} \frac{E(v_m) - E(v_m + \omega)}{\|\omega\|_X} \leq \epsilon_m. \quad (2.8)$$

En exprimant la dérivée au sens de Fréchet, on a :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ v_m + h \in S_\rho}} \frac{(E|_{S_\rho}(v_m + h) - E|_{S_\rho}(v_m) - E|'_{S_\rho}(v_m), h)}{\|h\|} = 0, \quad (2.9)$$

en utilisant (2.8) on obtient :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ v_m + h \in S_\rho}} \left(E|'_{S_\rho}(v_m), \frac{h}{\|h\|} \right) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ v_m + h \in S_\rho}} \frac{(E|_{S_\rho}(v_m + h) - E|_{S_\rho}(v_m))}{\|h\|} \geq -\epsilon_m. \quad (2.10)$$

En remplaçant h par $-h$ on obtient :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ v_m + h \in S_\rho}} \left| \left(E|'_{S_\rho}(v_m), \frac{h}{\|h\|} \right) \right| \leq \epsilon_m. \quad (2.11)$$

Pour $h \in S_\rho(v_m)$, soit

$$h = T(h) + N(h),$$

où $T(h) \in \tau S_\rho(v_m)$ et $N(h) \perp \tau S_\rho(v_m)$. En raison de la condition de tangence, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(h)}{\|h\|} = 0, \quad (2.12)$$

et par suite :

$$\sup_{\substack{\phi \in \tau S_\rho(v_m) \\ \|\phi\|=1}} \left(E|_{S_\rho}'(v_m), \phi \right) < \epsilon'_m \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

lorsque $m \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\| E|_{S_\rho}'(v_m) \| \rightarrow 0 \quad (2.14)$$

Ce qui montre le résultat. ■

2.4 Théorème d'existence

Définition 2.7 (valeur propre et fonction propre) Soit H un espace de hilbert, et $A : H \rightarrow H$ un opérateur .

On dit que μ est une valeur propre (et ω est une fonction propre) de l'opérateur A si :

$$A(\omega) = \mu\omega \quad (2.15)$$

On appelle $\lambda = 1/\mu$ une valeur caractéristique pour A . On dit que $(\lambda, \omega) \in \mathbb{R} \times H$ est une solution signifie que $\lambda A(\omega) = \omega$.

Définition 2.8 (Point de bifurcation) Soit X, Y deux espaces de Banach. on considère l'équation suivant

$$S(\mu, \omega) = 0 \quad (2.16)$$

où $S : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ est tel que

$$S(\mu, 0) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

La solution $\omega = 0$ est appelée la solution triviale de (2.16). L'ensemble

$$\Sigma_S = \{(\mu, \omega) \in \mathbb{R} \times X : \omega \neq 0, S(\mu, \omega) = 0\}$$

appelé l'ensemble des solutions non triviales de (2.16). Un point de bifurcation pour (2.16) est un nombre $\mu^* \in \mathbb{R}$ tel que $(\mu^*, 0)$ appartient à la fermeture de Σ . Autrement dit μ^* est un point de bifurcation s'il existe des suites $\mu_n \in \mathbb{R}, \omega_n \in X \setminus \{0\}$ tel que

1. $S(\mu_n, \omega_n) = 0$,
2. $(\mu_n, \omega_n) \rightarrow (\mu^*, 0)$.

i.e.

1. $\mu_n \rightarrow \mu^*$ dans \mathbb{R} ,
2. $\omega_n \rightarrow 0$ dans X .

L'objectif principal de la théorie de bifurcation est d'établir les conditions pour la recherche de points de bifurcation et, en général, d'étudier la structure de Σ .

Dans le lemme suivant, on calcule la dérivée au sens de Fréchet d'une famille des fonctionnelle qui sera utile dans ce que suit.

Lemme 2.3 Soit H un espace de Hilbert et soit $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 et sa dérivée linéaire Φ' , on définit pour tout $u \in H$, la famille des fonctionnelles :

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \lambda \Phi(u)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cette famille est de classe C^1 avec :

$$\langle I'_\lambda(u), v \rangle = \langle u, v \rangle - \lambda \langle \Phi'(u), v \rangle$$

Démonstration. Soit $u, v \in H$ et soit $t \in \mathbb{R}$, d'abord on calcule la limite suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_\lambda(u + tv) - I_\lambda(u)}{t} = \langle I'_\lambda(u), v \rangle.$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_\lambda(u + tv) - I_\lambda(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} \|u + tv\|^2 - \lambda \Phi(u + tv) - \frac{1}{2} \|u\|^2 + \lambda \Phi(u) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + t \langle u, v \rangle - \lambda (\Phi(u + tv) - \Phi(u)) - \frac{1}{2} \|u\|^2 \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} \|v\|^2 + \langle u, v \rangle - \frac{\lambda}{t} (\Phi(u + tv) - \Phi(u)).
\end{aligned}$$

On pose :

$$\psi(s) = \Phi(u + sv) - \Phi(u), \quad s \in [0, t].$$

Soit $\psi(s) : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\psi(s)$ est continue sur l'intervalle fermé $[0, t]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, t[$ alors d'après le théorème des accroissement finis (T.A.F), il existe un réel $c_t \in]0, t[$ vérifiant :

$$\psi(t) - \psi(0) = t\psi'(c_t),$$

c'est à dire

$$\Phi(u + tv) - \Phi(u) = t \langle \Phi'(u + c_t v), v \rangle,$$

et lorsque $t \rightarrow 0$, on a $c_t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_\lambda(u + tv) - I_\lambda(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} \|v\|^2 + \langle u, v \rangle - \lambda \langle \Phi'(u + c_t v), v \rangle \\
&= \langle u, v \rangle - \lambda \langle \Phi'(u), v \rangle.
\end{aligned}$$

On vérifie que l'application $v \mapsto \langle u, v \rangle - \lambda \langle \Phi'(u), v \rangle$ est une forme linéaire et continue.

En effet, on pose

$$Au : H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \langle Au, v \rangle = \langle u, v \rangle - \lambda \langle \Phi'(u), v \rangle.$$

Au est **linéaire**, en effet : soit $v_1, v_2 \in H$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \langle Au, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle &= \langle u, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle - \lambda \langle \Phi'(u), \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle \\
 &= \langle u, \alpha v_1 \rangle + \langle u, \beta v_2 \rangle - \lambda \langle \Phi'(u), \alpha v_1 \rangle - \lambda \langle \Phi'(u), \beta v_2 \rangle \\
 &= \alpha \langle u, v_1 \rangle - \alpha \lambda \langle \Phi'(u), v_1 \rangle + \beta \langle u, v_2 \rangle - \beta \lambda \langle \Phi'(u), v_2 \rangle \\
 &= \alpha \langle Au, v_1 \rangle + \beta \langle Au, v_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

Au est **continue**, en effet : pour tout $u, v \in H$

$$\begin{aligned}
 | \langle Au, v \rangle | &= | \langle u, v \rangle - \lambda \langle \Phi'(u), v \rangle | \\
 &\leq | \langle u, v \rangle | + \lambda | \langle \Phi'(u), v \rangle | \\
 &\leq \| u \|_{H'} \| v \|_H + \lambda \| \Phi'(u) \|_{H'} \| v \|_H \\
 &\leq \min \{ \| u \|_{H'} + \lambda \| \Phi'(u) \|_{H'} \} \| v \|_H \\
 &\leq C \| v \|_H .
 \end{aligned}$$

Donc Au est **continue**. Et par suite I_λ est **G-différentiable**.

Reste à vérifier que A est continue tel que A est défini comme suit :

$$A : u \mapsto \langle u, \cdot \rangle - \lambda \langle \Phi'(u), \cdot \rangle$$

Soit

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } H,$$

on montre que

$$Au_n \rightarrow Au \text{ dans } H',$$

i.e.

$$\| Au_n - Au \|_{H'} = \sup_{\substack{\|v\| \leq 1 \\ v \in H}} \frac{| \langle Au_n - Au, v \rangle |}{\| v \|}$$

Donc

$$\begin{aligned}
| \langle Au_n - Au, v \rangle | &= | \langle u_n, v \rangle - \lambda \langle \Phi'(u_n), v \rangle - \langle u, v \rangle + \lambda \langle \Phi'(u), v \rangle | \\
&= | \langle u_n - u, v \rangle - \lambda \langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u), v \rangle | \\
&\leq | \langle u_n - u, v \rangle | + \lambda | \langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u), v \rangle | \\
&\leq \| u_n - u \| \| v \| + \lambda | \langle \Phi'(u_n - u), v \rangle | \\
&\leq \| u_n - u \| \| v \| + \lambda \| \Phi'(u_n - u) \| \| v \| \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

D'où A est continue.

Donc I_λ est de classe C^1 .

■

Voici un résultat de base de la bifurcation qui à été démontré par Krasnosel'skii .

Théorème 2.2 *On suppose que $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ est faiblement continu et uniformément différentiable au voisinage de 0 et supposons que $A = \Phi' : H \rightarrow H$ est complètement continu. Alors, si A est différentiable à 0, chaque valeur propre $\mu_* \neq 0$ de la dérivée $A'(0)$ est un point de bifurcation pour (2.15) .*

Plus précisément, pour tout $r > 0$ suffisamment petit, il existe $\mu_r \in \mathbb{R}, \omega_r \in H$ avec $\| \omega_r \| = r$ telle que

$$A(\omega_r) = \mu_r \omega_r$$

et en plus

$$\mu_r \rightarrow \mu_* \text{ lorsque } r \rightarrow 0.$$

Le théorème suivant améliore le théorème 2.2 en éliminant l'exigence de la continuité complète de Φ' et la continuité faible de Φ . Ce théorème à été prouvé en 2011 par Tonkes, voir [12]

Théorème 2.3 *Soit Φ' un opérateur linéaire qui est le gradient d'une fonctionnelle $\Phi(u)$ de classe C^1 . Soit Φ' admet une dérivée de Frechet T à l'origine dans H , où T est un opérateur auto-adjoint, complètement continu. Supposons que μ_0 est*

la plus grande valeur propre (c'est-à-dire que $\lambda_0 = 1/\mu_0$ soit la plus petite valeur caractéristique positive) de T . On suppose que, pour certains $\xi > 0$, la famille des fonctionnelles

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \lambda\Phi(u) \quad (2.17)$$

satisfait la condition $(PS)_c$ pour $\lambda_0 - \xi < \lambda < \lambda_0 + \xi$ et pour $c \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0.

Alors, μ_0 est un point de bifurcation pour Φ' .

Démonstration. Soit H_0 l'espace propre correspondant à μ_0 et on définit H_1 comme complément orthogonal à H_0 dans H . Soit P_0 le projecteur de H sur H_0 et P_1 le projecteur de H sur H_1 . Soit ν la plus grande valeur propre positive de T différente de μ_0 , soit $\nu = 0$ si cela n'existe pas.

Comme T est complètement continu, d'après le théorème 2.1 on a la décomposition suivant :

$$Tu = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(u, e_i) e_i \quad (2.18)$$

pour tout $u \in H$. En particulier, cela signifie que

$$(TP_1u, u) \leq \nu \|P_1u\|^2 \quad \forall u \in H$$

en effet

$$\begin{aligned} (TP_1u, u) &= (TP_1u, P_0u + P_1u) \\ &= (TP_1u, P_0u) + (TP_1u, P_1u) \\ &= (\mu P_1u, P_0u) + (\mu P_1u, P_1u) \\ &= \mu(P_1u, P_0u) + \mu(P_1u, P_1u) \\ &= \mu \|P_1u\|^2 \\ &\leq \nu \|P_1u\|^2 \end{aligned}$$

où ν est la plus grande valeur propre positive. D'après le lemme (2.1), on sait que $\Phi(u)$ est approximative à $(1/2)(Tu, u)$. Pour certains petits $\epsilon > 0$, soit δ , un nombre

suffisamment petit de la définition de l'approximation quadratique.

On note par $\rho \in (0, \delta)$ un nombre tel que pour tout $\|u\| \leq \rho$,

$$\left| \Phi(u) - \frac{1}{2}(Tu, u) \right| \leq \epsilon_1(u, u), \quad (2.19)$$

$$\| \Phi'(u) - Tu \| \leq \epsilon_2 \|u\|, \quad (2.20)$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont choisis suffisamment petits tel que

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &< \frac{\mu_0 - \nu}{6}, & \epsilon_2 &< \mu_0 \sqrt{1 - \frac{6\epsilon_1}{\mu_0 - \nu}} \\ \lambda_0 - \xi &< \left(\frac{1}{\lambda_0} + \epsilon_2\right)^{-1}, & \lambda_0 + \xi &> \left(\frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{6\epsilon_1}{\mu_0 - \nu}} - \epsilon_2\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Par conséquence, pour tout $u \in H_0$, $\|u\| \leq \rho$ on a

$$- \left| \Phi(u) - \frac{1}{2}(Tu, u) \right| \geq \epsilon_1 \|u\|^2$$

et comme $Tu = \mu_0 u$, alors

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \frac{1}{2}(Tu, u) - \left| \Phi(u) - \frac{1}{2}(Tu, u) \right| \\ &\geq \left(\frac{\mu_0}{2} - \epsilon_1\right)(u, u). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pour une fonction propre normalisée de T . $\varphi_0 \in H_0$, on définit

$$c_\rho \equiv \sup_{u \in S_\rho} \Phi(u) \geq \Phi(\rho\varphi_0) \geq \left(\frac{\mu_0}{2} - \epsilon_1\right)\rho^2. \quad (2.23)$$

Puisque Φ n'est pas faiblement continu, on ne peut pas garantir immédiatement que la suprémum est atteinte. Au lieu de compter sur la complètement continue, on invoque la condition (PS) .

En appliquant le corollaire (2.1) à $-\Phi$, il existe une suite $\{u_n\} \subset S_\rho$ telle que

$$\Phi(u_n) \rightarrow c_\rho,$$

et

$$\| \Phi'_{S_\rho}(u_n) \| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Par définition, pour toute suite $\{v_n\}$ satisfait :

$$\lim \| v_n \| < C < \infty,$$

et $v_n \in \tau S_\rho(u_n)$, alors

$$(\Phi'(u_n), v_n) \rightarrow 0.$$

On prend une sous-suite si nécessaire, pour tout n suffisamment grand on a :

$$\Phi(u_n) \geq \left(\frac{\mu_0}{2} - 2\epsilon_1\right)\rho^2. \quad (2.24)$$

Soit

$$\lambda_n = \frac{(u_n, u_n)}{(\Phi'(u_n), u_n)} = \frac{\rho^2}{(\Phi'(u_n), u_n)}, \quad (2.25)$$

alors d'après le lemme 2.3 on trouve

$$(I'_{\lambda_n}(u_n), u_n) = 0. \quad (2.26)$$

Dans la partie suivante de la preuve, les bornes sont placées sur $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ pour tout n suffisamment grand de sorte que l'inégalité (2.24) soit satisfaite en vertu (2.19) on a :

$$\begin{aligned} \Phi(u_n) &\leq \frac{1}{2}(Tu_n, u_n) + \left| \Phi(u_n) - \frac{1}{2}(Tu_n, u_n) \right| \\ &\leq \frac{1}{2}(\mu_n u_n, u_n) + \epsilon_1 \rho^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\mu_n(P_0 u_n + P_1 u_n, P_0 u_n + P_1 u_n) + \epsilon_1 \rho^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\mu_n \| P_0 u_n \|^2 + \frac{1}{2}\mu_n \| P_1 u_n \|^2 + \epsilon_1 \rho^2 \\ &\leq \frac{\mu_0}{2} \| P_0 u_n \|^2 + \frac{\nu}{2} \| P_1 u_n \|^2 + \epsilon_1 \rho^2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

et par suite :

$$\left(\frac{\mu_0}{2} - 2\epsilon_1\right)\rho^2 \leq \Phi(u_n) \leq \frac{\mu_0}{2} \| P_0 u_n \|^2 + \frac{\nu}{2} \| P_1 u_n \|^2 + \epsilon_1 \rho^2.$$

alors

$$\left(\frac{\mu_0}{2} - 2\epsilon_1\right)\rho^2 \leq \frac{\mu_0}{2} \| P_0 u_n \|^2 + \frac{\nu}{2} \| P_1 u_n \|^2 + \epsilon_1 \rho^2, \quad (2.28)$$

mais

$$\| u_n \|^2 = \| P_0 u_n \|^2 + \| P_1 u_n \|^2$$

i.e.

$$\rho^2 = \| P_0 u_n \|^2 + \| P_1 u_n \|^2 .$$

On prend $\| P_1 u_n \|^2 = \rho^2 - \| P_0 u_n \|^2$, on obtient :

$$\| P_0 u_n \|^2 \geq \rho^2 - \frac{6\epsilon_1 \rho^2}{\mu_0 - \nu}, \quad (2.29)$$

et on prend $\| P_0 u_n \|^2 = \rho^2 - \| P_1 u_n \|^2$, on obtient

$$\| P_1 u_n \|^2 \leq \frac{6\epsilon_1 \rho^2}{\mu_0 - \nu} \quad (2.30)$$

de l'inégalité (2.29)

$$\| T u_n \|^2 \geq \| T P_0 u_n \|^2 = \mu_0^2 \| P_0 u_n \|^2 \geq \mu_0^2 \rho^2 - \frac{6\epsilon_1 \mu_0^2 \rho^2}{\mu_0 - \nu} \quad (2.31)$$

et par l'inégalité (2.20)

$$\begin{aligned} \| \Phi'(u_n) - T u_n \| &\geq -(\| \Phi'(u_n) \| - \| T u_n \|) \\ \| \Phi'(u_n) \| &\geq \| T u_n \| - \| \Phi'(u_n) - T u_n \| \\ &\geq \mu_0 \rho \sqrt{1 - \frac{6\epsilon_1}{\mu_0 - \nu}} - \epsilon_2 \| u_n \| \\ &= \rho \left\{ \mu_0 \sqrt{1 - \frac{6\epsilon_1}{\mu_0 - \nu}} - \epsilon_2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pour tout n , chaque $\omega \in H$ peut être s'écrit sous la forme

$$\omega = t_n u_n + v_n \quad (2.33)$$

où $t_n \in \mathbb{R}$ et $v_n \in \tau S_\rho(u_n)$. En utilisant le faite que $(\Phi'(u_n), v_n) = o(1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on a :

$$\begin{aligned} \| \Phi'(u_n) \| &= \sup_{\omega \in S_1} | (\Phi'(u_n), \omega) | \\ &= \sup \{ | (\Phi'(u_n), t_n u_n + v_n) | : t_n \in \mathbb{R}, \\ &\quad v_n \in \tau S_\rho(u_n), \| t_n u_n + v_n \| = 1 \} \\ &= \sup \{ | (\Phi'(u_n), t_n u_n) | : \| t_n u_n \| \leq 1 \} + o(1) \\ &= \frac{1}{\rho} (\Phi'(u_n), u_n) + o(1). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Par conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi'(u_n), u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \|\Phi'(u_n)\| \geq \rho^2 \left\{ \mu_0 \sqrt{1 - \frac{6\epsilon_1}{\mu_0 - \nu}} - \epsilon_2 \right\} > 0. \quad (2.35)$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \leq \left(\mu_0 \sqrt{1 - \frac{6\epsilon_1}{\mu_0 - \nu}} - \epsilon_2 \right)^{-1}. \quad (2.36)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\Phi'(u_n)\| &\leq \|\Phi'(u_n) - Tu_n\| + \|Tu_n\| \\ &\leq \epsilon_2 \|u_n\| + \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(u_n, e_i) e_i \right\| \\ &\leq (\epsilon_2 + \mu_0) \rho. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi'(u_n), u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \|\Phi'(u_n)\| \leq \rho^2 (\epsilon_2 + \mu_0). \quad (2.38)$$

En combinant avec (2.36), on obtient :

$$[\mu_0 + \epsilon_2]^{-1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \equiv \lambda_0 \leq \left[\mu_0 \sqrt{1 - \frac{6\epsilon_1}{\mu_0 - \nu}} - \epsilon_2 \right]^{-1}, \quad (2.39)$$

lorsque $\epsilon \rightarrow \infty$, on peut choisir ρ petit pour que ϵ_1 et $\epsilon_2 \rightarrow 0$.

On considère la suite $\{u_n\}$ agissant sur le fonctionnel $I_{\lambda_0}(u)$. En utilise encore l'équation (2.33), on obtient :

$$\begin{aligned} \|I'_{\lambda_0}(u_n)\| &= \sup_{\|\omega\|=1} |(I'_{\lambda_0}(u_n), \omega)| \\ &= \sup \{ |(u_n, t_n u_n + v_n) - \lambda_0 (\Phi'(u_n), t_n u_n + v_n)| \\ &\quad : t_n u_n + v_n \in S_1 \} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Comme $u_n \perp v_n$, donc

$$(u_n, v_n) = 0,$$

u_n est une suite maximisante pour Φ dans S_ρ , alors

$$(\Phi'(u_n), v_n) = o(1) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

on a :

$$\begin{aligned}
\| I'_{\alpha_0}(u_n) \| &= \sup\{ | (u_n, t_n u_n) - \lambda_0(\Phi'(u_n), t_n u_n) | : \| t_n u_n \| \leq 1 \} + o(1) \\
&= \sup\{ t_n | (u_n, u_n) - \lambda_0(\Phi'(u_n), t_n u_n) | : \| u_n \| \leq 1 \} + o(1) \\
\lambda &= \sup\{ t_n | (u_n, u_n) - \lambda_0(\Phi'(u_n), u_n) | : t_n \leq \frac{1}{\rho} \} + o(1) \\
&= \frac{1}{\rho} | (u_n, u_n) - \lambda_0(\Phi'(u_n), u_n) | + o(1).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Mais $\| u_n \|^2 - \lambda_n(\Phi'(u_n), u_n) = 0$, donc

$$\begin{aligned}
\| I'_{\lambda_0}(u_n) \| &= \frac{1}{\rho} | \| u_n \|^2 - \lambda_0(\Phi'(u_n), u_n) | + o(1) \\
&= \frac{1}{\rho} | \| u_n \|^2 - \lambda_n(\Phi'(u_n), u_n) | + o(1) \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

On a aussi :

$$I_{\lambda_0}(u_n) = \frac{1}{2}\rho^2 - \lambda_0\Phi(u_n). \tag{2.43}$$

Pour $\rho > 0$ suffisamment petit, on peut assurer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda_0}(u_n)$ est arbitrairement petit. Par conséquent (2.42) et (2.43) implique que u_n est une suite de $(PS)_c$ pour I_{λ_0} où c s'annule lorsque ρ tend à 0.

Puisque I_{λ_0} satisfait la condition $(PS)_c$ pour c au voisinage de zéro, on a u_n est fortement convergent vers $u_0 \in S_\rho$, où u_0 doit être un maximam pour (2.23).

Le théorème de Lusternik 1.6 complète la preuve en montrant que u_0 doit être une fonction propre de Φ' et λ_0 une valeur caractéristique de Φ' :

$$\Phi'(u_0) = \mu u_0, \tag{2.44}$$

où $1/\lambda_0 \equiv \mu \in \mathbb{R}$.

■

Chapitre 3

Applications sur un problème elliptique non linéaire avec un exposant critique de sobolev

3.1 Présentation du problème

Définition 3.1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On dit qu'une fonction $(x, s) \mapsto f(x, s)$, définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} , est **Caratheodory**, si est mesurable en x , continue p.p. en s , autrement dit :

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } f(\cdot, s) \text{ est mesurable sur } \Omega; \\ \text{p.p. en } x \in \mathbb{R} \text{ la fonction } f(x, \cdot) \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Chiappinelli [1] montre que chaque valeur propre de $-\Delta$ sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ forme un point de bifurcation pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u + f(x, u)) & \text{dans } \Omega; \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Caratheodory. Dans cette section on généralise ce résultat à une famille des problèmes nonlinéaire.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u + |u|^{2^*-2}u) & \text{dans } \Omega; \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Les solutions de (3.2) correspondent à des points critiques de la fonctionnelle :

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} \int u^2 + \frac{1}{2^*} \int |u|^{2^*} \right). \quad (3.3)$$

Lemme 3.1 I_λ est une fonctionnelle de classe C^1 , de plus on a :

$$\langle I'_\lambda(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \left[\int_\Omega uv dx + \int_\Omega |u|^{2^*-2} uv dx \right]$$

Démonstration. De la même manière avec la preuve de lemme (2.3)

■

Définition 3.2 $u \in H_0^1(\Omega)$ est dite solution faible de (3.2) si et seulement si :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \left[\int_\Omega uv dx + \int_\Omega |u|^{2^*-2} uv dx \right] = 0 \quad (3.4)$$

Remarque 3.1 On remarque que u est une solution faible de (3.2) si et seulement si u est un point critique de I_λ .

3.2 Existence d'une branche de bifurcation du problème (3.1)

Lemme 3.2 (Brezis-Lieb) ([9]) Soient $1 \leq p < \infty$ et $(u_n)_n$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p. vers u . Alors $u \in L^p(\Omega)$ et :

$$\|u\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_p^p - \|u - u_n\|_p^p).$$

Le lemme suivant est s'inspire de [11].

Lemme 3.3 Pour $\lambda > 0$, I_λ satisfait la condition $(PS)_c$ pour tout $c < c_\lambda^* = (1/N)S^{N/2}/\lambda^{(N-2)/2}$.

Démonstration. Soit $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$I_\lambda(u_n) \rightarrow c, \quad (3.5)$$

$$I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } (H_0^1(\Omega))'. \quad (3.6)$$

Étape 1 : (u_n) est une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

On pose

$$H(u) = \frac{1}{2^*} \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*},$$

de la relation (3.5) on a :

$$\frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \frac{1}{2} \lambda \|u_n\|_{L^2}^2 - \lambda H(u_n) = c + o(1), \quad (3.7)$$

et de (3.6), on obtient :

$$(I'_\lambda(u_n), v) \rightarrow 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On pose $v = u_n$, on obtient :

$$\|u_n\|^2 - \lambda \|u_n\|_{L^2}^2 - 2^* \lambda H(u_n) = o(1). \quad (3.8)$$

De (3.7) on trouve :

$$\|u_n\|^2 - \lambda \|u_n\|_{L^2}^2 = 2\lambda H(u_n) + 2c + o(1). \quad (3.9)$$

En combinant (3.8) et (3.9) on a

$$\lambda(2^* - 2)H(u_n) = 2c + o(1),$$

de sorte que $H(u_n)$ est borné, i.e. (u_n) est borné dans L^{2^*} , et comme $L^{2^*} \hookrightarrow L^2$ puisque $2^* > 2$, on déduit que (u_n) est borné dans L^2 . Donc (u_n) est borné dans $H_0^1(\Omega)$. De la réflexivité de $H_0^1(\Omega)$ et l'injection compacte de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega)$ on peut extraire une sous suite $(u_{n_k}) = (u_n)$ telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1,$$

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2,$$

$$u_n \rightarrow u \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Étape 2 : On vérifie que $I_\lambda(u) \geq 0$, en effet, pour tout $\varphi \in H_0^1$ on a

$$(I'_\lambda(u_n), \varphi) = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi - \lambda \int_\Omega u_n \varphi - \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} u_n \varphi = o(1),$$

par passage à la limite

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \lambda \int_\Omega u \varphi - \lambda \int_\Omega |u|^{2^*-2} u \varphi = 0,$$

on prend $\varphi = u$, on trouve :

$$\|u\|^2 - \lambda \|u\|_{L^2}^2 - \lambda \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} = 0. \quad (3.10)$$

En utilisant la dernière relation (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2} \lambda \|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*} \lambda \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &= \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &= \frac{\lambda}{N} \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geq 0. \end{aligned}$$

Étape 3 : On pose

$$w_n = u_n - u,$$

et on prouve que $w_n \rightarrow 0$ dans H_0^1 pour c suffisamment petit, on a :

$$\|u_n\|^2 = \|w_n\|^2 + \|u\|^2 + o(1), \quad (3.11)$$

$$\|u_n\|_{L^2}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + o(1), \quad (3.12)$$

d'après le lemme 3.2 :

$$\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} = \|w_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1). \quad (3.13)$$

D'une part :

$$I_\lambda(u_n) = I_\lambda(u) + \frac{1}{2} \|w_n\|^2 - \frac{1}{2^*} \lambda \|w_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1). \quad (3.14)$$

D'autre part, lorsque $(I'_\lambda(u_n), u_n) \rightarrow 0$ on a :

$$\|u_n\|^2 - \lambda \|u_n\|_{L^2}^2 - \lambda \|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} = o(1). \quad (3.15)$$

En combinant (3.11),(3.13), et (3.15), on obtient :

$$\| w_n \|^2 + \| u \|^2 - \lambda \| u \|_{L^2}^2 - \lambda \| w_n \|_{L^{2^*}}^{2^*} - \lambda \| u \|_{L^{2^*}}^{2^*} = o(1),$$

d'où

$$\begin{aligned} \| w_n \|^2 - \lambda \| w_n \|_{L^{2^*}}^{2^*} &= -(\| u \|^2 - \lambda \| u \|_{L^2}^2 - \lambda \| u \|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1)) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Donc on peut écrire :

$$\lim_n \| w_n \|^2 = \lambda \lim_n \| w_n \|_{L^{2^*}}^{2^*} = \alpha.$$

D'après l'injection continue du $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$, alors on a

$$S \| w_n \|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq \| w_n \|^2,$$

avec $S = \inf \{ \| u \|; \| u \|_{L^{2^*}} = 1 \}$.

En faisant le passage à la limite :

$$S \left(\frac{\alpha}{\lambda} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \alpha,$$

d'où,

$$S \frac{1}{\lambda} \leq \alpha^{2/N},$$

et par suite :

$$\alpha \geq S^{\frac{N}{2}} \frac{1}{\lambda^{N/2}},$$

de (3.5), on peut avoir que

$$\begin{aligned} c = I_\lambda(u) + \frac{1}{2} \| w_n \|^2 - \frac{1}{2^*} \lambda \| w_n \|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1) &= I_\lambda(u) + \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2^*} \alpha + o(1) \\ &\geq \frac{1}{N} \alpha \\ &\geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \frac{1}{\lambda^{N/2}}, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. ■

Soit λ_0 la valeur caractéristique principale du problème linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On définit l'opérateur T par :

$$(Tu, v) = \int_{\Omega} uv dx,$$

et l'opérateur R par :

$$(R(u), v) = \int |u|^{2^*-2} uv dx.$$

On remarque que T et R sont bien définies, car pour tout $u \in H_0^1$, on peut vérifier que $Tu \in (H_0^1(\Omega))'$ et $Ru \in (H_0^1(\Omega))'$ i.e. linéaire et continue tel que

$$\begin{aligned} T : H_0^1(\Omega) &\rightarrow (H_0^1(\Omega))' \\ u &\rightarrow Tu \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R : H_0^1(\Omega) &\rightarrow (H_0^1(\Omega))' \\ u &\rightarrow Ru \end{aligned}$$

Tu **linéaire**, en effet : soit $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (Tu, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_{\Omega} u(\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= \int_{\Omega} u\alpha v_1 + \int_{\Omega} u\beta v_2 \\ &= \alpha \int_{\Omega} uv_1 + \beta \int_{\Omega} uv_2 \\ &= \alpha(Tu, v_1) + \beta(Tu, v_2) \end{aligned}$$

La même preuve avec Ru .

Tu **continue**, en effet pour tout $u, v \in H_0^1$ et on utilise l'inégalité de Poincaré on

obtient :

$$\begin{aligned}
|(Tu, v)| &= \left| \int_{\Omega} uv dx \right| \\
&\leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
&\leq c \|u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\
&\leq C \|v\|_{H_0^1}.
\end{aligned}$$

La **continuité** de Ru , d'après l'injection continue de $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ tel que $(2^*)' = \frac{2^*}{2^*-1}$,

on a :

$$\begin{aligned}
|(R(u), v)| &= \left| \int_{\Omega} |u|^{2^*-2} uv dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |u|^{2^*-1} |v| dx \\
&\leq \| |u|^{2^*-1} \|_{(L^{2^*})'} \|v\|_{L^{2^*}} \\
&= \left(\int_{\Omega} (|u|^{2^*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|v\|_{L^{2^*}} \\
&\leq c \left(\int_{\Omega} |u|^{2^*} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|v\|_{H_0^1} \\
&\leq C \|v\|_{H_0^1}.
\end{aligned}$$

Lemme 3.4 T est un opérateur complètement continue (i.e. compact et continue) et auto-adjoint .

Démonstration.

La continuité : Soit u_n une suite dans H_0^1 tel que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } H_0^1$$

on montre que

$$Tu_n \rightarrow Tu \text{ dans } (H_0^1)'$$

i.e. pour tout $v \in H_0^1$

$$\|Tu_n - Tu\|_{(H_0^1)'} = \sup_{\substack{v \neq 0 \\ \|v\| \leq 1}} \frac{|\langle Tu_n - Tu, v \rangle|}{\|v\|} \rightarrow 0$$

Soit $v \in H_0^1$ tel que $\|v\| \leq 1$, d'après l'injection continue $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ et l'inégalité de Poincaré on obtient :

$$\begin{aligned}
 |\langle Tu_n - Tu, v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} u_n v - \int_{\Omega} uv \right| \\
 &= \left| \int_{\Omega} (u_n - u)v \right| \\
 &\leq \|u_n - u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
 &\leq C \|u_n - u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \\
 &\leq C \|u_n - u\|_{H_0^1} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Alors $Tu_n \rightarrow Tu$ dans $(H_0^1)'$, ce qui implique que T est **continu**.

La compacité :

Soit u_n une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$, puisque H_0^1 est réflexif, alors on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k}) = (u_n)$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, mais on sait que $H_0^1 \hookrightarrow_c L^2$, car $2 \in [1, 2^*]$, on montre que :

$$\|Tu_n - Tu\|_{(H_0^1)'} = \sup_{\substack{v \neq 0 \\ \|v\| \leq 1}} \frac{\langle Tu_n - Tu, v \rangle}{\|v\|} \rightarrow 0$$

Soit $v \in H_0^1$ tel que $\|v\| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 |\langle Tu_n - Tu, v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} u_n v - \int_{\Omega} uv \right| \\
 &= \left| \int_{\Omega} (u_n - u)v \right| \\
 &\leq \|u_n - u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
 &\leq C \|u_n - u\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1} \\
 &\leq C \|u_n - u\|_{L^2} .
 \end{aligned}$$

Alors T est compact.

T **auto-adjoint** : en effet, pour tout $u, v \in H_0^1$, on a :

$$\begin{aligned}\langle Tu, v \rangle &= \int uv dx \\ &= \int vudx \\ &= \langle Tv, u \rangle \\ &= \langle u, Tv \rangle.\end{aligned}$$

■

Remarque 3.2 1. On peut réécrire (3.4) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle - \lambda \langle Tu, v \rangle - \lambda \langle Ru, v \rangle &= 0 \\ \langle u, v \rangle &= \lambda \langle Tu + Ru, v \rangle \\ u &= \lambda(Tu + Ru).\end{aligned}$$

Donc le problème (3.2) devient $u = \lambda(Tu + Ru)$.

2. Si on pose

$$A(u) = Tu + Ru,$$

le problème (3.2) est équivalent à

$$A(u) = \mu u, \quad \mu = \frac{1}{\lambda},$$

de plus, l'opérateur A admet un dérivé au sens de fréchet dans l'origine 0, et on a

$$A'(0) = T.$$

Théorème 3.1 Pour tout $r > 0$ suffisamment petit, il existe une solution (λ_r, u_r) de (3.2) avec $\|u_r\| = r$.

On a $\lambda_r \rightarrow \lambda_0$ lorsque $r \rightarrow 0$

Démonstration. Il est clair que u est une solution faible pour (3.2) si :

$$A(u) = Tu + R(u) = \mu u, \tag{3.16}$$

où $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Si

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int u^2 + \frac{1}{2^*} \int |u|^{2^*},$$

alors

$$A(u) = \Phi'(u).$$

Le lemme (3.3) fournit que I_λ satisfait la condition $(PS)_c$ au voisinage spécifié dans le théorème 2.3.

■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence d'une branche de bifurcation qui est vérifiée par l'utilisation de la compacité dans le sens de la condition Palais Smale, puis on a appliqué ce résultat principal sur un problème elliptique semi linéaire avec un exposant critique de Sobolev suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u + |u|^{2^*-2} u) & \text{dans } \Omega; \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N .

Bibliographie

- [1] R. Chiappinelli, An estimate on the eigenvalues in bifurcation for gradient mappings, *Glasgow Mathematical Journal*, vol.39, no.2, pp. 211–216, 1997.
- [2] J. Mawhin and M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, vol. 74 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer, New York, NY, USA, 1989.
- [3] L. A. Lusternik, On the conditions for extremals of functionals, *Matematicheskii Sbornik*, vol. 41, no.3, 1934.
- [4] J. Chabrowski, P. Dr'abek, and E. Tonkes, Asymptotic bifurcation results for quasilinear elliptic operators, *Glasgow Mathematical Journal*, vol. 47, no. 1, pp. 55–67, 2005.
- [5] J. Chabrowski, "On multiple solutions for the nonhomogeneous p -Laplacian with a critical Sobolev exponent", *Differential and Integral Equations*, vol. 8, no. 4, pp. 705–716, 1995.
- [6] S. N. Chow and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer, New York, NY, USA, 1982
- [7] M. A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, The Macmillan, New York, NY, USA, 1964.
- [8] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, masson, Paris, 1992
- [9] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques, et application aux problèmes elliptiques*, O.K. Nancy, le 20 Juillet 1993.
- [10] H. Le Dret, Note de cours, M2—Équations aux dérivées partielles elliptiques, Université PIERRE et MARIE CURIE, 4 mars 2010

- [11] H. Brézis and L. Nirenberg, "Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 36, no.4, pp. 437–477, 1983.
- [12] E. Tonkes, Bifurcation of Gradient Mappings Possessing the Palais–Smale Condition, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Volume 2011
- [13] P. Dràbek and J. Milota *Methods of Nonlinear Analysis Application to Differential Equations*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2007.
- [14] H. Kielhöfer, *Bifurcation Theory An Introduction with Applications to PDEs*, 2004 Springer–Verlag New York, Inc.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة التشعب عند القيمة الذاتية الرئيسية لفتة من مؤثر التدرج الذي يمتلك شرط -بالي سمال- , يتم التحقق من وجود فرع التشعب باستخدام معيار التراص ممثلا في شرط -بالي سمال- .

نطبق هذه النتيجة على مسألة ناقصية شبه خطية تحتوي على الأس الحرج لصوبولاف التالية:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u + |u|^{2^*-2}u) & \text{sur } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

حيث Ω مفتوح من \mathbb{R}^N .

كلمات مفتاحية: التشعب, امكانية المؤثر, فضاء سوبولاف, مبدأالغايير لأكلاند, النقطة الحرجة.

Abstract

In this memory, we have studied the bifurcation at the principal eigenvalue of a class of gradient operators which possess the Palais-Smale condition. The existence of the bifurcation branch is verified by using the compactness in the Palais Smale condition .

Our objective in this work is to study the existence of bifurcation point for a semi-linear elliptique problem with a critical exponent of sobolev following:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u + |u|^{2^*-2}u) & \text{sur } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Where Ω is an open of \mathbb{R}^N .

Keywords: Bifurcation, potential operator, sobolev space, Ekeland's variational principle, critical point.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié les points de bifurcations dans la valeur propre principale d'une classe d'opérateur de gradient possédé la condition de palais-smale. L'existence de la branche de bifurcation s' appuit sur la condition Palais Smale.

Nous appliquons ce résultat sur le problème elliptique semi linéaire avec un exposant critique de sobolev suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u + |u|^{2^*-2}u) & \text{sur } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N

Mots clés: Point de bifurcation, opérateur potentiel, espace de sobolev, principe variationnel d'Ekeland, point critique.