



N° d'ordre:.....

Université de M'sila

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté par

BOUZIANE Ameer

En vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER

En Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Sujet

MODÉLISATION ET SIMULATION DU COMPORTEMENT EN  
FATIGUE DES ACIERS

Devant le jury composé de :

Prof. BOUCHOUCHA A	Président	Université Mentouri, Constantine
Prof. MEZIANI Salim	Rapporteur	Université Mentouri, Constantine
Dr. ZAOUI Moussa MC	Examineur	Université de M'SILA
Dr. FOUATHIA A. MC	Examineur	Université Mentouri, Constantine
Dr. FARSI CHOUKI MC	Examineur	Université de M'SILA

Soutenu le : 27/05/ 2010

## **Remerciements**

*Tout d'abord, je tiens à remercier très chaleureusement le Professeur MEZIANI Salim qui, durant ces années, a bien dirigé cette thèse avec beaucoup d'attention et de disponibilité. J'étais très impressionné par sa grande culture en Mécanique et sa capacité à aborder les problèmes nouveaux avec patience et détermination. De nombreux résultats dans cette thèse ont été obtenus grâce à ses conseils.*

*Je remercie aussi monsieur BOUCHOUCHA, Professeur à l'Université de Constantine, d'avoir bien voulu accepter de présider le jury de ma thèse .*

*Que messieurs Dr. ZAOUI Moussa, Maître de conférence à l'université de M'sila, Dr. FARSI CHOUKI, Maître de conférence à l'université de M'sila, et Dr. FOUATHIA Maître de conférence à l'université de Constantine veuillent bien trouver ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir bien voulu accepter d'être membres du jury en ma soutenance.*

*J'adresse mes plus vifs remerciements à monsieur ZAIDANI, Professeur à l'Université de Batna pour ses encouragements et ses conseils, pour les logiciels précieux surtout CASTEM 2000, et aussi à monsieur MOUSSAOUI Mustapha pour sa collaboration et pour les nombreuses discussions sur les programmes CASTEM.*

*Je remercie très chaleureusement SAIDANI Liamine pour la collaboration que nous avons eue pendant ces années et pour son amitié : merci notamment pour les nombreuses discussions tant sur la Mécanique que sur l'informatique.*

*Et pour finir, je remercie mes proches qui m'ont soutenu dans l'effort : mes parents, mes sœurs, mes frères et surtout BRAHIM qui a su m'encourager durant toutes ces années et merci aussi à mes amis BELKACEM MOHAMED.. Mille excuses pour tous mes manquements...*

## ملخص:

هذا العمل يتطرق لدراسة ومحاكاة لسلوك الإجهاد بالانحناء الدوراني للفولاذ العادي (مثال فولاذ XC48). بإجراء الصورية علي عينة بإجهادات دورية متماثلة أيضا ، نستنتج خصائص مقاومة الإجهاد لهذا المعدن و ذلك بمعرفة :  
- مقاومة الإجهاد الحدية تحت إجهادات دورية محددة .  
- التحمل الحدي .  
- التمثيل البياني لسلوك المعدن عن طريق بعض الرسومات البيانية مثل : منحنى وولر ، المنحنيات متكافئة احتمال الانكسار، الخ .  
و عن طريق التقريبات الرياضية ، مع الأخذ بعين الاعتبار التشتت في النتائج التجريبية لنفس ظروف العمل ، نستعمل منحنى وولر في تصاميم عمل موثوقة.

**الكلمات المفاتيح:** الإجهاد، الانحناء الدوراني، التحمل، مدة الحياة.

## Résumé :

Ce travail concerne une étude et simulation du comportement en fatigue par flexion rotative des aciers (exp. acier ordinaire XC 48).

L'étude de limite de fatigue pour un cycle de contrainte (de forme donnée), ainsi que la détermination de la limite d'endurance, et la tenue en fatigue des aciers ont été caractérisée grâce à du simulation par code *CASTEM* essais exécutés sur un certain nombre d'éprouvettes (identiques) pour des cycles de contrainte (de la forme donnée). Le comportement de cet acier a été représenté graphiquement par la courbe de Wöhler les et les courbes d'équiprobabilité de rupture.

La dispersion expérimentale des résultats, observée lors des essais a été prise en considération par l'utilisation des approches mathématiques, pour rendre possible l'utilisation des courbes de Wöhler probabilisées dans un concept fiabiliste.

**Mots clés :** Fatigue, flexion rotative, endurance, durée de vie.

## Abstract:

This work concerns a study and simulation of the behavior in tiredness by rotary plain steel bending (exp. XC48).

The limit of tiredness for a cycle of constraint (of shape data), as well as the limit of staying has been determined, and holding in tiredness of this steel has been characterized thanks to simulations by *CASTEM* code executed on cylindrical test-tube for cycles of constraint (of the shape data). The behavior of this steel was represented graphically by the Wöhler's curve and the curves of equal-probability of fracture.

The scattering of results, observed at the time of tests, has been taken in consideration by the mathematical approach use, to make possible the use of Wöhler's probabilized curves possible for reliable designs.

**Key- Words:** Fatigue, rotating bending, endurance, life length.

# **TABLE DES MATIÈRES**

## Table des matières

Notations principales	9
Introduction.....	10

### Chapitre I

#### RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

1-1 Aperçu historique sur la fatigue .....	14
1-2-Définitions .....	15
1-2 -1 La fatigue .....	15
1-2-2 Limite d'endurance .....	16
1-2-3 L'amorçage .....	16
1-2-4 Facteur d'intensité de contrainte .....	17
1-3-Fatigue olygocyclique .....	17
1-4- Approche micro-macro de la fatigue polycyclique .....	17
1-5- Approche variationnelle de la fatigue .....	18
1- 6- Approche du bruit magnéto mécanique, application au suivi de la fatigue en flexion rotative .....	19
1-7- Risque de fissuration par fatigue au-delà de $10^7$ cycles.....	20
1-8- Le comportement et de l'endommagement en fatigue d'un acier Inoxydable austéno-ferreitique moule vielle .....	21
1-9- Fissuration en fatigue thermique des aciers inoxydables austénitiques. ....	22
1-10-1 La fatigue corrosion .....	24
1-10-2 Propagation des fissures en fatigue corrosion .....	25
1-11 -La fatigue des matériaux composites à matrice polymère et fibres longues .....	25
1-12- Données existantes sur un certain nombre de facteurs d'influence .....	26
1-12-1-1 Influence des caractéristiques mécaniques .....	26
1-12-2 Influence du type de sollicitation .....	28
1-12-3 Influence de la dimension .....	29
1-12-4 Influence de l'état de surface .....	29
1-12-5 Influence des contraintes résiduelles .....	31
1-12-6 Influences diverses et problèmes particuliers ...	31

## CHAPITRE 2 GÉNÉRALITÉ SUR LA FATIGUE DES ACIERS

2-1- L'essai de fatigue .....	33
2-1-2- Contraintes appliqués .....	33
2-1-2-1- Contrainte nominale .....	33
2-1-3-A-Cycle de contrainte .....	34
2-1-3-B Limite de fatigue .....	35
2-1-3-C Limite d'endurance .....	36
2-2- Diagrammes d'endurances .....	36
2-2-1 Courbe de Wöhler .....	38
2-2-2 Courbe d'équiprobabilité de rupture .....	40
2-2-3- Diagramme de Haigh .....	41
2-2-4- Diagramme de Goodman .....	42
2-2-5- Diagramme de Rös .....	43
2-6- Diagramme de Moor-Kommers-Jaspèrs .....	43
2-3- Propagation des fissures par fatigue .....	44
2-3-1 Méthode de mesure de la vitesse de propagation d'une fissure en fatigue .....	46
2-3-2- lois de propagation .....	48
2-3-4 Principe du calcul de la durée de vie .....	48
2-4- Méthode d'estimation de la résistance à la fatigue à N cycles et de son écart-type ...	49
2-4-1- Méthode des Probits .....	50
2-4-2 Méthode de l'escalier .....	51
2-4-2-1 Règles d'exécution de la méthode de l'escalier .....	52
2-4-2-2 Utilisation des résultats .....	52
2-4-2-3 Précision de $m$ et $s$ .....	54
2-4-2-4 Remarque sur l'application pratique de la méthode de l'escalier .....	54
2-4-3 Méthode d'itération .....	54
2-4-3-1 Règle d'exécution des essais selon la méthode d'itération .....	55
2-4-3-2 Estimation de $S(p)$ amplitude de contrainte pour laquelle la probabilité de rupture est $p$ .....	56
2-4-3-3 Conditions et mode d'emploi de la méthode d'itération .....	56
2-4-3-4 Précision de l'estimation .....	57

2-4-5 Méthode des K éprouvettes non-rompues.....	57
2-4-5-1 Principe de la méthode .....	57
2-4-5-2 Propriétés statistiques des résultats .....	57
2-5- Choix de la méthode d'essai .....	59
2-5-1 Méthode d'estimation approchée .....	59
2-5-2 Méthodes d'estimation de précision moyenne .....	59
2-5-3 Méthodes à précises d'estimation .....	60

### **CHAPITRE 3**

#### **SIMULATION ET TRAITEMENT DES RÉSULTATS**

3-2 Le langage de Castem 2000 : Gibiane .....	62
3-2 Syntaxe générale d'une instruction.....	63
3-2-1 Les objets .....	63
3-2-2 Les opérateurs .....	63
3-1. Principe de maillage .....	65
3-2.L'organigramme du simulation par CASTEM .....	66
3-4. Machine d'essai de fatigue .....	67
3-4-1. Description de la machine .....	68
3-5. Epreuve d'essai .....	69
3-5-1. La forme d'éprouvette .....	69
3-5-2. Dimensions .....	69
3-6. Maillage d'éprouvette .....	70
3-6. Contrainte maximal trace la flèche par CASTEM .....	71
3-7. Trace les déformations sur l'éprouvette .....	72
3-8 La force .....	73
3-9.Trace de la courbe de Wohler .....	74

### **CHAPITRE 4**

#### **ANALYSE PROBABÉLISTE ET FIABILISTE ET CALCULE DE DURÉE DE VIE**

4-1 Moyenne arithmétique ... ..	76
4-2 L'écart-type .....	76
4-3 Coefficient de variation .....	77
4-5 Conception probabilisable de la courbe de Wöhler .....	77

4-5 Distribution statistique des variables aléatoires continues : contrainte et temps .....	78
4-6 Loi normale .....	79
4-6-1 Fonction densité de probabilité de la loi normale centrée réduite .....	79
4-6-2 Fonction de répartition.....	80
4-7 La fiabilité .....	81
4-7-1 Définition.....	81
4-7-2 Fiabilité des courbes d'équiprobabilité de rupture .....	81
4-7-3 Utilisation des courbes d'équiprobabilité de rupture dans un concept fiabiliste .....	82
4-7-4 Fiabilité en temps pour un taux de travail donné.....	82
4-7-5 Fiabilité en taux de travail pour un temps donné .....	82
4-8 Tracé les courbes d'équiprobabilité .....	83
4-8-1 Le niveau de confiance .....	83
4-8-2 Conséquence de la prise en compte d'un niveau de confiance .....	84
4-9-1 Courbes d'équiprobabilité de rupture pour un niveau de confiance $\gamma=0.5$ .....	85
4-9-2 Courbes d'équiprobabilité de rupture pour un niveau de confiance $\gamma = 0.75$ .....	86
4-9-3 Courbes d'équiprobabilité de rupture pour un niveau de confiance $\gamma =0.90$ .....	87
4-10-1 - La loi linéaire de Miner .....	88
4-10.1.1 - Description de la loi .....	88
4-10-1-2L'application de la règle de Miner .....	91
4-10-1-3 - Avantages et inconvénients .....	92
a) Avantages .....	92
b) Inconvénients .....	92
CONCLUSION GÉNÉRALE .....	92
Bibliographie .....	96
Annexes .....	99

### *Notations principales*

<b>Symbole</b>	<b>Désignation</b>
$E$	Module d'élasticité ou module d'Young
$\varepsilon$	Déformation
$F$	Force
$I$	Moment d'inertie
$K_f$	Facteur effectif de concentration de contrainte
$K_t$	Facteur théorique de concentration de contrainte
$M$	Moment de flexion
$\nu$	Coefficient de poisson
$N$	Nombre de cycles à rupture
$n$	Nombre de cycles
$q$	Facteur de sensibilité à l'entaille
$R_e$	Limite d'élasticité
$R_m$	Résistance à la traction
$R_\sigma$	Rapport de contrainte
$s$	Ecart-type empirique
$\sigma_{moy}$	Contrainte moyenne
$\sigma_a$	Amplitude de la contrainte alternée
$\sigma_{max}$	Contrainte maximale
$\sigma_{min}$	Contrainte minimale
$\sigma_D$	Limite de fatigue
$\sigma_{D(N)}$	Limite d'endurance à N cycles

# **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans l'industrie, de nombreuses pièces de révolutions ont en rotation (arbres). Elles sont très souvent soumises à des efforts de flexion importants (le poids par exemple). Citons :

Arbres de turbines ou d'alternateur, vilebrequins de moteurs thermiques, arbres d'hélices de bateaux etc. L'effort appliqué induit des contraintes de traction d'un côté et de compression de l'autre, en général maximal en surface.

La rotation de la pièce par rapport à la direction fixe de flexion crée une sollicitation appelée la « *flexion rotative* ». Si le chargement est important, un effet de fatigue du matériau peut apparaître et aboutir à la rupture de la pièce avec toutes les conséquences de la rupture d'une pièce en rotation.

Sans déformation plastique répétée, même de très faible amplitude, il n'y a pas de fatigue. La limite conventionnelle de fatigue à  $10^7$  cycles correspond à une amplitude de déformation cyclique de l'ordre de  $10^5$ .

Une déformation plastique d'une telle amplitude, appliquée une seule fois, ne provoque pas une évolution considérable de la microstructure des matériaux. Par contre à répétition prolongée entraîne un endommagement cumulatif résultant du mouvement irréversible des dislocations, qui peut conduire au bout du compte à la rupture.

Cet endommagement par fatigue ne s'accompagne en général d'aucune modification apparente.

De forme ou d'aspect de la pièce. C'est pourquoi, bien que la fissuration par fatigue soit progressive, la rupture apparaît brutalement lorsque la contrainte dans la section utile restante dépasse la contrainte de rupture. Le seul moyen d'éviter l'accident est de procéder régulièrement à des contrôles non destructifs afin de déceler l'existence des fissures et de remplacer la pièce fatiguée en temps voulu.

Le calcul numérique est maintenant couramment utilisé comme outil de conception des structures mécaniques. Bénéficiant des résultats de la recherche en modélisation et de la puissance accrue des ordinateurs, il intervient pour simuler les différentes étapes de la vie d'une structure.

Les codes de calcul du marché sont maintenant aptes à simuler des opérations de fabrication des structures industrielles ou la prévision de leur durée de vie sous chargements cycliques de service. En outre, l'utilisation des méthodes de calcul numériques permet, pour des coûts très raisonnables de concevoir une structure ou un système mécanique en évitant d'effectuer un grand nombre d'essais expérimentaux sur de nombreux prototypes intermédiaires.

Un premier cours de calcul de structures *Modélisation des structures par éléments finis* assure une initiation au calcul de structures poutres, massives planes ou tridimensionnelles dans le cadre du comportement élastique et des hypothèses de petits déplacements et petites déformations.

Dans le cours *Modélisation des solides et des structures par éléments finis*, on se propose d'étendre sur les plans mécanique et numérique, les connaissances déjà acquises à calculs en fatigue, la mécanique linéaire de la rupture *etc.*

Dans ce modeste travail qui donne une idée générale sur le phénomène "fatigue des aciers" nous avons essayé de résumer ce dernier par l'étude théorique.

Ce travail est contenu en quatre chapitres et dans chaque chapitre vous trouverez un aperçu plus ou moins détaillé de ce phénomène.

Dans le premier chapitre nous avons traité des recherches bibliographiques et des définitions sur le phénomène de la fatigue.

Le deuxième chapitre contient dans l'étude théorique sur la fatigue des aciers et de la propagation des fissures par fatigue, aussi les méthodes d'estimation de la résistance à la fatigue.

Le troisième chapitre traite de la simulation et calcule le nombre de cycle en fonction de la contrainte à partir de la courbe de Wöhler par un programme de logiciel *CASTEM*.

Le quatrième chapitre nous avons exprimé le calcul de fiabilité et tracer les courbes d'équiprobabilité par *CASTEM* plus le calcul de la durée de vie (*loi de MINER*).

Enfin, la conclusion résume l'ensemble des résultats et dégage de nombreuses perspectives de suites de ce travail exploratoire.

# **CHAPITRE 1 :** **SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE**

## **CHAPITRE 1:**

### **SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE**

#### **1-1 Aperçu historique sur la fatigue:**

Tout commença lors d'une agréable journée du début du printemps 1842. Plus de 1500 personnes profitent de la récente ligne de chemin de fer Paris Versailles, permettant alors « l'évasion » des parisiens à la campagne. Soudain, entre les stations Meudon et Bellevue, la locomotive se couche sur la voie, entraînant la collision de dix sept wagons avec deux locomotives, puis l'inflammation quasi-immédiate de six de ces wagons. Finalement, cet accident, aura fait plus de 60 victimes, et marquera pour longtemps les esprits français.

L'analyse de l'accident montrera que c'est la rupture brutale d'un des essieux de la locomotive qui est à l'origine de cette catastrophe. Cela apparaît d'autant plus étrange que ce matériel était en service depuis plusieurs mois, sans aucun problème apparent ou incident de ce genre. Le sournois phénomène de fatigue vient d'être révélé au public, d'une façon bien dramatique. Rapidement, les autorités établiront un certain nombre de recommandations techniques aux constructeurs de matériel, et mettront en avant la nécessité de définir des procédures de tests afin de garantir la solidité dans le temps des essieux.

Pour le monde industriel, ce problème de fatigue, souvent appelé « maladie de l'acier » par le grand public, est apparu dès le début de la révolution industrielle, et le développement massif de machines utilisant des pièces mécaniques en mouvement. Pour autant, au milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle, il est toujours aussi difficile de se prémunir des effets invisibles de la fatigue des pièces. Il faudra en particulier attendre les efforts conjugués de *Rankine* en Grande-Bretagne et *Wöhler* en Allemagne pour obtenir les premières avancées conceptuelles dans la compréhension de ce phénomène. Si le premier mit en évidence l'effet néfaste des concentrations de contraintes (gorges, changement brusque de géométrie trous...), le second, après plus de 23 ans de travaux, proposera un protocole d'essai permettant de déterminer la charge admissible pour un essieu, en service. Il apparut en particulier que cette charge, répétée un grand nombre de fois, est très inférieure à celle pour laquelle le même essieu casse instantanément (charge statique).

Cent ans plus tard, ce sont les accidents successifs de deux avions Commet, explosant en plein vol, qui remémoreront le problème de la fatigue au grand public. Cette fois, c'est la maladie de « *crystallisation* » du métal qui fut retenue par la presse, ne retenant que l'aspect fragile de ce mode de rupture. Pourtant, ces avions, fraîchement conçus par De Havilland, étaient très performants. En particulier, ils possédaient un système de pressurisation à plus haute pression que leurs prédécesseurs, permettant de voler très haut (12000 mètres). C'est toutefois ce système qui, en induisant des contraintes supérieures sur le fuselage, entraînait la propagation de fissures puis l'éclatement du fuselage en altitude. Chacun de ces accidents fit environ 60 victimes.

## **1-2 Définitions :**

### **1-2 -1 La fatigue :**

La fatigue est la modification des propriétés des matériaux consécutive à l'application de cycles d'efforts, cycles dont la répétition peut conduire à la rupture des pièces constituées avec ces matériaux.

On distingue généralement trois étapes distinctes en jeu des mécanismes déferentes.

- L'initiation de la fissure, il s'agit là de la création à partir du ((défaut ))originel d'une fissure de dimensions détectables par les procédés de contrôle non destructifs utilisables.
- La propagation lente de la fissure de fatigue. Au cours de cette étape, la fissure peut croître plus ou moins rapidement selon le matériaux et l'intensité du chargement critique, et atteindre dont certains cas une longueur de plusieurs centimètres, voire de l'ordre du mètre. Dans d'autres cas au contraire, cette étape peut être brève et la fissure peut ne pas croître de façon substantielle.
- La rupture il s'agit là de l'étape finale du phénomène, qui se produit lorsque la taille de la fissure est telle que elle ait atteint son seuil d'instabilité.

### 1-2-2 Limite d'endurance :

Pour les contraintes maximales appliquées dans ce domaine, la durée peut être considérée comme supérieure à celle envisagée pour la pièce ou la condition c'est-à-dire  $\sigma_D$  pour les contraintes maximales inférieures à  $\sigma_d$  c'est-à-dire inférieures à la moitié ou à la tiers de la charge de rupture, les conditions de germination des micros fissures sont rarement réunies, ou alors leur dimension n'atteint pas la taille critique.

La limite d'endurance théorique est la limite supérieure de la contrainte périodique qui peut être appliquée indéfiniment. Sans amener la rupture, nous avons indiqué qu'elle n'existe pas toujours.

La limite conventionnelle est la valeur maximale de la contrainte qui ne l'entraîne la rupture avant un nombre de cycle donné celle-ci peut toujours être déterminée.

### 1-2-3 L'amorçage :

La définition de l'amorçage peut être différente suivant que l'on s'intéresse à l'évolution micro structurale des matériaux ou que l'on considère l'application d'une micro fissure.

Pour évaluer le stade d'amorçage dans une structure, on se réfère de préférence à une notion de micro fissure, mais cette notion elle-même dépend directement de la résolution du moyen d'observation utilisé aussi en l'absence d'une accorde général sur la définition de l'amorçage. Différents auteurs définissent le nombre de cycle d'amorçage  $n_a$  pour une longueur  $a$  de l'ordre  $0,1 \text{ mm}$ .

En effet cette dimension peut être détectée assez facilement, elle correspond par ailleurs à une taille de défaut dans bon nombre de cas, dès qu'une fissure atteint une profondeur voisine de cette dimension, elle se propage régulièrement à travers la section.

Lorsqu'une éprouvette ou une pièce donne lieu à une rupture par fatigue, la vie peut être décomposée en trois parties :

- Amorçage d'une fissure.
- Propagation lente de cette fissure.
- Propagation brutale conduisant à la rupture.

#### 1-2-4 Facteur d'intensité de contrainte :

C'est un facteur caractérisant la sévérité de la situation obtenue par application d'une charge sur une pièce fissurée. Ce facteur s'obtient par conservation des contraintes et déformations au voisinage du front de la fissure pour les modes de fissuration élémentaires *mode I, mode II, mode III*.

Les facteurs  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  caractérisent à la fois la géométrie du détail et de la fissure, et la nature de sollicitation. Ils sont exprimés en  $MPa\sqrt{m}$ .

#### 1-3-Fatigue olygocyclique :

Mécanisme d'accommodation et de fissuration en fatigue olygocyclique.

Ils sont dits que la fatigue olygocyclique comme la fatigue vibratoire. La durée de vie peut être décomposée en différents stades qui sont l'accommodation, l'amorçage puis la propagation des fissures qui conduit à la rupture finale, comme nous l'avons indiqué précédemment. On constate lors de la réalisation d'un essai à déformation totale imposée que la contrainte et par conséquent la déformation plastique évoluent plus au moins.

Progressivement dans la plupart des cas vers un état stable. L'amplitude de la contrainte et celle de la partie plastique du cycle étant alors sensiblement constantes on évolue lentement avec le nombre de cycle, ce stade que nous appelons celui de l'accommodation représente 10 à 50% de la durée de vie. En règle générale durant cette période, la structure de matériau évolue de façon à s'adapter à la déformation cyclique qui lui est imposée le stade d'accommodation est suivi Chevanche [1].

#### 1-4- Approche micro-macro de la fatigue polycyclique :

La localisation de la déformation plastique est reconnue comme un des micro-mécanismes précurseurs de la rupture des métaux et des alliages dans des conditions de sollicitations polycycliques.

À l'échelle microscopique, sous ce type de sollicitations, certains grains défavorablement orientés subissent un écoulement plastique.

Une démarche de modélisation visant à intégrer au mieux les micro-mécanismes de déformation pour élaborer un critère d'endurance illimitée a été proposée et formalisée par *Dang Van* puis *Papadopoulos*. Bien que le critère issu de ces travaux soit largement utilisé pour le dimensionnement de structures en fatigue, l'activité plastique seule ne permet pas d'expliquer certains aspects de la fatigue et en particulier la nucléation des fissures. L'étude réalisée se place dans le cadre de la démarche de *Dang Van* et *Papadopoulos* dans laquelle on incorpore des micro-mécanismes d'endommagement (nucléation et croissance de microcavités à l'intérieur des murs de dislocation ou l'activité plastique est particulièrement intense) mis en évidence par certains auteurs à l'échelle des *Bandes de Glissement Persistantes (BGP)*.

Elle s'articule autour des trois points suivants :

- Une description du comportement plastique local des grains sollicités.
- Une modélisation des phénomènes de micro-endommagement (au sein des *BGP*) et la proposition d'un critère d'endurance illimitée en fatigue multiaxiale. Cette proposition est basée sur une condition de nucléation de fissures et sur la détermination des contraintes dans les grains défavorablement orientés.
- Une première application de la démarche développée au cas des chargements affines.

Le critère proposé permet en particulier de rendre compte du rôle important de la pression hydrostatique en fatigue polycyclique [2].

### **1-5- Approche variationnelle de la fatigue :**

L'objet de la présentation d'une approche dite variationnelle développée récemment pour modéliser la propagation de fissure par fatigue. Cette approche est basée sur des principes de minimisation d'énergie, avec des énergies de surface de type "forces cohésives" (l'énergie de surface dépend du saut des déplacements à travers les lèvres des fissures) dans lesquelles on tient compte de l'irréversibilité de l'ouverture des fissures. On a montré sur des exemples académiques, qu'on pouvait rendre compte effectivement ainsi des phénomènes de fatigue et qu'on retrouvait "à la limite", quand les dimensions de la structure sont grandes devant la longueur interne du matériau apparaissant dans l'énergie de surface, des lois "macroscopiques" de type *Paris*.

En fait les lois obtenues sont plus riches que les lois de *Paris* utilisées habituellement, car elles contiennent comme cas particulier la loi de *Griffith* et qu'elles peuvent être utilisées pour des chargements d'amplitude variable, voire pour des surcharges. Ces lois déduites de la minimisation d'énergie dépendent à la fois de la structure, du matériau et du chargement. Elles s'obtiennent en combinant à la fois des approches globales et locales (approches qui sont contenues dans la minimisation de l'énergie) [3].

#### **1- 6- Approche du bruit magnéto mécanique, application au suivi de la fatigue en flexion rotative :**

Le bruit magnéto mécanique correspond à la microstructure magnétique d'un matériau ferromagnétique sous l'effet d'une contrainte. Ce phénomène est dû à la mobilité des parois de *Bloch* à  $90^\circ$ .

Différents états métallurgique d'un fer à  $0,1\%C$  (recuit, trempe, revenus) ont été caractérisés, les résultats ont été comparés à ceux des méthodes Barkhausen et pouvoir thermoélectrique *PTE*.

Un dispositif d'essai en fatigue en flexion rotative avec mesure in situ du bruit magnéto mécanique a été réalisé. Le fer Armco a été étudié sous différentes charges, les résultats interprétés en termes d'interaction microstructure cristallin, microstructure magnétique et phénomène de traînage magnétique. L'identification du début de l'endommagement s'inscrit dans l'évaluation «du potentiel restant».

Les courbes représentant le signal magnétomécanique en fonction du nombre de cycles présentent quatre parties:

- Une croissance rapide (quelques milliers de cycles) et importante du signal en début de cyclage est interprétée comme une augmentation du volume de matière sujet aux modifications de structure magnétique.
- Le passage par un maximum suivi d'une décroissance, sauf pour la plus faible contrainte, est interprété comme l'interaction de la microstructure cristallines dislocations cellules d'écroutissage avec les parois de *Bloch*.
- Un plus ou moins long plateau (infini pour les pièces non rompues), une simple inflexion pour la plus forte contrainte, est interprété comme une stabilisation de la microstructure cristalline et de son interaction avec les parois de *Bloch*.

- Une décroissance progressive, bien avant la fin de vie et se terminant par la rupture de l'éprouvette. Cette phase est interprétée comme correspondant à l'endommagement proprement dit (microfissuration) entraînant une modification du champ de contrainte en surface [4].

### 1-7- Risque de fissuration par fatigue au-delà de $10^7$ cycles :

C. BATHIAS, Montre que la notion de limite en fatigue est liée à l'hypothèse de l'existence d'une asymptote horizontale sur la courbe  $S-N$  à partir de  $10^6$  ou  $10^7$  cycles il considère ainsi que toute éprouvette non rompue à  $10^7$  a une durée de vie infinie.

Les recherches sur les très grandes durée de vie à partir d'essai de fatigue accélérée réalisée à  $20\text{KHZ}$  à l'aide de machines équipées d'un convertisseur piézo-électrique (1à3).

On choisit des exemples pour convaincre le lecteur du risque de rupture par fatigue après  $10^7$  cycles et de la non existence de l'asymptote de la courbe  $S-N$ .

Le premier exemple présente une courbe  $S-N$  déterminée jusqu'à  $10^9$  cycles à  $20\text{KHZ}$ ,  $300\text{K}$  et  $R=-1$  pour un alliage de titane 6-246 forgé avec plusieurs gammes, on remarque plusieurs phénomènes :

Des ruptures par fatigue surviennent jusqu'à  $10^9$  cycles.

Il n'y a pas d'asymptote.

Le seuil d'amorçage à  $10^9$  cycles est très inférieur ( $100$  à  $200\text{MPa}$ ) à la limite de fatigue conventionnelle à  $10^6$  cycles.

La gamme de forgeage et de la microstructure a une influence marquée sur les très grandes durées de vie ( $325$  à  $490\text{MPa}$  pour  $10^9$  cycles).

Le deuxième exemple confirme qu'il n'y a pas d'asymptote et que des ruptures se produisent à  $10^8$  cycles dans des alliages de titane soumise à des sollicitations cycliques, à  $20\text{Kelvin}$ , dans l'hydrogène liquide, ainsi bien à  $R=-1$  qu'à  $R=0,1$ .

En fin, il donne des résultats des très grandes durées de vie de fatigue pour des alliages de nickel, à l'ambiante et à  $450^\circ\text{C}$ . Quelle que soit la température, aucune asymptote n'est décelable alors que la contrainte alternée à rupture semble être deux fois inférieure à  $10^{10}$  cycles qu'à  $10^6$  cycles dans l'*Udimet 500*.

Ces résultats conduits à penser que le risque de rupture par fatigue existe après  $10^7$  cycles.

Il donne des remarques sur la normalisation des essais de fatigue :

- Le risque de rupture existe au-delà  $10^7$  cycles.
- Il n'y a pas d'asymptote sur la courbe *S-N*.
- La notion de seuil de fatigue serait préférable à celle de la limite de fatigue.

Enfin, la microstructure métallurgique et la gamme d'élaboration jouent un rôle important au-delà de  $10^7$  cycles [5].

### **1-8- Le comportement et de l'endommagement en fatigue d'un acier Inoxydable austéno-ferreitique moule vielle :**

Les aciers austéno-ferritiques moulés sont utilisés pour la fabrication de certains composants du circuit primaire des réacteurs à Eau Pressur. Leur utilisation aux températures de service entraîne leur fragilisation en raison de l'apparition d'une phase durcissante dans la ferrite par transformation spinodale.

Certaines conditions réelles de fonctionnement sont telles que les aciers en cause sont soumis à des chargements cycliques.

Par conséquent, un des aciers retenus pour la tenue en service des composants est la résistance à la fatigue.

La microstructure particulière de cet acier (la taille des grains primaires de ferrite est de l'ordre de  $4-5 \mu m$ ) et la fragilisation de la ferrite due au vieillissement entraînent une disposition très importante de ses propriétés mécaniques en chargement monotone. Il a été montré que, malgré que cette macrostructure, le comportement des aciers austéno-ferritiques vieillis sous chargement cyclique soient classique. En effet, l'endurance du matériau en fatigue olygocyclique suit une loi de *Manson-Coffin*.

Le durcissement initial est suivi d'un adoucissement attribué en partie à la destruction partielle des fluctuations de compositions.

De plus, la vitesse de fissuration par fatigue suit une loi de *Paris*.

L'étude des mécanismes d'endommagement des aciers austéno-ferritiques a montré que l'amorçage des fissures a lieu préférentiellement aux abords des retassures de taille millimétrique. La propagation des fissures est continue. Elle correspond à des ruptures successives d'éléments composés par un îlot de ferrite et un îlot d'austénite (en premier lieu la ferrite se rompt par clivage comme en chargement monotone puis l'austénite rompt par fatigue).

Les effets des retassures et de l'orientation de la phase ferritique ont été abordés.

Le comportement en fissuration par fatigue des aciers austéno-ferritiques a été modélisé en supposant le matériau en front de la fissure soumis à des sollicitations de fatigue olygocyclique. Dans ce cas où on considère un matériau moyen, les résultats donnent une bonne prédiction des valeurs expérimentales de la vitesse de fissuration dans le *stade II* [6].

### **1-9- Fissuration en fatigue thermique des aciers inoxydables austénitiques :**

La fissuration en fatigue thermique des aciers inoxydables austénitiques exemplifie les types *316LN* et *304L*. Cet endommagement est observé pour certains composants des réacteurs à neutrons rapides (*RNR*) et des réacteurs à eau pressurisée (*REP*).

La démarche a consisté à reproduire sur éprouvettes de laboratoire les endommagements observés sur site, afin de mieux appréhender les paramètres essentiels. Ainsi, le matériau est testé sous forme d'une éprouvette "*quasi-structure*" présentant des gradients de température. L'endommagement résulte de dilatations empêchées, deux dispositifs de fatigue thermique ont été développés. Sur la machine *SPLASH*, l'éprouvette est chauffée en continu par effet Joule avec deux faces latérales refroidies périodiquement par injection d'eau pulvérisée. Cette machine permet de détecter l'amorçage (correspondant ici à une taille de fissure de *50* à *150mm* en surface) et de reproduire des réseaux de fissuration. Sur la machine *CYTHIA*, l'éprouvette est un tube épais et d'un refroidissement et de chargement thermique résulte d'un chauffage périodique par induction haute fréquence (*1 MHz*) en paroi externe et d'un refroidissement continu par circulation d'eau à l'intérieur. Ce dispositif est principalement dédié à la propagation de fissure isolée.

A cette fin, une entaille circulaire est usinée préalablement dans la partie médiane de l'éprouvette afin de favoriser un amorçage unique. La propagation est mesurée post-mortem à partir de l'analyse des faciès de rupture.

Les essais montrent que pour nos conditions ( $280 \leq T_{\max} \leq 550^\circ\text{C}$  et  $100 \leq T \leq 300^\circ\text{C}$ ). Les approches traditionnelles fondées sur une équivalence entre chargement thermique et chargement mécanique donnent satisfaction. Elles sont cependant mal adaptées lorsque des facteurs aggravants interviennent (états de surface, contraintes résiduelles ...). En outre, les observations en microscopie électronique à balayage montrent que l'endommagement commence bien plus tôt que l'amorçage "technologique" défini) à partir des essais *SPASH*. Ainsi, l'étude des stades précurseurs de l'endommagement fait l'objet d'un nouvel axe de recherche.

L'application d'une modélisation fondée sur le glissement des dislocations discrètes permet de reproduire les premiers stades de déformation d'une façon satisfaisante. Les calculs ont été réalisés sur 3 cycles à l'aide du code *MICROMAGE*. Les chargements sont préalablement calculés à l'aide du code *CASTEM*.

Afin de poursuivre cette action, on a entrepris la fabrication d'un dispositif permettant de réaliser des essais de fatigue thermique sur les pastilles millimétriques.

Ces pastilles pourront être indentées ou rayées afin de reproduire les états de surfaces de composants industriels.

Une approche mécanique de la rupture semble suffisante pour estimer la propagation d'une fissure "longue" et isolée. Le calcul d'un facteur d'intensité de contrainte effectif tient compte de la plasticité. En outre, on considère que la fissure reste ouverte pendant 60% de la durée de chargement.

L'analyse des caractérisations morphologique des réseaux de fissuration thermique réalisée en surface, sur coupe transversales et après "pelage" (abrasion contrôlée couche par couche) souligne l'importance de l'interaction entre la fissure. La propagation en profondeur est traitée avec le modèle mis au point pour la fissure isolée. La mise en place d'un maillage automatique a permis de simuler la propagation simultanée de 10 fissures jusqu'à 35 000 cycles.

Deux axes de développements sont actuellement en cour. Le premier porte sur l'aspect propagation d'un réseau de fissuration multiple et stabilité de ce réseau après l'application d'un chargement mécanique additionnel. Le deuxième aspect porté sur une l'amélioration de l'approche concernant l'amorçage [7].

### 1-10-1 La fatigue corrosion :

Lorsqu'une pièce est soumise à un environnement agressif, son comportement en fatigue est modifié. L'action du milieu intervient sur le temps d'amorçage d'une fissure et sur la vitesse de propagation de celle-ci.

La réduction du temps d'amorçage est liée soit aux piqûres de corrosion, soit a la dissolution des couches métalliques de surface. Dans ce dernier cas, les différents mécanismes possibles sont les suivants :

- Réduction de l'énergie de surface favorisant la formation des marches de glissement.
- Dissolution des obstacles de surface aux emplettes de dissolution.
- Attaque électrochimique des régions déformées plastiquement.
- Attaque électrochimique jusqu'à rupture d'un film protecteur en surface [8].

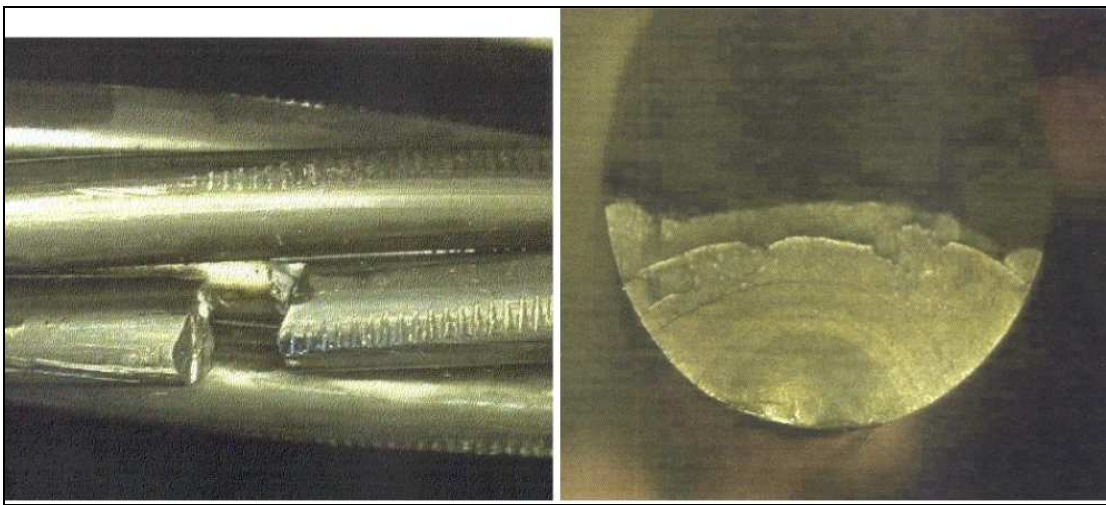
Un environnement gazeux peut avoir également une influence importante sur la limite d'endurance, c'est le cas en particulier dans l'acier dans l'aire humide. On attribue généralement ce phénomène à une fragilisation par l'hydrogène produit par la dissociation de la vapeur d'eau près des sites d'amorçage [8].



**Figure 1-1** : Faciès de rupture sur fissure de corrosion [8].

**1-10-2 Propagation des fissures en fatigue corrosion :**

Un environnement agressif augmente généralement la vitesse de propagation en fatigue d'une fissure. Ce phénomène est plus sensible dans les *région I* et *II* de la courbe de propagation où le temps de maintien est plus long. La fréquence a une influence prépondérante sur ces phénomènes de fatigue corrosion [8].



**Figure 1-2:** Rupture de fatigue à l'ancrage [8].

**1-11 La fatigue des matériaux composites à matrice polymère et fibres longues :**

Les matériaux composites à hautes performances, renforcés par des fibres longues de fibre de carbone, verre, bore, kevlar sont réputés pour leur bonne tenue à la fatigue. Mises à part les propriétés spécifiques de ces matériaux, leur résistance exceptionnelle à la fatigue est à l'origine de leur succès dans l'industrie aéronautique.

Le rapport  $\sigma_D/R_m$  entre la limite d'endurance  $\sigma_D$  et la résistance à la traction  $R_m$  est toujours supérieur à 0.4 et peut atteindre 0.9 pour ces matériaux, valeur comparée avec celles relevées pour les matériaux et alliages, 0.3 pour l'aluminium et 0.4 pour le fer et ses alliages.

La résistance à la fatigue des matériaux composites entaillés dont le rapport  $K_f$  entre les limites d'endurances du matériau vierge et entaillé est très proche de 1, ce qui signifie grosso modo que ces matériaux composites ne sont pas sensibles à l'effet d'entaille sous sollicitation cyclique. Il convient alors de faire deux remarques:

D'une part, les matériaux composites très vulnérables à la concentration de contraintes monotone ne le sont plus en fatigue.

D'autre part, comparés aux métaux, ces matériaux présentent en fatigue un intérêt considérable en présence d'une entaille puisque leur limite d'endurance sera deux à trois fois supérieure, pour une résistance à la traction donnée et, plus encore, si on considère la résistance spécifique [5].

## **1-12- Données existantes sur un certain nombre de facteurs d'influence:**

### **1-12-1-1 Influence des caractéristiques mécaniques :**

Il est admis qu'à des caractéristiques statiques  $R_e$  et  $R_m$  élevées correspond à une limite d'endurance élevée. Oui, mais dans quelles propositions et jusqu'à quelle limites?

Pour répondre à ces questions, nous avons recensé un grand nombre de résultats (environ 500) dressés de fatigue en flexion rotative sur éprouvettes non entaillées finies en rectification, ces résultats ont montré que :

La meilleure corrélation est celle reliant  $\sigma_D$  à la résistance à la traction  $R_m$  du matériau.

C'est la parabole qui, avec un coefficient de corrélation de 0,93, ajuste au mieux les deux variables  $\sigma_D$  et  $R_m$  (fig. 2.1) équation de cette parabole est :

$$(1-1) \quad \sigma_D (50\%) = (0,58 - 1,1 \cdot 10^{-4} R_m).$$

À notre toute fois que l'examen, en approfondi des points expérimentaux portés sur la courbe montre une meilleur endurance globale pour les matériau ayant une résistance à la traction comprise entre 800 et 1300.Nmm<sup>-2</sup> pour cela deux explications:

- La frontière basse ( $R_m \approx 800 N.mm^{-2}$ ) correspond sensiblement au passage des aciers à l'état recuit (était  $R_c$ ) aux aciers à l'état trempé revenu (était  $T.R$ ) à haute température, ce qui leur confère une grande stabilité.
- La frontière haute ( $R_m \approx 1300 N.mm^{-2}$ ) correspond sensiblement au passage à des traitements de trempé et revenu à basse température. Ce traitement est beaucoup plus «pointu» et il peut apporter une certaine fragilité ainsi que des contraintes résiduelles de signes et valeurs inconnues.

Pour ces différentes raisons et dans un esprit conservatif, nous conseillons au lecteur qui voudrait estimer la limite d'endurance en flexion rotative  $\sigma_d$  de son matériau. Les portions de courbe 90% de chaque tranche (90% voulant dire que 90% des résultats sont au dessus de la courbe utilisée).

Dans ses conditions:

• *En flexion rotative :*

- Pour  $R_m < 800 Nmm^{-2}$  ou  $R_m > 1300 Nmm^{-2} \Rightarrow \sigma_D = R_m (0,56 - 1,4 \cdot 10^{-4} R_m)$ .
- Pour  $800 \leq R_m \leq 1300 N.mm^{-2} \Rightarrow \sigma_D = R_m (0,56 - 1,1 \cdot 10^{-4} R_m)$ .

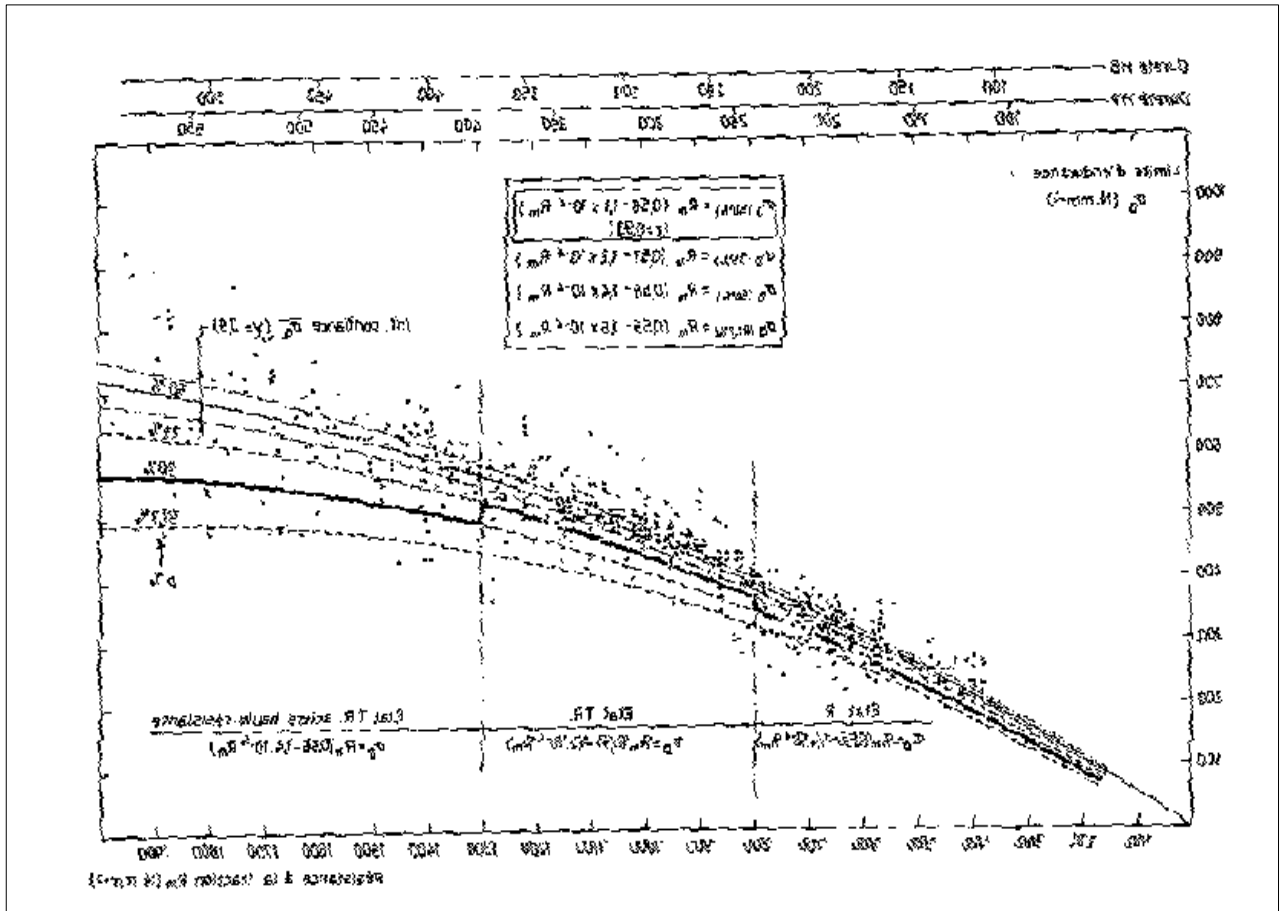


Figure 1-3 : Abaque estimer  $\sigma_D$  en flexion rotative à partir de la résistance à la traction  $R_m$  [9].

**1-12-2 Influence du type de sollicitation :**

Lorsque l'on mesure la limite de fatigue d'un matériau avec des éprouvettes d'un type usuel, on n'obtient pas la même valeur (toujours avec  $\sigma_m = 0$ ) en flexion rotative (épreuve la plus usuelle) qu'en flexion plane ou en traction compression, en torsion, comme on détermine un cisaillement, on trouve une valeur plus faible sensiblement dans le rapport  $1/\sqrt{3}$ . C'est ainsi qu'en prenant un coefficient  $I$  pour la flexion rotative (voir 1-3), un certain nombre de facteurs de passage notés  $K_p$  ont été proposés:

- Flexion plane :  $K_p=1,05$ .
- Traction compression :  $K_p = 0,9$ .
- Torsion:  $K_p =0,6$ .

Par exemple, pour un acier ayant une charge de rupture  $R_m$  comprise entre 800 et  $1300Nmm^{-2}$ , la limite d'endurance purement alternée en traction–compression s'écrit alors :

$$(1-2) \quad \sigma_D = 0,9.R_m (0,57 - 1,2.10^{-4} R_m) .$$

A noter que toute fois nous répétons à dessein, que ces valeurs sont déduites de résultats très dispersés et parfois contradictoires. De ce fait, elles sont contestables.

Nous n'insisterons pas, d'autant plus que nous verrons ultérieurement comment il est possible de ne pas en tenir compte [9].

### 1-12-3 Influence de la dimension :

On constate, toujours expérimentalement, que la limite d'endurance est plus basse que l'éprouvette utilisée est de grande dimension.

Par convention, on appelle  $K_e$  la valeur du rapport de l'endurance d'une éprouvette cylindrique de diamètre  $d$  à l'endurance d'une éprouvette d'essai les plus fréquemment utilisées. Le traitement mathématique de 186 résultats bibliographiques donnant la valeur de  $K_e$  en fonction du diamètre  $d$  permet de tracer la courbe moyenne donnée

A noter que toutes fois une assez grande dispersion, qui rend *a priori* l'utilisation de cette courbe hasardeuse dans un calcul prévisionnelle [9].

### 1-12-4 Influence de l'état de surface :

Toujours de façon expérimentale, on constate que l'état de surface (caractérisé par sa rugosité) à une influence importante sur la limite d'endurance, une éprouvette avec un état de surface fini et plus endurante que la même éprouvette présentant un état de grossier. De plus, pour la même différence de rugosité, la perte d'endurance est d'autant plus grande que premier temps, il apparaît donc que le facteur état de surface que noterons  $K_s$  est fonction, non seulement de la rugosité ( $R_t$  par exemple ), mais aussi de  $R_m$ . Le traitement mathématique d'un abaque donnant les valeurs moyennes de  $K_s$  en fonction de rugosité totale  $R_t$  et la résistance  $R_m$ .

A notre que sous son apparenter simplicité, le facteur  $K_s$  cache une réelle complexité, car il prend en compte l'influence des contraintes résiduelles dues à l'usinage, or, dans la plupart des cas, ces contraintes résiduelles ont des valeurs et des signes inconnus. C'est ainsi qu'une opération de rectification peut du meilleur des choses, si elle est réalisée dans bonnes conditions, devenir la pire des choses si elle est réalisée de façon trop brutale. Il apparaît donc que la gamme d'usinage doit être définie avec précision, et ce d'autant mieux que le matériau a des caractéristiques élevées.

En fin dans le cas d'une entaille, où il est par ailleurs très délicat de mesure une rugosité, on constate une influence moindre de celle-ci que ce qui pourrait être attendu de traitement antérieur. Toute fois, nous ne proposerons pas de coefficient correctif sue  $K_s$  de façon à rester de coté de la plus grande sécurité possible.

Toujours par souci de sécurité, nous conseillons au lecteur lors de la prise en compte de ce facteur  $K_s$  dans un calcul prévisionnelle de travailler avec la courbe immédiatement inférieurs à celle correspondant à la rugosité demandée sur le plan, les courbes de l'abaque n'étant pas des courbes moyennes [9].

#### **1-12-5 Influence des contraintes résudielles:**

Toute contrainte résiduelle stable ayant un sens opposé à la contrainte de travail aura une influence bénéfique sur la limite d'endurance. Dans le cas où cette contrainte résiduelle stable peut être quantifiée, sa valeur donc ajouté algébriquement à la contrainte moyenne  $\sigma_m$  de travail coprésident si elles sont dans le même plan, et géométriquement si elles sont dans des plans différents (traction et flexion /torsion).

Une étude détaille et préalable du problème est toujours nécessaire. Dans le cas où elle ne peut être estimée, mais où il existe de bonnes raisons de croire qu'elle se soustrait à la contrainte de travail. Sa non prise en compte ira dans le sens de la sécurité.

À noter, et nous insistons, que les contraintes résiduelles doivent être prise en compte en tant que contraintes moyennes [9].

**1-12-6 Influences diverses et problèmes particuliers :**

(Fréquence des sollicitations, corrosion, température, *etc.*).

Pour des particuliers de fonctionnement à des fréquences très basse, sous corrosion ou des températures élevées où le phénomène de fluage commence ne pas être négligeable.

Pour les alliages d'utilisations spécifiques (acier 100C6, maraging, ou tungstènes, aciers inoxydables qui ne possède pas des limites de fatigue bien définie), il convient de s'adresser aux spécialistes concernés pas ces matériaux.

A signaler un point que nous n'avons jamais vu traiter et qui concerne le fonctionnement de pièces à des très basses fréquences en présence d'un agent corrosif.

Dans ce type de problèmes, il est certain que le facteur de temps rend une importance considérable dont ne peuvent pas tenir compte les essais de laboratoire sous corrosion, généralement réalisées à fréquences beaucoup plus élevée [9].

**CHAPITRE 2**  
**GÉNÉRALITÉ SUR LA FATIGUE**  
**DES ACIERS**

**CHAPITRE 2****GÉNÉRALITÉ SUR LA FATIGUE DES ACIERS**

En mécanique, l'un des risques de fuir les plus redoutés est la rupture, or, la plus part des risques en service sont des ruptures de fatigue.

**2-1- L'essai de fatigue :**

C'est un essai maintenant classique et normalisé qui consiste à appliquer à une éprouvette lisse ou entaillée de forme cylindrique ou prismatique un nombre très élevé de cycles à une contrainte donnée le nombre de cycles à rupture de l'éprouvette testée. On ne conduit pas un essai de fatigue mais plusieurs en effet le plus grand nombre possible.

De telles campagnes d'essai sont conduites sur des éprouvettes identiques et pour des cycles de contrainte de forme identique mais d'amplitude variable en vue pour but de caractériser aussi complètement que possible la tenue dynamique d'un matériau, par la connaissance de :

- La limite de fatigue pour un cycle de contrainte de forme donnée.
- Ses limites d'endurance dans les mêmes conditions.
- Un certain nombre de diagrammes représentatifs de son comportement.

**2-I-2- Contraintes appliquées :**

En service ou au cours d'essai de laboratoire, les efforts appliqués peuvent être des sollicitations de type simples, par exemple de traction-compression, de flexion ou de torsion, ou résulter d'une combinaison de ces sollicitations [2].

Généralement, au cours d'essais de fatigue, la contrainte appliquée variera suivant une fonction du temps approximativement sinusoïdale, ceci en raison des seules possibilités de fonctionnement des machines ou pour des raisons de commodité dans le traitement des résultats d'essai.

**2-I-2-1- Contrainte nominale**

La contrainte prise en charge au cours de l'essai de fatigue est une contrainte nominale. Elle est calculée par rapport à la section nette de la pièce ou de l'éprouvette considérée, à l'aide de formules usuelles de la résistance des matériaux et relative au domaine élastique. Elle ne fait pas intervenir la concentration de contrainte due à des entailles, ou à d'autres causes [2].

La contrainte calculée est exprimée en newton par millimètre carré ( $N/mm^2$ ) ou en pascal ( $1Pa = 1 N/mm^2$ ).

### 2-1-3-A)-Cycle de contrainte:

Il y a cycle de contrainte quand une contrainte d'amplitude variable dans le temps se répète périodiquement. Le plus utilisé est les cycles sinusoïdal. Les contraintes sinusoïdal sont les seules que nous concéderons dans ce paragraphe on peut considérer que tout se passe comme si l'on avait affaire à deux contraintes superposées :

- L'une constante, que l'on appelle contrainte moyenne notée  $\sigma_m$  considérée comme statique et peuvent prendre des valeurs négatifs, positifs, ou nulles.
- L'autre purement alternée  $\sigma_a$  considérée comme dynamique.

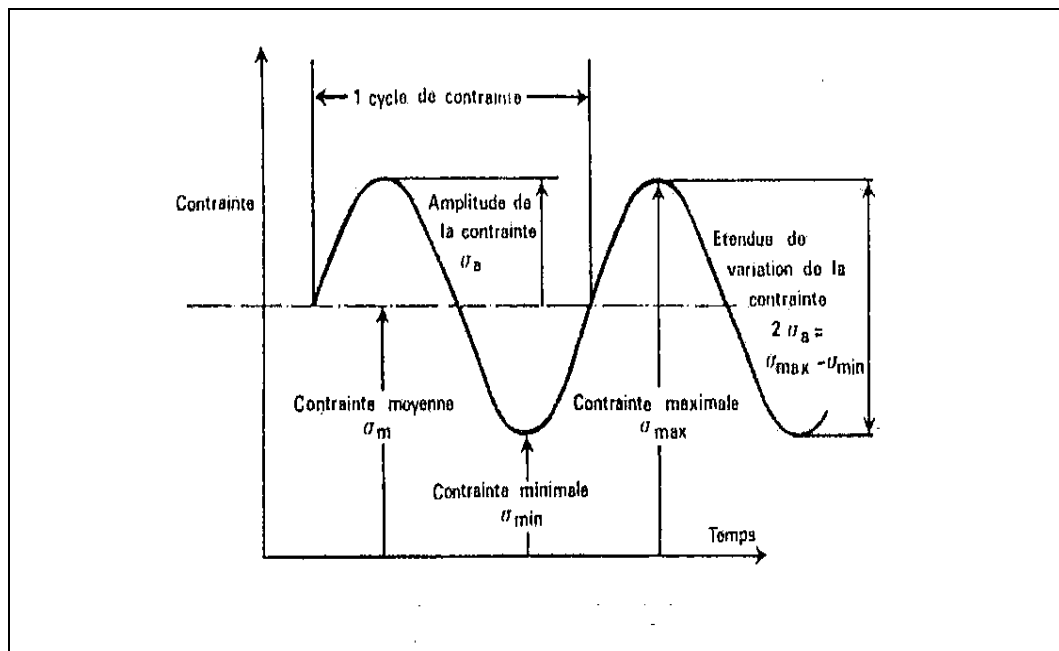


Figure 2-1: Cycle de contrainte de la fatigue [9].

**2-1-3-B) Limite de fatigue :**

Pour une contrainte moyenne  $\sigma_m$  donnée la limite de fatigue est la plus grande amplitude de contrainte pour la quelle il n'existe pas constaté de rupture après un nombre infini de sollicitation (figure 2-2). La limite de fatigue se notée  $\sigma_D$  lorsque la contrainte moyenne  $\sigma_m$  est nulle (limite de fatigue purement alternée) et  $\sigma_a$  lorsque  $\sigma_m$  est différent de Zéro (limite de fatigue alternée, répétée ou ondulée).

Dans dernier cas la valeur de  $\sigma_m$  doit impérativement être associée à celle de  $\sigma_a$ , dans le cas particulier des aciers, on a expérimentalement constaté que ce nombre infini peut être ramener à  $10^7$  cycles. En revanche pour les aciers en de présence de corrosion et pour certains alliages d'aluminium, de cuivre ou de titane rien constaté de semblable.

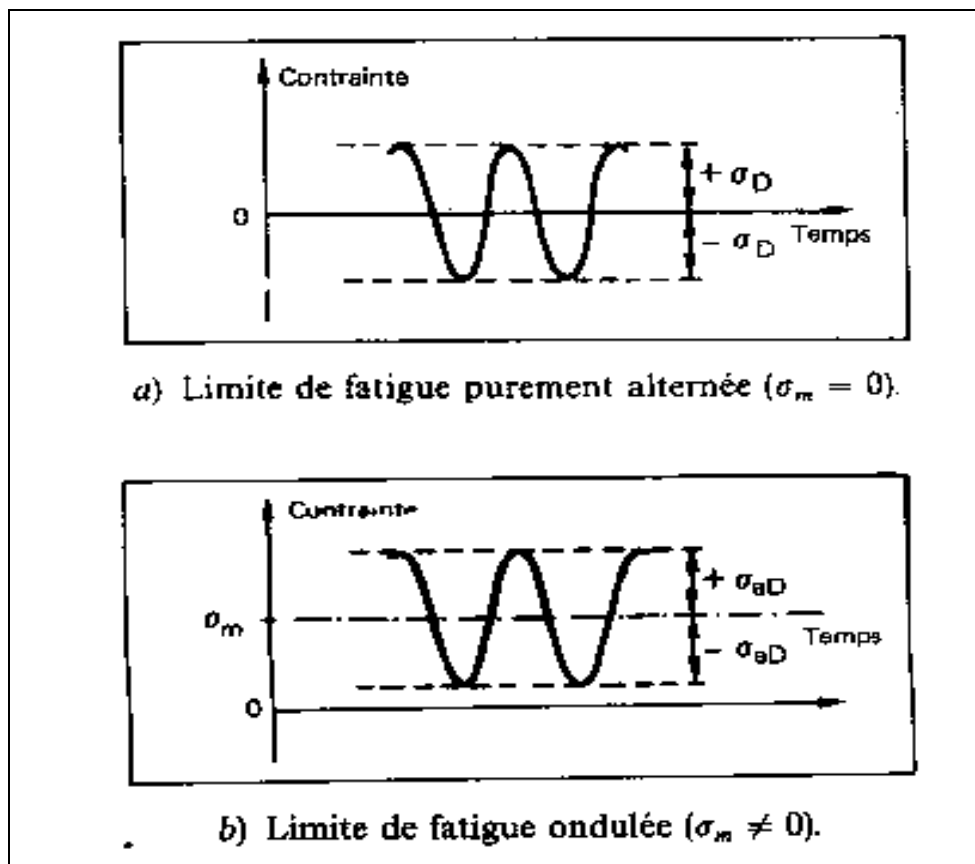


Figure 2-2 Définition de la limite de fatigue [9].

**2-1-3-C) Limite d'endurance:**

Pour un contrainte moyenne  $\sigma_m$  la limite d'endurance est la plus grande d'amplitude de contrainte pour la quelle il est constaté de 50% de rupture après un nombre fini  $N$  (appeler censure) de sollicitation. La limite d'endurance en contrainte purement alternées s'écrit  $\sigma_d(N)$ .

Cette définition est tout à fait générale puisqu'elle couvre tout le domaine de la fatigue dite classique ( $5 \times 10^4$  à  $10^7$  voire  $10^9$  cycles).

Quand on considère les limites d'endurances à  $10^5$  et  $10^7$  cycles, on devait donc écrire  $\sigma_d(10^5)$  et  $\sigma_d(10^7)$  dans le cas des aciers, pour les raisons de commodité d'écriture et parce qu'en fait la limite d'endurance à  $10^7$  cycles se confond pratiquement avec la limite de fatigue, on notera cette valeur par  $\sigma_d$  réservant la notion  $\sigma_d(N)$  aux valeurs de limite d'endurance à moindre de cycles (domaine d'endurance limitée ou la rupture sures ).

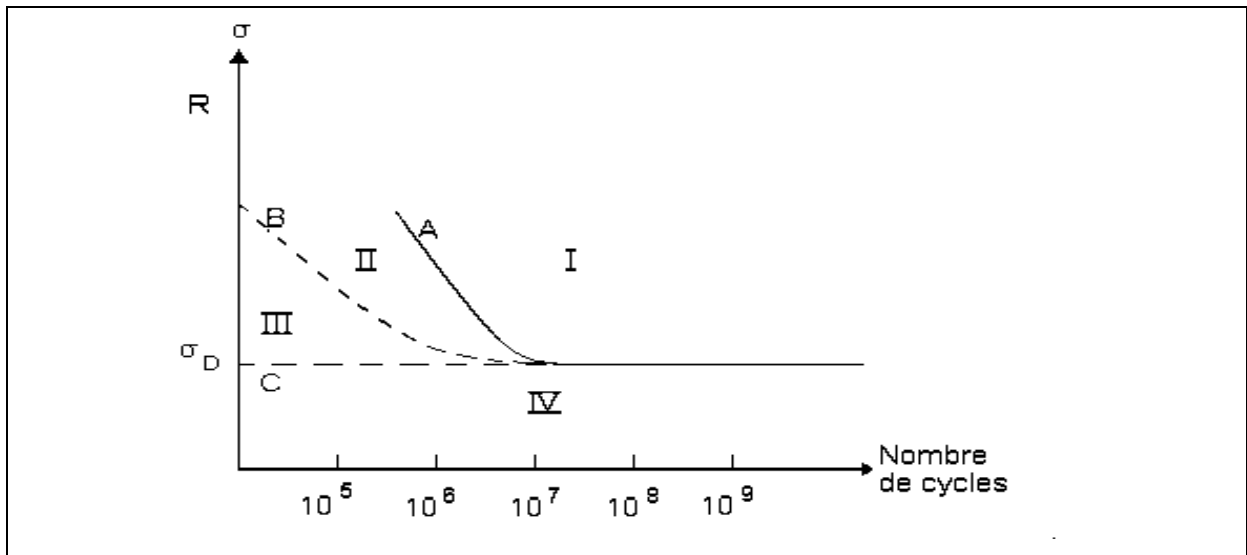
**2-2- Diagrammes d'endurances:**

L'essai de fatigue le plus simple consiste à soumettre chaque éprouvette à des d'efforts périodiques (*généralement sinusoïdaux*) d'amplitude maximal ( $\sigma$ ) et de fréquence constante, et à noter le nombre de cycle au bout du quel la rupture se produit ( $N$ ). A chaque éprouvette correspondant un point du plan ( $\sigma, N$ ) et à partir d'un lot d'éprouvettes soumises à des contraintes maximales différentes, on obtient une courbe qui à l'allure de celle repris entrée sur (la figure2-3).

Sur cette courbe, connue sous le nom de WOHLER, courbe  $S-N$  (stres-number of cycle) ou courbe d'endurance on peut distinguer trois domaines :

- Une zone de fatigue (ou endurance limitée) où la rupture est survient après un très petit nombre d'alternances est précédée d'une déformation plastique notable.
- Une zone de fatigue (endurance limitée) où la rupture est atteinte après un très petit nombre de cycle, nombre qui croître quand la contrainte décroître.

- Une zone d'endurance illimitée où zone de sécurité, sous faible contrainte, pour la quelle la rupture ne se produit pas avant un nombre donné de cycles  $10^7$  à  $3 \times 10^7$ , supérieure à la durée de vie envisagée pour la pièce.



**Figure 2-3** Représentation schématique de la courbe d'endurance de WOHLER (A) et de la courbe de diagramme de FRENCH (B) [5].

Il existe un certain nombre de représentations possibles de résultats obtenus au cours d'essais de fatigue, suivant l'arrangement que l'on adapte pour les paramètres intervenant dans la mesure.

- Les contraintes : Statique  $R_e$ ,  $R_m$ , et dynamique  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_a$ .

Ci-après, nous en présentons six de beaucoup les plus utilisés :

- Courbe de Wöhler.
- Courbe d'équiprobabilité de rupture (rupture *P.S.N*).
- Diagramme de Haigh.
- Diagramme Goodman.
- Diagramme de Rös.
- Diagramme de Moore, Kommers et Jaspers.

**2-2-1 Courbe de Wöhler :**

Courbe ( $S-N$ ) dans les pays anglo-saxons.

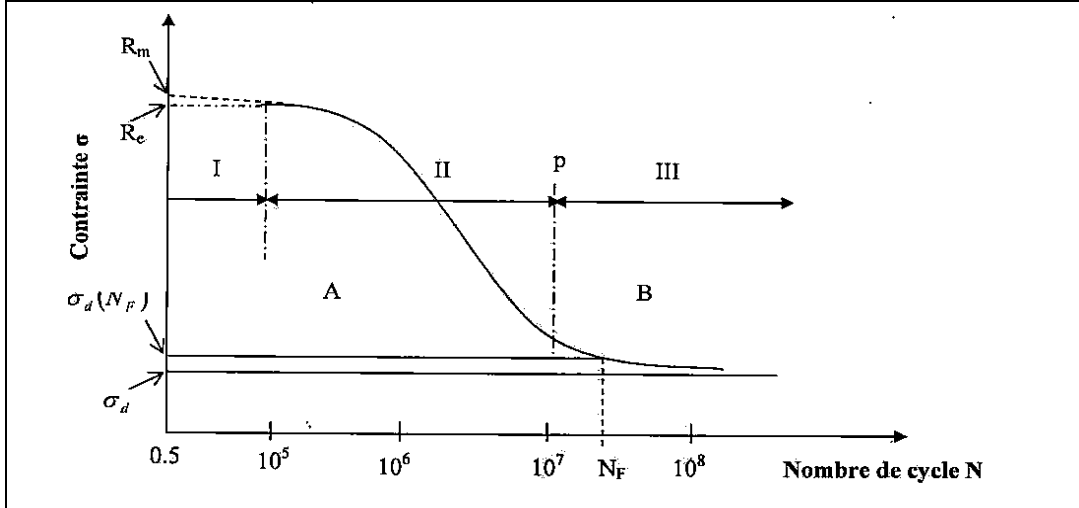
Cette courbe représente la variation d'une des contraintes dynamiques précitées en fonction du nombre de cycles à rupture (reporté sur échelle logarithmique) son tracé résulte d'essai de fatigue conduit pour une même valeur de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  sur un nombre d'éprouvettes identiques aussi élevées que possible suivant une méthodologie appropriée (star cases, pali *etc.*).

A chaque correspond un point du plan de coordonnées ( $\log N - \sigma$ ).

A partir d'un certain nombre d'essais, conduit généralement à contraintes dynamiques décroissantes, on trace au mieux une courbe qui est la courbe de Wöhler correspondant à ce type d'essai.

Pour un aciers, on obtient une courbe qui est la forme donnée (figure 2-4) cette courbe partage le plan de coordonnées en trois domaines :

- Domaine de la fatigue oligocyclique ou les rupture surviennent après un petit nombre de cycles ( $N_r \leq 10^5$  cycles).
- Domaine d'endurance limitée ( $N_r \Phi 10^5$ ) ou les ruptures surviennent systématiquement après un nombre de cycles croissant avec la décroissance de la contrainte.
- Domaine d'endurance illimitée où les ruptures ne sont produites pas avant un nombre de cycles supérieurs à la durée de vie envisagée de la pièce. Entre les deux derniers domaines, la courbe de Wöhler présente une courbe plus ou moins prononcée comprise entre  $10^7$  et  $10^7$  cycles.



**I** : domaine plastique oligocyclique.

$R_e$  : Limite d'élasticité.

**II**: domaine d'endurance limitée.

$R_m$  : Charge de rupture.

**III**: domaine d'endurance et illimité.

$\sigma_D$  : Limite de fatigue.

**A**: zone de non rupture probable.

**B**: zone de rupture probable.

$\sigma_D(N_F)$  : Limite d'endurance conventionnelle à  $N_F$  cycle.

Figure 2-4 Allure de la courbe de Wöhler [9].

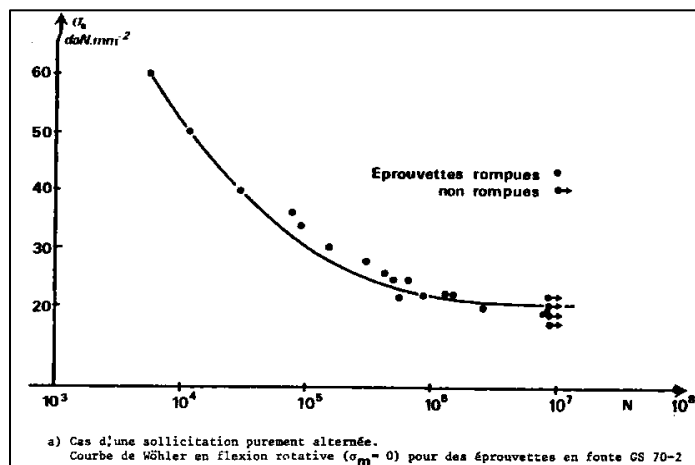


Figure 2-5 Donne un exemple de courbe de Wöhler [5].

On voit que c'est une courbe moyenne que pour tenir compte d'ensemble des résultats d'essai il y a lieu de l'encadrer par deux autres courbes (en tirets) une courbe de Wöhler indique seulement que la pièce essayée a autant chances de se rompre que de ne pas se rompre.

### 2-2-2 Courbe d'équiprobabilité de rupture :

(Courbe «*P.S.N*» dans les pays anglo- saxons).

La courbe de Wöhler dont nous venons de parler étant une courbe moyenne, son utilisation peut s'avérer délicate du fait que les valeurs relevées indiquent seulement que la pièce à «autant de chances de se rompre que de pas se rompre ». Aussi et toute la mesure du possible, c'est-à-dire si le coût des essai permet, si-t-il utile de réaliser un assez grand nombre d'essai de façon statique.

Les courbes d'équiprobabilité de rupture dont la courbe de Wöhler consiste un cas particulier ( $p=50%$  de rupture), sont alors tracées en soustrayant à la valeur moyenne une certaine valeur fonction de probabilité de rupture recherchée, du mode d'essai et du niveau de confiance accordé.

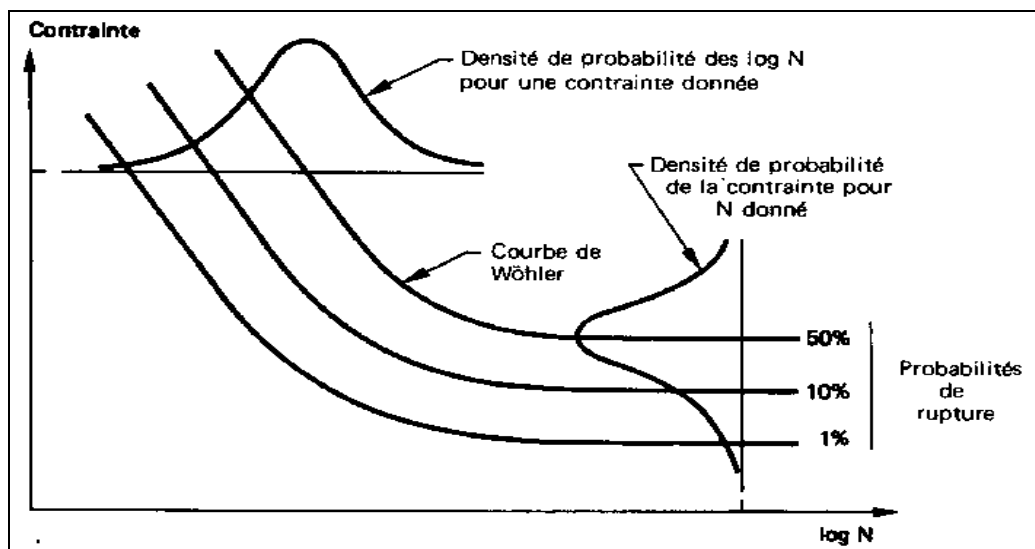


Figure 2-6 Courbes d'équiprobabilité de rupture (résultats théoriques) [9].

### 2-2-3- Diagramme de Haigh :

Ce diagramme représente la variation de l'amplitude de la contrainte  $\sigma_D$  en fonction de la contrainte moyenne  $\sigma_M$  pour un nombre de cycles à rupture (ou censure) donnée (figure 2-7). Il a l'avantage de bien montrer que tout se passe comme si la sollicitation résultait de la composition d'une contrainte moyenne constante statique et une contrainte purement alternée dynamique.

Les points particuliers ou points clés  $A$  et  $B$  correspondent, pour  $A$  à la limite d'endurance purement alternée  $\sigma_D$  ( $\sigma_M = 0$  donc sur l'axe des ordonnées) et pour  $B$  à la charge de rupture  $R_M$  ( $\sigma = 0$ , donc sur l'axe des abscisses).

La construction du diagramme de Haigh résulte :

- D'essai statiques : point  $B$  sur l'axe des abscisses.
- D'essai dynamiques purement alternés ( $\sigma_d = 0$ ), point  $A$  sur l'axe des ordonnées.
- D'un certain nombre d'essais dynamiques à contraintes moyennes  $\sigma_M$  différentes non nulles.

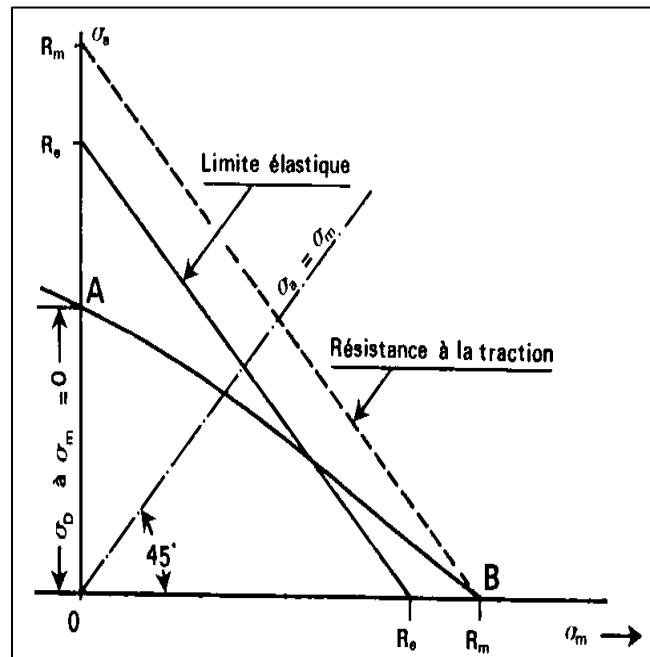


Figure 2-7 Diagramme de Haigh [9].

**2-2-4- Diagramme de Goodman :**

Ce diagramme représente la variation des contraintes maximales  $\sigma_m$  (fig2-7). Comme précédemment, ces points clés *A* et *B* sont : à la limite d'endurance purement alterné  $\sigma_D$  ( $\sigma_m = 0$ , sur l'axe des ordonnées) et *B* la charge de rupture  $R_m$ ,  $\sigma_D = 0$ , sur la première bissectrice).

Il se construit à partir des mêmes éléments que le diagramme de Haigh.

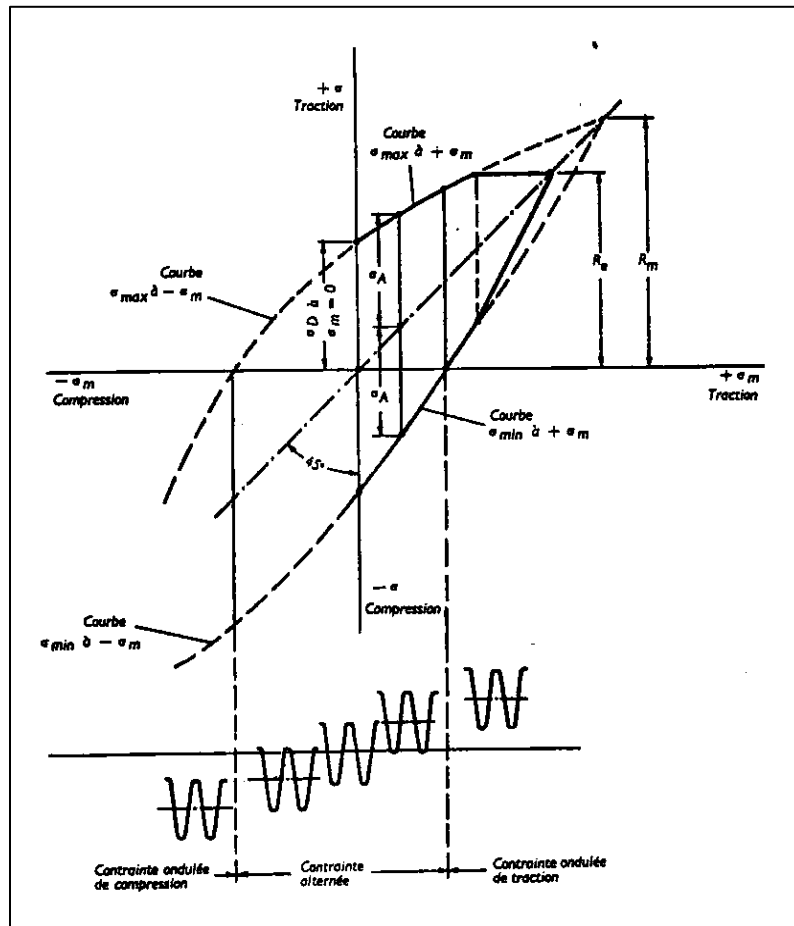
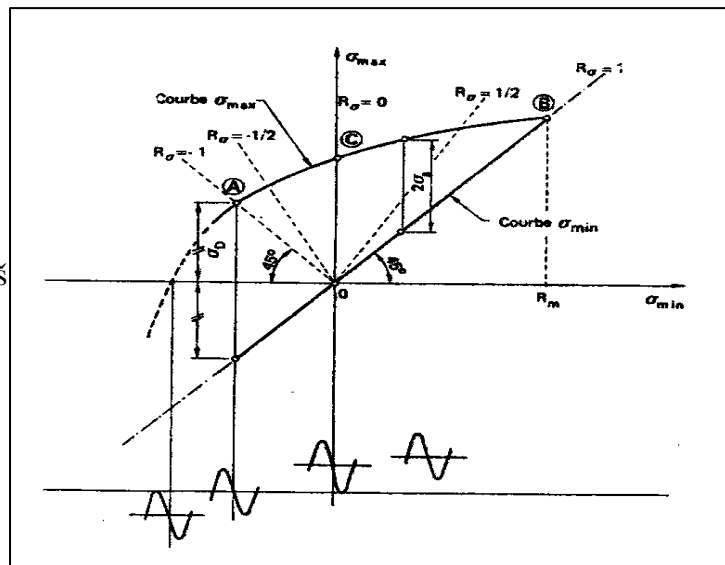


Figure 2-7. Diagramme de Goodman (résultats théoriques) [9].

**2-2-5- Diagramme de Rös:**

Essentiellement utilisé dans les pays anglo-saxons, ce diagramme représente la variation de la contrainte maximale  $\sigma_{\min}$  (fig.2.8). Outre les points particuliers A et B précités, on notera le point C pour le quel  $\sigma_{\min} = 0$ . A noter également que, souvent, on fait figurer sur ce diagramme un certain nombre de valeurs particulières de  $R_o = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ .

**Figure 2-8.** Diagramme de Roš (Résultats théoriques) [9].



**2-6- Diagramme de Moor-Kommers-Jaspèrs:**

Relativement peu connu, essentiellement utilisé dans les pays germaniques, ce diagramme présente la variation de la contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  en fonction du rapport des contraintes  $R_o = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$  (figure 2.9) ce diagramme peut présenter un grand intérêt pour la détermination de  $\sigma_{\max}$  lorsque  $\sigma_{\min}$  est inconnue.

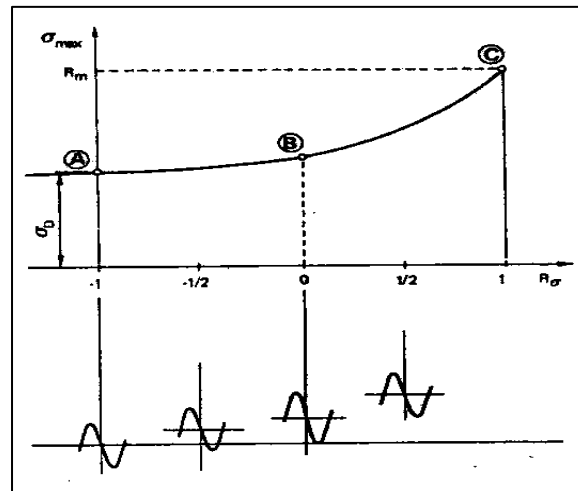
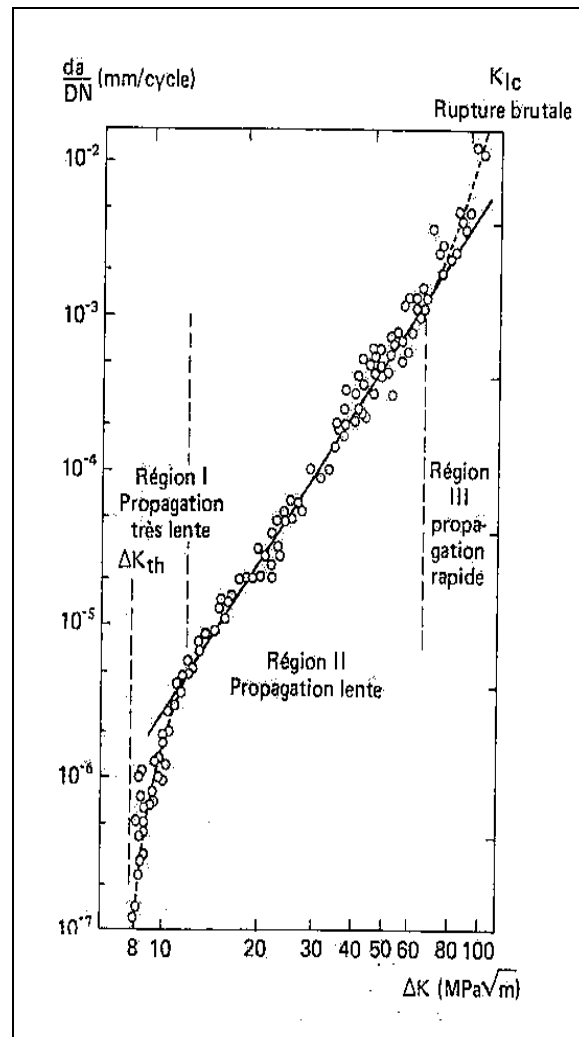


Figure 2-9 Diagramme de Moore-Kommers et Jasper [9].

### 2-3- Propagation des fissures par fatigue :

Certaines pièces ou structures présentent des défauts plans à l'état brut de fabrication ou des fissures amorcées en service à partir de défaut ou de zone de concentration de contrainte. La détermination de la durée de vie de tels éléments passe par la connaissance de la vitesse de propagation de la fissure en fonction des conditions de chargement.

La propagation d'une fissure en fatigue apparaît lorsque la variation  $\Delta K$  au cours d'un cycle de chargement est supérieur au seuil de propagation  $\Delta K_s$ . Cette propagation est limitée par la rupture brutale de la pièce lorsque le facteur d'intensité de contrainte atteint une valeur supérieur à  $K_c$  au cours d'un cycle (fig.2.11) entre ces deux extrêmes il existe un domaine de propagation qui peut s'exprimer par une relation linéaire entre le logarithme de la vitesse de propagation et le logarithme de l'amplitude de la variation du facteur d'intensité de contrainte (fig.2.11-région II de la propagation).



**Figure 2-11:** Allure de la courbe de  $da/dN=f(\Delta K)$  [13].

De nombreuses relations empiriques permettent de relier la vitesse de propagation  $\frac{da}{dN}$  à  $\Delta K$  pour la *région II* de la propagation.

Pour un matériau donné et pour un même  $\Delta K$ , la vitesse de propagation est influencée par les conditions de chargement (rapport  $R=K_{max}/K_{min}$ ), la fréquence, les contraintes résiduelles, la température et l'environnement.

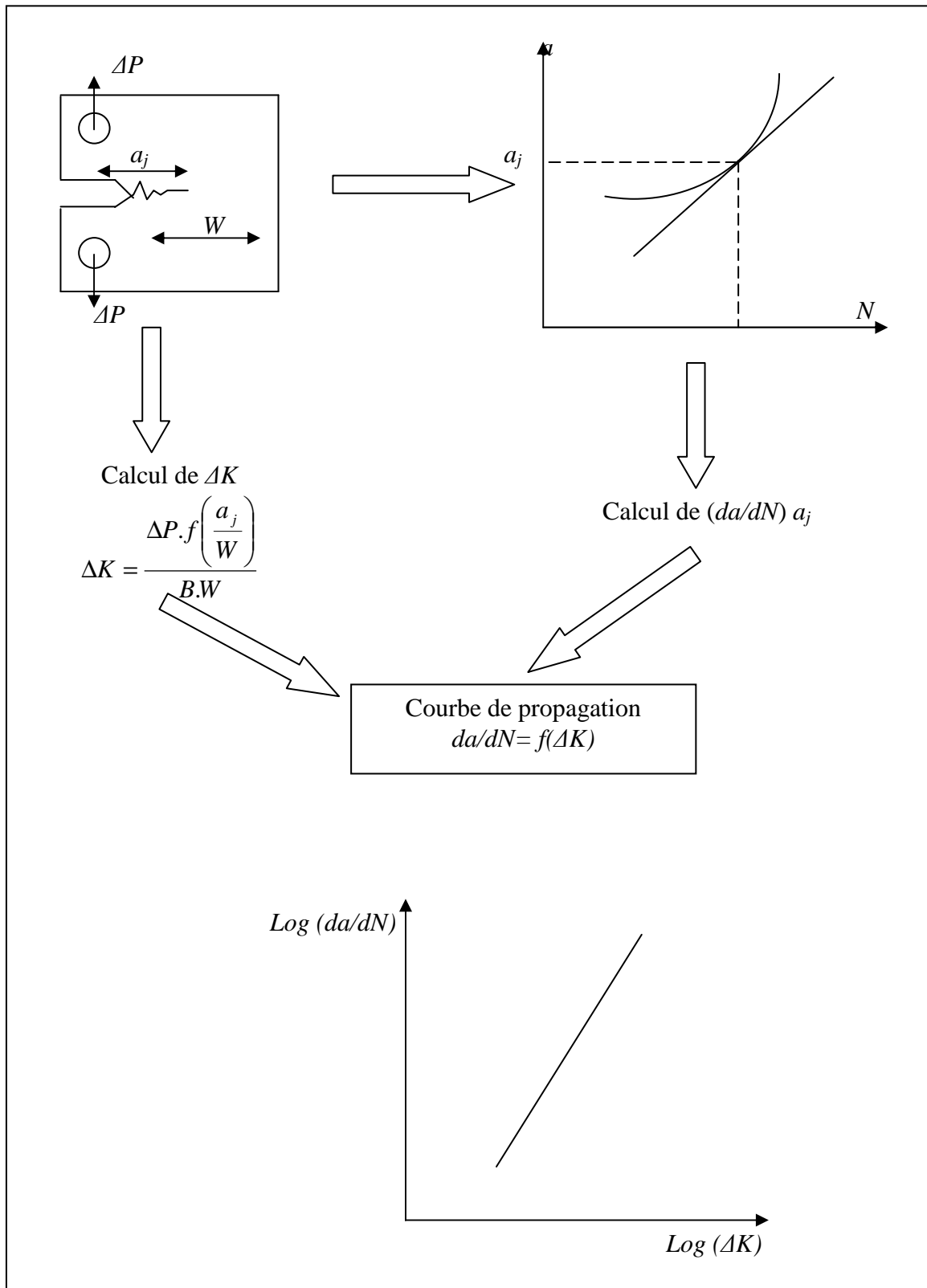
La vitesse de propagation d'une fissure en fatigue exprimée en fonction de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte, caractérise la résistance à la propagation stable d'une fissure sous chargement cyclique pour un matériau donné.

Cette caractéristique du matériau a différentes applications :

- Choix d'un matériau en fonction des conditions de chargement et l'environnement.
- Détermination de durée de vie d'une structure.
- Détermination des défauts admissibles dans une structure, en parallèle avec une analyse en rupture brutale.

### **2-3-1) Méthode de mesure de la vitesse de propagation d'une fissure en fatigue :**

La mesure de la vitesse de propagation d'une fissure est réalisée sur une éprouvette classique de mécanique de la rupture, pré fissuré en fatigue. La longueur de la fissure est mesurée optiquement ou par une autre méthode en fonction de nombre de cycles. Ces données font ensuite l'objet d'une analyse numérique pour déterminer la vitesse de propagation exprimée en fonction de nombre de cycles  $\frac{da}{dN}$ , pour chaque longueur de fissure pour la quelle la vitesse de propagation a été calculée, on calcule l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K$  le principe de cette mesure est indiqué sur la (figure 2.12).



**Figure 2-12** Principe de la détermination de la vitesse de propagation d'une fissure en fatigue [13].

**2-3-2- lois de propagation :**

La courbe reliant le logarithme de l'étendue de variation du facteur d'intensité de contrainte au logarithme de la vitesse de propagation présente une partie linéaire (fig. 2-12 *région II*) pour cette zone Paris et Erdogan ont proposé une lois de propagation qui s'exprime par une relation simple :

$$(2-1) \quad \frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m .$$

Avec  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  .

$C$ ,  $m$  = constante du matériau déterminées par régression linéaire sur les points expérimentaux.

Dans la pratique, cette relation est la plus utilisée. La lois (2-1) doit être déterminée pour le type de chargement, la température, l'environnement et les conditions de fabrication (traitement de surface, soudage, grenailage...) identique à ceux de la pièce ou de la structure considérée, la valeur de contrainte moyenne caractérisée par le rapport  $R$  ou la valeur de  $K_{\max}$  pour un  $\Delta K$  donné a une influence prépondérante sur la vitesse de propagation.

**2-3-4 Principe du calcul de la durée de vie :**

La durée de vie d'une pièce ou d'une structure peut être estimée en calculant le nombre de cycles d'amorçage d'une fissure et le nombre de cycles de propagation jusqu'à rupture.

Sur une éprouvette lisse ou sur une pièce ne présentant pas d'entaille ou de défaut préexistant, la phase d'amorçage représente 80% à 90% de la durée de vie pour le domaine d'endurance (grand nombre de cycles ) et 10 à 20% de la durée de vie pour la fatigue olygocyclique (fig. 2-13) dans la pièce où les structures présentent une entaille aiguë ou un défaut, a phase d'amorçage est réduite, en particulier les structure soudées, on a habitude de considérer que la phase d'amorçage est négligeable et le calcul de la durée de vie se fait en propagation. D'une manière plus générale bien souvent les calculs en fatigue par la mécanique de la rupture sont effectuées uniquement en propagation, cette pratique va dans le sens de la sécurité.

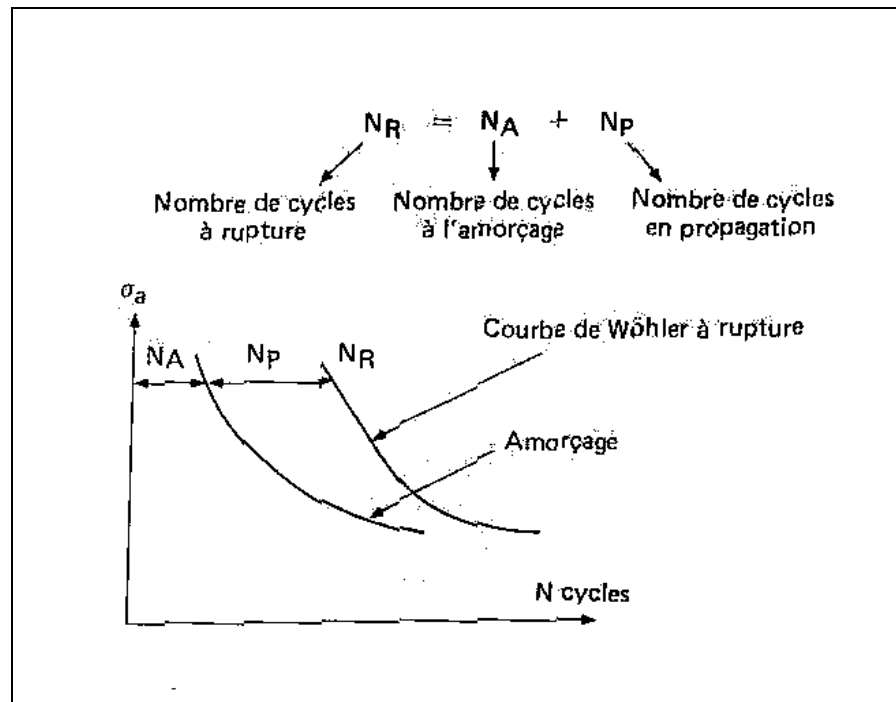


Figure 2-13 Contribution de l'amorçage et de la propagation de fissure [13].

#### 2-4- Méthode d'estimation de la résistance à la fatigue à $N$ cycles et de son écart-type:

Les méthodes d'estimation suivantes seront décrites et expliquées :

- La méthode dite des "Probits".
- La méthode de l'escalier.
- La méthode d'itération.
- La méthode des  $K$  éprouvette non rompues.

L'application de l'une de quelconque de ces méthodes suppose toutefois la connaissance de l'ordre de grandeur de la résistance à la fatigue cherchée et de l'écart-type de sa courbe de réponse pour choisir les niveaux de contrainte des premiers essais et leur espacement.

**2-4-1- Méthode des Probits :**

La méthode dite des "Probits" est une méthode de calcul numérique d'estimation des paramètres d'une courbe de réponse qu'il ne faut pas confondre avec le plan d'essai destiné à fournir les résultats qui lui-même le plan des essais est simple, au moins en apparence. Il vise simplement à déterminer par points de la courbe de réponse cherchée.

Une amplitude de contrainte ayant été choisie en essai  $n$  éprouvettes jusqu'à la durée  $N$  fixée pour les essais. Dans ces conditions, le nombre  $K$  des éprouvettes qui parmi ces  $n$ , rompent avant  $N$  cycles suit la loi de probabilité binominale (loi de probabilité du nombre des éprouves qui parmi  $n$  conduisent à la réalisation d'un événement de probabilité donnée).

Les probabilités de la loi binominale sont bien connues, si  $p$  est la probabilité de l'évènement observé.  $K$  sera, en moyenne égal à  $np^{(=)}$ . Cependant,  $K$  est une variable aléatoire présentant une certaine dispersion que l'on peut caractériser, soit par la variance, soit par l'écart type de  $K$ .

La théorie montre que cet écart-type  $\sigma(K)$  a valeur :

$$(2-2) \quad \sigma(K) = \sqrt{np(1-p)}.$$

La valeur vrai  $p$  de la probabilité de rupture avant  $N$  sous amplitude de contrainte  $S$  est évidemment inconnue et les essais ont précisément pour but de l'estimer.

On montre, en calcul de probabilité, que l'estimation de  $p$  est donnée par la fréquence  $f$  :

$$(2-3) \quad f = \frac{K}{n}.$$

C'est-à-dire, dans notre cas, par le rapport du nombre des éprouvettes rompues  $K$  au nombre  $n$  de celles engagées dans les essais identiques.

$K$  étant aléatoire, il en est de même de  $f$  et de l'écart type de la fréquence  $\sigma(f)$  est donnée par :

$$(2-4) \quad s(f) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

La formule ci-dessus permet de mesurer l'incertitude avec lequel  $p$  est estimée. Si l'on prend, par exemple,  $n=20$  et  $p=0,25$  on obtient :

$$\sigma(f) \approx 0,10 .$$

Si l'on tient compte du fait que la dispersion de  $f$  peut être caractérisée, grosso modo, par deux fois l'écart type, on mesure à quel point  $f$  est une estimation peu précise de  $p$  on conçoit d'autre part, que, pour définir la courbe de réponse étudiée, il faille au moins quatre à cinq points. On arrive donc ainsi à un nombre d'essai de l'ordre de la centaine. On verra que, malgré l'emploi d'une méthode statistique d'estimation permettant de tirer le meilleur parti des observations. Il est difficile de réduire sensiblement ce chiffre donc la méthode dite des "Probits" (abusivement d'ailleurs si l'on ne procède pas un traitement numérique des résultats d'essais par la variable méthode des Probits set longue, coûteuse en nombre d'essai et d'un emploi délicat.

On en réservera l'emploi à des études fondamentales dans les quelles des déterminations assez précises de la résistance à la fatigue et surtout l'écart type des courbes de réponse à la contrainte sont recherchées et si l'on veut tester en même temps la forme sigmoïde normale de ces courbes par test de  $X^2$ .

Dans les autres cas, on aura intérêt à appliquer des méthodes d'application plus simples telle que celles dont la description suivent.

#### **2-4-2 Méthode de l'escalier :**

Les inconvénients de la méthode "*des Probits*" ont conduit à rechercher d'autres méthodes d'application plus aisées, si possible, plus économiques.

En 1948 Dixon et Mood ont proposé la méthode dite "*de l'escalier*". Elle simplifie beaucoup la recherche des niveaux de contrainte d'essai, qui s'effectue automatiquement, et laisse à l'utilisateur une grande latitude quant au choix du nombre d'essai qui peut être beaucoup plus faible qu'avec la méthode des *Probits*. Si la méthode est exécutable avec un faible nombre d'essai, il ne faut toutefois pas prendre de vue que la précision (justesse et fidélité) du résultat obtenu en dépendra fortement.

**2-4-2-1 Règles d'exécution de la méthode de l'escalier :**

Comme pour la méthode des Probits, on fixe une durée maximale d'essai  $N$  et l'on définit un échelonnement d'amplitude de contrainte en progression arithmétique dont le pas soit l'ordre de grandeur de l'écart type  $\sigma$  de la courbe de réponse.

Le premier essai sera effectué au niveau de cet échelonnement jugé *a priori*. Le plus voisin de la médiane  $\mu$  cherchée, à partir du second essai, le niveau d'amplitude de la contrainte est ainsi choisi :

- Si l'essai précédent s'est traduit par une ou non rupture, choisi pour le nouvel essai à effectuer, le palier de contrainte de l'échelonnement adopté immédiatement supérieur à celui utilisé lors du premier essai.
- Si l'essai précédent s'est traduit par une ou non rupture, choisi à l'inverse, le palier immédiatement inférieur.

En d'autres termes.  $d$  désignant le pas de l'échelonnement des contraintes et  $s_i$  la valeur adopté pour le  $i$ -ième essai, on prendra :

$s_{i+1} = s_i + d$  La  $i$ -ième éprouvette essayée ne s'est pas rompue.

$s_{i+1} = s_i - d$  Si cette  $i$ -ième éprouvette s'est rompue.

Les essais se poursuivent selon cette règle, les uns à la suite des autres, jusqu'à épuisement des  $n$  éprouvettes que l'on a décidé d'y consacrer.

**2-4-2-2 Utilisation des résultats :**

Les résultats d'essais obtenus par cette méthode permettent d'estimer la résistance médiane à la fatigue au nombre de cycles fixes et en principe, l'écart-type.

Les calculs à effectuer sont simples. On détermine d'abord le type d'évènement qui s'est produit le moins fréquemment au cours de la série d'essai, rupture ou non rupture. Les résultats de ce type suffisent, en effet, au calcul ils sont retenus de préférence aux autres, le fait que les résultats d'un type donné (les ruptures, par exemple) soient plus nombreux que les autres étant souvent dû au choix d'un niveau de départ éloigné de la valeur à estimer. La séquence débute alors par une suite ininterrompue de résultats de même type dont l'inclusion entraînerait une erreur systématique.

On compte le nombre  $N_i$  des réalisations de cet évènement à chaque niveau d'essai plus ou moins numéroté ces niveaux en attribuant la valeur  $i=0$  que plus faible de ceux auxquels  $i$  a été observé au moins une fois.  $i$  désigne le numéro du niveau d'essai, il faut alors calculer les quantités :

$$(2-5) \quad N = \sum_i N_i, A = \sum_i i \quad \text{Et} \quad B = \sum_i I^2 N_i^2.$$

L'estimation  $m$  et  $\mu$  obtenue par la formule suivante :

$$(2-6) \quad m = S_o + d \left( \frac{A}{N} + \frac{1}{2} \right).$$

Dans la quelle :

- $S_o$  Niveau d'indice 0 tel que défini plus haut (le plus faible des niveaux utilisés auquel on obtient au moins un résultat du type retenu).
- $d_o$  Espacement des niveaux :
- $+1/2$  Si le calcul est basé sur les contraintes d'essais des éprouvettes rompues.
- $-1/2$  Si le calcul est basé sur les contraintes d'essais des éprouvettes non rompues.

La méthode de l'escalier permet aussi d'obtenir une estimation  $s$  de l'écart-type  $\sigma$  de la courbe de réponse à la contrainte :

$$(2-7) \quad s = 1,62d \left( \frac{NB - A^2}{N^2} + 0,029 \right).$$

Selon *Dixon* et *Mood* la formule (2-7) ne peut être utilisée qu'à condition que :

$$(2-8) \quad \frac{NB - A^2}{N^2} > 0,3.$$

En fait, l'estimation par la méthode de l'escalier de l'écart-type de la courbe de réponse à la contrainte ne doit être considérée qu'avec beaucoup de prudence si le nombre d'essais n'est pas ou moins égal à 50. L'estimation de cet écart-type n'est, en fait pas meilleur, à nombre d'essais égal, que celle qu'on obtiendrait par la méthode de *des Probits*.

**2-4-2-3 Précision de  $m$  et  $s$  :**

L'estimation  $m$  de  $\mu$  est distribuée normalement avec un biais négligeable et un écart-type :

$$(2-9) \quad \sigma_m = \frac{G}{\sqrt{N}}.$$

Où  $G$  est un facteur dépendant du rapport  $\frac{d}{\sigma}$  :

$$(2-10) \quad G = 1 + \frac{d}{8\sigma}.$$

L'estimation  $s$  de  $\sigma$  présente un biais important, fonction de  $\frac{d}{\sigma}$ . La dispersion de  $s$  est également fonction de  $\frac{d}{\sigma}$  pour  $d = \sigma$  où elle est voisine de son minimum, la précision de l'estimation de l'écart-type  $\sigma$  est sensiblement équivalente à celle d'une estimation basé sur des données quantitatives dont le nombre de degrés de liberté serait  $\frac{N}{3,5}$ .

**2-4-2-4 Remarque sur l'application pratique de la méthode de l'escalier :**

Dans le paragraphe «*règle d'exécution de la méthode de l'escalier*», on a simplement indiqué que l'estimation  $d$  devrait être de l'ordre de grandeur de  $\sigma$ .

En pratique, l'estimation  $m$  de  $\mu$  reste satisfaisante tant que :

$$(2-11) \quad \frac{1}{2} < \frac{d}{\sigma} < 2.$$

L'estimation  $s$  de  $\sigma$  déjà peu satisfaisante dans les conditions optimales ( $1 < d/\sigma < 1,5$ ) Se détériore rapidement si l'on s'en éloigne.

**2-4-3 Méthode d'itération :**

Cette méthode est une application au cas particulier des courbes des réponses par une alternative d'une méthode plus générale imaginée par *H. Robins* et *S. Monro*.

La dispersion de probabilité d'une variable aléatoire  $Y$  étant supposée fonction d'un paramètre  $x$  de telle façon que  $E\left[\frac{y}{x}\right]$  (espérance mathématique ou valeur moyenne de  $y$  en  $x$ ) soit une fonction monotone de  $x$ , la méthode de *Robins* et *Monro* a pour but d'estimer la valeur de  $x$  pour laquelle  $E\left[\frac{y}{x}\right] = y_o$ ,  $y_o$  désignant une valeur fixe *a priori*.

Dans son application à l'estimation d'une résistance à la fatigue,  $Y$  est la proportion de ruptures observée et  $x$  l'amplitude de la contrainte, en effet les conditions d'application de la méthode de *Robins* et *Monro* sont très larges de la variable aléatoire  $Y$  peut aussi bien être distribuée selon une loi de probabilité discontinue (ce qui est le cas d'une proportion, notamment lorsque l'effectif est faible) que continue.

#### **2-4-3-1 Règle d'exécution des essais selon la méthode d'itération :**

Comme la méthode de l'escalier, la méthode d'itération définit pour chaque essai (sauf le premier) la contrainte à appliquer en fonction du résultat obtenu à l'essai précédent mais le chargement de contrainte, au lieu d'être constant, est variable et défini par le numéro d'ordre de l'essai.

Le choix de la contrainte à appliquer lors du premier essai est important. Elle doit être aussi voisine que possible de la valeur à préciser. Les écarts admissibles entre la contrainte appliquée au premier essai  $S_i$  et la valeur à déterminer sera précisée plus loin.

Les essais peuvent être effectués par groupes d'effectifs quelconque,  $y$  compris l'unité c'est-à-dire éprouvette par éprouvette.

Chaque groupe d'essai effectué à la même contrainte  $s_i$  permet de déterminer une fréquence de rupture  $f_i$ .

Soit alors  $p$  une probabilité de rupture choisie arbitrairement,  $\sigma$  l'écart-type de la courbe de réponse et  $A$  une constante choisie convenablement, on démontre que la séquence des valeurs définies comme suit :

$$(2-12) \quad S_{i+1} = S_i + \frac{A\sigma}{I}(p - f_i).$$

Converge vers la valeur  $S(p)$  pour laquelle la probabilité de rupture est  $p$ . En général, on utilise cette méthode pour estimer simplement la médiane de la courbe de réponse et l'on prend donc  $p=0,5$  mais il est intéressant de noter la possibilité d'estimer un autre point de cette courbe.

#### **2-4-3-2 Estimation de $S(p)$ amplitude de contrainte pour laquelle la probabilité de rupture est $p$ :**

Cette méthode ne demande presque aucun calcul puisque la séquence des amplitudes de contrainte appliquées tend vers  $S(p)$ . Toutefois, si  $S_n$  est le dernier niveau de contrainte auquel des essais ont eu lieu, leur résultat permet de calculer une contrainte  $S_{n+1}$  laquelle on effectuerait des essais si l'on poursuivait la procédure.

#### **2-4-3-3 Conditions et mode d'emploi de la méthode d'itération :**

Nous avons dû que la méthode d'itération n'est pas seulement applicable à  $p = 0,5$  on évitera, toutefois de chercher à déterminer le point d'une courbe de réponse correspondant à une valeur de  $p$  trop voisine de  $0$  ou de  $1$ , le comportement de méthode étant d'autant plus incertain que l'on se rapproche de ces deux limites.

Pour  $p=0,5$  la valeur théorique à donner à  $A$  est :

$$(2-13) \quad A = \sqrt{2\pi} \approx 2,5.$$

Pour une valeur de  $p$  différente de  $0,5$  la valeur théorique  $A(p)$  est :

$$(2-14) \quad A(p) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{u_p^2}{2}}.$$

- $u_p$  Étant l'écart réduit de la loi de Gauss correspondant à la probabilité  $p$ . L'estimation  $S_{n+1}$  obtenue et caractérisée par son biais (ou écart systématique) et sa dispersion (définie par l'écart-type de  $S_{n+1}$ ).

Ces deux caractéristiques statistiques de  $S_{n+1}$  sont fonction de l'écart-type de  $S_1$ , premier niveau de contrainte d'essai à la valeur cherchée et de l'écart-type  $\sigma$  évaluation *a priori* de l'écart-type vrai, utilisé dans la formule (2-15).

Pour ce qui est de  $S_1$  on montre que son effet ne dépend que de son écart réduit à la médiane  $\mu$  soit :

$$(2-15) \quad \frac{S_1 - \mu}{\sigma}.$$

#### 2-4-3-4 Précision de l'estimation :

Les valeurs du biais de l'écart-type de  $S_{n+1}$  viennent d'être données pour de faibles valeurs du nombre  $n$  des niveaux de la contrainte et à raison d'un seul essai par niveau.

Lorsque  $A=2,5$ , une bonne approximation de  $\sigma(S_{n+1})$  est donnée par la formule suivante :

$$(2-15) \quad \sigma(S_{n+1}) = \sqrt{\frac{\pi}{2nm}} \cdot \sigma.$$

Où  $m$  est le nombre d'essai effectués à chaque niveau si on les exécute par groupe.

#### 2-4-5 Méthode des $K$ éprouvette non rompus :

##### 2-4-5-1 Principe de la méthode :

La méthode des  $K$  éprouvettes non rompues est une généralisation de celle quelquefois connue sous le nom de "*méthode des trois éprouvettes*".

Elle consiste à rechercher, par paliers de contraintes successifs  $x_1, x_2, \dots, etc$  décroissant en propagation arithmétique, un niveau auquel  $K$  essai données  $K$  non rompues.

Le niveau de départ  $x_1$  ayant été choisi, généralement sensiblement au-dessus de la limite d'endurance, les essais sont effectués un par un, en succession, le choix du niveau de contrainte d'essai étant défini par la règle suivante :

Le dernier essai s'étant trouvé réalisé au niveau  $x_1$  et le nombre total des essais effectué à ce niveau étant  $n_1$  :

- Si le dernier de ces  $n_1$  essais a donné lieu à une rupture, l'essai suivant sera effectué au niveau de contrainte immédiatement inférieur.
- Si les essais  $n_1$  essais effectués au niveau  $x_1$  n'ont donné lieu qu'à des non rompues, l'essai suivant sera effectué au même niveau  $x_1$  que les précédents essais à conduire que  $n_1 \pi k$  si  $n_1 = k$ , les essais sont arrêtés.

On voit qu'avec cette règle d'action, on passe au niveau de contrainte immédiatement inférieur dès qu'une rupture est observée et qu'on n'effectue jamais plus de  $K$  essai par niveau.

Le résultat de ce mode opératoire est caractérisé par le dernier niveau de contrainte où ont été effectués les essais.

#### 2-4-5-2 Propriétés statistiques des résultats :

Les propriétés statistiques du résultat obtenu peuvent être déterminées par le calcul quand on connaît la nature analytique des courbes de réponse à la contrainte, si celles-ci sont supposées sigmoïdes normale, on peut calculer le comportement statistique de la méthode lors de sont application à une courbe de réponse de moyenne  $\mu$  et de l'écart type  $\sigma$ .

Si l'on désigne par  $S_k$  le niveau de contrainte on s'arrête la procédure,  $S_k$  est une variable aléatoire dont la distribution est fonction de  $k$  (nombre de non rompues à obtenir), de l'espacement  $d$  des niveaux de contrainte d'essai et de la position de cette échelle par rapport à  $\mu$ .

On peut toutefois réduire l'étude des cas correspondant à divers valeurs de  $\mu$  et de  $\sigma$  au seul cas  $\mu = 0, \sigma = 1$ , en remplaçant  $d$  par  $\frac{d}{\sigma}$  et les valeurs de  $S_k$  par celles de  $(s_k \mu) / \sigma$ .

Pour une courbe sigmoïde standard ( $\mu = 0, \sigma = 1$ ) et des valeurs données de  $K$  et de  $d$  on a donc calculé:

- $E(S_K)$  = Espérance mathématique de  $S_K$  ou valeur moyenne de cette pour un grand nombre d'essai.
- $\sigma(S_K)$  = Écart-type de  $S_K$  (paramètre de distribution de  $S_K$ ).

- $M(S_K)$  = Mode de distribution de  $S_K$  ou niveau où la probabilité d'arrêt maximale.
- $G_K$  = pourcentage de rupture au niveau  $E(S_K)$ .
- $U_K, V_K$  = Limite de l'intervalle de probabilité de  $S_K$  à 0,95 minimum.
- $\sigma$  % = probabilité réelle en % pour que  $S_K$  extérieur à l'intervalle le  $U_K, V_K$ .

Le caractère aléatoire des résultats d'essais fait que le résultat final ne peut être prévu qu'en probabilité. Le nombre de niveau à par courir est aléatoire, de même que le nombre total d'essais nécessaires.

Cependant, de même qu'il existe une région probable d'arrêt de la procédure, il existe une quantité probable d'essais nécessaire pour y parvenir. Ce nombre est indiqué en fonction de  $k$  et de  $\frac{d}{\sigma}$ .

#### 2-5- Choix de la méthode d'essai :

Pour la commodité de l'exposé, nous distinguerons trois degrés différents de précision ou d'exigence concernant l'estimation d'une résistance à la fatigue :

- L'estimation approchée.
- L'estimation de précision moyenne.
- L'estimation précise de la médiane assortie éventuellement de celle de l'écart-type.

##### 2-5-1 Méthode d'estimation approchée :

Les méthodes d'estimation de la résistance à la fatigue dans cette catégorie sont applicables avec un nombre d'essai ne dépassent pas à quinze, même si elles s'appliquent aussi à des nombres d'essais plus élevés.

Les méthodes entrant dans cette catégorie sont les suivantes :

- L'escalier.
- L'itération.

**2-5-2 Méthodes d'estimation de précision moyenne :**

Nous entendons par les méthodes applicables avec un nombre d'essais compris entre disons 15 et 40. La méthode des probits reste donc exclue de cette catégorie comme exigeant trop d'essais. La méthode des  $K$  résultats identiques se trouve également exclue, non qu'il soit impossible de trouver une combinaison de  $K$  et du  $d$  qui exige un nombre d'essais de cet ordre mais parce qu'alors la méthode perd toute intérêt vu l'écart-type de l'estimation obtenue qui est trop grand compte tenu du nombre d'essais envisagé.

Les méthodes à considérer, dans cette catégorie, sont :

- L'escalier.
- L'itération réalisée par groupe de deux à quatre essais par niveau.

**2-5-3 Méthodes à précises d'estimation :**

Ce sont :

- L'escalier.
- L'itération, encore réalisée par groupes d'essais à chaque niveau de contrainte.
- Des Probits, appliquées avec un nombre d'essais supérieur à quarante.

Les deux premiers restent utilisables avec un nombre arbitraires d'essais tandis qu'il faut prévoir au moins soixante à quatre-vingt essais par celle des Probits.

La méthode de l'escalier conserve l'avantage de la simplicité mais son exécution est rendue très longue par la nécessité d'essayer les éprouvettes les unes à la suite des autres.

La méthode d'itération est d'exécution plus délicate mais moins longue en effectuant les essais par groupe.

**CHAPITRE 3**  
**SIMULATION ET TRAITEMENT DES**  
**RÉSULTATS**

### CHAPITRE 3

#### SIMULATION ET TRAITEMENT DES RÉSULTATS

*CASTEM 2000* est un logiciel de calcul de structures par la méthode des éléments finis et plus généralement de résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis. Il a été développé au Département de Mécanique et Technologie (*DMT*) du Commissariat à l'Energie Atomique (*CEA*). La principale particularité de *Castem 2000*, est d'être extrêmement adaptable aux multiples applications propres à chaque utilisateur.

#### 3-1 Le langage de *Castem 2000* Gibiane :

Gibiane est le langage qui permet de communiquer avec le programme. La syntaxe est basée sur l'utilisation de directives, d'opérateurs et de procédures qui s'appliquent à des opérandes.

Dans le premier cas la syntaxe est : DIRECTIVE OPERANDES.

Par exemple dans TRACE MAILLAGE ; TRACE est la directive de traçage et MAILLAGE est l'opérande que l'on veut visualiser.

Dans le second cas, la syntaxe est : RESULTATS = OPERATEUR OPERANDES.

Par exemple dans LIGNE = DROITE *P1 P2* ; LIGNE sera l'objet construit en reliant *P1* à *P2* par une droite. DROITE est l'opérateur qui s'applique sur les opérandes *P1* et *P2* et le résultat s'appelle LIGNE.

La procédure peut utiliser, suivant sa définition, l'une ou l'autre des syntaxes.

Il convient de compléter ce paragraphe en précisant quelques règles syntaxiques de *GIBIANE* :

- Le point - virgule termine une instruction.
- Une instruction doit être écrite sur moins de 9 lignes.
- Une ligne peut contenir plusieurs instructions.
- Les lignes de commentaire sont précisées par un astérisque dans la première colonne.

- Les opérateurs et les directives sont définis par leurs 4 premiers caractères mais on peut en donner plus s'il n'y a pas de confusions possibles (ex :TRAC, TRACE, TRACER).
- Une procédure se distingue au niveau utilisateur par la nécessité de l'orthographier correctement avec toutes ses lettres (<8).

L'instruction est interprétée de gauche à droite, et les opérateurs sont exécutés dès.

### **3-2 Syntaxe générale d'une instruction :**

Elle se présente comme un opérateur agissant sur un ou plusieurs objets afin de construire un (en général) ou plusieurs objets. Tous les objets sont construits de cette manière. Si des objets fournis sont incompatibles avec l'opérateur, un message est imprimé, avertissant l'utilisateur de la non obtention du résultat escompté ainsi qu'une indication sur la nature de l'erreur commise.

#### **3-2-1 Les objets :**

Ils sont reconnus par des noms qui sont fournis par l'utilisateur (ou dans certain cas, par la CAO utilisée en amont). Ce nom est formé de huit caractères au maximum et commence par une lettre de l'alphabet. Le nom peut notamment avoir une connotation mnémotechnique qui permettra de le reconnaître (et de l'associer à l'objet qu'il désigne), mais doit être différent des quatre premiers caractères d'un nom d'opérateur existant. Si l'on met systématiquement un chiffre dans un nom d'objet, ce risque ne devient quasi-nul.

Si l'objet est l'un de ceux utilisé par un opérateur, il peut être remplacé par sa définition entre parenthèses.

Pour chaque construction d'objets, on retrouvera la notion de références ou de sous objets (voir ci-dessous).

#### **3-2-2 Les opérateurs :**

L'opérateur a pour but d'acquérir de l'information (par l'intermédiaire d'objets - voir ci dessus), de la transformer et d'en fabriquer de nouvelles. Sauf ambiguïté, il n'est pas positionnel par rapport aux objets sur lesquels il agit.

De manière générale, il est reconnu par ses quatre premiers caractères. Il est possible de changer le nom d'un opérateur en utilisant l'opérateur MOT :

$Opea = \mathbf{MOT} \text{ } opeb ;$

De même, il est possible de donner un nom générique à tout un ensemble d'opérateurs formant un texte :

$Toto = \mathbf{TEXT} \text{ ' TRAC CACH ' ;}$

La syntaxe générale d'une instruction avec opérateur est :

$ob1 = \mathbf{OPEA} \text{ } ob2 \text{ } ob3 \text{ ... (OPEB ... ) ...;}$

Où

$Obn$  : sont les objets créés ( $ob1$ ) ou utilisés.

$OPEx$  : sont des noms d'opérateurs.

La parenthèse indique ici que les opérateurs peuvent être enchaînés ou que l'un des objets est fourni par sa définition (qui donc elle même appelle à un opérateur).

Si le nom à gauche du signe = est le même qu'un nom précédent ou qu'un nom à droite, celui-ci est écrasé.

$X = y + z ;$

$X$  est le nom de l'objet créé.

$Y$  et  $Z$  sont les objets permettant de créer  $X$  (objets références).

$+$  est l'opérateur.

On aurait aussi pu écrire  $x = + y z ;$  ou  $x = y z + ;$

### 3-2-3 Les directives :

Il est aussi possible de faire appel à une directive dans une instruction qui s'écrit alors:  
**DIRE** obj. 1 ;

On dit que c'est une directive s'il n'y a pas de signe =.

On aura déjà remarqué que toutes les instructions se terminent par ; De même, elle s'étend sur 9×72 caractères au maximum et est lue en format libre (un blanc suffit pour séparer les mots).

### 3-1. Principe de maillage :

La modélisation d'une structure conduit, en général, à s'intéresser à plusieurs aspects.

La géométrie : c'est l'aspect le plus habituel. « *Faire un maillage* » c'est couramment discrétiser la géométrie.

Les matériaux : il arrive parfois, mais moins habituellement que l'on considère aussi cet aspect.

Il en est plus ou moins de même pour :

- Les caractéristiques géométriques.
- Les chargements.
- Les conditions aux limites.
- Les conditions initiales.

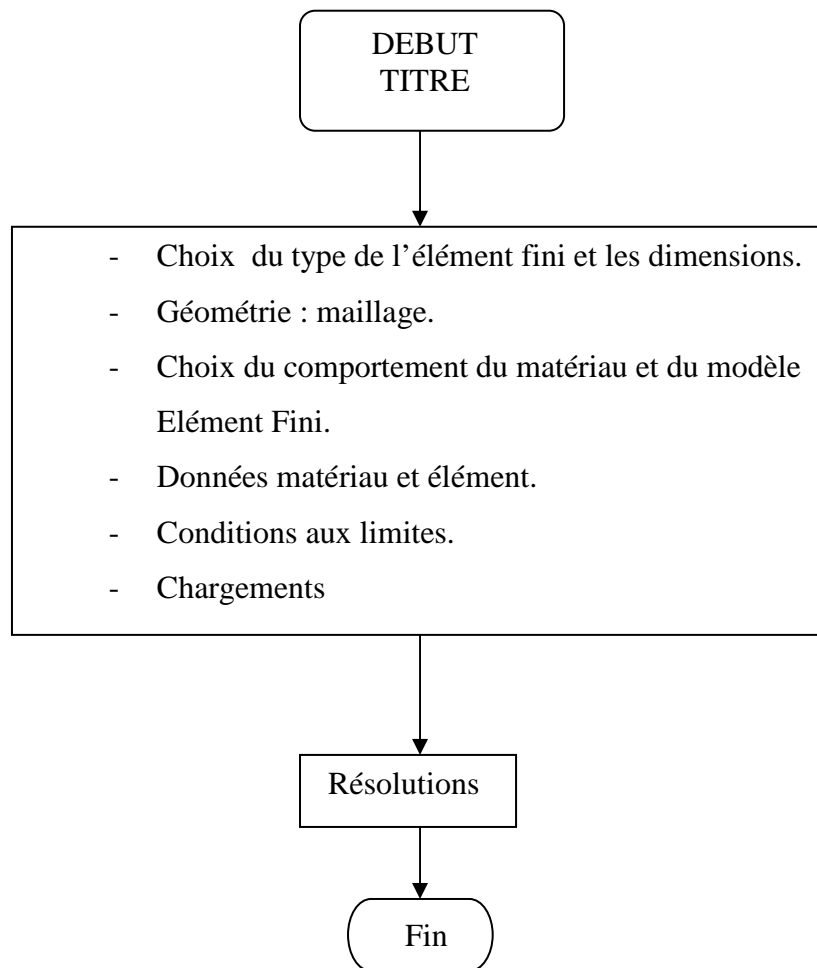
Par contre, ce n'est jamais le cas pour les entités qui seront dépouillées (de manière graphique ou numérique).

Tous ces aspects peuvent être modélisés par des objets différents mais certes pas indépendants, ils s'appuient sur le même ensemble de points.

La structure sera décomposée en blocs faciles à manipuler. Compte tenu des outils on dispose et que l'on décrira ci-après.

Le maillage avec *GIBI* n'impose pas, *a priori*, de système d'unités. C'est l'utilisateur qui doit fournir toutes les valeurs numériques de manière cohérente.

De même les données sont fournies par défaut dans le repère cartésien. On plus *CASTEM* permis de fournir les données dans un repère quelconque, à la condition qu'elles soient transformées avant toute opération de maillage dans le repère cartésien. On verra aussi une procédure permettant d'afficher le repère utilisé, sur le dessin.

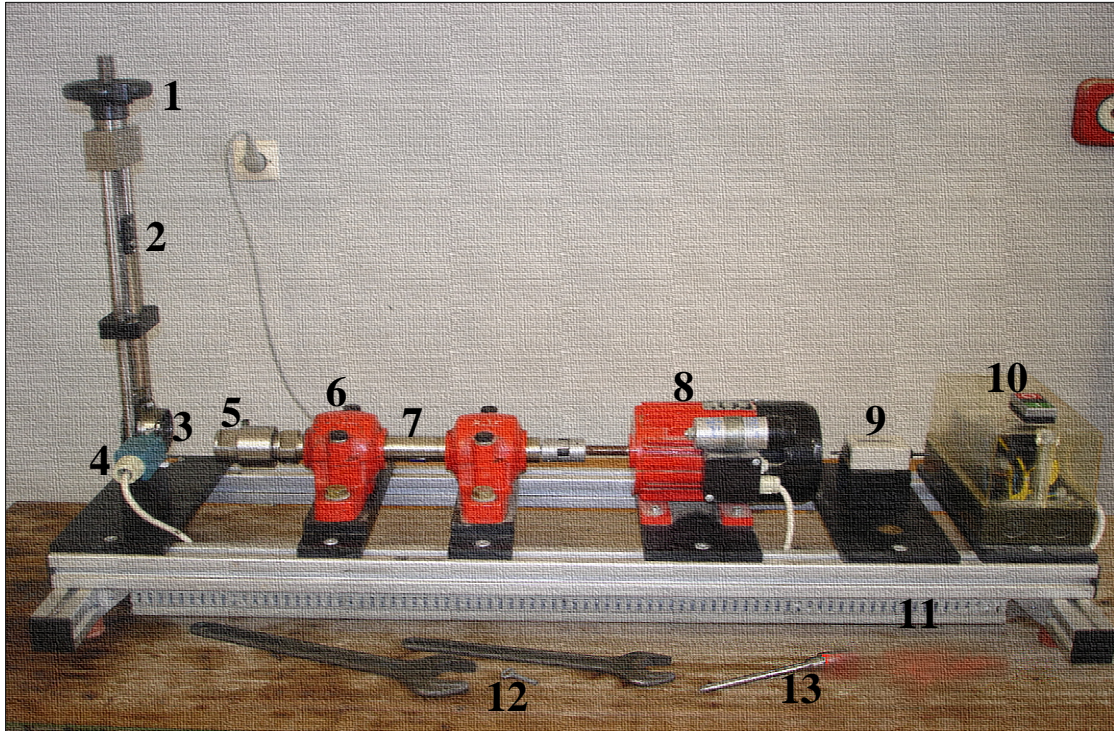
**3-2.L'organigramme du simulation par CASTEM :****Figure 3-1** : L'organigramme du simulation par *CASTEM*.

**3-4. Machine d'essai de fatigue :**

On distingue plusieurs machines d'essai de fatigue, selon le mode de sollicitation (flexion plane, flexion rotative, torsion, traction compression, *etc.*), et selon les facteurs d'influence (température, fatigue sous corrosion, *etc.*).

Le laboratoire de la résistance des matériaux (*RDM*) du département de génie mécanique de l'université de M'sila contient une machine d'essai de fatigue en flexion rotative modèle : **GUNT**, de type : **WP 140**, qui a les caractéristiques suivantes [16]:

- Courant alternatif: 220 V.
- Fréquence: 50 Hz.
- Charge maximale: 500 N.
- Échelle de graduation : 5 N.
- Environnement: air ambiant.
- Température: ambiante.

**3-4-1. Description de la machine :**

**Figure 3.2.** La machine d'essai de fatigue GUNT WP 140 [16].

- 1 Volant.
- 2 Chariot transversal gradué.
- 3 Roulement.
- 4 Fin de course.
- 5 Mandrin.
- 6 Palier lisse.
- 7 Arbre de transmission.
- 8 Moteur électrique.
- 9 Compteur.
- 10 Tableau de commande.
- 11 Châssis.
- 12 Clés.
- 13 Eprouvette.

### 3-5. Epreuve d'essai :

Le choix de l'éprouvette d'essai dépend de l'essai que l'on veut effectuer et de la machine dont on dispose.

#### 3-5-1. Forme d'éprouvette d'essai :

On distingue les éprouvettes axisymétriques à section circulaire, soit cylindriques à section constante.

#### 3-5-2. Dimensions :

Elles dépendent de la capacité de la machine (charge d'essai maximale : 25% de la capacité de la machine) et de ces caractéristiques (fréquence propre de l'éprouvette supérieure à deux fois la fréquence d'essai).

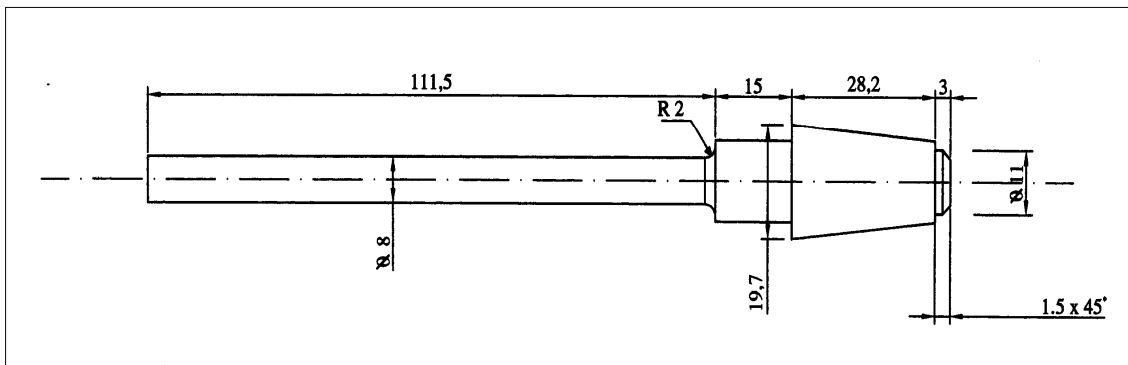


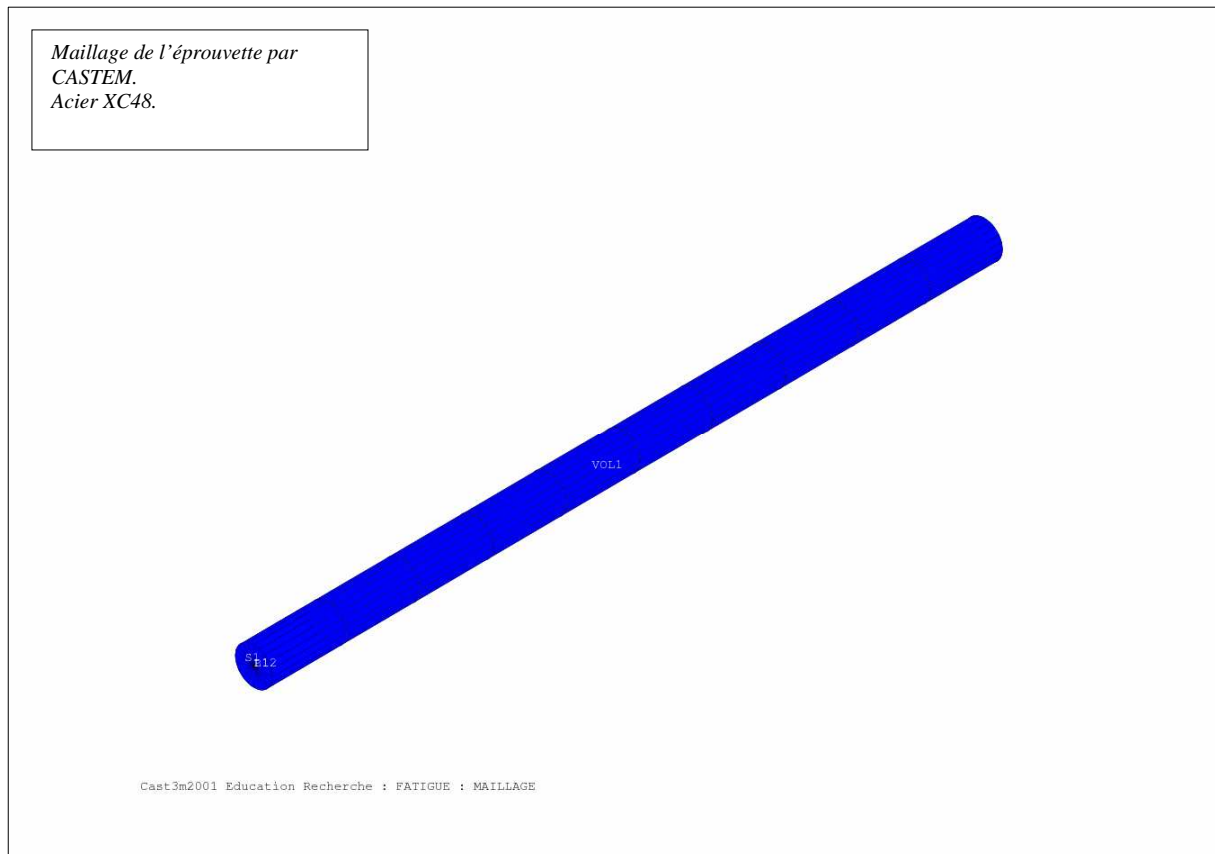
Figure 3.3. Epreuve d'essai de fatigue [16].

#### 3-5-3 Matériau utilisé:

Le matériau utilisé dans notre étude est de l'acier XC48 livré normalement sans traitement c'est un acier thermique, facilement usinable et orienté vers la production des pièces de construction pour outillage à plastique, moules de soufflage et toutes sortes d'outils à main à l'état trempé (marteaux, fourches, couteaux, scies, tournevis, ...etc.).

### 3-6. Maillage d'éprouvette :

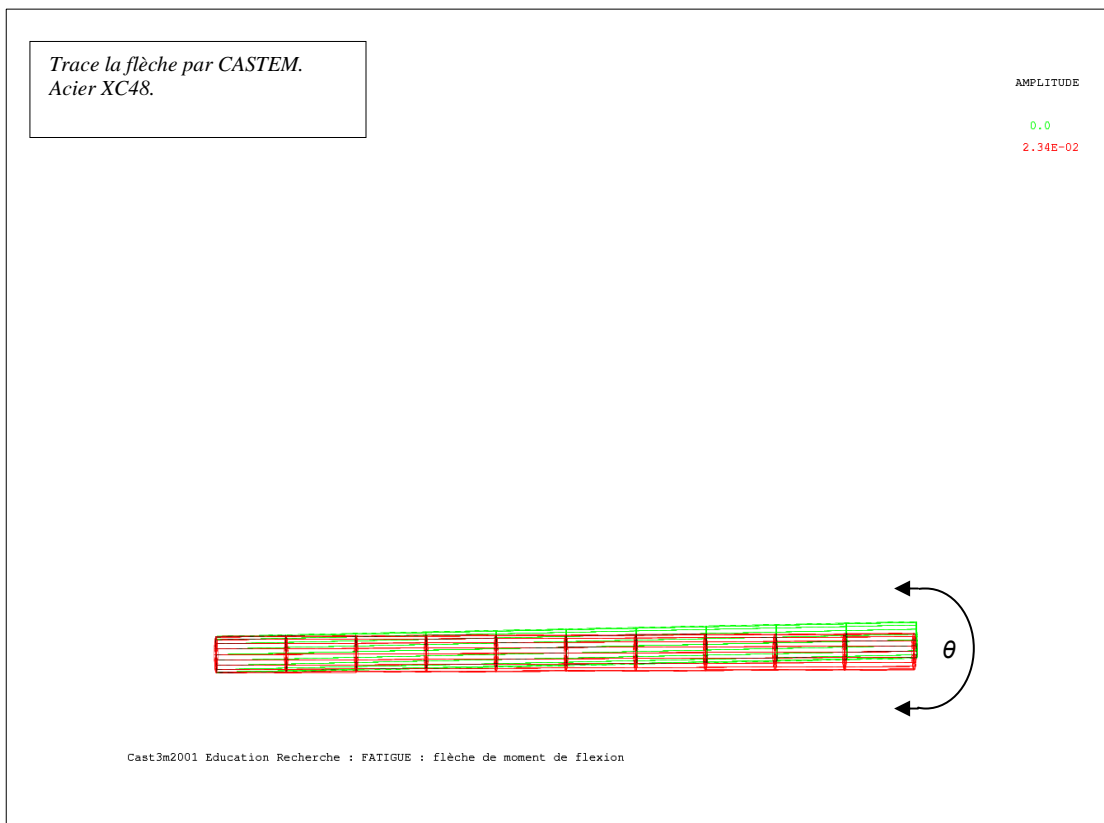
Dans notre cas l'éprouvette cylindriques à section constante, soit toroïdales à section variable lisse et entaillée la figure (3-4) représente le maillage par *CASTEM*.



**Figure 3-4 :** Le maillage d'éprouvette par *CASTEM*.

**3-6. Contrainte maximal trace la flèche par CASTEM :**

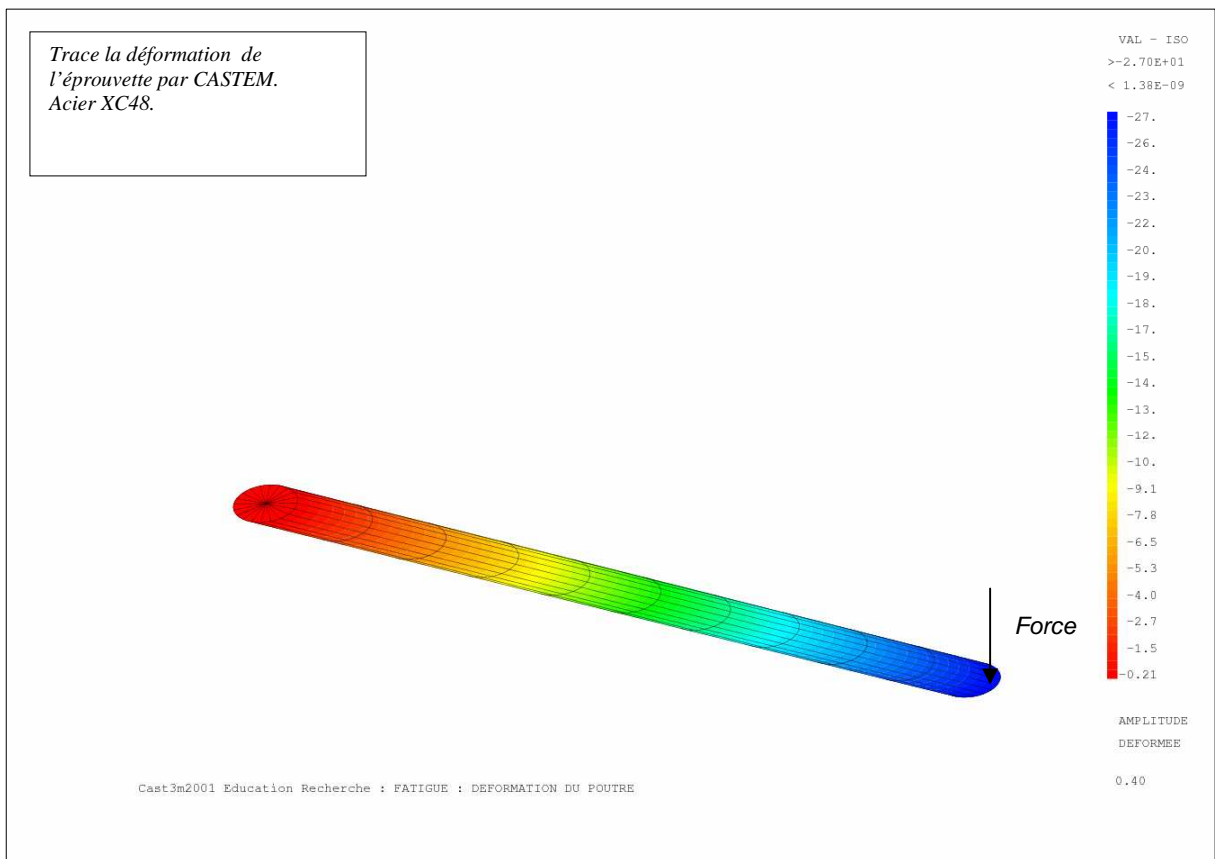
La machine de la flexion rotative la force est appliquée dans l'extrémité qui se produit un moment de flexion la (figure3-5) représente la flèche de moment de flexion.



**Figure 3-5 :** Traçage de la flèche par *CASTEM*.

**3-7. Trace les déformations sur l'éprouvette :**

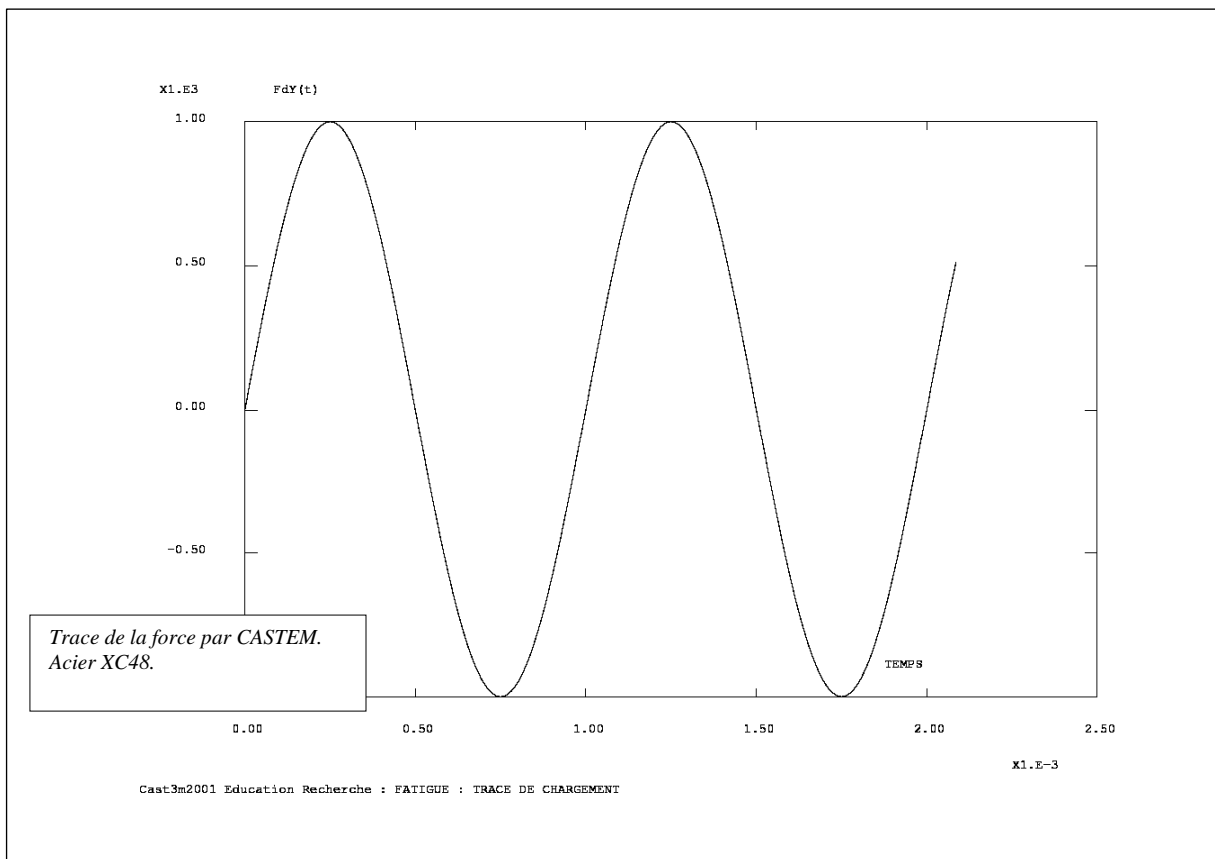
La fatigue par flexion rotatif (moment de flexion) produit des déformations sur l'éprouvette qui représente sur la (figure3-6).



**Figure 3-6 :** Les déformations sur l'éprouvette par *CASTEM*.

**3-8 La force de la flexion rotative :**

Généralement les forces dans la fatigue sont des forces sinusoïdales dans le cas de flexion rotatif la force est représenté par *CASTEM* dans la figure (3-7).



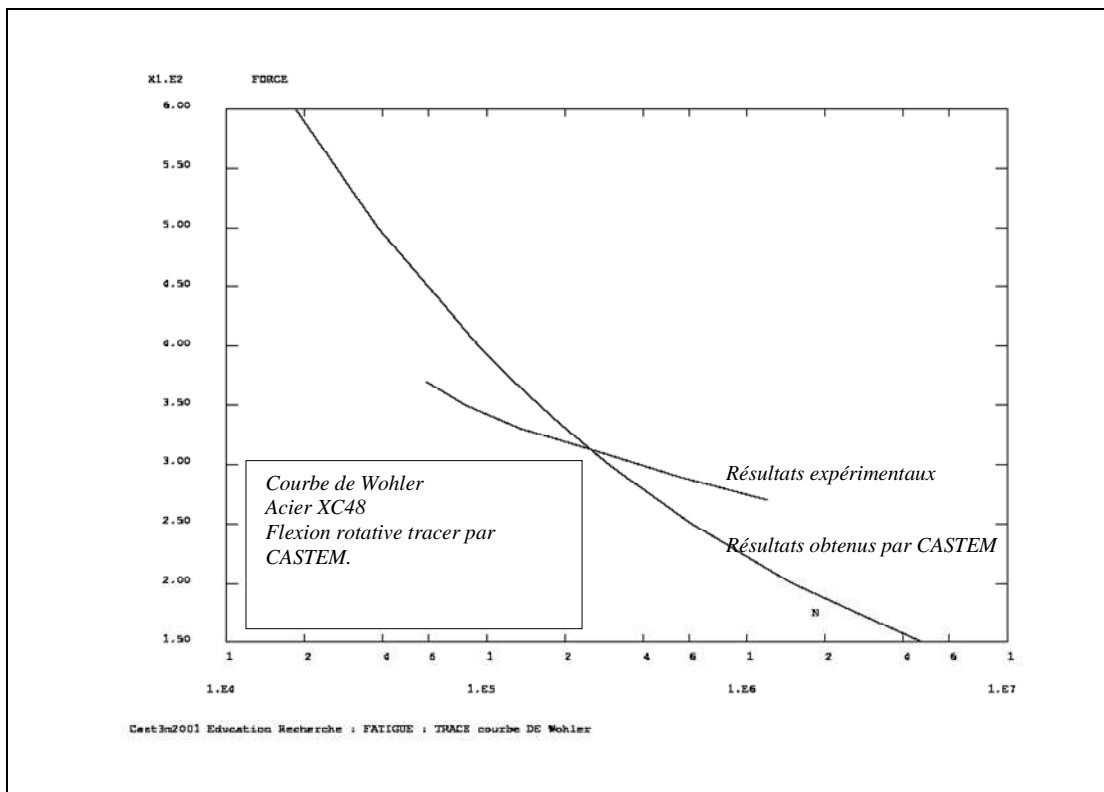
**Figure 3-7 :** Traçage de la force par *CASTEM*.

### 3-9 Trace de la courbe de Wohler :

On trace sur la courbe de Wohler ou courbe *S.N.* (Stress-Number of cycles) l'amplitude de la contrainte de flexion rotatif en fonction du nombre de cycles à la rupture. La contrainte moyenne est nulle voir Figure (3-8).

On a deux courbes :

- la courbe verte est obtenais par des résultats calculés par logicielle *CASTEM* sur *acier XC48*.
- la courbe rouge est obtenais par des résultats expérimentaux (sur *acier XC48*) par Lyamine SAIDANI université de m'sila.



**Figure 3-8 :** La courbe de Wohler obtenais par *CASTEM*.

**CHAPITRE 4**  
**ANALYSE PROBABÉLISTE ET**  
**FIABILISTE ET CALCULE DE**  
**DURÉE DE VIE**

**CHAPITRE 4****ANALYSE PROBABÉLISTE ET FIABILISTE ET CALCULE DE DURÉE DE VIE**

S'il est un point qui, dans un premier temps, dérouté un peu l'expérimentateur débutant dans des essais de fatigue, c'est bien la dispersion des résultats qu'il observe.

Ceci peut lui faire dire que cette dispersion est l'une des caractéristiques principales du phénomène de fatigue.

Un critère de fatigue déterministe ne tient pas compte de cette dispersion, il se contente de fournir une réponse binaire à la question : « la pièce va-t-elle se fissurer avant un nombre de cycles fixe ? ».

Pour palier cet inconvénient majeur, différentes approches probabilistes sont maintenant présentées.

La probabilité parmi toutes les caractéristiques d'une distribution de variables aléatoires qui existent, nous en conserverons trois : la moyenne, l'écart-type et le coefficient de variation.

**4-1) Moyenne arithmétique :**

C'est ce qu'on appelle une caractéristique de tendance central, elle est définie par :

$$(4-1) \quad m = \frac{1}{n} \sum_i x_i .$$

$n$  : Est le nombre d'observation de la population.

*Nota* : pour un échantillon de population, la moyenne s'écrit  $\bar{x}$ .

**4-2) L'écart-type :**

La dispersion, ou l'étalement des observations de la population est généralement caractérisée par l'écart-type vrai, celui-ci est défini comme la racine carrée de la variance.

C'est-à-dire la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des écarts entre chaque observation et leur moyenne arithmétique :

$$(4-2) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - m)^2}{n}} .$$

*Nota* : les essais étant réalisés à partir d'un échantillonnage exhaustif dans une population de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$  inconnus, il est très généralement calculé l'écart-type empirique  $s$  tel que :

$$(4-3) \quad s = \sqrt{\frac{n \sum_i x_i^2 - (\sum x)^2}{n(n-1)}} .$$

#### 4-3) Coefficient de variation :

Le coefficient de variation, nombre sans dimension, est défini comme étant le pourcentage du rapport de l'écart-type par la moyenne, soit pour un échantillon exhaustif d'une population :

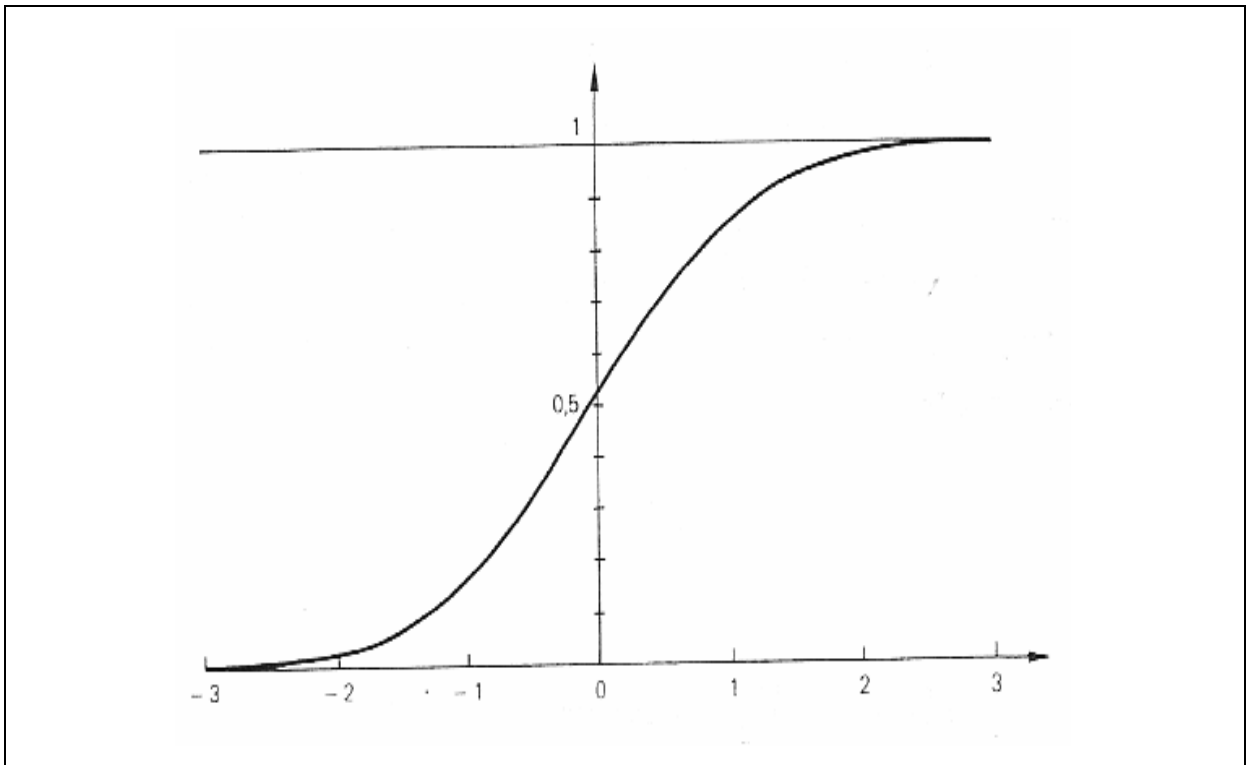
$$(4-4) \quad v\% = 100 \frac{s}{x} .$$

#### 4-5) Conception probabilisable de la courbe de Wöhler :

La courbe de Wöhler étant tracée « au mieux » entre un certain nombre de points expérimentaux. Elle ne représente plus, dans un concept probabiliste, que la frontière séparant le domaine où la probabilité de rupture est inférieure à 50% à gauche de la courbe, du domaine où la probabilité de rupture est supérieure à 50% à droite de la courbe.

Pour le concepteur qui réalise des pièces devant avoir le moins possible de « chances » de se rompre, le domaine à utiliser est, bien évidemment, celui de gauche.

Il est donc nécessaire de quantifier ce domaine en probabilités de rupture et donc d'utiliser les lois de probabilités.



**Figure 4.1.** Concept probabiliste de la courbe de Wöhler [3]

#### **4-5) Distribution statistique des variables aléatoires continues contrainte et temps :**

Il est couramment admis, et cela est vérifié par l'expérience que :

- La distribution de la contrainte suit la loi normale ou loi de *Laplace-Gauss* pour un nombre de cycles donné, ce qui en particulier, est valable pour la limite de fatigue.

- La distribution du nombre de cycles à rupture suit la loi *log-normale* pour une contrainte donnée, autrement dite que les logarithmes des nombres de cycle à rupture suivent la loi normale [3].

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de définir ce qu'est une loi normale.

#### 4-6) Loi normale :

##### 4-6-1) Fonction densité de probabilité de la loi normale centrée réduite :

Si une variable aléatoire suit une loi normale, cette loi est entièrement définie par la moyenne  $m$  et l'écart-type  $\sigma$  de la population. La loi s'écrit alors  $N(m, \sigma)$ .

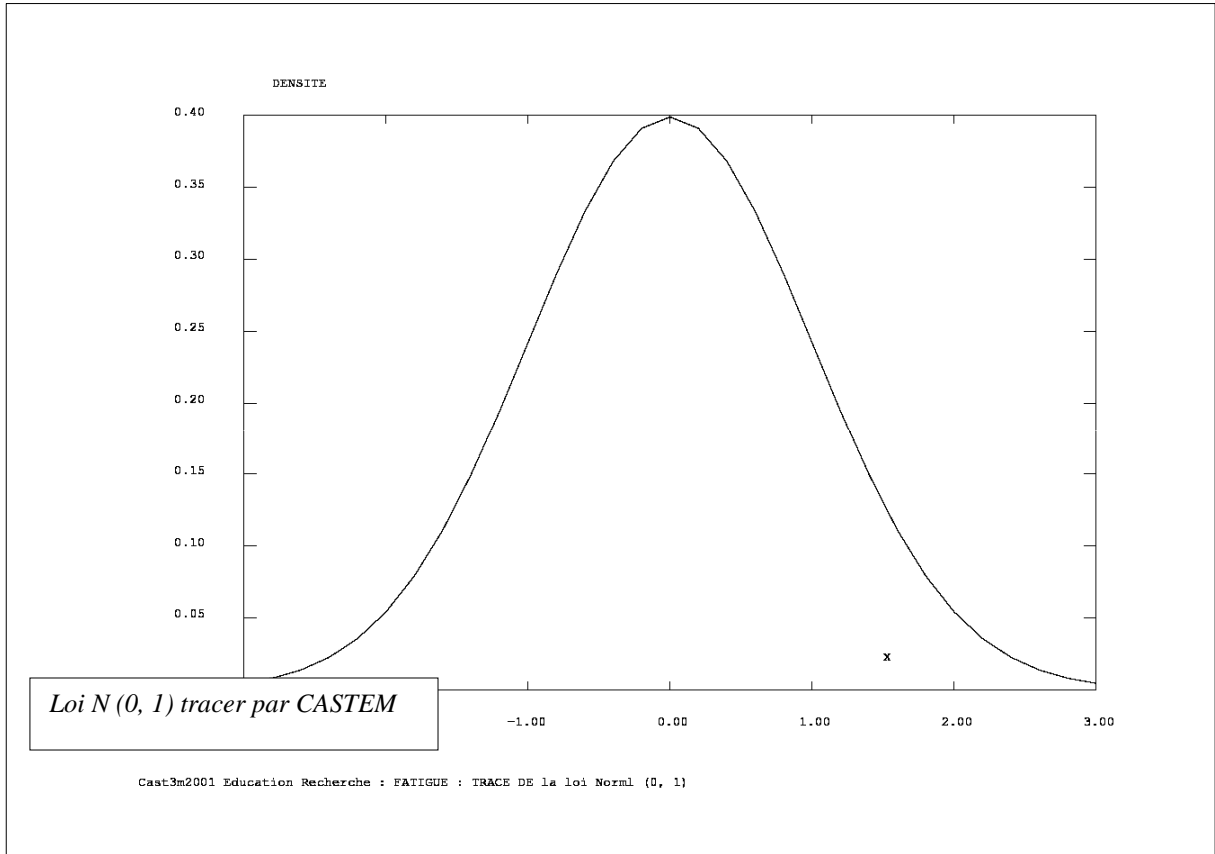
Si on note  $x$ , la réalisation de l'événement, il est toujours possible d'introduire la variable aléatoire.

$$(4-5) \quad u = \frac{x - m}{\sigma} .$$

Cette opération permet d'utiliser les propriétés de la loi normale centrée réduite qui s'écrit  $N(0, 1)$  est :

$$(4-6) \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} .$$

Elle se présente sous la forme de la courbe en cloche symétrique représentée ci-dessus par *CASTEM*.



**Figure 4.2.** Densité de probabilité de la loi  $N(0, 1)$  par CASTEM.

#### 4-6-2) Fonction de répartition :

La fonction intégrale ou fonction de répartition s'écrit [3] :

$$(4-7) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du .$$

Elle traduit la probabilité qu'a la variable  $Z$  représentant la population totale d'être inférieure à une certaine valeur  $x$ .

En termes de défaillance, donc on utilisant le temps comme variable aléatoire et ceci sur un plan général, quelle que soit la loi suivie par cette variable aléatoire.

La fonction de répartition :

$$(4-7) \quad F(t) = \int_0^t F(u).du .$$

Exprime la probabilité qu'a l'événement de se produire avant l'instant  $t$ .

#### **4-7) La fiabilité :**

##### **4-7-7) Définition :**

La fiabilité est la probabilité pour qu'un dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions données, pendant un temps donné.

##### **4-7-2) Fiabilité des courbes d'équiprobabilité de rupture :**

Tous les éléments sont alors en place dans des courbes d'équiprobabilité de rupture :

- « pendant un temps donné » est représenté par le nombre de cycles ( $\log N$ ) en abscisses.
- « dans des conditions données » est représenté par l'effort ou la contrainte en ordonnées.
- « la probabilité » est représentée par les diverses courbes paramétrées en probabilité de non rupture avec un niveau de confiance donné.

C'est ainsi que pour les aciers dont des résultats constituent un des supports de cette étude, la simulation par *CASTEM* permis de réaliser dans cet état d'esprit de déterminer les courbes d'équiprobabilité de rupture.

**4-7-3) Utilisation des courbes d'équiprobabilité de rupture dans un concept fiabiliste :**

Dans le cas où une rupture ou un échappement de charge peut avoir des conséquences humaines graves, une sécurité est exigible soit, par exemple, fiabilité de  $10^{-3}$  ( $p = 0.001$ ) avec un niveau de confiance  $\gamma = 0.95$ .

Dans le cas où une rupture ou un échappement de charge ne risque d'avoir que des conséquences techniques mineures, il peut n'être demandé qu'une fiabilité relativement faible, par exemple de  $0.75$  ( $p = 0.75$ ) avec un niveau de confiance également faible, par exemple  $\gamma = 0.75$ .

**4-7-4) Fiabilité en temps pour un taux de travail donné :**

La question qui se pose, sous une charge donnée, au bout de combien d'effort répétés est : doit-on remplacer la pièce ?

La réponse est implicite après traitement et tracé des courbes d'équiprobabilité de rupture sur lesquelles la réponse est directement lue.

**4-7-5) Fiabilité en taux de travail pour un temps donné :**

Inversement, supposons que les pièces soient vendues pour  $10^6$  manœuvres, quel doit être le taux de travail maximal admissible pour le cas envisagé ?

Comme précédemment, l'exploitation des courbes d'équiprobabilité de rupture permet de répondre à la question.

**4-8) Tracé les courbes d'équiprobabilité :****4-8-1) Le niveau de confiance :**

Il est couramment admis, et vérifié pratiquement par l'expérience que :

- La distribution de l'effort est normale pour un nombre de cycle donné.
- La distribution du logarithme des nombres de cycles ( $\log N$ ) est normale pour un effort donné [2].

Ces deux propriétés sont extrêmement précieuses, car connaissant la moyenne  $m$  et l'écart-type  $\sigma$  de la population entièrement expérimentée, il est possible de déterminer le pourcentage de rupture au-delà d'un certain nombre d'écart-types à partir de la moyenne [3], en se référant aux tables de la loi normale centrée réduite, donc d'effectuer l'opération :

$$(4-8) \quad m - \mu\sigma .$$

Mais les essais sont réalisés à partir d'un échantillonnage exhaustif dans une population de moyenne  $m$  et écart-type  $\sigma$  inconnus.

Les résultats obtenus sont donc uniquement valables pour un niveau de confiance  $\gamma = 0.5$  en remplaçant  $m$  par la moyenne  $\bar{x}$  de l'échantillon et  $\sigma$  par l'écart-type empirique  $s$  de cette échantillon.

Vouloir ajuster les courbes d'équiprobabilité de rupture représentatives de la population à partir de cet échantillon revient alors à introduire un niveau de confiance supérieur à 0.5.

**4-8-2) Conséquence de la prise en compte d'un niveau de confiance :**

Une telle opération va :

- Diminuer la contrainte admissible pour une probabilité de rupture donnée, ce qui revient à effectuer :

$$(4-9) \quad \bar{x} - k s \text{ au lieu de } m - \mu\sigma \text{ avec } k > \mu.$$

- Déterminer l'intervalle de confiance contenant la vraie valeur de la moyenne  $m$ .

Le problème revient donc à :

- Déterminer un nombre  $k$  tel que la probabilité de la variable aléatoire  $\bar{x} - ks$  de ne pas dépasser  $m - ks$ , soit exactement  $\gamma$ , ces nombres  $k = f(p, n, \gamma)$  sont donnés au tableau (voir annexe : I).
- Accepter un risque  $1 - \gamma$  que l'intervalle de confiance ne contienne pas les vraies valeurs de la moyenne  $m$  à partir de risques limites.

$$(4-10) \quad \beta_1 = \frac{1-\gamma}{2} \quad \text{Et} \quad \beta_2 = \frac{1+\gamma}{2}.$$

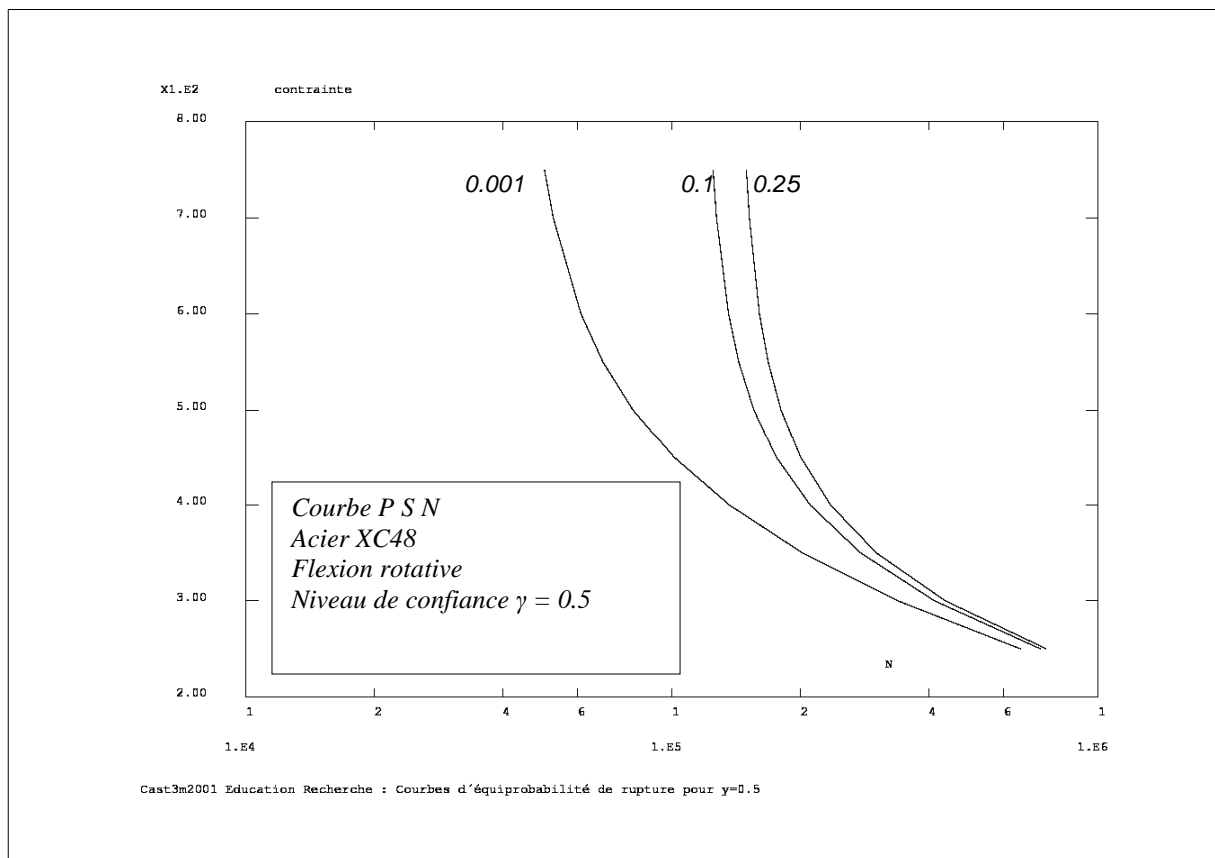
Ces limites sont tabulées à partir de la loi de Student-Fischer (voir annexe : II) et de déterminer  $t_\beta$  en fonction du nombre de degrés de liberté  $\nu = n - 1$ .

L'intervalle de confiance de la moyenne  $m$  a alors comme limites :

$$(4-11) \quad \bar{x} + t_{\beta_1} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{Et} \quad \bar{x} + t_{\beta_2} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

**4-9-1 Courbes d'équiprobabilité de rupture pour un niveau de confiance  $\gamma = 0.5$  :**

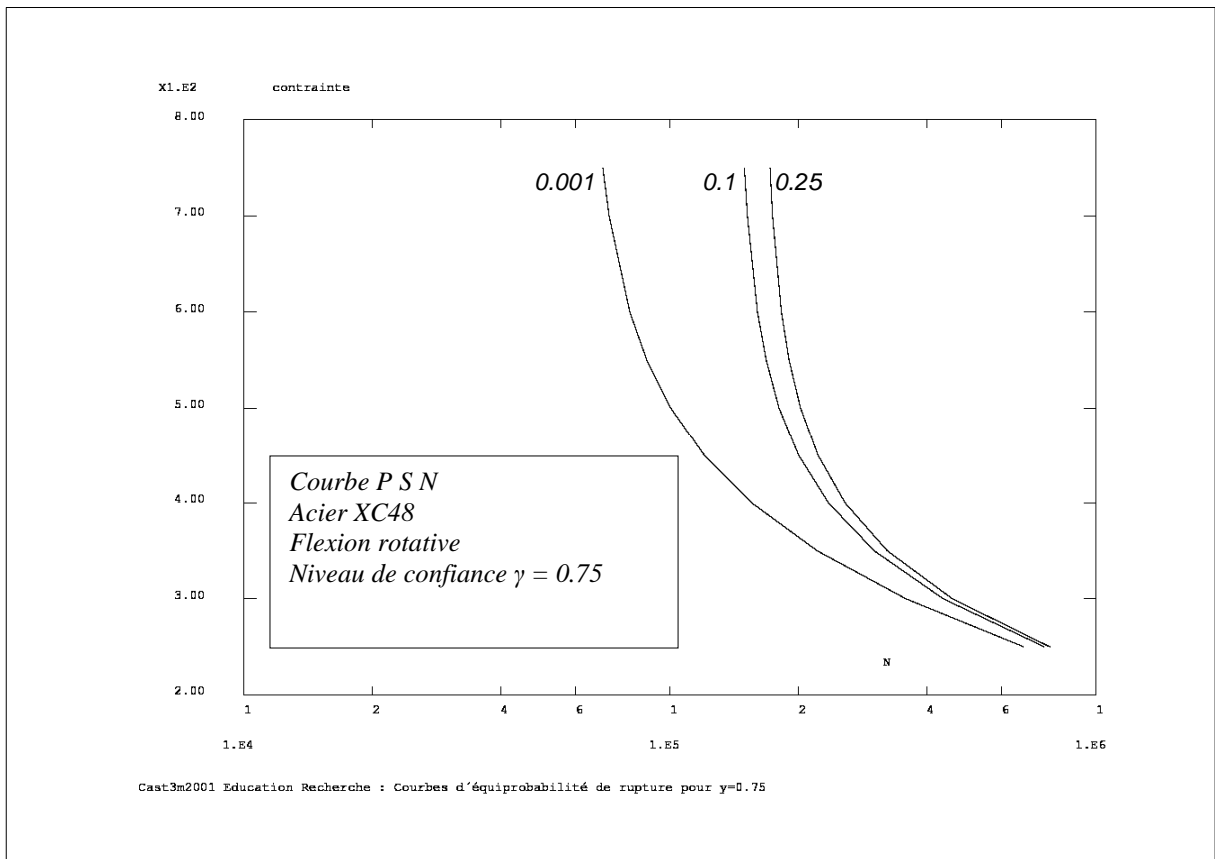
- Pour 0.25.
- Pour 0.01.
- Pour 0.001.



**Figure 4.3.** Courbes d'équiprobabilité de rupture pour un niveau de confiance  $\gamma = 0.5$  tracée par *CASTEM*.

**4-9-2 Courbes d'équiprobabilité de rupture pour un niveau de confiance  $\gamma = 0.75$  :**

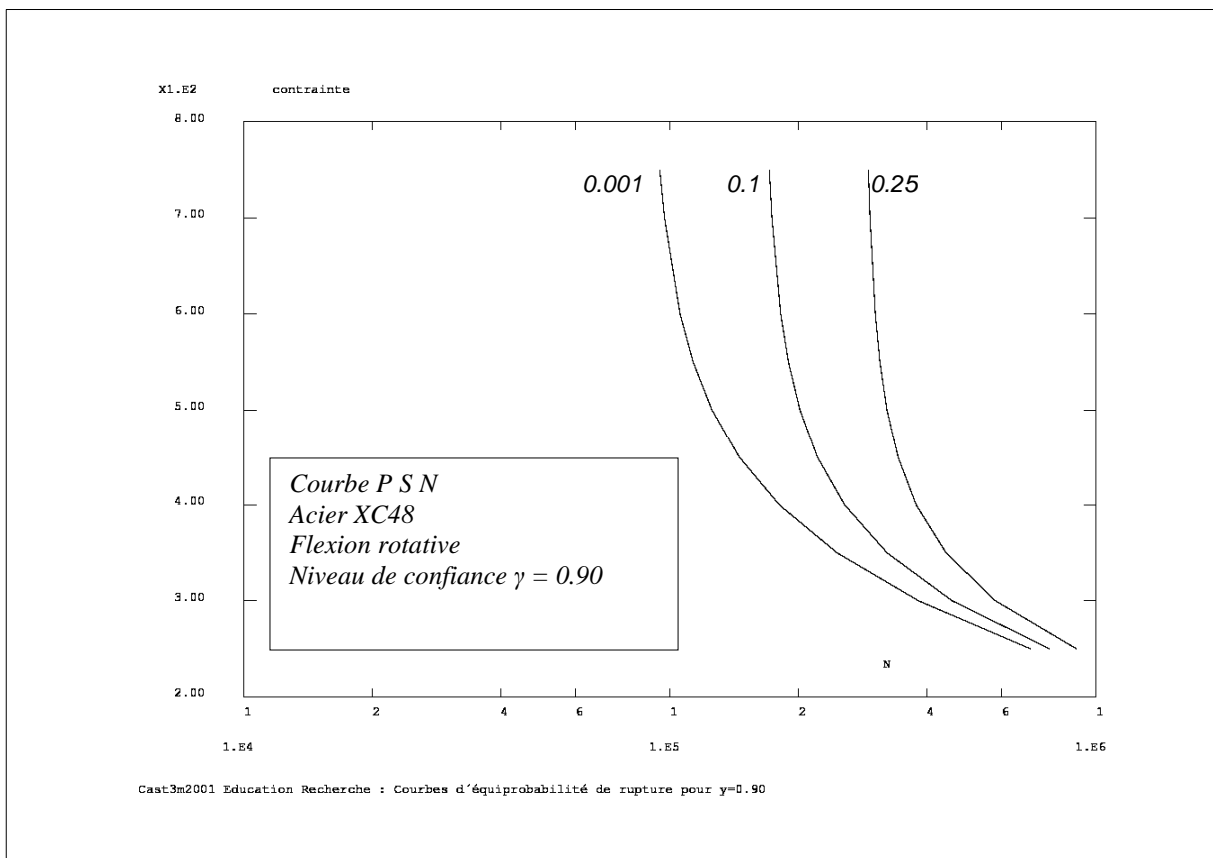
- Pour 0.25.
- Pour 0.01.
- Pour 0.001.



**Figure 4.4.** Courbes d'équiprobabilité de rupture pour un niveau de confiance  $\gamma = 0.75$  tracée par *CASTEM*.

**4-9-3 Courbes d'équiprobabilité de rupture pour un niveau de confiance  $\gamma = 0.90$  :**

- Pour 0.25.
- Pour 0.01.
- Pour 0.001.



**Figure 4.5.** Courbes d'équiprobabilité de rupture pour un niveau de confiance  $\gamma = 0.90$  tracée par *CASTEM*.

### 4-10-1 - La loi linéaire de Miner :

#### 4-10-1.1 - Description de la loi :

Miner est pratiquement le premier auteur ayant donné une formulation mathématique d'une loi d'endommagement.

Les hypothèses de base de sa loi, qui date de 1945, sont les suivantes:

*Hyp.1* : le chargement est une fonction sinusoïdale du temps.

*Hyp.2* : c'est la totalité du travail absorbé par le matériau qui engendre sa rupture par fatigue.

*Hyp.3* : le diagramme de Goodman modifié est la modélisation du diagramme de Haigh qui représente le plus fidèlement le comportement expérimental des matériaux.

*Hyp.4* : l'amorçage d'une fissure macroscopique est l'indicateur de la ruine du matériau.

Il faut noter que Miner souligne les restrictions supplémentaires suivantes à l'utilisation de sa loi:

- Des alliages d'aluminium seuls ont été utilisés pour valider la loi.
- Seuls les cycles dont la contrainte maximale est supérieure à celle qui provoque la ruine par fatigue (amorçage de fissure) à  $10^7$  cycles sont à prendre en compte.

En se basant sur la seconde hypothèse, Miner choisit, pour établir le dommage  $D_i$  du matériau après application de  $n_i$  cycles identiques (figure 4-6), la fraction du travail total absorbé par le matériau.

$$(4-12) \quad D_i = \frac{u_i}{W} = \frac{n_i}{N_{ri}} .$$

Où

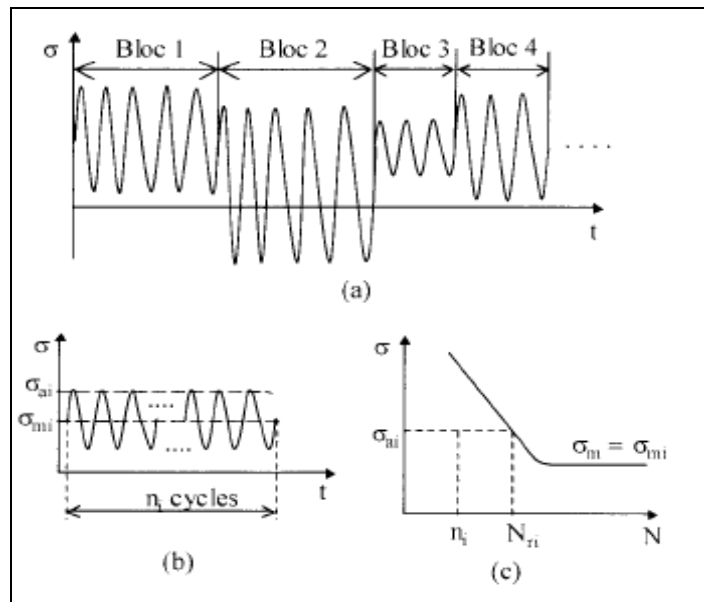
$u_i$  : Est l'énergie absorbée par le matériau (transmise par  $n_i$  cycles).

$W$  : Est le travail total absorbé par le matériau à la ruine par fatigue.

$N_{ri}$  : Est le nombre de cycles considérés à la ruine.

Ce concept conduit à une sommation linéaire des fractions de vie  $ri = ni/Nri$  propres à chaque type de cycles appliqués:

$$(4-13) \quad D = \sum_{i=1}^p \frac{n_i}{N_{ri}} = \sum_{i=1}^p ri.$$



**Figure (4-6) :** Description d'un type de chargement [18].

- (a) séquence composée de plusieurs blocs de sollicitations.
- (b) nombre de cycles  $n_i$  du  $i^{\text{ème}}$  bloc.
- (c) courbe  $S-N$  (amplitude de contrainte en fonction du nombre de cycles).

La ruine du matériau se produit quand la somme  $D$  vaut l'unité. Il s'ensuit l'expression suivante de la fraction de vie résiduelle  $r_p$  au niveau  $p$ , après application de  $p - 1$  blocs de cycles de contrainte:

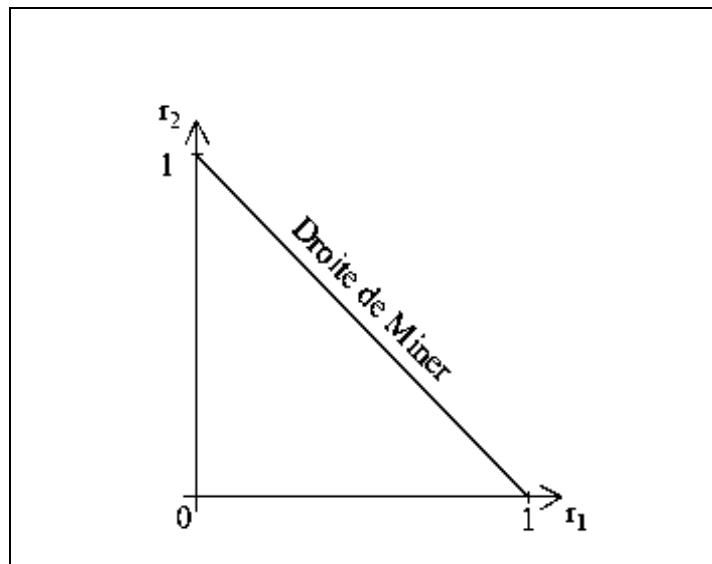
$$(4-14) \quad r_p = \frac{n_p}{N_{rp}} = 1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i \dots$$

$n_p$  Et  $N_{rp}$  : sont respectivement le nombre de cycles appliqués au niveau  $p$  et le nombre de cycles à la ruine par fatigue du matériau sous ce type de chargement. L'application de l'équation (4-14) au cas d'un chargement à deux niveaux de contrainte donne:

$$(4-15) \quad r_2 = 1 - r_1.$$

$r_1$  Et  $r_2$  : sont les fractions de vie aux niveaux 1 et 2 respectivement.

La représentation graphique de la loi de Miner, dans le repère des fractions de vie ( $r_1, r_2$ ), est une droite diagonale (dite droite de Miner) indépendante du niveau de la sollicitation (figure 4-7).



**Figure (4-7):** Courbe des fractions de vie de la loi de Miner (chargement à deux niveaux) [18].

**4-10-1-2 L'application de la règle de Miner :**

Cette règle considère que tout chargement en dessous de la limite de la fatigue expérimentale ne cause aucun endommagement, nous avons des calculs effectués suivant la règle linéaire pour sept (07) cas différents et pour trois courbes *S-N* pour un aciers ordinaire (XC 48) sont résumés sur le tableau ci-dessous.

<i>Echantillon</i>	<i>Pour <math>y=0.50</math></i>	<i>Pour <math>y=0.75</math></i>	<i>Pour <math>y=0.90</math></i>
<i>125</i>	<i>0,998</i>	<i>0,992</i>	<i>0,995</i>
<i>150</i>	<i>0,995</i>	<i>0,984</i>	<i>0,990</i>
<i>175</i>	<i>0,991</i>	<i>0,969</i>	<i>0,981</i>
<i>200</i>	<i>0,984</i>	<i>0,948</i>	<i>0,968</i>
<i>225</i>	<i>0,975</i>	<i>0,917</i>	<i>0,949</i>
<i>250</i>	<i>0,962</i>	<i>0,873</i>	<i>0,922</i>
<i>275</i>	<i>0,944</i>	<i>0,814</i>	<i>0,886</i>
<i>Moyenne <math>m</math></i>	<i>0,978</i>	<i>0,928</i>	<i>0,956</i>
<i>Ecart-type <math>s</math></i>	<i>0,407</i>	<i>0,224</i>	<i>0,264</i>
<i>Rapport <math>s/m</math></i>	<i>0,416</i>	<i>0,242</i>	<i>0,277</i>

**Tableau 1 :** Somme de Miner sur un acier ordinaire.

**4-10-1-3 - Avantages et inconvénients :****a) Avantages :**

- La loi de Miner est simple d'application.
- Elle reste de ce fait la loi la plus utilisée.
- Cette loi n'a aucun paramètre particulier à déterminer.
- Elle nécessite simplement la connaissance de la courbe  $S-N$  du matériau [18].

**b) Inconvénients**

- La loi de Miner ne prend pas en compte la fraction de vie atteinte (c'est à dire le niveau d'endommagement du matériau) pour la description du dommage engendré par un cycle.
- Elle ne tient pas compte de l'ordre d'apparition des cycles (histoire du chargement).
- Elle ne décrit donc aucun effet de séquence.
- Elle ne prend pas en compte l'effet endommageant des cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance du matériau ("petits" cycles) même si ceux-ci sont appliqués après que l'endommagement du matériau soit initié (par un ou plusieurs cycles d'amplitude supérieure à la limite d'endurance) [18].

# **CONCLUSION GÉNÉRALE**

## *Conclusion*

Le travail abordé dans ce mémoire l'étude du comportement en fatigue des aciers en flexion rotative en vue de tenter d'apporter une réponse à certains inconvénients constatés.

Notre étude avait pour but de caractériser le matériau *XC48* à la fatigue par modalisation et simulation des solides et structures par la méthode des éléments finis, pour ce but on utilise le code *CASTEM*.

Pour ce faire, nous avons donc réalisé des simulations sur des éprouvettes cylindriques entaillées, par la méthode des éléments finis.

L'étude a comporté les étapes suivantes :

- Maillage d'éprouvette (notre cas une éprouvette cylindrique pleine à section constante).
- Déterminer les différentes contraintes sur l'éprouvette qui donne une évaluation générale sur les sites d'endommagements par fatigue (rupture).
- Des simulations sur des éprouvettes cylindriques entaillées ont été réalisées pour calculer la courbe d'endurance. La courbe simulée a été comparée à la courbe calculée expérimentalement pour le même acier. Un calcul fiabiliste a aussi été entrepris.
- Les analyses probabilistes ont été faites sur ces résultats par des bases mathématiques et des tableaux qui permettent au concepteur d'utiliser cette dispersion mesurée, puis tracer les courbes d'équiprobabilité.
- Calcul de la durée de vie par la loi de Miner qui est utilisée depuis l'origine (près de 60 ans maintenant et toujours pas à la retraite).

La description des résultats, observée lors le phénomène de fatigue des aciers est la résultante :

Des simulations sur des éprouvettes cylindriques entaillées ont été réalisées pour calculer la courbe d'endurance. La courbe simulée a été comparée à la courbe calculée expérimentalement pour le même acier. Un calcul fiabiliste a aussi été entrepris.

L'étude des modifications de structure accompagnant et les phénomènes de fatigue montre qu'il faut intervenir successivement plusieurs mécanismes pour l'initiation puis pour les différents stades de propagation des fissures de fatigue et que ces mécanismes dépendent du niveau de contrainte et de la nature du métal considéré.

Toutes pièces mécaniques en fonctionnement normal est soumises à un certain nombre de sollicitation d'origines diverses, des valeurs maximales généralement connues mais variables dans le temps et se traduisent pour la plupart par des variations cycliques des contraintes.

Toutes pièces fabriquées pour tenir en conséquence, seulement, on constate souvent ta ruine parfois catastrophique de structures pourtant solidement construites. Alors qu'elles ne sont soumises qu'à des contraintes dynamiques des valeurs modestes par rapport aux caractéristiques mécaniques du matériau utilisé.

Il est donc indispensable de pouvoir des le départs chiffres ce risque compte tenu des sollicitations imposées et caractériser le comportement en fatigue des aciers. Cette caractérisation peut se faire soit par des essais de fatigue qui nécessite beaucoup de moyens et de temps, soit par la *simulation*.

# **BIBLIOGRAPHIE**

***Bibliographie :***

- [1] A.PINEAU P.PETREQUIN C. BATHIAS, JEAN-PAUL. BAÏLON, La fatigue des matériaux et des structures, Hermes, Paris, 2<sup>e</sup> édition (1997).
- [2] Vincent MONCHIET, Eric CHARKALUK, Djimedo KONDO L.M.L.-UMR CNRS 8107, U.S.T.L., Bd. Langevin, 59655 Villeneuve d 'Ascq Cedex.
- [3] Jean-Jacques MARIGO LMM-UPMC, 4 place Jussieu, case 162, 75252 PARIS Cedex05.
- [4] Malloum SOULTAN l'institut national des sciences appliquées de Lyon (thèse de doctorat).
- [5] C. BATHIAS, JEAN-PAUL. BAÏLON, La fatigue des matériaux et des structures, Hermes, Paris, 2<sup>e</sup> édition (1997).
- [6]Jean-Christophe LE ROUX direction des technologies avancées centre d'études et de recherches sur les matériaux CEA/Saclay
- [7]Antoine FISSOLO direction des technologies avancées centre d'études et de recherches sur les matériaux CEA/Saclay
- [8] P. BREVET PB/MMC 2005-212 Journée « CABLES 2005 » Pathologie des haubans et câbles fatigue corrosion.
- [9] A. BRAND, Calcul des pièces à la fatigue méthode de GRADIENT CETIM (1980).
- [10] A. BRAND, J-F. FLAVENOT, R. GREGOIRE et C. TOURNIER, Donnés technologiques sur la fatigue, CETIM 3<sup>e</sup> édition (1992).
- [11] R. CAZAUD, G. POMEY, P. RABBE et Ch. JANSSEN, La fatigue des métaux, DUNOD, Paris 5<sup>e</sup> édition (1969).
- [12] G. POMEY, P. RABBE, Ruptures de fatigue des pièces de machines. Classification et analyse, DUNOD, Paris (1968).
- [13] C. BOUHELIER, Mécanique de la rupture. Seuil de propagation. Propagation des fissures par fatigue, CETIM 3<sup>e</sup> édition (1989).

- [14] G. POMY, H-P. LIEURADE, Techniques de l'ingénieur, M 130.
- [15] C. W. WEGST, La clé des aciers, STAHLSCHÜSSEL (1989).
- [16] SAIDANI Lyamine Etude expérimentale du comportement en fatigue des métaux par flexion rotative Université M<sup>ed</sup> Boudiaf de M'sila 2007
- [17] M-HUTHER et M-ZEHRI Endommagement par fatigue sous chargement. Méthodes actuelles et perspectives d'avenir, Association Technique Maritime et Aéronautique, 75008 PARIS.
- [18] NGARGUEUDEJIM Kimtanggar Contribution à l'étude des lois d'endommagement en fatigue MIEGA – INSA Lyon 2003.

# **ANNEXES**

Annexe I

Annexe I: Détermination de k en fonction du nombre d'essais n, de la probabilité de survie en pourcentage p % et du niveau de confiance  $\gamma$  %. Extrait de ASTM, 1963 [3].

P \ n	75	90	95	99	99,9	75	90	95	99	99,9
	$\gamma = 0,50$					$\gamma = 0,75$				
3 .....	0,773	1,498	1,939	2,765	3,688	1,464	2,501	3,152	4,369	5,805
4 .....	0,739	1,419	1,830	2,601	3,464	1,256	2,134	2,680	3,726	4,910
5 .....	0,722	1,382	1,780	2,526	3,362	1,152	1,961	2,463	3,421	4,507
6 .....	0,712	1,360	1,750	2,483	3,304	1,087	1,860	2,336	3,243	4,273
7 .....	0,705	1,346	1,732	2,453	3,265	1,043	1,791	2,250	3,126	4,118
8 .....	0,701	1,337	1,719	2,436	3,239	1,010	1,740	2,190	3,042	4,008
9 .....	0,698	1,329	1,709	2,421	3,220	0,984	1,702	2,141	2,977	3,924
10 .....	0,694	1,324	1,702	2,411	3,205	0,964	1,671	2,103	2,927	3,858
11 .....	0,693	1,320	1,696	2,402	3,193	0,947	1,646	2,073	2,885	3,804
12 .....	0,691	1,316	1,691	2,395	3,183	0,933	1,624	2,048	2,851	3,760
13 .....	0,690	1,313	1,687	2,388	3,175	0,919	1,606	2,026	2,822	3,722
14 .....	0,689	1,311	1,684	2,384	3,168	0,909	1,591	2,007	2,796	3,690
15 .....	0,688	1,308	1,680	2,379	3,163	0,899	1,577	1,991	2,776	3,661
16 .....	0,686	1,307	1,678	2,376	3,157	0,891	1,566	1,977	2,756	3,637
17 .....	0,686	1,305	1,676	2,373	3,153	0,883	1,554	1,964	2,739	3,615
18 .....	0,685	1,303	1,674	2,370	3,150	0,876	1,544	1,951	2,723	3,595
19 .....	0,684	1,302	1,672	2,367	3,146	0,870	1,536	1,942	2,710	3,577
20 .....	0,684	1,301	1,671	2,366	3,143	0,865	1,528	1,933	2,697	3,561
21 .....	0,685	1,300	1,670	2,364	3,140	0,859	1,520	1,923	2,686	3,545
22 .....	0,683	1,299	1,668	2,361	3,138	0,854	1,514	1,916	2,675	3,532
23 .....	0,683	1,299	1,668	2,360	3,136	0,849	1,508	1,907	2,665	3,520
24 .....	0,682	1,298	1,667	2,358	3,134	0,845	1,502	1,901	2,656	3,509
25 .....	0,682	1,297	1,666	2,357	3,132	0,842	1,496	1,895	2,647	3,497
P \ n	$\gamma = 0,90$					$\gamma = 0,95$				
	75	90	95	99	99,9	75	90	95	99	99,9
3 .....	2,602	4,258	5,310	7,340	9,651	3,804	6,158	7,655	10,552	13,857
4 .....	1,972	3,187	3,957	5,437	7,128	2,619	4,163	5,145	7,042	9,215
5 .....	1,698	2,742	3,400	4,666	6,112	2,149	3,407	4,202	5,741	7,501
6 .....	1,540	2,494	3,091	4,242	5,556	1,895	3,006	3,707	5,062	6,612
7 .....	1,435	2,333	2,894	3,972	5,201	1,732	2,755	3,399	4,641	6,061
8 .....	1,360	2,219	2,755	3,783	4,955	1,617	2,582	3,188	4,353	5,686
9 .....	1,302	2,133	2,649	3,641	4,772	1,532	2,454	3,031	4,143	5,414
10 .....	1,257	2,065	2,568	3,532	4,629	1,465	2,355	2,911	3,981	5,203
11 .....	1,219	2,012	2,503	3,444	4,515	1,411	2,275	2,815	3,852	5,036
12 .....	1,188	1,966	2,448	3,371	4,420	1,366	2,210	2,736	3,747	4,900
13 .....	1,162	1,928	2,403	3,310	4,341	1,329	1,155	2,670	3,659	4,787
14 .....	1,139	1,895	2,363	3,257	4,274	1,296	2,108	2,614	3,585	4,690
15 .....	1,119	1,866	2,329	3,212	4,215	1,268	2,068	2,566	3,520	4,607
16 .....	1,101	1,842	2,299	3,172	4,164	1,242	2,032	2,523	3,463	4,534
17 .....	1,058	1,820	2,272	3,136	4,118	1,220	2,001	2,486	3,415	4,471
18 .....	1,071	1,800	2,249	3,106	4,078	1,200	1,974	2,453	3,370	4,415
19 .....	1,058	1,781	2,228	3,078	4,041	1,183	1,949	2,423	3,331	4,364
20 .....	1,046	1,765	2,208	3,052	4,009	1,167	1,926	2,396	3,295	4,319
21 .....	1,035	1,750	2,190	3,028	3,979	1,152	1,905	2,371	3,262	4,276
22 .....	1,025	1,736	2,174	3,007	3,952	1,138	1,887	2,350	3,233	4,238
23 .....	1,016	1,724	2,159	2,987	3,927	1,126	1,869	2,329	3,206	4,204
24 .....	1,007	1,712	2,145	2,969	3,904	1,114	1,853	2,309	3,181	4,171
25 .....	0,999	1,702	2,132	2,952	3,882	1,103	1,838	2,292	3,158	4,143

## ANNEXE : II

**Annexe II** : Détermination de  $t_\beta$  en fonction du nombre de degrés de liberté  $\nu = n-1$  et du niveau de confiance  $\gamma$ . Extrait de *ASTM, 1963 [3]*.

$\nu$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.9875}$	$t_{0.995}$	$t_{0.9975}$
1 .....	6,31	12,7	25,5	63,7	127
2.....	2,92	4,30	6,21	9,92	14,1
3.....	2,35	3,18	4,18	5,81	7,15
4.....	2,13	2,78	3,50	4,60	5,60
5.....	2,01	2,57	3,16	4,03	4,77
6.....	1,94	2,45	2,97	3,71	4,32
7.....	1,89	2,36	2,84	3,50	4,03
8.....	1,86	2,31	2,75	3,36	3,83
9.....	1,83	2,26	2,69	3,25	3,69
10.....	1,81	2,23	2,63	3,17	3,58
11.....	1,80	2,20	2,59	3,11	3,50
12.....	1,78	2,18	2,56	3,05	3,43
13.....	1,77	2,16	2,53	3,01	3,37
14.....	1,76	2,14	2,51	2,98	3,33
15.....	1,75	2,13	2,49	2,95	3,29
16.....	1,75	2,12	2,47	2,92	3,25
17.....	1,74	2,11	2,46	2,90	3,22
18.....	1,73	2,10	2,45	2,88	3,20
19.....	1,73	2,09	2,43	2,86	3,17
20.....	1,72	2,09	2,42	2,85	3,15
21.....	1,72	2,08	2,41	2,83	3,14
22.....	1,72	2,07	2,41	2,82	3,12
23.....	1,71	2,07	2,40	2,81	3,10
24.....	1,71	2,06	2,39	2,80	3,09
25.....	1,71	2,06	2,38	2,79	3,08
26.....	1,71	2,06	2,38	2,78	3,07
27.....	1,70	2,05	2,37	2,77	3,06
28.....	1,70	2,05	2,37	2,76	3,05
29.....	1,70	2,05	2,36	2,76	3,04
30.....	1,70	2,04	2,36	2,75	3,03
40.....	1,68	2,02	2,33	2,70	2,97
60.....	1,67	2,00	2,30	2,66	2,91
120.....	1,66	1,98	2,27	2,62	2,86
$\infty$ .....	1,64	1,96	2,24	2,58	2,81
$N$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.0125}$	$t_{0.005}$	$t_{0.0025}$

ANNEXE : III

Annexe III : Tableau récapitulatif des faciès de rupture en fatigue.

Type de sollicitations	Contraintes nom. élevées			Contraintes nom. faibles		
	Concentration de contraintes					
	nulle	faible	élevée	nulle	faible	élevée
Traction-traction ou Traction-compression						
Flexion plane ondulée						
Flexion plane alternée						
Flexion rotative						
Torsion						

## ANNEXE : IV

## Loi de Miner [1], 1945

Bases physiques – Formulation - Caractéristiques :

Bases physiques	Formulations	Caractéristiques
Absorption d'énergie constante par cycle. (CON).	$D = \sum_{i=1}^p \left( n_i / N_{\sigma_i} \right) = \sum_{i=1}^p r_i$	ELD, nDNC, nPCIC, nPCDCPA

Paramètres matériau nécessaires à l'application de la loi :

Caractéristiques monotones	Caractéristiques en fatigue	Paramètres propres à la loi
	Courbe S-N	

Configurations de chargement dans lesquelles la loi est applicable :

Chargement					
Un seul type de sollicitation		Un seul type de sollicitations composées		Mélange de plusieurs sollicitations	
Tous les blocs $i, \sigma_i > \sigma_{Di}$	Certains blocs $i, \sigma_i \leq \sigma_{Di}$	Tous les blocs $i, \sigma_i > \sigma_{Di}$	Certains blocs $i, \sigma_i \leq \sigma_{Di}$	Tous les blocs $i, \sigma_i > \sigma_{Di}$	Certains blocs $i,$ $\sigma_i \leq \sigma_{Di}$
X		X			

**ANNEXE V**

**Les faciès de rupture observés lors des essais de fatigue par [16] :**

Et voici quelques faciès de rupture observés lors des essais de fatigue :



**Figure V.9.** Faciès de rupture d'une éprouvette d'essai de fatigue en flexion rotative sous une charge de  $260\text{ MPa}$  après  $3.10^6$  cycles.



**Figure V.10.** Faciès de rupture d'une éprouvette d'essai de fatigue en flexion rotative sous une charge de  $280\text{ MPa}$  après  $10^6$  cycles.



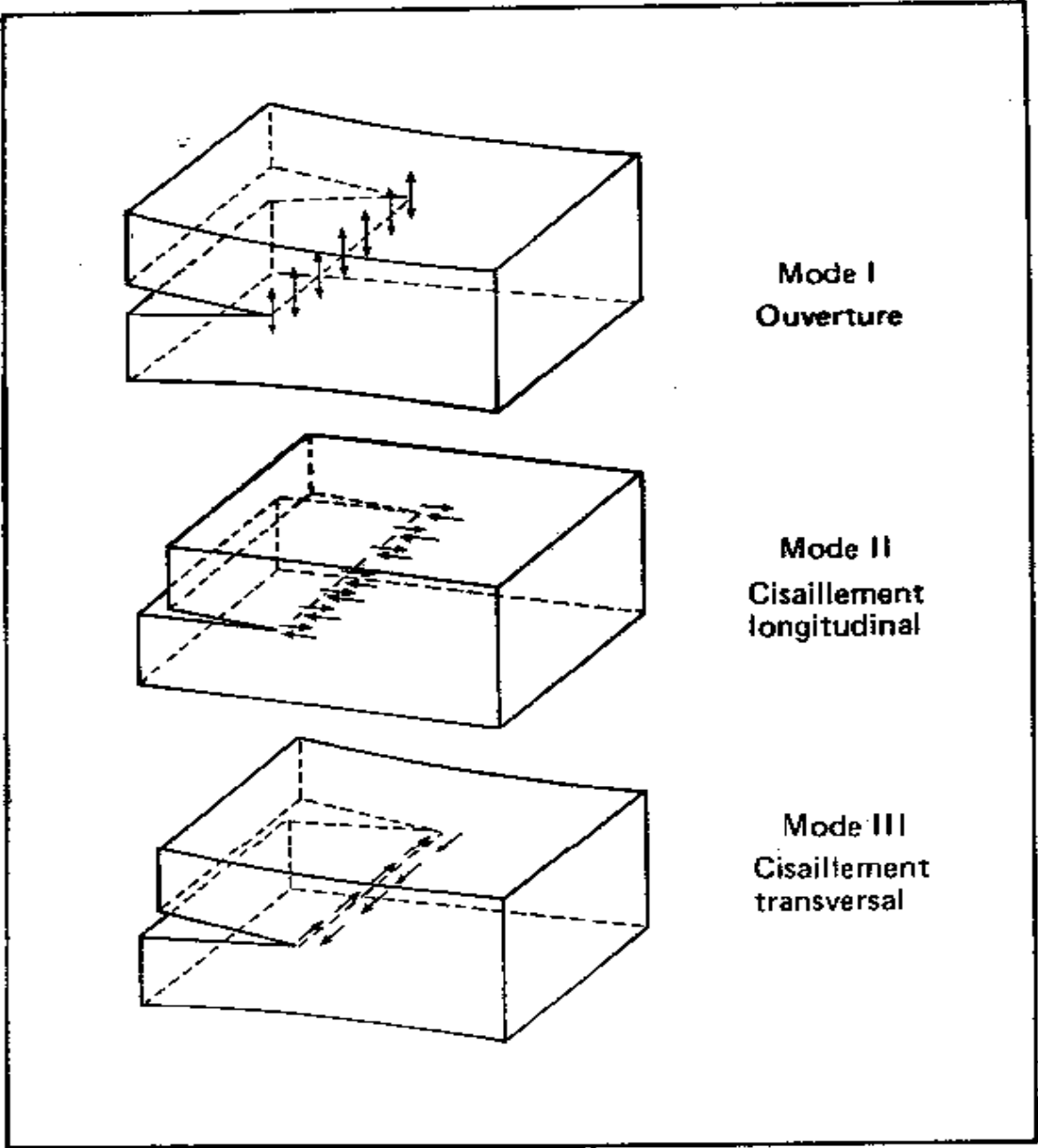
**Figure V.11.** Faciès de rupture d'une éprouvette d'essai de fatigue en flexion rotative sous une charge de  $300\text{ MPa}$  après  $12000$  cycles.



**Figure V.12.** Faciès de rupture d'une éprouvette d'essai de fatigue en flexion rotative sous une charge de  $320\text{ MPa}$  après  $18000$  cycles.

ANNEXE : VI

Les trois modes de rupture :



*Mode I*

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ (déformation plane)}$$

$$u = \frac{K_I}{G} \left[ \frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_I}{G} \left[ \frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w = 0 \text{ (déformation plane)}$$

*Mode II*

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (2)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ (déformation plane)}$$

$$u = \frac{K_{II}}{G} \left[ \frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \left[ \frac{r}{2\pi} \right]^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ -1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w = 0 \text{ (déformation plane)}$$

*Mode III*

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (3)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$w = \frac{K_{III}}{G} \left[ \frac{2r}{\pi} \right]^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$u = v = 0$$

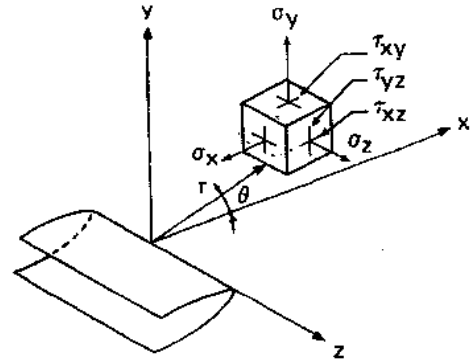


FIG. 2

## ANNEXE : VII

Calcul du facteur d'intensité des contraintes (Mode I) :

D'après la formule de Green

Formule de Green

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int_{-a}^a \sigma_{yy} \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)} dx \dots\dots\dots(4)$$

Contrainte de flexion

$$\sigma_{yy} = \frac{Mx}{I} = \frac{Mx}{\frac{\pi.d^4}{64}} = 64 \frac{Mx}{\pi.d^4}$$

$$\sigma_{yy}(x) = 64 \frac{M.x}{\pi.d^4} \dots\dots\dots(5)$$

Calcul du facteur d'intensité de contrainte

On remplace (5) dans le (4) on a :

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi.a}} \int_{-a}^a 64 \frac{M.x}{d^4.\pi} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$$

$$= \frac{64.M}{\pi.\sqrt{\pi.a}.d^4} \int_{-a}^a \frac{x(a+x)}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

Changement de variable

$$x = a \sin \alpha \Rightarrow dx = a \cos \alpha d\alpha$$

$$K_1 = \frac{64.M}{\pi.\sqrt{\pi.a}.d^4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin \alpha (a + a \sin \alpha)}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \alpha}} a \cos \alpha d\alpha$$

$$\Rightarrow K_1 = 32 \frac{M.a}{\pi.d^4} \sqrt{\pi.a} \dots\dots\dots(6)$$

Calcul nombre de cycle

$$\Delta K = K_f - K_i$$

on pose  $K_i = 0$

$$\Delta K = K_f = K_1$$

$$K_1 \left( a = \frac{d}{2} \right) = \frac{32.F.L. \frac{d}{2}}{\pi.d^4} \sqrt{\pi \cdot \frac{d}{2}}$$

$$K_1 = \frac{16.F.L}{\pi.d^3} \sqrt{\pi \cdot \frac{d}{2}} \dots \dots \dots (7)$$

D'après l'équation (3)

On a :

$$\frac{da}{dN} = C(K_1)^4$$

On remplace (7) dans le (3) on a :

$$\frac{da}{dN} = C \left( \frac{16.F.L}{\pi.d^3} \sqrt{\pi \cdot \frac{d}{2}} \right)^4 = C \left[ \left( \frac{16.F.L}{\pi.d^3} \right)^4 \left( \sqrt{\pi \cdot \frac{d}{2}} \right)^4 \right]$$

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \frac{(16.F.L)^4}{\pi^4.d^{12}} \pi^2 \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \frac{(16.F.L)^4}{4\pi^2.d^{10}}$$

$$dN = \frac{4\pi^2.d^{10}}{C.(16.F.L)^4} . da$$

$$N = \frac{4\pi^2.d^{10}}{C.(16.F.L)^4} \int_0^{\frac{d}{2}} da$$

$$N = \frac{4\pi^2.d^{10}}{C.(16.F.L)^4} \left[ a \right]_0^{\frac{d}{2}}$$

$$N = \frac{2\pi^2.d^{11}}{C.(8.L.(2F))^4}$$

$$\Rightarrow 2F = \sqrt[4]{\frac{2\pi.d^{11}}{(8.L)^4.N}}$$