الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientfiique
جامعة محمد بوضياف - مسيلة
Université Mohamed Boudiaf, M'sila
كلية الرياضيات والاعلام الآلي
Faculté de Mathématiques et Informatiques
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

مذكرة تخرج
لنيل شهادة الماستر

في مجال: رياضيات وإعلام آلي
فرع : رياضيات
تخصص : الرياضيات المتقطة

المقدمة من طرف الطالبة:
شنفاوي وهيبة

المذكرة بعنوان

About basic concepts of fuzzy sets and some of their applications
حول المفاهيم الأساسية للمجموعات الضبابية وبعض تطبيقاتها

تاريخ إيجراء المناقشة : .. جويلية 2021.

أمام اللجنة المشكلة من :

ميلاس صهيب	أ.م.أ	المركز الجامعي سي الحواس - بريكة	رئيسا
زيان ابراهيم	أ.م.ب	المدرسة العليا للأساتذة قايد صالح - بوسعادة	مشرف
عمرون عبد العزيز	أستاذ	جامعة محمد بوضياف - المسيلة	مشرف مساعد
أمهاني علي	أ.م.أ	المدرسة العليا للأساتذة قايد صالح - بوسعادة	ممتحن

الدفعة: 2021/2020

❖ شكـــر وَتَقَديـــــر

الحمد لله نحمده وهو المستحق للحمد والثناء ونستعين به في السراء والضراء، ونتوكل عليه في جميع حالاتنا، ونصلي ونسلم على خير خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وصحبه أجمعين ومن تبع هديه إلى يوم الدين. وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم:

﴿ مَنْ لَمْ يَشْكُرُ النَّاس لَم يشْكُر الله ﴾

رواه " أحمد والترميذي "

أتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير إلى كل من أوقد لنا مشعل الحياة وحملنا على سفينة النجاة.

إلى كل من صرنا بفضله نكتب ونقرأ و.....

إلى كل من علمنا علما به ينتفع وأدب به يرتفع.

بدءا من معلمي الإبتدائي وصولا إلى أساتذتنا الكرام في المدرسة العليا للأساتذة بوسعادة وجامعة المسيلة

أتقدم بالشكر العميق إلى جميع الزملاء الذين أغنوا بملاحظاتهم فحوى هذه المطبوعة ، وأسهموا في إعطائها شكلها النهائي هذا. تحية عطرة وشكر خاص للأستاذ المشرف " زيان براهيم " الذي أفادني بنصائحه وتوجيهاته طيلة إنجاز هذه المذكرة.

وتحية طيبة إلى اللجنة التي تكرمت بمناقشة هذه المذكرة الأستاذ الدكتور عمرون عبد العزيز، والدكتور ميلاس صهيب والدكتور أمهاني علي على قراءتهم المتمعّنة لهذه المذكرة وعلى الملاحظات القيّمة التي أبدوها عليها.

وفي الأخير أشكر كل من ساهم في مساعدتي لإنجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد ولو بكلمة طيبة.

❖ إهداء

الحمد لله الذي تتم بفضله النعم، والصلاة والسلام على طب القلوب ودوائها، وعافية الأبدان وشفائها، ونور الأبصار وضيائها، سيدنا محمد وعلى آله وصحبه.

أهدي ثمرة هذا العمل المتواضع:

إلى التي رآني قلبها قبل عينيها، حضنتني أحشائها قبل يديها، التي تعبت لأجلي في ليلها ونهارها، إلى نبع الحنان: أمي الحبيبة حفظها الله ورعاها

إلى من بذل النفس والنفيس، ضحى بالغالي والرخيص، إلى رمز الصبر والكفاح ومنه استلهمت القوة والقيم الإنسانية: أبي الغالي ألبسه الله ثوب الصحة والعافية وأطال في عمره.

إلى فخري في الحياة وقرة عيني إخواني وأخواتي الأعزاء: سمية، حنان، نور الهدى، وداد، محمد الأمين، أحمد طه.

إلى إخوتي الذين لم تلدهم أمي وبهم الحياة يسيرة: لسلت دليلة، منصور نجلاء،بن التومي ريمة،

إلى من تقاسم مقاعد الدراسة الأخوات والزميلات : بن العيطر شريفة، دولة شيماء، .

إلى كل من حملتهم ذاكرتي ولم تحملهم مذكرتي.

إلى كل من تصفح المذكرة وإنتفع بها وتذكرنا بدعائه.

إليكم جميعا أهدي هذا العمل.

** شنفاوي وهيبة **

الفهرس

مقدمـــة

إن العقل البشري ظل يصارع المستحيل و يبتكر ما يحل به مشكلاته منذ فجر الإنسانية، و كل ما ظهر العجز في آلية إلا أوجد آلية أخرى أكثر مرونة مع متطلباته، و نحن في هذه المذكرة أمام منطق جديد، ألمته الحاجة إلى التعامل الآلي المنطقي مع الأحكام اللفظية، مما نتج عنه الذكاء الاصطناعي. فمن اليسير أن نحكم على شخص أنه ذكر أو أنثى، أو أمي أو ليس أمي، لكن من العسير أن نحكم على شخص أنه مثقف أو جميل. و نلاحظ أنه يمكننا أن نقول على شخصين أنهما تربان (لهما نفس العمر) رغم أن بين ميلادهما أياما بل أشهر و نعتبر أن ذلك منطقي و عادي .

إن النمذجة الرياضية التي تعتمد إعتماد كليا على الظواهر الثنائية و هي وجود حالتين لكل ظاهرة إحدى الحالتين الصحيحة فيها تعطى رمز **1** و الحالة الأخرى الخاطئة فيها تعطى رمز **0** و إنطلاقا من هذا التقسيم تم إنشاء المنطق و منه تشكلت الرياضيات الكلاسيكية المعروفة ، لكن الواقع أوسع من ذلك و قد لا يعتمد على حالتين فقط كما رأينا سابقا ، من ثم ظهرت الحاجة إلى منطق جديد يقبل التحقق الجزئي للظاهرة و يثمنها، من هنا نشأ منطق الغموض أو الضبابي أو المنطق المشوش هو أحد أشكال المنطق، يستخدم في بعض الأنظمة الخبيرة وتطبيقات الذكاء الاصطناعي.

نشأت المجموعات الضبابية عام 1965 على يد العالم الأذربيجاني الأصل "لطفي زادة" من جامعة كاليفورنيا حيث طوّرها ليستخدمها كطريقة أفضل لمعالجة البيانات، لكن نظريته لم تلق اهتماماً حتى عام 1974 حيث استخدم منطق الغموض في تنظيم محرك بخاري، ثم تطورت تطبيقاته حتى وصلت لتصنيع شريحة منطق ضبابي والتي استعملت في العديد من المنتجات كآلات التصوير.
هناك العديد من الدوافع التي دفعت العلماء إلى تطوير المجموعات الضبابية فمع تطور الحاسوب والبرمجيات، نشأت الرغبة في اختراع أو برمجة أنظمة يمكنها التعامل مع المعلومات الغير الدقيقة على غرار الإنسان لكن هذا ولد مشكلة حيث أن الحاسوب لا يمكنه التعامل إلا مع معطيات دقيقة ومحددة. وقد نتج عن هذا التوجه ما يعرف بالأنظمة الخبيرة أو الذكاء الاصطناعي وتعتبر المجموعات الضبابية أحد النظريات التي يمكن من خلالها بناء مثل هذه الأنظمة، حيث أعيدت الذاكرة لكثير من الأعمال الرياضية الهامة في حقول مختلفة من الرياضيات.

وعلى هذا الأساس إخترنا عنوان المذكرة :

"حول المفاهيم الأساسية للمجموعات الضبابية وبعض تطبيقاتها" حيث قسمنا هذه المذكرة إلى أربعة فصول :

الفصل الاول : مفاهيم عامة (أوليات) في المجموعات الكلاسيكية والعمليات عليها ثم العلاقات بين المجموعات الكلاسيكية وعلم المنطق الكلاسيكي.

الفصل الثاني: المجموعات الضبابية تناولنا فيه أنواع المجموعات الضبابية وخصائصها وأهم العمليات الجبرية عليها .

الفصل الثالث: تطرقنا فيه إلى العلاقات الضبابية وبعض أنواعها.

الفصل الرابع: تناولنا فيه مفاهيم أولية حول المنطق الضبابي .

الفَصل الأول

مفاهيم عامة (أوليات)

مُحتوى الفَصْلُ

1.1 المجموعات الكلاسيكية

[3] تلعب نظرية المجموعات دورا مهما في الرياضيات، ويعتبر مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في بناء هذه النظرية. يفترض أن مفهوم المجموعة واضح في الأذهان وتفاديا لكل إلتباس ونظرا لظهور بعض التناقضات في نظرية المجموعات فقد تم تحديد مجموعة من الضوابط لهذا المفهوم نلخصها كما يلي:

(1) تتحدد المجموعة تحديدا نهائيا إذا تم تحديد مفهوم الإنتماء بوضوح، أي أننا نستطيع أن نحدد وبدون غموض إذا كان الكائن الرياضي a ينتمي أو لا إلى المجموعة X أي أننا نستطيع أن نحكم وبدون غموض على صدق إحدى القضيتين $a \notin X$ أو $a \in X$ وفي حالة $a \in X$ نقول أن a عنصر من X.

(2) الكائن الرياضي لا يمكن أن يكون في آن واحد مجموعة وعنصرا من هذه المجموعة. أي أن الكتابة التالية مرفوضة $a \in X$.

(3) مجموعة كل المجموعات غير موجودة.

نصطلح فيمايلي أن X مجموعة مرجعية.

1.1.1 الإحتواء

تعريف 1.1.1: لتكن E و F مجموعتين من المجموعة المرجعية X، نقول أن E محتواة في F إذا تحقق الإستلزام التالي:

$$\forall x \in X : x \in E \Rightarrow x \in F$$

ونكتب $E \subset F$.

1.1.2 المساواة

تعريف 1.1.2:
لتكن E و F مجموعتين من المجموعة المرجعية X، نقول أن E تساوي F إذا تحقق التكافؤ التالي :

$$\forall x \in X : x \in E \Leftrightarrow x \in F$$

ونكتب $E = F$.

1.1.3 المجموعة الخالية

تعريف 1.1.3:
نقبل بوجود مجموعة لا تشمل أي عنصر، تسمى المجموعة الخالية ونرمز لها بـ ϕ.

نتائج 1.1.1. [3]

(1) لدينا $E \subset E$. لأن الإستلزام:

$$\forall x \in X : x \in E \Rightarrow x \in E$$

صحيح دوما.

(2) من أجل كل مجموعة E لدينا :

$$\phi \subset E$$

لأن الإستلزام:

$$\forall x \in X : x \in \phi \Rightarrow x \in E$$

صحيح دوما.
يصبح تعريف تساوي مجموعتين كالتالي:

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \wedge F \subset E)$$

(3) المجموعة الخالية وحيدة
البرهان: لنفرض وجود مجموعتين خاليتين ϕ_1 و ϕ_2 وعندئذ حسب النتيجة 2 لدينا $\phi_2 \subset \phi_1$ و $\phi_1 \subset \phi_2$
ومنه حسب النتيجة 3 فإن $\phi_1 = \phi_2$.

(4) الإحتواء علاقة متعدية بمعنى

$$E \subset F \wedge F \subset G \Rightarrow E \subset G$$

ينتج ذلك من تعدي الإستلزام.

1.1.4 عمليات على المجموعات

[3]
نعتبر الآن E و F مجموعتين كيفيتين.

1.1.1.4 التقاطع

نسمي تقاطع المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية:

$$E \cap F = \{x \mid x \in E \vee x \in F\}$$

مثال 1.1.1

لتكن E و F مجموعتين حيث:

$$E=\{1,2,3,4\}$$
$$F=\{1,3,5,6\}$$
$$E\cap F=\{1,3\}$$

2.1.1.4 الإتحاد

نسمي إتحاد المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية:

$$E\cup F=\{x \mid x\in E\vee x\in F\}$$

مثال 1.1.2

لتكن E و F مجموعتين حيث:

$$E=\{1,2,3,4\}$$
$$F=\{1,3,5,6\}$$
$$E\cup F=\{1,2,3,4,5,6\}$$

3.1.1.4 الفرق بين مجموعتين

نسمي الفرق بين المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية:

$$E-F=\{x \mid x\in E\vee x\notin F\}$$

4.1.1.4 الفرق التناظري

نسمي الفرق التناظري بين المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية:

$$E\bigtriangleup F=(E\cup F)-(E\cap F)$$

1.1.5 بعض الخواص

تمتع العمليات المعرفة سابقا بخواص كثيرة نذكر بعضها.
من أجل A و B مجموعات كيفية لدينا:

(1) خاصية:

$$A\cap A=A,\quad A\cup A=A$$

(2) خاصية التبديل:

$$A\cup B=B\cup A\quad A\cap B=B\cap A,$$

(3) خاصية التجميع:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

(4) خاصية العنصر الحيادي:

$$A \cap \phi = \phi, \quad A \cup \phi = A$$

(5) خاصية التوزيع:

(ا) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ب) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.1.6 المجموعة الجزئية و مجموعة أجزاء مجموعة والمتممة

[3] لتكن E و A مجموعتين،

المجموعة الجزئية

تعريف 1.1.4: نقول أن A مجموعة جزئية من المجموعة E إذا كانت $A \subset E$.

مجموعة أجزاء مجموعة

تعريف 1.1.5: نسمي مجموعة أجزاء E، المجموعة التي عناصرها أجزاء E ونرمز لها بـ $P(E)$ المعرفة كمايلي:

$$P(E) = \{A \mid A \subset E\}$$

ولدينا كذلك:

$$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

قضية 1.1.1. لدينا دائمًا $E \in P(E), \quad \phi \in P(E)$.

نتيجة 1.1.1

إذا كان عدد عناصر E هو n فإن عدد عناصر $P(E)$ هو 2^n.

تعريف 1.1.6: لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E.
نسمي متممة A في E المجموعة التالية:

$$C_A E = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} = E - A$$

نتائج 1.1.2.

(1) $C_E\phi = E, \quad C_E E = \phi$.

(2) $C_E(C_E A) = A$.

(3) $C_E(A\cap B) = C_E B \cup C_E A, \quad C_E(A\cup B) = C_E B \cap C_E A$.

1.1.7 تجزئة مجموعة

تعريف 1.1.7: [3]
لتكن E مجموعة كيفية و $\{A_i, i\in I\}$ عائلة أجزاء من E. I حيث (I مجموعة أدلة) نقول أن تشكل تجزئة للمجموعة E إذا تحقق ما يلي:

(1) $\forall i\in I : A_i \neq \emptyset.$

(2) $E = \underset{i\in I}{\cup} A_i$

(3) الأجزاء منفصلة مثنى مثنى وهو ما نعبر عنه بـ:

$$A_i \cap A_j = \phi, \quad i\neq j$$

مثال 1.1.3

لتكن المجموعة $E=\{1,2,3\}$ إن العائلة $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E.
$\{\{1\},\{2,3\}\}$ تشكل تجزئة أخرى للمجموعة E.

1.1.8 التغطية

تعريف 1.1.8: لتكن E مجموعة كيفية $\{B_i, i\in I\}$ و I عائلة مجموعات كيفية نقول أن العائلة تشكل تغطية للمجموعة E إذا تحقق ما يلي:

$$E \subset \underset{i\in I}{\cup} B_i$$

مثال 1.1.4

1- لتكن المجموعة $E=\{1,2,3\}$ إن العائلة $\{\{1\},\{2,-1\},\{3,4,5\}\}$ تشكل تغطية للمجموعة E.
إن العائلة $\{\{1,2\},\{4,-1\},\{3,4,7\}\}$ تشكل تغطية أخرى للمجموعة E.

9.1.1 الجداءالديكارتي

لتكن E و F مجموعتين

تعريف 9.1.1: [5] نسمي الجداء الديكارتي للمجموعتين E و F المجموعة التالية

$$E \times F = \{(a,b) \mid a \in E, b \in F\}$$

نسمي العنصر(a,b) ثنائية مرتبة ولدينا

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

بعض الخواص

(1) $E \times \phi = \phi$.

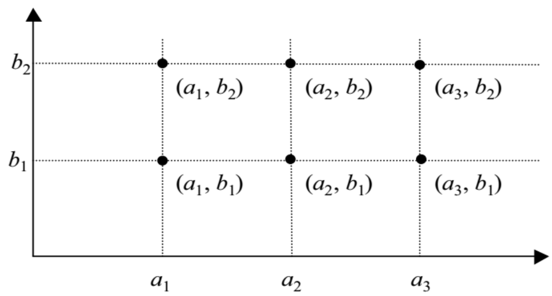
(2) $E \times F \neq F \times E$ إذا كان $E \neq F$.

(3) إذا كان عدد عناصر E هو m وعدد عناصر F هو n فإن عدد عناصر $E \times F$ هو $n \cdot m$.

مثال 5.1.1

لتكن $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2\}$ الجداء الديكارتي يعطى بـ:

$$X \times Y = \{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_1),(x_3,y_2)\}.$$



شكل 1.1: مجموعة الجداء $X \times Y$

2.1 العلاقات في المجموعات الكلاسيكية

1.2.1 العلاقات الثنائية

تعريف 1.2.1: [5] لتكن E مجموعة. نسمي **علاقة ثنائية** على مجموعة E الزوج $R=(E,T)$ حيث T مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $E\times E$ نسميها بيان العلاقة R. ونقول أن العنصرين x و y من E مرتبطان وفق العلاقة R ونكتب xRy إذا وفقط إذا كان $(x,y)\in T$
لتكن R علاقة ثنائية على المجموعة E نقول عن R أنها:

- **إنعكاسية** إذا وفقط إذا $\forall x\in E, xRy$.
- **تناظرية** إذا وفقط إذا $\forall(x,y)\in E\times E; xRy\Rightarrow yRx$.
- **ضد تناظرية** إذا وفقط إذا $\forall(x,y)\in E\times E; (xRy)\wedge(yRx)\Rightarrow y=x$.
- **متعدية** إذا وفقط إذا $\forall(x,y,z)\in E^3; (xRy)\wedge(yRz)\Rightarrow xRz$.

1.2.2 علاقات التكافؤ

تعريف 1.2.2: [5] لتكن R علاقة ثنائية على المجموعة E. نقول أن R علاقة **تكافؤ** إذا وفقط إذا كانت إنعكاسية، تناظرية ومتعدية، في هذه الحالة نكتب $x=y\mathrm{mod}R$، عوضا عن yRx، ونقرأ "x يساوي y بالقياس R". وإذا كان x عنصرا من E فإننا نسمي المجموعة

$$[x]=\{y\in E: yRx\}$$

صف تكافؤ

نسمي مجموعة صفوف التكافؤ "مجموعة خارج قسمة E بالقياس R" ونرمز إليها بالرمز E/R. كما نسمي أي عنصر من صف تكافؤ ممثلا عن هذا الصف. وأخيرا نسمي التطبيق

$$\begin{array}{llll} Q: & E & \longrightarrow & E/R \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

تجزئة المجموعة E.

1.2.3 علاقات الترتيب

تعريف 1.2.3: [5] لتكن R علاقة ثنائية على المجموعة E.

- نقول أن R علاقة **ترتيب** إذا وفقط إذا كانت إنعكاسية، ضد تناظرية ومتعدية، ونرمز عادة بالرمز $\leq$ إلى علاقة ترتيب. كما نقول أن $(E, \leq)$ "**مجموعة مرتبة**".
- نقول أن العنصران x و y من E قابلين للمقارنة إذا وفقط إذا كان $y \leq x$ أو $x \leq y$.
- ونقول إن $(E, \leq)$ "مرتبة كليا" إذا كانت جميع عناصرها قابلة للمقارنة مثنى مثنى.

1.3 المنطق الكلاسيكي

إختلفت التعاريف لهذا الفرع من الرياضيات في مصطلحاتها قديما وحديثا، لكن مما لاشك فيه إن للمنطق الرياضياتي دورا رئيسا وهاما في صياغة النتائج الرياضياتية وإثباتها من قبل الرياضياتيين.
وبالفعل، فلو تأملنا أي جملة رياضياتية مفيدة، للاحظنا أنه يمكننا نعتها "صحيحة "أو"خاطئة" ولايمكن أن تكون صحيحة وخاطئة بآن واحد.
كما أن نعتها لا يرتبط بأي رأي شخصي ولا بأي طرف كان.
وبشكل عام: يعتمد المنطق الرياضياتي على الجمل المفيدة، أي ذات المعنى، التي تكون صحيحة أو تكون خاطئة ولا تكون صحيحة وخاطئة بآن واحد، أي تخضع لما يسمى ب"مبدأ الثالث المرفوع" والتي تعرف بـ:

1.3.1 القضايا

تعريف 1.3.1: [6]

1. نسمي قضية منطقية (قضية) كل جملة يمكن الحكم عليها بالصحة (الصدق) أو بالخطأ (الكذب) نرمز للقضية المنطقية بالرموز $P, Q, R, \ldots$.
2. وإذا كانت P قضية منطقية، فإننا نرفق كل قضية منطقية بقيمة إما 1 إذا كانت صادقة أو 0 إذا كانت خاطئة تسمى هذه القيمة المرفقة للقضية المنطقية بـ حقيقة القضية المنطقية، ونرمز لذلك بالرمز $V(P)$ أو P فقط يعني: $V(P) \in \{0, 1\}$

مثال 1.3.1

(1) الجملة "كل عدد حقيقي هو عدد عقدي" قضية صحيحة.

(2) الجملة "للمعادلة $x^2-2=0$ حل في مجموعة الأعداد الناطقة" قضية خاطئة.

(3) الجملة "يوم جميل" ليست قضية.

1.3.2 جدول الحقيقة

لتكن p قضية ما من P، نسمي الجدول التالي:

p
1
0

جدول الحقيقة للقضية p.
ونلاحظ أنه مؤلف من عمود وسطرين، وعدد الإمكانات لقيم الحقيقة لقضية ما p يساوي 2.
ونعرف بصورة متشابهة جدول الحقيقة لقضيتين ما p و q كالتالي:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

نلاحظ أن هذا الأخير يتألف من عمودين وأربعة أسطر، وعدد الإمكانات لقيم الحقيقة لقضيتين يساوي 2^2.
كما نعرف أيضا جدول الحقيقة لثلاث قضايا p، q، r، بأنه الجدول الذي يتألف من ثلاثة أعمدة وثمانية أسطر، ليأخذ الشكل الموالي:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

وعدد الإمكانات لقيم الحقيقة لثلاث قضايا يساوي $8 = 2^3$.
وبصفة أعم، إذا كانت لدينا n قضية $(n \geq 1)$، فإنه توجد 2^n إمكانا لقيم الحقيقة لها، وبالتالي فجدول الحقيقة لهذه القضايا يتألف من n عمودا و 2^n سطرا.

1.3.3 العمليات المنطقية على القضايا

سنكتفي هنا بذكر العمليات الأكثر إستعمالا وتداولا، وهي كالتالي:

1.1.3.3 العملية المنطقية "و"

تعريف 1.3.2: [6]
إذا كانت p و q قضيتين من P، فإن $p \wedge q$ هي قضية جديدة وتقرأ "p و q"، وهي ناتجة عن ربط القضية p بالقضية q بواسطة أداة الربط $\wedge$ ونحصل على جدول الحقيقة لهذه القضية الجديدة $p \wedge q$ بالإستعانة بجدول الحقيقة للقضيتين p و q كما يلي:

q	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ونلاحظ من الجدول أن القضية $p \wedge q$ "صحيحة" عندما، وفقط عندما، تكون القضيتين p و q صحيحتين معا.

2.1.3.3 العملية المنطقية "أو"

تعريف 1.3.3: لتكن p و q قضيتين من P. إن $p \vee q$ قضية جديدة وتقرأ "p أو q " وهي ناتجة عن ربط القضية p بالقضية q بواسطة أداة الربط $\vee$ ونحصل على جدول الحقيقة لهذه القضية الجديدة $p \vee q$ بالإستعانة بجدول الحقيقة للقضيتين p و q كما يلي:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ونلاحظ من الجدول أن القضية $p \vee q$ "خاطئة" عندما، وفقط عندما، تكون القضيتين p و q خاطئتين معا.

3.1.3.3 العملية المنطقية "النافية"

تعريف 1.3.4: [6]
لتكن p عبارة معينة من P، نفي p نرمز له بالرمز $\sim p$ وأن

p	$\sim p$
1	0
0	1

ونلاحظ أن قيم الحقيقة لنفي قضية ما يخالف دوما قيم الحقيقة لتلك القضية.

4.1.3.3 العملية المنطقية "الشرطيةأحادية الجانب"

تعريف 1.3.5: [6] إذا كانت p و q قضيتين ما من P. فإن $p \rightarrow q$ هي قضية جديدة وتقرأ "إذا p فإن q" وهي قضية نابعة من تأثير العملية المنطقية $\rightarrow$ في القضيتين p و q، ونجد قيم الحقيقة للقضية الجديدة $p \rightarrow q$ بالإستفادة كما سبق من جدول الحقيقة للقضيتين p و q كما يلي:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ونلاحظ من الجدول أن القضية $p \rightarrow q$ "خاطئة" عندما، وفقط عندما، تكون القضيتين p "صحيحة" و q "خاطئة" .

5.1.3.3 العملية المنطقية "الشرطية ثنائية الجانب"

تعريف 1.3.6: [6] لتكن p و q قضيتين ما من P. نعرف من هاتين القضيتين قضية جديدة نرمز لها بـ $p \leftrightarrow q$ وتقرأ "p إذا، وفقط إدا، q" وهي ناتجة من تأثير العملية المنطقية $p \leftrightarrow q$ في القضيتين p و q، وبالإستعانة بقيم الحقيقة للقضيتين p و q نحصل على جدول الحقيقة لهذه القضية الجديدة كما هو مبين أسفله:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ونلاحظ من الجدول أن القضية $p \leftrightarrow q$ "صحيحة" عندما، وفقط عندما، تكون للقضيتين p "صحيحة" و q نفس قيمة الحقيقة.

ملاحظة 1.3.1

ومن خلال استعراض العمليات المنطقية على القضايا نلاحظ أن تأثير العمليات المنطقية في القضايا ينتج قضايا جديدة. ندعو هذه القضايا الجديدة "قضايا مركبة"، وبعبارة أدق القضية المركبة: هي قضية ناتجة عن تأثُّر بعض العمليات المنطقية أو كلها في قضية ما أو أكثر. ويقال عن قضية أنها بسيطة إذا لم تكن مركبة. كما يقال عن القضاياالبسُّطة، التي تتركب منها القضية المركبة، إنها مركبات هذه القضية المركبة.
كما لا يفوتنا أن ننبه إلا أننا نسمي تفسيرا للقضية المركبة A كل مجموعة من قيم الحقيقة لمركباتها.

ملاحظة 1.3.2

[6] يمكن إيجاد جدول الحقيقة لأية قضية مركبة وذلك بالإستفادة من جداول الحقيقة للعمليات المنطقية السابقة.

مثال 1.3.2

يتضح ذلك أكثر بإيجاد جدول الحقيقة للقضية التالية:
$(p \vee q) \rightarrow p$ والذي نعرضه كالتالي:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \to p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	1

نشرف الآن على تعريف قضيتين من نوع خاص ألا وهما:

القضية البينة

تعريف 1.3.7: [6]
القضة البينة، أو الإستدلال، أو ما نعبر عنه عادة تحصيل حاصل: هي قضية صحيحة دوما، أي أنها تؤخذ قيمة الحقيقة 1 فقط. وإذا كانت هذه الأخيرة قضية مركبة فإنها تأخذ قيمة الحقيقة 1 لأجل كل تفسير لها (كل تفسير يؤكدها). كما نشير إلى أننا نرمز أحيانا للقضة البينة بالرمز t .

القضية المتناقضة

تعريف 1.3.8:
القضية المتناقضة (التناقض): هو نفي القضية البينة ونرمز له بالعادة بالرمز c.

مثال 1.3.3

القضية $(p \wedge \bar{q}) \to (p \vee q)$ هي قضية بينة. وبالفعل لدينا جدول الحقيقة لهذه القضية مبين كالتالي:

p	q	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$p \vee q$	$(p \wedge \bar{q}) \to (p \vee q)$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1

2- القضية $(p \wedge q) \wedge \bar{q}$ هي قضية متناقضة. (يمكن التأكد من ذلك بسهولة بواسطة جدول الحقيقة)

1.3.4 التطابق المنطقي للقضايا

تعريف 1.3.9: [6] نقول عن القضيتين A وB أنهما متطابقتان (منطقيا)، ونكتب $A \equiv B$ إذا، وفقط إذا، كانت لهما قيم الحقيقة نفسها لأجل كل مجموعة من قيم الحقيقة للقضايا البسيطة $r, q, p, \ldots,$ الداخلة في عبارتيهما.

ومن ثم، تكون قضيتان A و B غير متطابقتين إذا وجدت مجموعة واحدة على الأقل من قيم الحقيقة للقضايا البسيطة الداخلة فً عبارتيهما بحيث لأجلها تكون قيمة الحقيقة للقضية A مختلفة عن قيمة الحقيقة للقضية B.

هذا ويُكن إستخدام جدول الحقيقة للبرهان على تطابق قضيتين أو عدمه. كما يمكن بطبيعة الحال أن تكون $A \equiv B$ على الرغم من وجود بعض القضايا البسيطة التي لا تشترك في تركيب المضيتين A و B معا.

مثال 1.3.4

إن القضيتين: $A = p \vee \bar{q}$ و $B = p \vee (p \wedge r) \vee \bar{r}$ (حيث p و q و r قضايا ما).
متطابقتان رغم أن القضية r تدخل في تركيب القضية B ولكنها لاتدخل في تركيب القضية A، حيث التطابق المنطقي يتبين من جدول الحقيقة التالي:

p	q	r	$\bar{q}$	$p \wedge r$		A	B
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

قضية 1.3.1. لتكن p و q قضيتين ما. عندئذ
$(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

برهان. يمكن ان نثبته بسهولة بواسطة جدول الحقيقة:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

□

نتائج 1.3.1. من كل قضية مركبة A فإنه توجد قضية B تطابق القضية A ومشكلة فقط من الروابط (العمليات) المنطقية $\wedge$، $\vee$، $\bar{}$. ونعبر بذلك بالقول أن الجملة $\{\wedge, \vee, \bar{}\}$ تامة أو (كاملة).
بل أكثر من ذلك الجملة $\{\wedge, \bar{}\}$ تامة هي الأخرى وتعرف ب **جملة برانتو** وكذا مثليتها $\{\Rightarrow, \bar{}\}$ المشهورة ب **جملة فريج**، ويعود الأمر في الأولى لقانون **دي مورقان**، وفي الثانية للمطابقة "$A \vee B \equiv \bar{A} \rightarrow B$" اللتان نوردهما لاحقا.

1.3.5 مبدأ الثنوية

بيَنا أنه يمكن إستبدال أية قضية بقضية تتطابق معها وتحوي العمليات المنطقية $\wedge$ و $\vee$، $\bar{}$ فقط. ولهذا يمكن التعبير عن مبدأ الثنوية كما يلي:

تعريف 1.3.10: إذا كانت A و B قضيتين مركبتين من قضايا بسيطة p، q و r،...،وكانت $A \equiv B$ فإننا نحصل على مطابقة جديدة $C \equiv D$ عندما، نستبدل العملية $\wedge$ بالعملية $\vee$ ونستبدل التناقض c بالإستدلال t والإستدلال t بالتناقض c في طرفي المطابقة $A \equiv B$.
ونقول عن المطابقة الجديدة $C \equiv D$ إنها **ثنوية المطابقة** $A \equiv B$.ونقول في الوقت نفسه، إنَ $A \equiv B$ هي **ثنوية** المطابقة $A \equiv B$

1.3.6 جبر القضايا

تمتع العمليات المنطقية على القضايا بخواص، كما أن للقضايا قوانين يمكن تسميتها قوانين جبرية. وسنبين في المبرهنة الموالية هذه القوانين التي ندعوها: **قوانين جبر القضايا**

نظريــة 1.3.1: لتكن p، q و r ثلاث قضايا ما، ولتكن t الإستدلال و c التناقض. عندئذ:

$$(1)\quad \begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$$ قوانين اللا نمو

$$(2)\quad \begin{cases} (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \\ (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} p \wedge t \equiv p \\ p \vee c \equiv p \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} p \wedge \bar{p} \equiv c \\ p \vee \bar{p} \equiv t \end{cases}$$ قانونا الإتمام

$$(7)\quad \begin{cases} \bar{t} \equiv c \\ \bar{c} \equiv t \end{cases}$$

$$(8)\quad \bar{\bar{p}} \equiv p$$ قانون الإرتداد

$$(9)\quad \begin{cases} p \mathbin{\bar{\wedge}} q \equiv \bar{p} \wedge \bar{q} \\ p \mathbin{\bar{\vee}} q \equiv \bar{p} \vee \bar{q} \end{cases}$$ قانون دي مورغان

برهان. يمكن الإثبات بسهولة بإستعمال جدول الحقيقة □

نتائج 1.3.2. (1) كل من العمليتين $\wedge$ و $\vee$ تبديلية و تجميعية.

(2) كل من العمليتين $\wedge$ و $\vee$ تكون توزيعية على الأخرى.

(3) الاستدلال t هو الحيادي بالنسبة للعملية $\wedge$ والتناقض c هو الحيادي بالنسبة للعملية $\vee$

(4) الاستدلال t هو الماص بالنسبة للعملية $\vee$ والتناقض c هو الماص بالنسبة للعملية $\wedge$.

ملاحظة 1.3.3

يمكن البرهان على صحة أية مطابقة بإحدى الطرائق التالية:

(1) باستخدام جدول الحقيقة.

(2) بتطبيق قوانين جبر القضايا.

(3) بإستخدام مبدأ الثنوية.

1.3.7 بعض تطبيقات المنطق الرياضياتي

1.1.3.7 علاقة الإستلزام

طرق البرهان على صحة الإستلزام

كثيرا ما نجد مسائل رياضياتية في صيغة إستلزام، وهذا ما جعلنا نُري هذا الموضوع شيئًا من الإهتمام لتسليط الضوء عليه ولو بإيجاز.

(1) **الطريقة المباشرة:**

إذا كانت القضيتين p و q بسيطتين فإن الإستعانة بجدول الحقيقة لإثبات أن القضية $p \to q$ تكون إستدلالا سيكون كافيا.

(2) **عكس النقيض:**

إذا كان الإستلزام عبارة عن نص رياضياتي، فإن فكرة افتراض صحة القضية P والسعي بخطى منطقية لإثبات صحة القضية q (الطريقة المباشرة)، قد لا تجدي في ترويض بعض المسائل الرياضياتيه أحيانا على الرغم من أنها فكرة سديدة منطقيا، لذلك نلجأ في مثل هذه الأحوال لإثبات صحة قضية ما تطابق استلزامنا منطقيا و من بين هذه القضايا نذكر أكثر واحدة استعمالا ألا وهي: $(p \to q) \equiv (\bar{q} \to \bar{p})$ لننتقل بذلك إلى إثبات صحة الإستلزام $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ الذي قد يلين بالطريقة المباشرة وبه نكون قد أثبتنا استلزامنا الأول $p \Rightarrow q$ هذا وتعرف هذه الطريقة بـ العكس النقيض (أو نقيض الفرض) ويمكن أن نتأكد باستعمال جدول الحقيقة مثلا من صحة تلك المطابقة

(3) **البرهان بالخلف:**

إثبات مسائل رياضياتية ليست في صيغة استلزام عموما. ومن أجل ذلك نذكر بالمطابقة من التوطئة والتي مفادها: $(p \to q) \equiv (\bar{p} \vee q)$ ومن ثم فإن كون p تستلزم q يستدعي كون القضية $\bar{p} \vee q$ استدلالا، وعليه إذا كانت q قضية متناقضة ومن كون التناقض حيادي بالنسبة للعملية $\vee$ فإن القضية $\bar{p}$ الناتجة من المطابقة $\bar{p} \vee q \equiv \bar{p}$ تكون استدلالا. وبالتالي تكون القضية p خاطئة، أي أن "كل قضية تؤدي إلى تناقض خاطئة بالضرورة".

إن هذه الطريقة في البرهان مشهورة في الأدب الرياضياتي بـ البرهان بالخلف كما أنها تحتل مكانة مرموقة

من طرق البرهان لأن لها الفضل في إرجاع صيغ كثير من المسائل في الرياضيات على شكل إستلزام. لإثبات صحة قضية ما p يكفينا إثبات أنه إذا كان نفيها $\bar{p}$ صحيحاأدى ذلك إلى تناقض، أي نفترض أن p خاطئة ونناقش منطقيا لنصل إلى تناقض.

2.1.3.7 علاقة التكافؤ

لتكن p و q قضيتين ما، نقول أن p تكافئ q (أو العكس) ونكتب $q \Leftrightarrow p$ إذا كانت $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$، للبرهنة على صحة التكافؤ بين قضيتين بسيطتين $q \Leftrightarrow p$، يكفي إثبات أن القضية $q \leftrightarrow p$ تكون إستدلالا بالإستعانة بجدول الحقيقة مثلا، أما إذا كانت المبرهنة نصا رياضياتيا مصاغا على شكل تكافؤ فإننا نكتفي بإثبات صحة الإستلزامين $q \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow q$. **ملاحظة هامة:** من تعريفيَ التطابق والتكافؤ المنطقيين يتضح لنا أنهما يعرفان نفس المفهوم، ومن ثم لا فرق بين هذين المفهومين، لذلك نجد أن مصطلح التطابق المنطقي غائب في بعض كتب المنطق الرياضياتي، لتأديته نفس الدور الذي يلعبه التكافؤ المنطقي كما جاء ذكره.
بعد أن عرفنا كلا من الإستلزام والتكافؤ نشرع الآن إلى ذكر بعض النتائج الهامة بخصوصهما:

نتائج 1.3.3. (1) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}$.

(2) $(p \vee q) \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})}$.

(3) $(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow (p \vee q)$.

(4) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$.

(5) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \vee \bar{p})$.

(6) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$.

(7) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$.

(8) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (لإاستلزام رابط منطقي متعد).

(9) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q})$.

(10) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

(11) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ (التكافؤ رابط منطقي متعد).

تعد هذه النتائج بالإضافة إلى قوانين جبر القضايا أداة فعالة لحل الكثير من المسائل الرياضياتية بسهولة، إذ تتيح لمستخدميها القدرة على تفادي البراهين المطولة، وكذا اكتساب بعض طرق التفكير لحل المسائل وترييضها.

ففي النهاية تعد هذه هي الفائدة المرجوة من المنطق الرياضياتي ككل.

الفَصل الثاني

المجموعات الضبابية

مُحتوى الفَصْلُ

المجموعات الضبابية

مقدمة

قدمت المجموعات الضبابية من طرف الأذربيجاني لطفي زادةوالألماني ذيتركلاوا وكان ذلك عام1965 كتعميم للمجموعات التقليدية،وهي تعطي وصفا أكثر دقة للظواهر الطبيعية بدلا من الوصف الذي تعطيه نظرية المجموعات العادية،ومنذ ذلك الحين اتجة العلماء الى تطبيق مفهوم المجموعات الضبابية في معظم فروع الرياضيات النظرية والتطبيقية،وامتد ذلك الى جميع العلوم الأخرى مثل علوم الحساب الآلي(المترجمات الذكاء الإصطناعي،النظم الخبيرة،نظم التحكم)وعلم البيولوجي والإقتصاد والجغرافيا.
يتيح مفهموم المجموعات الضبابيةالتعامل مع الامور بطريقة مختلفة عن منطق صحيح خاطئ،حيث يوفر مرونة تفكير قيمة جدا،مما يجعلنا نأخذ بعين الإعتبار حالات عدم الدقة وعدم الحتمية.

المجموعات الضبابية

في المجموعات الضبابية يمكن لعنصر ما ان يكون منتمي إلى حد معين للمجموعة،مثلا عندما نعتبر المجموعة A مجموعة درجات الحرارة التي تصنف كباردة(باردة بالنسبة للإنسان) ولنعتبر X كل درجات الحرارة التي يمكن أن توجد في الكون.
عندما نأخذدرجة الحرارة $x = -100$ هذه درجة حرارة باردة جدا ولذلك فهي تنتمي تماما للمجموعة A، أما إذا أخذنا درجة حرارة $x = +50$ فإن هذه الدرجة من الحرارة لا تنتمي للمجموعة A، إلى الأن لم نخرج من استعمالات المنطق الكلاسيكي أو التقليدي، عندما نأخذ درجة حرارة $x = +12$ في المنطق التقليدي ليس لدينا إلا إحتمالين إما أن x ينتمي أو لا ينتمي لـ A ،لكن في المجموعات الضبابية يمكن أن نقول أن x ينتمي لـ A بدرجة50، أي أن درجة حرارة 12 هي نصف باردة ونصف معتدلة ، أي أن المجموعات الضبابية تعطي نتائج بين 0 و1 عكس الأمر في المجموعات الكلاسيكية.

تعريف 2.0.1:
المجموعة الضبابية هي مجموعة عناصرها مكونة من مركبتين ،المركبة الأولى تمثل العنصر و الثانية هي درجة إنتماء هذا العنصر للمجموعة الجزئية.

2.0.1 درجة و دالة الانتماء

درجة الانتماء

تعريف 2.0.2: [1] درجة الانتماء هي العنصر الأهم وحجر الزاوية في الرياضيات الضبابية والمكون الجديد الذي أضيف للعناصر والمجموعات التقليدية والتي من أجلها أخذ هذا النوع من العلوم الإستقلالية.
يرتكز هذا المفهوم على عدم وجود إنتماء تام لعنصر في مجموعة فقط،بل وهناك إنتماء جزئي لعنصر ما في هذه المجموعة.
إن ذكر درجة إنتماء عنصر تحدد مدى قربه من العناصر ذات الإنتماء التام وتحدد هذه الدرجة بين الصفر و الواحد، كما يمكن قياس درجة إنتماء العناصر لمجموعة بإستعمال دالة تسمى"دالة الإنتماء".

دالة الإنتماء

تعريف 2.0.3: [16] دالة الإنتماء هي دالة عددية تأخذ قيمتها في المجال $I=[0,1]$ يتم بواسطتها حساب درجة إنتماء عنصر ما للمجموعة الضبابية ونرمز لها بالرمز $f_A(x)$ حيث:

$$f_A : X \to I$$

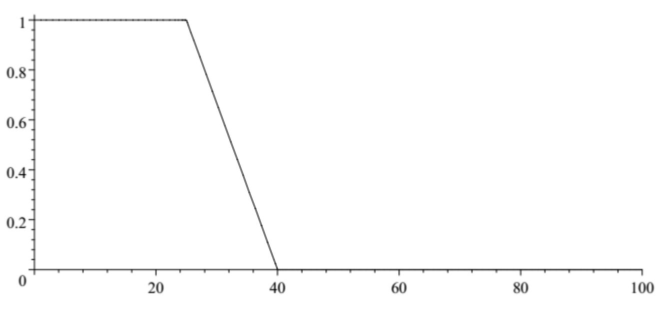
لتكن X مجموعة من النقاط ولتكن A مجموعة جزئية منها، يرفق بكل $x \in X$ قيمة عددية تنتمي إلى المجال $[0,1]$ تمثل درجة إنتماء العنصر x للمجموعة A، كلما اقتربت قيمة $f_A(x)$ من الوحدة زادت درجة عضوية ال x في A.
عندما تكون A مجموعة عادية يمكن أن تأخذ دالة الإنتماء قيمتين فقط 0 و 1 أي: $f_A(x)=0$ أو $f_A(x)=1$ وهذا يؤدي ألى وجود إحتمالين فقط أما x تنتمي إلى المجموعة A أو لا تنتمي.

مثال 2.0.1

[8] لتكن X مجموعة كل الأعمار المحتملة للناس.

$$Y(x)=\begin{cases} 1 & if \quad x<25 \\ \frac{40-x}{15} & if \quad 25\le x\le 40 \\ 0 & if \quad 40<x \end{cases}$$

$Y(x)$ هو درجة إنتماء x إلى مجموعة الشباب



شكل 1.2: دالة إنتماء "الشباب"

ملاحظة 2.0.1

نشير أنه على الرغم من وجود تشابه بين دالة الإنتماء في المجموعة الضبابية ودالة الإحتمال عندما تكون X قابلة للعد (أو دالة كثافة الإحتمال عندما تكون X سلسلة متصلة)، إلى أنه هناك إختلافات جوهرية بين هذه المفاهيم والتي ستصبح أكثر وضوحا عند التطرق للخصائص الأساسية لقواعد الجمع بين دوال الإنتماء.

نبدأبالعديد من التعريفات التي تتضمن المجموعات الضبابية:

2.0.2 المجموعة الضبابية الخالية

تعريف 2.0.4: نقول عن المجموعة A أنها خالية إذا وفقط إذا كانت دالة الإنتماء مساوية للصفر أي: $f_A(x)=0$ ويرمز لها بالرمز 0 أو ϕ

2.0.3 تساوي مجموعتين ضبابيتين

تعريف 2.0.5: لتكن المجموعتان الضبابيتان A و B.
نقول عن A و B أنهما متساويتان ونكتب $A=B$ إذا وفقط إذا كانت قيمة دالة إنتماء A مساوية لدالة إنتماء B
أي:

$$f_A(x)=f_B(x)$$

لكل $x\in X$.
ويمكن أن نكتب ببساطة $f_A=f_B$ (حيث f_B دالة إنتماء العنصر x للمجموعة B)

2.1 أنواع المجموعات الضبابية

2.1.1 المجموعة الضبابية المتقطعة

تعريف 2.1.1:
المجموعات الضبابية المتقطعة هي التي دالة الإنتماء لها تكون متقطعة كمايلي:

$$A=\sum_{x\in X}\frac{f_A(x_i)}{x_i}$$

2.1.2 المجموعة الضبابية المستمرة

تعريف 2.1.2: المجموعةالضبابية المستمرة ، وهي المجموعة التي دالة الإنتماء لها مستمرة أي: $f_A : X \to I$ تكون مستمرة

$$A = \int \frac{f_A(x)}{x}$$

2.1.3 المتممة

تعريف 2.1.3: نرمز لمتممة المجموعة الضبابية A بالرمز A' وتعرف كما يلي:

$$f_{A'} = 1 - f_A$$

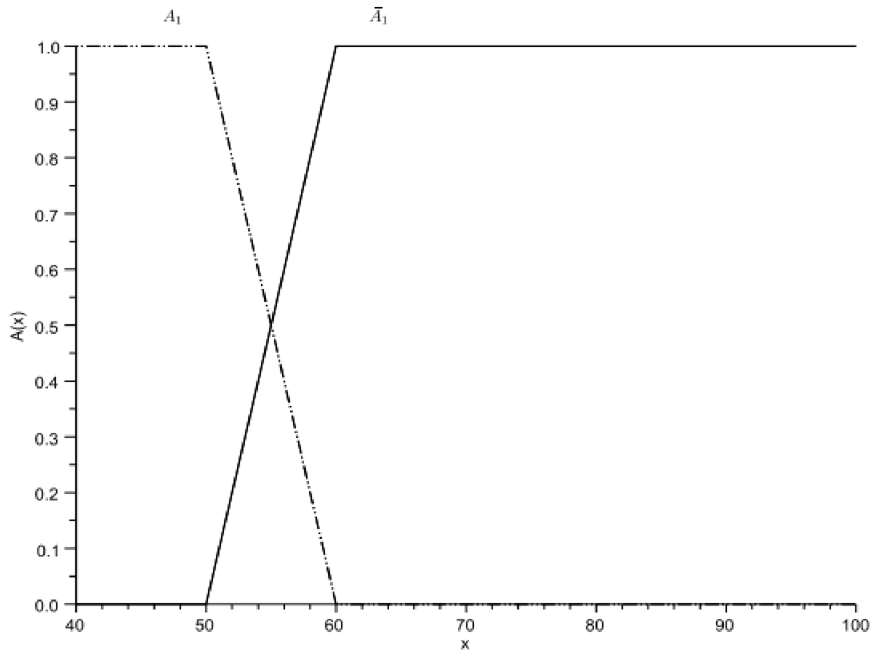
لكي تكون A' متممة المجموعة الضبابية A يجب أن تحق البديهيات التالية:

(بديهية 1) $C(1) = 0, C(0) = 1$ (شرط الحدود)

(بديهية 2), $a, b \in [0,1]$ إذا كان $a < b$, عندها $C(a) \geqslant C(b)$

(بديهية 3) Cدالة مستمرة

(بديهية 4) C ملتفة. من أجل $a \in [0,1]$ نجد $C(C(a)) = a$



شكل 2.2: متممة مجموعة ضبابية

ملاحظة 2.1.1

C1 وC2 هما شرطان أساسيان لتكون المتممة صحيحة

مثال 2.1.1

لتكن المجموعتان الضبابيتان A_1 و A_2 حيث:

$$A_1(x)=\begin{cases} 1 & if \quad 40\le x<50 \\ 1-\frac{x-50}{10} & if \quad 50\le x<60 \\ 0 & if \quad 60\le x\le 100 \end{cases}$$

$$A_2(x)=\begin{cases} 0 & if \quad 40\le x<50 \\ \frac{x-50}{10} & if \quad 50\le x<60 \\ 1-\frac{x-60}{10} & if \quad 60\le x<70 \\ 0 & if \quad 70\le x\le 100 \end{cases}$$

متممة A_1

$$\bar{A_1}(x)=\begin{cases} 0 & if \quad 40\le x<50 \\ \frac{x-50}{10} & \quad 50\le x<60 \\ 1 & if \quad 60\le x\le 100 \end{cases}$$

2.1.4 الإحتواء

يلعب مفهوم الإحتواء دورا مركزيا في حالة المجموعات الغامضة، حيث يتم تعريف الإحتواء والمفاهيم ذات الصلة بالإتحاد والتقاطع على النحو التالي:

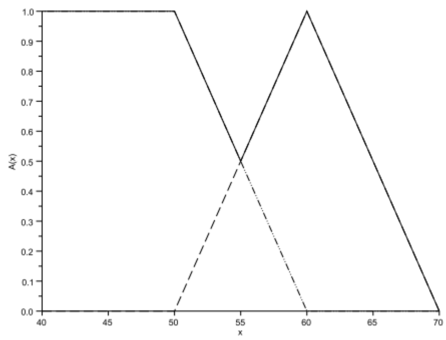
تعريف 2.1.4: لتكن A ، B مجموعة ضبابية.
نقول أن A مجموعة جزئية من B (A أصغر من أو يساوي B) إذا وفقط إذا كان $f_A \leqslant f_B$ لكل $x\in X$.

2.1.5 الإتحاد

تعريف 2.1.5: لتكن A، B مجموعة ضبابية في X.
إتحاد المجموعتين A و B هو المجموعة الضبابية C : $C = A \cup B$
حيث دالة إنتمائها:

$$f_C(x) = Max[f_A(x), f_B(x)]; \quad x \in X,$$

وبشكل مختصر نكتب: $f_C = f_A \vee f_B$



شكل 3.2: إتحاد مجموعتين ضبابيتين

تعريف 2.1.6: لتكن $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ عائلة من المجموعات الضبابية في X.
يعرف إتحاد المجموعات الضبابية بالضيغة التالية:

$$(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)(x) = sup\,\{A_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}$$

لكل $x \in X$.
ونرمز له بالرمز $\bigcup_{\lambda \in \Lambda}$.
والتقاطع ويعرف بالضيغة التالية:

$$(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)(x) = inf\,\{A_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}$$

لكل $x \in X$.
يرمز له بالرمز $\bigcap_{\lambda \in \Lambda}$.

ملاحظة 2.1.2

إذا كانت $\Lambda = \phi$ فإن $\bigcap A_\lambda = X$ و $\bigcup A_\lambda = \phi$

مثال 2.1.2

لتكن المجموعتان الضبابيتان A_1 و A_2 حيث:

$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & if \quad 40 \leq x < 50 \\ 1 - \frac{x-50}{10} & if \quad 50 \leq x < 60 \\ 0 & if \quad 60 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & if \quad 40 \leq x < 50 \\ \frac{x-50}{10} & if \quad 50 \leq x < 60 \\ 1 - \frac{x-60}{10} & if \quad 60 \leq x < 70 \\ 0 & if \quad 70 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

الإتحاد

$$(A_1 \vee A_2)(x) = \begin{cases} 1 & if \quad 40 \leq x < 50 \\ 1 - \frac{x-50}{10} & if \quad 50 \leq x < 55 \\ \frac{x-50}{10} & if \quad 55 \leq x \leq 60 \\ 1 - \frac{x-60}{10} & if \quad 60 \leq x \leq 70 \\ 0 & if \quad 70 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

2.1.6 التقاطع

تعريف 2.1.7: لتكن A و B مجموعتين ضبابيتين في المجموعة X، والتي دالة إنتمائهما f_A و f_B على الترتيب.
تقاطع المجموعتين A و B هو المجموعة الضبابية C بحيث: $C = A \cap B$
دالة الإنتماء له صيغتها كالتالي:

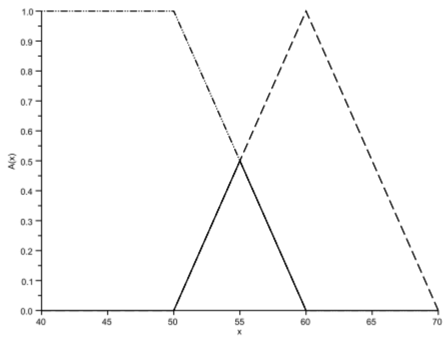
$$f_C = Min[f_A, f_B]$$

وعليه: $A \cap B = (x, f_C(x))$
وبشكل مختصر نكتب: $f_C = f_A \wedge f_B$

مثال 2.1.3

لتكن المجموعتان الضبابيتان A_1 و A_2 حيث:

$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & if \quad 40 \leq x < 50 \\ 1 - \frac{x-50}{10} & if \quad 50 \leq x < 60 \\ 0 & if \quad 60 \leq x \leq 100 \end{cases}$$



شكل 4.2: تقاطع مجموعتين ضبابيتين

$$A_2(x)=\begin{cases}0 & if \quad 40\le x<50\\ \frac{x-50}{10} & if \quad 50\le x<60\\ 1-\frac{x-60}{10} & if \quad 60\le x<70\\ 0 & if \quad 70\le x\le 100\end{cases}$$

التقاطع

$$(A_1\wedge A_2)(x)=\begin{cases}0 & if \quad 40\le x<50\\ \frac{x-50}{10} & if \quad 50\le x<55\\ 1-\frac{x-50}{10} & \quad\quad 55\le x<60\\ 0 & if \quad 60< x\le 100\end{cases}$$

2.1.7 بعض خصائص الأتحاد والتقاطع والمتممة

قضية 2.1.1. لتكن $A,B,C\in F(X)$

إلتفاف	$\bar{\bar{A}} = A$
تبديلية	$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
تجميعية	and $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
توزيعية	$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$
إستعاب	$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
عديم القوى	$A \cup A = A, A \cap A = A$
X و $\emptyset$	$A \times X = X, A \cap \emptyset = \emptyset$
حيادية	$A \cup \emptyset = A$
قانون النقيض	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
	$A \cup \bar{A} = X$
قوانين Morgan's De	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ and $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

قضية 2.1.2. لتكن A مجموعة ضبابية في X

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset, \quad A \cup \bar{A} \neq X.$$

برهان. لأن:

$$(A \cup A^c) = \max\{A(x), A^c(x)\} = \max\{A(x), 1 - A(x)\} \geq \frac{1}{2}$$

$$(A \cap A^c) = \min\{A(x), A^c(x)\} = \min\{A(x), 1 - A(x)\} \geq \frac{1}{2}$$

□

2.2 خصائص المجموعات الضبابية

2.2.1 نقطة تحويل (توازن) المجموعة الضبابية

تعريف 2.2.1: لتكن X مجموعة غير خالية، A مجموعة ضبابية من X.
نقول عن نقطة $x \in X$ بأنها نقطة تحويل للمجموعة الضبابية A إذا كانت $f_A(x) = 0.5$.

2.2.2 المجموعة الضبابية السوية

تعريف 2.2.2: لتكن X مجموعة غير خالية، A مجموعة ضبابية من X.
نقول عن A بأنها مجموعة ضبابية سوية إذا:

$$\exists x_0 \in X : \quad f_A(x_0) = 1$$

أي أن:

$$\{x \in X : \quad f_A(x) = 1\} \neq \phi$$

2.2.3 إرتفاع (قمة) المجموعة الضبابية

تعريف 2.2.3:
إرتفاع أو قمة المجموعة الضبابية A يرمز لها بالرمز $H(A)$ و يعرف بالعبارة التالية :

$$H(A) = sup\{f_A(x) : x \in X\}$$

و بصورة خاصة إذا كانت A سوية ، فإن: $H(A) = 1$

2.2.4 حامل المجموعة الضبابية

تعريف 2.2.4: [15]
لتكن A مجموعة ضبابية في X.
حامل المجموعة الضبابية A يرمز له بالرمز $S(A)$ أو $Supp(A)$ يعرف بالعبارة :

$$Supp(A) = \{x \in X : f_A(x) > 0\}$$

.

2.2.5 نواة المجموعة الضبابية

تعريف 2.2.5: [15]
لتكن A مجموعة ضبابية في X.
نواة المجموعة الضبابية A يرمز لها بالرمز $Ker(A)$ وتعرف بالعبارة:

$$Ker(A) = \{x \in X / f_A(x) = 1\}$$

.

2.2.6 أصلي المجموعة الضبابية

تعريف 2.2.6: [16]
لتكن A مجموعة ضبابية في X.
أصلي المجموعة A نرمز له بالرمز $|A|$ ويعرف بالعبارة:

$$|A| = \sum_{x \in X} f_A(x)$$

.

مثال 2.2.1

لتكن $X = [0,1]$ مع $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، ولتكن $a, b \in \mathbb{R}$. نعرف المجموعة الضبابية A من X بالعبارة:

$$f_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{إذا } x < a - \alpha \text{ أو } b + \beta < x \\ 1, & \text{إذا } a < x < b \\ 1 + \left(\frac{x-a}{\alpha}\right), & \text{إذا } a - \alpha < x < a \\ 1 - \left(\frac{b-x}{\beta}\right), & \text{إذا } b < x < b + \beta \end{cases}$$

عندها يصبح $Ker(A) = [0,1]$، $Supp(A) = [a-\alpha, b+\beta]$ و $H(A) = 1$.

مثال 2.2.2

لتكن $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$, و A مجموعة ضبابية من X معرفة بـ:

$$A = \{\langle x, f_A(x)\rangle\} = \{\langle 1, 0.2\rangle, \langle 2, 0.0\rangle, \langle 3, 0.8\rangle, \langle 4, 1.0\rangle, \langle 5, 0.5\rangle, \langle 6, 1.0\rangle\}$$

ومنه: $Supp(A) = \{1,3,4,5,6\}, Ker(A) = \{4,6\}, H(A) = \{1\}, |A| = 3.5$.

قضية 2.2.1. [17] لتكن A مجموعة ضبابية من X نواة وحامل المجموعة الضبابية يحقق الخاصيتين التاليتين:

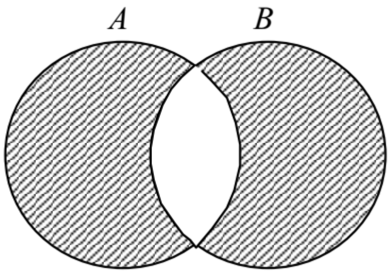
$$Supp(A^c) = (Ker(A))^c$$
$$Ker(A^c) = (Supp(A))^c$$

2.3 العمليات الجبرية على المجموعات الضبابية

2.3.1 المجموع الجبري

تعريف 2.3.1: [11] لتكن A و B مجموعتين ضبابيتين من X.
المجموع الجبري لـ A و B نرمز له بالرمز $A \oplus B$ ويعرف بـ: $A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$
دالة الإنتماء له:

$$f_{A \oplus B}(x) = Max\{Min[f_A(x), 1 - f_B(x)], Min[1 - f_A(x), f_B(x)]\}$$

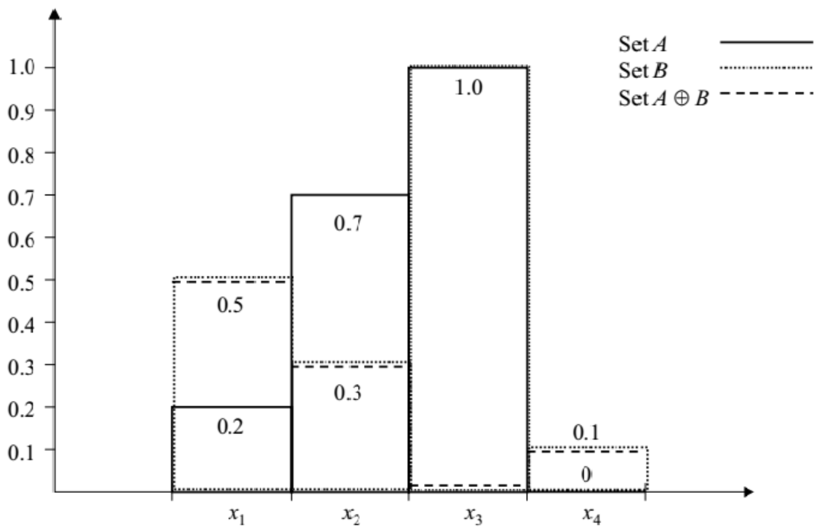


شكل 5.2: المجموع الجبري لمجموعتين ضبابيتين

مثال 2.3.1

لتكن كل من A و B مجموعتين ضبابيتين: $A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 1), (x_4, 0)\}$
$B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.3), (x_3, 1), (x_4, 0.1)\}$
نتيجة

$$A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.7), (x_3, 0), (x_4, 0.1)\}$$



شكل 6.2: مثال حول المجموع الفصلي

2.3.2 الفرق بين مجموعتين ضبابيتين

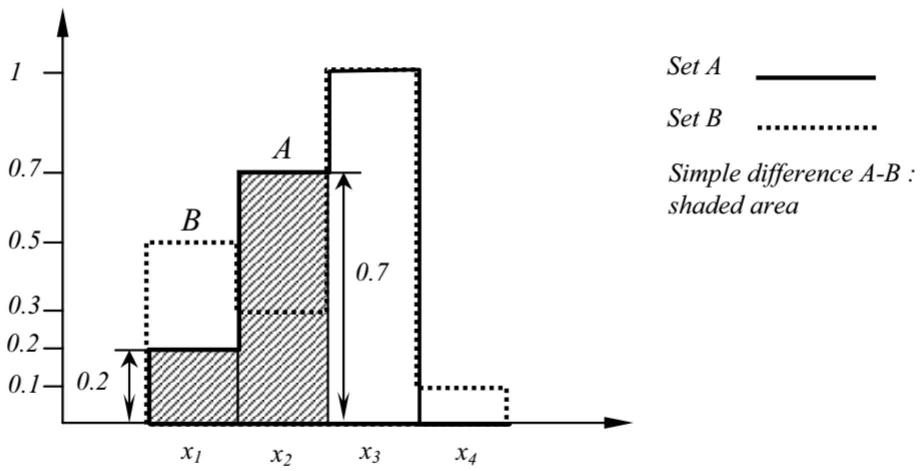
تعريف 2.3.2:
لتكن A و B مجموعتين ضبابيتين، الفرق بين A و B يرمز له بالرمز $A \setminus B$ أو $A - B$

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

مثال 2.3.2

لتكن A و B مجموعتين ضبابيتين، لحساب $A - B$

$$A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 1), (x_4, 0)\}$$
$$B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.3), (x_3, 1), (x_4, 0.1)\}$$
$$\bar{B} = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.7), (x_3, 0), (x_4, 0.9)\}$$
$$A - B = A \cap \bar{B} = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 0), (x_4, 0)\}$$



شكل 7.2: الفرق $A - B$

2.3.3 الفرق التناظري بين مجموعتين ضبابيتين

تعريف 2.3.3: [11] الفرق التناضري بين مجموعتين ضبابيتين A و B نرمز له بالرمز بـ Δ حيث:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

ودالة الإنتماء له تعرف كالتالي:

$$f_{A\Delta B}(x) = | f_A(x) - f_B(x) |$$

2.3.4 الفرق الحدودي

تعريف 2.3.4: [11]
لتكن A و B مجموعتين ضبابيتين، نرمز للفرق الحدودي بين A و B بالرمز θ ، لحساب $A\theta B$:

$$f_{A\theta B}(x) = Max[0, f_A(x) - f_B(x)]$$

2.3.5 المجموعة الضبابية المحدبة

تعريف 2.3.5: لتكن A مجموعة ضبابية في X.
نقول ان مجموعة ضبابية محدبة إذا تحقق:

$$\forall x, y \in X. \quad \forall 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad f_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \min\{f_A(x), f_A(y)\}$$

2.3.6 الجداء الديكارتي لمجموعتين ضبابيتين

تعريف 2.3.6: لتكن A و B مجموعتين ضبابيتين، نعرف الجداء الديكارتي لمجموعتين A و B بالشكل:

$$A \times B = \{(x, y; f_{A\times B}(x, y)) : \quad x \in A, y \in B\}$$

ودالة إنتمائه معرفة كالتالي: $f_{A\times B} = \min[f_A(x), f_B(x)]$

تعميم

تعريف 2.3.7: [18] لتكن $f_{A_1}(x), f_{A_2}(x), f_{A_3}(x), ..., f_{A_n}(x)$ دوال الإنتماء لـ $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.
حيث: $(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ جداء المجموعات الضبابية $A_1 \times ... \times A_n$ معرفة بـ

$$f_{A_1\times A_2\times ...\times A_n} = \min[f_{A_1}(x_1), ..., f_{A_n}(x_n)]$$

مثال 2.3.3

ليكن $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, \}$ وليكن A_1, A_2 مجموعتين ضبابيتين من X و Y كما يلي:
$A_1 = \{\langle x_1, 0.1\rangle; \langle x_2, 0.4\rangle; \langle x_3, 0.75\rangle\}$، و $A_2 = \{\langle y_1, 0.2\rangle; \langle y_2, 0.6\rangle\}.$
إذا :

$$f_{A_1\times A_2} = \{\langle (x_1, y_1), 0.1\rangle; \langle (x_1, y_2), 0.1\rangle; \langle (x_2, y_1), 0.2\rangle; \langle (x_2, y_2), 0.4\rangle; \langle (x_3, y_1), 0.2\rangle; \langle (x_3, y_2), 0.6\rangle\}$$

2.3.7 قوة مجموعة ضبابية

تعريف 2،3،8: لتكن A مجموعة ضبابية من X.

$$f_{A^2}(x) = [f_A(x)]^2, \quad \forall x \in X.$$

بصورة مماثلة يمكن حساب A^m مجموعة ضبابية غامضة ذات القوة m^{th}

$$f_{A^m}(x) = [f_A(x)]^m, \quad \forall x \in X.$$

2.3.8 إسقاط مجموعة ضبابية جزئية

تعريف 2،3،9: [13] الإسقاط على X_1 من المجموعة الضبابية A من $X_1 \times X_2$ هو المجموعة الضبابية $Proj_{X_1}(A)$ X_1، دالة إنتمائه معرفة بـ:

$$\forall x_1 \in X_1, \mu_{Proj_{X_1}(A)}(x_1) = \sup_{x_2 \in X_2} \mu_A(x_1, x_2).$$

نحدد بشكل مماثل إسقاط A على X_2.

2.3.9 المسافة في المجموعات الضبابية

(1) المسافة Hamming

لتكن A و B مجموعتين ضبابيتين،

$$d(A,B) = \sum_{i=0}^{n} | f_A(x_i) - f_B(x_i) |$$

مثال 2،3،4

لتكن A و B مجموعتين ضبابيتين من X حيث:

$$A = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.8), (x_3, 1), (x_4; 0)\}$$
$$B = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.3), (x_3, 0), (x_4; 0)\}$$
$$d(A,B) = |0| + |0.5| + |1| + |0| = 1.5$$

(2) المسافة الإقليدية

$$d_w(A,B) = (\sum_{x \in X} | f_A(x) - f_B(x)) |^w)^{\frac{1}{w}}, \quad w \in [1, \infty]$$

المسافة الإقليدية بين A و B المستخدمة في الطرق السابقة للمسافة

$$e(A,B) = \sqrt{0^2 + 0.5^2 + 1^2 + 0^2}$$

مثال 2.3.5

المسافة الإقليدية بين A و B

$$e(A,B)=\sqrt{0^2+0.5^2+1^2+0^2}$$

(3) مسافة Minkowski

$$d_w(A,B)=\left(\sum_{x\in X}|f_A(x)-f_B(x))|^w\right)^{\frac{1}{w}},\quad w\in[1,\infty]$$

ملاحظة 2.3.1

يؤدي تعميم مسافة هامينغ والمسافة الإقليدية إلى مسافة مينكوفسكي.حيث تصبح مسافة هامينغ لما $w=1$، بينما تصبح المسافة الإقليدية لما $w=2$.

2.4 مجموعة القطع في المستوي ألفا $\alpha-levelSets$

تعريف 2.4.1: [1]
لتكن A مجموعة ضبابية في X، $\alpha\in I$. مجموعة القطع في المستوي (α -level) أو $(\alpha-cut)$ للمجموعة الضبابية A و يرمز لها بالرمز $A_{[\alpha]}$ ويعرف بالصيغة :

$$A_{[\alpha]}=\{x\in X: f_A(x)\geq\alpha\}$$

و مجموعة القطع α- القوي $\alpha-cutstrong$ للمجموعة الضبابية A يرمز لها بـ $A_{[\alpha^+]}$
أي أن:

$$A_{[\alpha^+]}=\{x\in X: f_A(x)>\alpha\}$$

مثال 2.4.1

لتكن $X=\{1,2,3,...,10\}$, و A مجموعة ضبابية من X حيث:
$A=\{<1;0.2>,<2;0.5>,<3;0.8>,<4;1>,<5;0.7>,<6;0.3>,<7;0>,<8;0>$
$,<9;0>,<10;0>\}$
الـ $\alpha-$ cuts لـ A:

$A_0=X$

$A_{0.2}=\{x\in X,A(x)\geq0.2\}=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A_{0.3}=\{x\in X,A(x)\geq0.3\}=\{2,3,4,5,6\}$

$A_{0.5}=\{x\in X,A(x)\geq0.5\}=\{2,3,4,5\}$

$A_{0.7}=\{x\in X,A(x)\geq0.7\}=\{3,4,5\}$

$$A_{0.8}=\{x\in X, A(x)\geq 0.8\}=\{3,4\}$$
$$A_1=\{x\in X, A(x)\geq 1\}=\{4\}$$

ملاحظات 1.2.4. (1) $A_{[0]}=X$ لأن $\{x\in X: f_{A(x)}\geqslant 0\}$، $A_{[1^+]}=\phi$

(2) $A_{[1]}=\{x\in X: f_A(x)=1\}=N(A)$

(3) إذا كانت $0<\alpha<\beta\leqslant 1$ فإن $A_{[\beta]}\subseteq A_{[\alpha]}$

(4) إذا كانت A مجموعة ضبابية في $\mathbb{R}$ فإن: $A_{[0]}=\{x\in\mathbb{R}: f_A(x)\geqslant 0\}=\bar{A^*}$

خاصية 2.4.1

لتكن كل من B ،A مجموعة ضبابية في X و لتكن $\alpha,\beta\in I$ فإن:

(1) $A_{[\alpha^+]}\subseteq A_{[\alpha]}$.

(2) $(A^c)_{[\alpha]}=(A_{[\alpha]})^c=(A_{[(1-\alpha)^+]})^c$.

(3) إذا كانت $\alpha\leqslant\beta$ فإن $A_{[\beta]}\subseteq A_{[\beta]}, A_{[\beta^+]}\subseteq A_{[\alpha^+]}$.

(4) $(A\cup B)_{[\alpha^+]}=A_{[\alpha^+]}\cup B_{[\alpha^+]}, (A\cup B)_{[\alpha]}=A_{[\alpha]}\cup B_{[\alpha]}$.

(5) $(A\cap B)_{[\alpha^+]}=A_{[\alpha^+]}\cap B_{[\alpha^+]}, (A\cap B)_{[\alpha]}=A_{[\alpha]}\cap B_{[\alpha]}$.

نتائج 2.4.1.

(1) $(A^c)_{[\alpha]}\neq(A_{[\alpha]})^c$.

(2) $(A^c)_{[\alpha^+]}\neq(A_{[\alpha^+]})^c$

الفَصل الثالث

العلاقات الضبابية

مُحتوى الفَصْلُ

3.1 العلاقة الضبابية

تعريف 3.1.1: [2] لتكن كل من X و Y مجموعة غير خالية يقال عن R بأنها علاقة ضبابية من X إلى Y إذا كانت R مجموعة ضبابية في $X \times Y$، أي أن $R \in I^{X \times Y}$
وبصورة خاصة إذا كان $Y = X$ نقول R علاقة ضبابية على X بدلا من القول R علاقة ضبابية من X إلى X وتسمى أيضا علاقة ضبابية ثنائية في X.
سنرمز للمجموعة التي عناصرها جميع العلاقات الضبابية من X إلى المجموعة Y بالرمز $\mathscr{F}(X,Y)$ وبصورة خاصة سنستخدم الرمز $\mathscr{F}(X^2)$ بدلا من الرمز $\mathscr{F}(X,X)$
$I_{X^2}(x,y) = 1$ لكل $x,y \in X$ وكذلك $\phi_{X^2}(x,y) = 0$ لكل $x,y \in X$ إذا كانت كل من Y,X مجموعة منتهية فإن R يمكن أن تمثل مصفوفة أو مخطط، بعبارة أخرى إذا كانت $Y = \{y_1,...;y_n\}$ وكانت $X = \{x_1,...;x_n\}$. تعرف الدالة $R : X \times Y \to I$ بالصيغة $R(x_i,y_i) = r_{ij}$ لكل $j = 1,2,...,m$ $i = 1,2,...,n$ وعليه يمكن أن تمثل R يمكن أن تمثل R بمصفوفة من الدرجة $n \times m$، أي أن $R = [r_{ij}]$ وتسمى مصفوفة الإنتماءأو مصفوفة ضبابية.

3.1.1 العلاقة الضبابية العكسية

تعريف 3.1.2: [1] لتكن R علاقة ضبابية من المجموعة X إلى المجموعة Y. العلاقة الضبابية العكسية R يرمز لها بالرمز R^{-1} وتعرف بالصيغة $R^{-1}(y,x) = R(x,y)$ لكل $(x,y) \in X \times Y$.

مبرهنة 3.1.1. إذا كانت R علاقة ضبابية على المجموعة X فإن $(R^{-1})^{-1} = R$.

برهان. ليكن $x,y \in X \Leftarrow R(x,y) = R^{-1}(y,x) = (R^{-1})(x,y) \Leftarrow (R^{-1})^{-1} = R$ ☐

تعريف 3.1.3: ليكن T,R علاقتين ضبابيتين من المجموعة X إلى y. نعرف:

1. $R^c(x,y) = 1 - R(x,y),$
2. $(R \cup T)(x,y) = \max\{R(x,y), T(x,y)\},$
3. $(R \cap T)(x,y) = \min\{R(x,y), T(x,y)\}.$

مثال 3.1.1

[10] ليكن R و T علاقتين ضبابيتين من $X \times X$ بحيث $X = \{x,y,z\},$ تعطى بـ:

R	x	y	z
x	1.0	0.8	0.7
y	0.8	1.0	0.7
z	0.7	0.7	1.0

T	x	y	z
x	0.6	0.2	0.7
y	0.9	0.0	1.0
z	0.1	0.7	0.6

إتحاد وتقاطع العلاقات يعرف بـ:

$R \cup T$	x	y	z
x	1.0	0.8	0.7
y	0.9	1.0	1.0
z	0.7	0.7	0.6

$R \cap T$	x	y	z
x	0.6	0.2	0.7
y	0.8	0.0	0.7
z	0.1	0.7	0.6

متممة العلاقة يعطى بالشكل التالي:

R	x	y	z
x	0.0	0.2	0.3
y	0.2	0.0	0.3
z	0.3	0.3	0.0

قضية 3.1.1. [14] لتكن S و R وQ ثلاث علاقات ضبابية من $X \times Y$:

$R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

(ii) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

(iii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

(iv) $(R^{-1})^{-1} = R$.

(v) إذا $R \geq S$ and $R \geq Q$ عندها $R \geq S \vee Q$.

(vi) fi $R \leq S$ and $R \leq Q$ عندها $R \leq S \wedge Q$.

3.1.2 المجال و المدى

تعريف 3.1.4: [2] لتكن R علاقة ضبابية من المجموعة X إلى المجموعة Y. منطلق R هو مجموعة ضبابية في X يرمز لها بالرمز $domR$ ويعرف بالصيغة $(domR)(x) = \max\{R(x,y), y \in Y\}$ لكل $x \in X$. مدى R هو مجموعة ضبابية في Y يرمز لها بالرمز $RanR$ ويعرف بالصيغة ويعرف بالصيغة
$ht(R) = \max\{\{R(x,y) : y \in Y\} : y \in Y\}$
ويقال عن R بأنها سوية إذا كان $\mathrm{ht}(R)=1$ وبعكسه يقال عن R بأنها سوية جزئية
ويقال عن R بأنها علاقة ضبابية ذاتية على X إذا كان:

$$R(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

ويرمز لها بالرمز $I_{x\times y}$

3.1.3 العلاقة الضبابية المركبة

تعريف 3.1.5: [1] لتكن R علاقة ضبابية من المجموعة X إلى المجموعة Y ولتكن T علاقة ضبابية من المجموعة Y إلى المجموعة Z توجد علاقة ضبابية S من Z وتعرف $S(x,z) = sup\{\min\{R(x;y), T(y,z)\} : y \in Y\}$ لكل $(x,z) \in X \times Z$ mi sup أي أن S تسمى العلاقة الضبابية المركبة من R,T ويرمز بالرمز $R \circ T$ وعليه $R \circ T(x,z) = sup\{\min\{R(x;y), T(y,z)\} : y \in Y\}$ لكل $(x,z) \in X \times Z$ sup

مثال 3.1.2

لتكن العلاقتين الضبابيتين $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ معرفتين بالجدولين التاليين:

R	a	b	c	d
1	0.1	0.2	0.0	1.0
2	0.3	0.3	0.0	0.2
3	0.8	0.9	1.0	0.4

S	α	β	γ
a	0.9	0.0	0.3
b	0.2	1.0	0.8
c	0.8	0.0	0.7
d	0.4	0.2	0.3

تركيب R و S هو كالتالي:

$S \circ R$	α	β	γ
1	4.0	2.0	3.0
2	3.0	3.0	3.0
3	8.0	9.0	8.0

تعريف 3.1.6: [7] لتكن R علاقة ضبابية على المجموعة X.
يقال عن R بأنها:

(i) إنعكاسيةإذا $\forall x \in X,: f_R(x,x) = 1;$.

(ii) ضد إنعكاسية إذا $\forall x \in X,: f_R(x,x) = 0;$.

(iii) تناظرية إذا $\forall x, y \in X, f_R(x,y) = f_R(y,x);$.

(iv) لا تناظرية إذا $\forall x, y \in X, f_R(x,y) \wedge f_R(y,x) = 0;$ مع $x \neq y;$.

(v) ضد تناظرية إذا $\forall x, y \in X, (f_R(x,y) > 0) \wedge (f_R(y,x) > 0)$ عندها $x = y$.

(vi) متعدية إذا $\forall x, y, z \in X, f_R(x,z) \geq \sup\{\min_{y \in X}(f_R(x,y), f_R(y,z))\}$.

3.1.4 علاقة التكافؤ الضبابية

تعريف 3.1.7: [9] يقال عن R بأنها علاقة تكافؤ ضبابية إذا كانت R علاقة ضبابية إنعكاسية، تناظرية و متعدية .

مثال 3.1.3

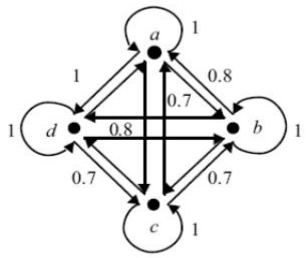
لتكن $X = \{a, b, c, d\}$، ولتكن R علاقة ضبابية معرفة بالجدول التالي:

R	a	b	c	d
a	0.1	8.0	7.0	0.1
b	8.0	0.1	7.0	8.0
c	7.0	7.0	0.1	7.0
d	0.1	8.0	7.0	0.1

من السهل جدا التحقق أن R علاقة تكافؤ ضبابية

3.1.5 علاقة الترتيب الضبابية

تعريف 3.1.8: يقال عن R بأنها علاقة ترتيب ضبابية إذا كانت R علاقة ضبابية إنعكاسية، ضد تناضرية و متعدية .



شكل 1.3: علاقة التكافؤ الضبابية

مثال 3.1.4

(1) تحددمصفوفة العضوية التالية ترتيبا جزئيا غامضا R على المجموعة $X = \{a, b, c, d, e\}$:

R	a	b	c	d	e
a	0.1	7.0	0.0	0.1	7.0
b	0.0	0.1	0.0	9.0	0.0
c	5.0	7.0	0.1	0.1	0.0
d	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0
e	0.0	1.0	0.0	9.0	0.1

(2) لتكن $x, y \in \mathbb{N}$. العلاقة الغامضة التالية R على $\mathbb{N}$ هي ترتيب غامض، حيث:

$$f_R(x,y) = \begin{cases} 1 & if \quad x = y, \\ 1 - \frac{x}{y} & if \quad x < y, \\ 0 & if \quad x > y. \end{cases}$$

الفَصل الرابع

المنطق الضبابي

مُحتوى الفَصْلُ

4.1 مقدمة

قيم الصدق المسموح بها في المنطق الضبابي هي أي عدد حقيقي في الفترة المغلقة، $[0,1]$ إذا كانت p عبارة معينة ، قيمة الصدق لها يرمز لها بالرمز $tv(p)$ وعليها $0 \leqslant tv \leqslant 1$ كل عبارة p في المنطق الضبابي $tv(p) = 1$ تعني أن p صادقة مطلقا و $tv(p) = 0$ تعني أن p كاذبة مطلقا، وأن $tv(p) = 0.5$ تعني أن صدق p هو 0.5.

تعريف 4.1.1: [2] المنطق الضبابي عبارة عن منطق متعدد القيم الحقيقية في الفترة المغلقة $[0,1]$ والتي تشير إلى درجة حقيقية التي يتم تمثيلها بصيغة ضبابية.

ملاحظة 4.1.1

أن المنطق الضبابي مثل المنطق التقليدي يهتم بصدق العبارات. ويمكن أن يشير المنطق الضبابي إلى مفهوم التأكيد فمثلا : إذا كانت $x+2=5$ فإن $x=3$ كما يمكن أن نشير في بعض الإحيان عدم التأكد فمثلا : " علي كبير السن " (بحدود 0.6) من الصعب تميز صدق العبارة "علي كبير السن" صادقة أم كاذبة بشكل واضح.
إذا كان عمر علي 58سنة، في بعض النواحي هو كبير السن، أن يكون مؤهل لمنافع المسن في العديد من المؤسسات، لكن في النواحي الأخرى هو ليس كبير السن فهو ليس مؤهل للضمان الاجتماعي. لذا في المنطق الضبابي الذي نحن نسمح (علي كبيرالسن) tv يأخذ القيم الأخرى في الفترة $[0.1]$ بالإضافة إلى صفر والواحد الذي إضافة في المنطق الضبابي بان هناك عدة أشكال لدمج هذه القيم الحقيقية كما في التعاريف الآتية:

4.1.1 النفي

تعريف 4.1.2: لتكن p عبارة معينة، نفي p نرمز له بالرمز $\sim p$ وأن $tv(\sim p) = 1 - tv(p)$

مثال 4.1.1

إذا كان $tv(p) = 0$ فإن $tv(\sim p) = 1$
إذا كان $tv(p) = 0.8$ فإن $tv(\sim p) = 0.2$
إذا كان $tv(p) = 1$ فإن $tv(\sim p) = 0$

4.1.2 الفصل

تعريف 4.1.3: إذا كانت p و q قضيتين من P، فإن $p \vee q$ هي قضية جديدة وتقرأ "p أو q"، وهي ناتجة عن ربط القضية p بالقضية q بواسطة أداة الربط $\vee$ ونرمز لها بالرمز $p \vee q$، وأن:

$$tv(p \vee q) = C(tv(p), tv(q))$$

حيث C يمثل معيار من النمط t على الفترة $I = [0,1]$.

مثال 4.1.2

لتكن كل من pو q عبارة. أوجد قيمة صدق العبارات الأتية:(1) $\sim (p \vee q)$
(2) $\sim (p \vee q)\ \sim (p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$
الحل:
(1) $tv(\sim (p \vee q)) = 1 - tv(p \vee q) = 1 - C(tv(p), 1 - tv(q))$
(2) $tv(\sim (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) = T(1 - tv(p \vee \sim q), tv(\sim p \vee q)) = T(1 - C(tv(p), 1 -$
$tv(q), C(1 - tv(p); tv(q)))$

4.1.3 الوصل

تعريف 4.1.4: إذا كانت p و q قضيتين من P، فإن $p \wedge q$ هي قضية جديدة وتقرأ "p و q"، وهي ناتجة عن ربط القضية p بالقضية q بواسطة أداة الربط $\wedge$ ونرمز لها بالرمز $p \wedge q$، وأن:

$$tv(p \wedge q) = T(tv(p), tv(q))$$

حيث T يمثل معيار من النمط t على الفترة $I = [0,1]$

مثال 4.1.3

لتكن كل من p، q عبارة. أوجد قيمة صدق العبارة $\sim (p \wedge \sim q)$.
الحل:
$tv(\sim (p \wedge \sim q)) = 1 - tv(p \wedge \sim q) = 1 - T(tv(p), 1 - tv(q))$

4.1.4 التكافؤ

تعريف 4.1.5: يقال عن العبارتين p و q بأنهما متكافئتان إذا كانتا مكونتان من نفس المركبات الأساسية (العبارات البسيطة) ولها نفس قيم الصدق ويرمز للتكافؤ بالرمز $\cong$. إذا كانت العبارتين pو q متكافئتين فنكتب $p \cong q$.

قضية 4.1.1. لتكن كل من p و q وr عبارة.
$p \wedge q \cong q \wedge p$(1) ، $p \vee q \cong q \vee p$ (2) ، $p \wedge (q \wedge r \cong (p \wedge q) \wedge r)$ (3)
(4) $p \vee (q \vee r \cong (p \vee q) \vee r)$ (5) $\sim (p \wedge q) \cong (\sim p) \vee (\sim q)$ (6) $\sim (p \vee q) \cong (\sim p) \wedge (\sim q)$

برهان. (1)

$$p \wedge q \cong q \wedge p \Leftarrow tv(p \wedge q) = T(tv(p), tv(q)) = T(tv(q), tv(p))$$

(3)

$$tv(p \wedge (q \wedge r)) = T(tv(p), tv(q), tv(r)) = T(T(tv(p)tv(q)), tv(r)) = T(tv(p \wedge q), tv(r)) = tv((p \wedge q) \wedge r)$$

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r \Leftarrow$$

(5)

$$tv(\sim (p \wedge q)) = 1 - tv(p \wedge q) = 1 - T(tv(p), tv(q)) = C(1 - tv(p), 1 - tv(q)) = C(tv(\sim p), tv(\sim q)) = tv((\sim p \vee (\sim q))$$

$$\sim (p \wedge q) \cong (\sim p) \vee (\sim q) \Leftarrow$$

□

ملاحظة 4.1.2

هنالك نوع آخر مهم من العبارات المركبة ويدعى هذا النوع بالعبارات الشرطية والتي نستخدمها بشكل واسع جداً في الرياضيات

4.1.5 الإستلزام

تعريف 4.1.6: 5 لتكن كل من q، p عبارة.العبارة الناتجة من دمج العبارتين p، q بالصيغة إذا كان p فان q تسمى بالعبارة الشرطية والتي يرمز لها بالرمز pq وان p تسمى بالفرضية وتسمى q بالنتيجة وتكون $tv(pq) = tv(\sim p \vee q)$

العبارة p هي شرط كافي إلى q والعبارة q هي شرط ضروري إلى p

(1) العبارة الشرطية $q \rightarrow p$ تسمى معكوس العبارة الشرطية $p \rightarrow q$

(2) العبارة الشرطيـة $\sim q \rightarrow \sim p$ تسمى الضد الموجب (المعاكس الإيجابي) للعبارة الشرطية $p \rightarrow q$

(3) العبارة الشرطية $\sim p \rightarrow \sim q$ تسمى نظيرالعبارة الشرطية $p \rightarrow q$.

نلاحظ أن:

(1) العبارة الشرطية والضد الموجب لها نفس جدول الصدق أي أن: $(p \rightarrow q) \cong (\sim q \rightarrow \sim p)$

(2) المعكوس والنظير لها نفس جدول الصدق أي أن: $(p \rightarrow q) \cong (\sim p \rightarrow \sim q)$

تعريف 4.1.7:

لتكن كل من q ، p عبارة. يطلق على العبارةإذا كان p فان q وإذا كان q فان p عبارة ثنائية الاشتراط ويعبر عن هذه العبارة المركبة بالرمز $q \leftrightarrow p$ والتي تقرأ p إذا وفقط إذا q في الحقيقة، إن العبارة ثنائية الاشتراط هي وصل عبارتين شرطيتين، أي إنها وعليه $(pq) \wedge (qp)$ $tv(p \leftrightarrow q) = tv((pq) \wedge (qp))$

ملاحظة 4.1.3

التعابير الآتية تعطي نفس المعنى معنى واحد.

(1) $p \leftrightarrow q$.

(2) p هي شرط ضروري وكافي إلى q.

(3) q هي شرط ضروري وكافي إلى p.

(4) p إذا وفقط إذا q.

(5) q إذا وفقط إذا p.

(6) إذا كان p فإن q والعكس صحيح.

(7) إذا كان q فإن p والعكس صحيح.

خاتمـة

إن من طبيعة الأعمال لدى البشر- سيما العلمية منها- ألا ترقى إلى الكمال و التمام مهما تكاثفت الجهود لإتقانها وحرصت على دقتها، فإنها تبقى على الدوام تستدعي تمحيصا وتدقيقا أكبر، لذا سنكون شاكرين بل جد ممتنين لمن حاول سد أي خلل أو رفع لبس رآه في هذا العمل.
كما أننا نرجو أن نكون قد قطفنا الثمرة المبتغاة في هذا البحث المتواضع، والذي فائدته عادت إلينا أولا، ثم إلى الطلبة الذين نأمل أن نكون قد رسمنا لهم الخطى الأولى للغوص في أعماق بحر هذا الموضوع المتشعب وفي الأخير نسأل الله أن يوفق كل ساع نحو العلم النافع وطالب له إلى ما فيه خير وصلاح لأمتنا، وأن نون قد تركنا، ولو بقدر ضئيل بصمة مضيئة نودها مصباحا تستنير بها صفحات علمنا.

ونرجو بأن نكون أفدنــــا ....فان لم نكنه فجهد المقــــل
ومعذرة أن نكون قد أضلنا .... فان المقام له مستهـــــــل
سلام سلام على لمصطفى ....واله وصحبه مهما استهــل
هلال وغرد طير مليـــح .... على فنن أو بقفص الجــذل

المراجع العلمية

[1] كيحل سليمة, لمحة عن الرياضيات الضبابية, جامعة قاصدي مرباح،ورقلة،2019.

[2] الدكتور نوري فرحان المياحي, محاضرة في الرياضيات الضبابية.

[3] موقع الفريد في الفيزياء PDF .نضرية المجموعات.

[4] "الموسوعة العربية | المنطق العائم (تطبيقات-)".www.arab-ency.com. 30 أبريل 2019

[5] د.عمران قوبا.مبادئ الجبر المجرد. المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا .

[6] الطالب وليد سعدي .مبادئ وأسس في الجبر والتحليل(الجزء الأول)

[7] A. Amroune, Cour de la logique algébrique, Université de M'sila, (2020).

[8] B. Bede, Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 2013.

[9] I. Chon, Fuzzy partial order relations and fuzzy lattices, Korean Journal Mathematics,17 (4) (2009) 361-374.

[10] H. Kaddour Theme Fuzzy sets: Concepts Results and Uses,Mohamed Boudiaf University of Msila,2019.

[11] K.H. Lee, First Course on Fuzzy Theory and Applications, Advances in Intelligent and Soft Computing, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 27 (2004).

[12] B. B. Meunier, La logique floue, PUF collection «Que sais-je ? », 1993.

[13] B. B. Meunier, La logique floue et ses application, Addison Wesley, France, (1995).

[14] S. Milles, Etude de quelques propriétés d'ordres flous intuitionistes, Mémoire de Magistére, Université Mohamed Boudiaf, M'sila, 2010.

[15] W. Pedrycz, F. Gomide, An introduction to fuzzy sets, Analysis and Design, A Bradford Book, Cambridge, London, England, (1998).

[16] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353.

[17] L. Zadem, cour de la logique flou, Université de M'sila, (2017).

[18] H.J. Zemmerman, Fuzzy sets theory and its application, Kluwer academic publishers, Boston, Dordrehlt, London (1991).

ملخص

يعتبر المنطق الضبابي والمجموعات الضبابية من المواضيع الأساسية في ميدان الرياضيات وتطبيق لذلك يستعمل في ميادين أخري مثل علم الحاسوب، الأنظمة التي تستعمل الذكاء الصناعي، معالجة الصور ...
ولتسليط الضوء على هذا الموضوع إرتأينا أن نتقدم بحثنا هذا تحت عنوان: المفاهيم الأساسية حول المجموعات الضبابية وبعض تطبيقاتها. و هو ترجمة لكثير من الأعمال القاعدية و الأساسية في المجموعات الضبابية وتطبيقاتها [16, 7, 17] ، إلى اللغة العربية مع التقيد بالحفاظ على المضطلحات العلمية المترجمة في الأعمال السابقة [1, 5] .

الكلمات المفتاحية :
المجموعات الضبابية - المنطق الضبابي – العلاقات الضبابية .

Abstract

Fuzzy logic and fuzzy sets are among the basic topics in the field of mathematics and an application for this is used in other fields such as computer science, systems that use artfiicial intelligence, image processing...
To shed light on this topic, we decided to present our research under the title: Basic concepts about fuzzy sets and some of its applications. It is a translation of many of the basic works in the fuzzy sets and their applications into Arabic with adherence to preserving the scientfiic terms translated in previous works.

key words :
Fuzzy sets - Fuzzy logic - Fuzzy relations .