



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématique et numérique

Par

OUALHI Rafik

Sujet

Résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaires

Devant le jury :

Mr. Mostefa NADIR

Prof. Univ de M'sila

Président

Mr. Bachir GAGUI

MCA. Univ de M'sila

Encadreur

Mr. Amina KHIRANI

MCB. Univ de M'sila

Examineur

Mr. Nabila SEGHIRI

MAA. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2017 / 2018

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Allah, de ma avoir donné le courage de mener à bien modeste travail de fin d'étude.

Et ne pas oublier ma mère et mon père et ma famille qui me donne tous les soutiens de ma carrière scolaire.

Mes plus grands remerciements Remercient vont à mon promoteur : GAGUI BACHIR qui nous mon avoir guidé pour la réalisation de cette étude et le soutien scientifique et moral qu'il m'a apporté.

Et je remercie les membres de jury d'avoir accepté d'examiner mon travail

DÉDICACES

Au nom du dieu le clément et le miséricordieux louange
ALLAH le tout puissant.

À ma chère grand-mère (Dlula)

À mes chers parents (djamai et djamaa)

À mes chers frères (adham,khaled,saleh,elhachemi,authmene)

A mes chères sœurs (hala,hasina,hanane,layla,omelkhir)

A tous ma famille (oualhi) et puor tous mes amis

A mon tous Qui m'ont aidé de près et de loin

A mon Tous les enseignants de la filière pédagogique
notamment en département de mathématiques

Et à tous ceux qu'il a connus pendant ma carrière scolaire

Mr :Oualhi Rafik

ملخص

تعتبر المعادلات التفاضلية ذات رتب ناطقة تعميما للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية, في هذه المذكرة تطرقنا الى دراسة تقريبات عددية للحل لهذه المعادلات و ذلك باستخدام طريقتين (VIM و HPM) من اصل الكثير من الطرقة و نطبق هذه الطرق على الموثر الكسري بمعنى كايبتو وفعالية هذه التقريبات مؤكدة بعدة امثلة

Abstract

We say the fractional differential equations are généralisation of ordinary differential equations. In this work, we study analytic approximations of the solution of the fractional differential problem by two methods VIM and HPM, applied to the fractional derivative in the sense of Caputo. this efficient of approximations are prouved by examples

Résumé

On sait que les équations différentielles d'ordre fractionnaires ce sont des généralisations des équations différentielles ordinaires. Dans ce travail, nous étudions des approximations analytiques dela solution d'un problème différentiel d'ordre fractionnaire par les deux méthodes VIM et HPM permis plusieurs appliquée a la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. cette efficacité d'approximations justifier par plusieurs des exemples

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Calcul fractionnaire	3
1.1 Fonctions utiles	3
1.1.1 La fonction Gamma d'Euler	3
1.1.2 La fonction Beta	4
1.1.3 Fonction de Mittag-Leffter	5
1.2 Intégration Fractionnaire	6
1.2.1 formule de Dirichlet	6
1.2.2 L'intégrale fractionnaire	6
1.2.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	7
1.3 Dérivation fractionnaire	9
1.3.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	9
1.3.2 Dérivées fractionnaires de Caputo	11
1.4 Équations intégrales de Volterra	13
2 méthodes numériques	14
2.1 La méthode VIM	14
2.1.1 Description de la méthode	14
2.1.2 Préliminaires	15
2.1.3 Analyse de convergence	16
2.2 La méthode HPM	18
2.2.1 Description de la méthode	18
2.2.2 Analyse de convergence	19

3 Applications	22
3.1 cas linéaire	22
3.1.1 Méthode VIM	22
3.1.2 Méthode HPM	25
3.2 cas non-linéaire	28
3.2.1 Méthode VIM	28
3.2.2 Méthode HPM	30
Conclusion	32
Table des notations	34
Bibliographie	35

INTRODUCTION

Historiquement, il est établi que la question de la dérivation numérique d'ordre fractionnaire des fonctions et de son opération inverse l'intégrale a été discutée dans diverses correspondances entre Gottfried Leibniz (1646-1716), Guillaume de L'Hôpital (1661-1704). Cependant la question restera confinée à ce fait et aucun développement majeur ne fut réalisé par ces premiers précurseurs dans ce domaine des mathématiques. Ce n'est que plus tard, lors de l'étude de certains phénomènes en mécanique des fluides, qu'il a été remarqué la présence d'une intégrale d'ordre un demi dans les équations de la chaleur quand on veut par exemple expliciter un flux de chaleur latérale d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne. Dès lors les développements fusèrent dans différents domaines d'études, en particulier en hydrodynamique, thermodynamique, en théorie de la diffusion, en électrochimie pour ne citer que ces exemples. Les mathématiciens Joseph Liouville et Bernhard Riemann apportèrent une importante contribution au milieu du 19^{ème} siècle. Toutes les ambiguïtés faisant suite aux diverses définitions proposées furent levées avec l'avènement de la théorie des distributions. Actuellement doté du cadre abstrait et formel et élaboré par l'apport de beaucoup d'auteurs le calcul fractionnaire a fini par constituer à lui seul un domaine dans les mathématiques sous l'appellation : analyse fractionnaire. Si aujourd'hui on continue à utiliser la dénomination calcul fractionnaire, c'est beaucoup plus par nostalgie et par respect des traditions qui ont entouré cette notion. La perception d'une dérivée d'ordre un nombre réel quelconque n'est plus un fait renversant mais bien au contraire. Son apport a permis et permet encore d'entrevoir les phénomènes de la nature qui nous entourent autrement, de les modéliser par des équations ou systèmes différentiels d'ordre non entier et qui traduisent mieux le passage du réel au connu. Dans cette optique, les systèmes différentiels d'ordre non entier, bien que plus compliqués, s'avèrent mieux adaptés à la modélisation mécanique de certains matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées, comportement qualifié de viscoélastique dans le langage des mécaniciens. L'objectif prin-

Le principal de cet mémoire est tout d'abord de présenter des méthodes analytiques ainsi que leurs combinaisons pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Ce document(mémoire) consiste en une introduction et trois chapitres.

Le première chapitre traite des définitions et des concepts généraux qui seront requis dans le reste du travail. Rappelez-vous que les concepts que nous fournissons sont des fonctions de Gamma, Beta et Mittag-Leffter et Concepts d'intégrations partielles, dérivés de Riemann-Liouville et transformations de Caputo et de Laplace.

Le deuxième chapitre est consacré pour expliquer la méthode à fréquence variable (VIM) et la méthode de décroissance hydrostatique (HPM), puis examinons l'approximation de chacune de ces méthodes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Le troisième chapitre est dédié à l'application de ces méthodes (VIM), (HPM) pour résoudre l'équation différentielle de l'ordre fractionnaire (linéaire et non linéaire)

CHAPITRE 1

CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et théorèmes utiles pour utilisés dans ce qui suit.

1.1 Fonctions utiles

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et Mittag-Leffler qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications (Gamma d'Euler, Beta, Mittag-Leffler)

1.1.1 La fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1.1. On appelle fonction Gamma la fonction définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, (z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0). \quad (1.1.1)$$

Exemple 1.1.1.

i) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1,$

ii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$ (Posant le changement de variable $t = \tau^2$).

Lemme 1.1.1. La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* . (resp. holomorphe sur le demi plan $(z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0)$).

Proposition 1.1.1.

- 1) $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$,
- 2) $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

Preuve.

- 1) En intégrant par partie :

$$\begin{aligned}\Gamma(z + 1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \\ &= z\Gamma(z) .\end{aligned}$$

- 2) On pose $z = n - 1$,

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n - 1)\Gamma(n - 1) \\ &= (n - 1)(n - 2)\dots\Gamma(1) \\ &= (n - 1)!\end{aligned}$$

Lemme 1.1.2. Pour tout $p > 0$, on a :

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

Remarque 1.1.1. La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatives non entiers par la formule $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$, et La transition d'un intervalle à un autre (-1, 0), (-2, -1), (-3,-1) La fonction Gamma n'existe pas pour les valeur négatives entières.

1.1.2 La fonction Beta

Définition 1.1.2. la fonction de bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, (p, q \in \mathbb{C}, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0). \quad (1.1.2)$$

Lemme 1.1.3. la fonction de beta est relative par la fonction Gamma par la formule suivante :

pour tout $(p, q \in \mathbb{C}, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0)$,

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (1.1.3)$$

Proposition 1.1.2. Soit $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx\right) \times \left(\int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy\right), \\ &= \int \int_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy.\end{aligned}$$

En utilisant le changement de coordonnées ,considérons les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,t)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u.$$

De même que le domaine D correspondant à D dans les cordonnées u,v est

$$D' = \{(u, v) / u \succeq 0, 0 \preceq v \preceq 1\} ,$$

Alors

$$\begin{aligned} \int \int_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \int \int_{D'} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} |-u| dudv, \\ &= \int \int_{D'} u^{p+q-1} (v)^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv, \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{p+q-1} (v)^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv, \\ &= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \right) \left(\int_0^1 (v)^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right), \\ &= \Gamma(p+q) \beta(p, q). \end{aligned}$$

par conséquent

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffter

Définition 1.1.3. La fonction de Mittag-Leffter est définie par :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, (z \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) \succ 0). \quad (1.1.4)$$

et la fonction de Mittag-Leffter généralisée est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (x \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) \succ 0, \Re(\beta) \succ 0). \quad (1.1.5)$$

Exemple 1.1.2.

1)

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

2)

$$E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh \sqrt{x}.$$

3)

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x} (e^x - 1).$$

Proposition 1.1.3.

i) pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n), (n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{C}).$$

ii) pour $\alpha = 1/n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$), on a

$$E_{1/n}(z) = e^{z^n} \left[1 + n \int_0^z e^{-t} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k/n)} \right) dt \right], (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}).$$

1.2 Intégration Fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire sur un intervalle fini de l'axe réel au sens de Riemann-Liouville avec quelques propriétés dans l'espace des fonctions continues .

1.2.1 formule de Dirichlet

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta > 0$ et h est une fonction continue l'expression suivante est dite formule de Dirichlet.

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} h(x,y) dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} h(x,y) dx.$$

si on prend

$$h(x,y) = g(x)f(y), \text{ et } g(x) \equiv 1.$$

Alors :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy = \beta(\alpha, \beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy.$$

où β est la fonction bêta.

1.2.2 L'intégrale fractionnaire

Définition 1.2.1. Soit $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive de f est donnée par :

$$\mathcal{I}_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1.2.1)$$

Proposition 1.2.1. Soit $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive d'ordre n de f est donnée par :

$$\mathcal{I}_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt.$$

Preuve. En effet, les primitives d'ordre supérieur sont données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a^+}^2 f(x) &= \int_a^x \mathcal{I}_{a^+}^1 f(s) ds, \\ &= \int_a^x \left(\int_a^s f(t) dt \right) ds. \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Dirichlet , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a^+}^2 f(x) &= \int_a^x \left(\int_t^x f(t) dt \right) ds, \\ &= \int_a^x f(t) \left(\int_t^x ds \right) dt, \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{I}_{a^+}^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

De même on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a^+}^3 f(x) &= \int_a^x \mathcal{I}_{a^+}^2 f(s) ds, \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a :

$$\mathcal{I}_{a^+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt.$$

1.2.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2. Soit $\Omega = [a; b]$,un intervalle fini sur \mathbb{R} ,et f une fonction intégrable sur Ω , L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_a^\alpha \mathcal{I}_b^\alpha$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) est définie par :

$$\mathcal{I}_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt,$$

et

$$\mathcal{I}_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-x)^{(\alpha-1)} f(t) dt.$$

où Γ est la fonction Gamma.

Lemme 1.2.1. Si $f \in L^1([a; b])$, alors $\mathcal{I}_a^\alpha f$ existe pour tout $\alpha > 0$ et $\mathcal{I}_a^\alpha f \in L^1([a; b])$.

Proposition 1.2.2.

1)

$$\mathcal{I}_a^\alpha (\mathcal{I}_a^\beta f(x)) = \mathcal{I}_a^{\alpha+\beta} f(x), \alpha, \beta > 0.$$

2)

$$\frac{d}{dx}(\mathcal{I}_a^\alpha f(x)) = \mathcal{I}_a^{\alpha-1} f(x), \alpha > 0.$$

3)

$$\mathcal{I}_a^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}, \alpha, \beta > 0.$$

Preuve.

1)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a^\alpha (\mathcal{I}_a^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{(\alpha-1)} \mathcal{I}_a^\beta f(s) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{(\alpha-1)} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-t)^{(\beta-1)} f(t) dt \right) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{(\alpha-1)} ds \int_a^s (s-t)^{(\beta-1)} f(t) dt. \end{aligned}$$

D'après la formule(1.2.1) de Dirichlet, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a^\alpha (\mathcal{I}_a^\beta f(x)) &= \frac{\beta(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha+\beta-1)} f(t) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha+\beta-1)} f(t) dt. \\ &= \mathcal{I}_a^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\mathcal{I}_a^\alpha f(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx} ((x-t)^{(\alpha-1)}) f(t) dt, \\ &= \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-2)} f(t) dt, \\ &= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-2)} f(t) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-2)} f(t) dt, \\ &= \mathcal{I}_a^{\alpha-1} f(x). \end{aligned}$$

3)

$$\mathcal{I}_a^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt.$$

on pose

$$t = a + (x-a)y, y \in [0, 1],$$

$$dt = (x-a)dy.$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_a^\alpha (x-a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-a+(x-a)y)^{\alpha-1} (x-a)^{\beta-1} y^{\beta-1} (x-a) dy, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha+\beta-1} (1-y)^{\beta-1} y^{\beta-1} dy, \\
 &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\beta-1} y^{\beta-1} dy, \\
 &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta), \\
 &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}.
 \end{aligned}$$

1.3 Dérivation fractionnaire

Dans la l'itération il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo

1.3.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} est donnée par :

$$\mathcal{D}_a^\alpha f(x) = \mathcal{D}^n \mathcal{I}_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt. \quad (1.3.1)$$

où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ la partie entière de α .

Si de plus $\alpha \in [0, 1]$, alors $n = 1$, d'où

$$\mathcal{D}_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt.$$

Lemme 1.3.1. Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a, b]$, alors l'égalité

$$\mathcal{D}_a^\alpha \mathcal{I}_a^\alpha f(x) = f(x).$$

est vrai pour presque tout $x \in [a, b]$.

Proposition 1.3.1. Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \beta < m$ tel que $(n; m \in \mathbb{N}^*)$ alors :

1) si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1[a, b]$ l'égalité

$$\mathcal{D}_a^\beta (\mathcal{I}_a^\alpha f)(x) = \mathcal{I}_a^{\alpha-\beta} f(x). \quad (1.3.2)$$

est presque par tout sur $[a, b]$.

2) S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[a; b]$ tel que $f = \mathcal{I}_a^\alpha \varphi$, alors :

$$\mathcal{D}_a^\alpha(\mathcal{I}_a^\alpha f)(x) = f(x). \quad (1.3.3)$$

pour tout $x \in [a; b]$.

3) Pour $\alpha \succ 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $\mathcal{D}^\alpha f$ et $\mathcal{D}^{k+\alpha} f$ existes, alors :

$$\mathcal{D}_a^k(\mathcal{D}^\alpha f(x)) = \mathcal{D}^{k+\alpha} f(x). \quad (1.3.4)$$

4) Si $\beta \succeq \alpha \succ 0$ et la dérivée fractionnaire $\mathcal{D}^{\beta-\alpha} f$ existe, alors :

$$\mathcal{D}_a^\beta(\mathcal{I}_a^\alpha f(x)) = \mathcal{D}^{\beta-\alpha} f(x). \quad (1.3.5)$$

Preuve.

1) Pour $\alpha \succ \beta \succ 0$, alors $n \succ m$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a^\beta(\mathcal{I}_a^\alpha f(x)) &= \mathcal{D}^n \mathcal{I}^{n-\beta}(\mathcal{I}_a^\alpha f)(x), \\ &= \mathcal{D}^n(\mathcal{I}_a^{n-\beta+\alpha} f)(x), \\ &= \mathcal{D}^n \mathcal{I}^n(\mathcal{I}_a^{\alpha-\beta} f)(x), \\ &= \mathcal{I}_a^{\alpha-\beta} f(x). \end{aligned}$$

presque pour tout $x \in [a; b]$.

2) Par la notation, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha f(x) &= \mathcal{I}_a^\alpha(\mathcal{D}_a^\alpha \mathcal{I}_a^\alpha \varphi(x)), \\ &= \mathcal{I}_a^\alpha \varphi(x), \\ &= f(x). \end{aligned}$$

3) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a^k(\mathcal{D}^\alpha f(x)) &= \mathcal{D}^k \mathcal{D}^{n-\alpha} f(x), \\ &= \mathcal{D}^{k+n} \mathcal{I}^{n-\alpha+k-k} f(x), \\ &= \mathcal{D}^{k+n} \mathcal{I}^{k+n-(\alpha+k)} f(x), \\ &= \mathcal{D}^{k+\alpha}. \end{aligned}$$

4) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a^\beta(\mathcal{I}_a^\alpha f(x)) &= \mathcal{D}^m \mathcal{I}^{m-\beta}(\mathcal{I}_a^\alpha f)(x), \\ &= \mathcal{D}^m \mathcal{I}^{m-(\beta-\alpha)} f(x), \\ &= \mathcal{D}_a^{\beta-\alpha} f(x). \end{aligned}$$

existe pour $j - 1 \leq \beta - \alpha \prec j$ et $j \leq m$.

Exemple 1.3.1.

La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$$\mathcal{D}^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

comme $1 \leq \alpha \leq 0 \Rightarrow n = 1$ car c'est une fonction constante.

La dérivée de $f(x) = (x-a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville : Soit α non entier et $0 < n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$, alors on a :

$$\mathcal{D}_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^\beta dt.$$

En faisant le changement de variable $t = a + s(x-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x-a)^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^\beta ds, \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires de Caputo

Définition 1.3.2. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :

$$\forall t \in [a, b], \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \quad (1.3.6)$$

Définition 1.3.3. soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par :

$$\forall t \in [a, b], \mathcal{D}_b^-^\alpha f(x) = \mathcal{I}_b^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \quad (1.3.7)$$

Proposition 1.3.2. Soit $\alpha > 0; \beta > 0; n = [\alpha] + 1$; on a les propriétés suivantes :

i) Si $f(x) \in C^p([a; b])$, $p = [\alpha + \beta] + 1$, alors :

$$({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{a^+}^\beta f)(x) = ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(x) \text{ et } ({}^C \mathcal{D}_b^-^\alpha {}^C \mathcal{D}_b^-^\beta f)(x) = ({}^C \mathcal{D}_b^-^{\alpha+\beta} f)(x). \quad (1.3.8)$$

ii) Si $f(x) \in C^n([a; b])$ ou $f(x) \in AC^n([a; b])$, alors :

$$(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad (1.3.9)$$

$$(\mathcal{I}_b^-^\alpha {}^C \mathcal{D}_b^-^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{(n-k)} f^{(k)}(a)}{k!} (b-x)^k. \quad (1.3.10)$$

Théorème 1.3.1. la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche ${}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha$ et à droite ${}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ avec $n = [\alpha] + 1$ est définie par :

$$\forall x \in [a, b], {}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}(\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt, \quad (1.3.11)$$

et

$$\forall x \in [a, b], {}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = (-1)^n \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha}(\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt.$$

Cas particulier : Si $\alpha \in [0, 1]$ alors $n = 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo est

$${}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \mathcal{I}_{a^+}^{1-\alpha}(\mathcal{D}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(-\alpha)} f^{(1)}(t) dt,$$

et

$${}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = (-1) \mathcal{I}_{b^-}^{1-\alpha}(\mathcal{D}f)(x) = \frac{(-1)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(-\alpha)} f^{(1)}(t) dt.$$

Preuve.

i) En utilisant la formule (1.3.11) on obtient :

$$\begin{aligned} ({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{a^+}^\beta f)(x) &= ({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (\mathcal{I}_{a^+}^{n-\beta} \mathcal{D}^n f))(x), \\ &= (\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \mathcal{D}^n (\mathcal{I}_{a^+}^{n-\beta} \mathcal{D}^n f))(x), \\ &= (\mathcal{I}_{a^+}^{n-(\alpha+\beta)} \mathcal{D}^n \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{D}^n f)(x), \\ &= (\mathcal{I}_{a^+}^{n-(\alpha+\beta)} \mathcal{D}^n f)(x), \\ &= ({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(x). \end{aligned}$$

ii) D'après la formule (1.3.11) on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(x) &= \mathcal{I}_{a^+}^\alpha (\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \mathcal{D}_{a^+}^n f)(x), \\ &= \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{D}_{a^+}^n f(x), \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \end{aligned}$$

Lemme 1.3.2. soit $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ et $n = [\alpha] + 1$ tel que ${}^C\mathcal{D}^\alpha$ et \mathcal{D}^α existent Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ alors :

$${}^C\mathcal{D}^\alpha f(x) = \mathcal{D}^\alpha f(x).$$

Exemple 1.3.2.

i) La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}^C\mathcal{D}^\alpha C = 0.$$

ii) La dérivée de $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ au sens de Caputo : Soit α non entier et

$0 \leq n - 1 \leq \alpha \leq n$ et $\beta - 1 > 0$, alors on a :

$$({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t))(x) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} (\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt.$$

et

$$\frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\beta-1} = (\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)(x-a)^{\beta-n-1},$$

posons

$$(t-a) = s(x-a) \text{ et } s \in [0; 1],$$

$$dt = (x-a) ds.$$

$$\begin{aligned} ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds, \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \beta(n-\alpha, \beta-n), \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

la même resultat avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

1.4 Équations intégrales de Volterra

La forme la plus classique de Volterra linéaires équations intégrales est de la forme :

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.4.1)$$

où les limites de l'intégration sont fonction de x et la fonction inconnue $u(x)$ apparaît linéairement sous le signe. Si la fonction $\phi(x) = 1$, alors l'équation (1.4.1) devient tout simplement

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.4.2)$$

et cette équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra du second type; considérant que si $\phi(x) = 0$, alors l'équation (1.4.1) devient

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = 0 \quad (1.4.3)$$

qui est connu comme l'équation de Volterra du premier type.

L'opérateur intégral faiblement singulier de Volterra

$\mathcal{V}_\alpha : C(I) \rightarrow C(I)$ a la forme

$$(\mathcal{V}_\alpha u)(t) = \int_0^t (t-s)^{-\alpha} K(t,s)u(s), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.4.4)$$

avec une singularité algébrique $(t-s)^{-\alpha}$, et $K \in C(D)$, $K(t,t) \neq 0$ ($t \in I$).

CHAPITRE 2

MÉTHODES NUMÉRIQUES

2.1 La méthode VIM

La méthode itérative variationnelle (VIM) a été développée par Je-Haun-He au début des années 1990. Cette méthode a été utilisée par beaucoup des chercheurs dans une variété de champs scientifiques et peut résoudre des problèmes non linéaires, et a été proposée la première fois pour résoudre des problèmes en mécanique. La méthode est basée sur la détermination de multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

2.1.1 Description de la méthode

Nous considérons l'équation différentielle suivante :

$$L(u) + N(u) = g(x),$$

où : L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non linéaire et $g(x)$ est une fonction connue. Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode itérative variationnelle suivante :

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^x \lambda(t)(Lu_n + N\tilde{u}_n(t) - g(t))dt. \quad (2.1.1)$$

où λ est un multiplicateur général du Lagrange. L'indice n représente la n -ième approximation, $\tilde{u}_n(t)$ est considéré comme une variation restreinte c'est à dire $\partial\tilde{u}_n(t) = 0$, Pour résoudre l'équation par la méthode VIM, on doit d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui va être identifié par une intégration par parties. Alors les approximations successives un de la solution $u(x)$ vont être obtenues en utilisant le multiplicateur de

Lagrange et une fonction u_0 bien choisie (qui doit être au moins satisfaire les conditions initiales), par conséquent, la solution exacte sera la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \quad (2.1.2)$$

2.1.2 Préliminaires

Zhiwu et al. [15] ont étudié la convergence de la méthode d'itération variationnelle (VIM) pour les équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo. Ils ont considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} ({}^C\mathcal{D}_0^\alpha y)(t) = f(t, y(t)), n-1 < \alpha \leq n, \\ y^{(k)}(0) = y_0^k, k = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

où $t \in [0, T]$, $y^{(k)}(t)$ désigne la dérivée d'ordre k de $y(t)$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait la condition de Lipschitz

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|; t \geq 0; u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.1.4)$$

où L est la constante de Lipschitz. On définit la norme $\|y\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq T} |y(t)|$, $({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha y)(t)$ est la dérivée fractionnaire de Caputo. Pour le nombre réel positif α tel que $n-1 < \alpha \leq n$, on définit la dérivée de Caputo d'ordre α de la fonction $f(t)$ dans l'intervalle $[a, b]$ comme suit :

$$({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(x) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}(\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt. \quad (2.1.5)$$

Diethelm et al. [4] ont prouvé que le problème (2.1.3) peut être équivalent à l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$y(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(j)} \frac{t^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (2.1.6)$$

On pose

$$g(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(j)} \frac{t^j}{j!}.$$

L'équation (2.1.6) peut être transformée sous la forme :

$$y(t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (2.1.7)$$

Selon l'idée de Xu [16] et Ghorbani et al. [6], l'itération pour l'équation (2.1.7) peut être construite comme suit :

$$y_{n+1}(t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y_n(\tau)) d\tau. \quad (2.1.8)$$

On utilise la valeur initiale $y_0(t) = y_0^{(0)} + y_1^{(1)}t + \dots + y_{n-1}^{(n-1)}t^{n-1}$ et on commence l'itération. La valeur y_n de la n -ième méthode d'itération se rapproche vers la solution exacte du problème (2.1.3) par :

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (2.1.9)$$

2.1.3 Analyse de convergence

Théorème 2.1.1. Soient $y(t), y_i(t) \in C[0, T], i = 1, 2, \dots$. Alors, la suite $\{(y_n(t))\}_{n=1}^{\infty}$ définie par (2.1.7) avec $y_0(t) = y_0^{(0)} + y_1^{(1)}t + \dots + y_{n-1}^{(n-1)}t^{n-1}$ converge vers la solution de l'équation (2.1.3).

preuve. D'après la problème (2.1.3), on a :

$$y(t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (2.1.10)$$

Soit $E_i(t) = y_i(t) - y(t), i = 1, 2, \dots$. D'après (2.1.3) et (2.1.8), on a :

$$E_{n+1}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} [f(\tau, y_n(\tau)) - f(\tau, y(\tau))] d\tau. \quad (2.1.11)$$

On considère deux cas pour α

Pour le cas $\alpha \geq 1, \forall t \in [0, T]$ et $\tau \in [0, t], (t - \tau)^{\alpha-1}$ est bornée. Soit $M = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |(t - \tau)^{\alpha-1}|$. D'après la condition de Lipschitz (2.1.4), on a :

$$\begin{aligned} |E_{n+1}(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t - \tau)^{\alpha-1}| |f(\tau, y_n(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| d\tau \\ &\leq \frac{M.L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |y_n(\tau) - y(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{M.L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |E_n(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Par récurrence :

$$|E_{n+1}(t)| \leq \frac{M^{n+1}.L^{n+1}}{[\Gamma(\alpha)]} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_n} |E_0(t)| d\tau_{n+1} \dots d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \quad (2.1.12)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|E_{n+1}(t)\|_{\infty} &\leq \left[\frac{M.L}{\Gamma(\alpha)}\right]^{n+1} \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_n} |E_0(t)| d\tau_{n+1} \dots d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \\ &\leq \left[\frac{M.L}{\Gamma(\alpha)}\right]^{n+1} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \|E_0\|_{\infty} \end{aligned}$$

où $M, L, T, \Gamma(\alpha)$ et $\|E_0\|_{\infty}$ sont des constantes. Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|E_{n+1}(t)\|_{\infty} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{M.L.T}{\Gamma(\alpha)}\right]^{n+1} \frac{\|E_0\|_{\infty}}{(n+1)!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Maintenant, nous considérons le deuxième cas, cas $0 < \alpha < 1$, on a

$$\begin{aligned} |E_{n+1}(t)| &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |y_n(\tau) - y(\tau)| d\tau, \\ &= \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |E_n(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Soit

$$(\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} f)(t) = \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

On obtient

$$| E_{n+1}(t) | \leq L \mathcal{I}_{0+}^{\alpha} | E_n(\tau) |$$

Selon [13], l'opérateur $\mathcal{J}_{0+}^{\alpha}$ vérifie la relation suivante :

$$(\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} \mathcal{I}_{0+}^{\alpha} f)(t) = (\mathcal{I}_{0+}^{\alpha+\alpha} f)(t) = (\mathcal{I}_{0+}^{2\alpha} f)(t)$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} |E_{n+1}(t)| &\leq L^2 \mathcal{I}_{0+}^{2\alpha} |E_{n-1}(t)|, \\ &\vdots \\ &\leq L^{n+1} \mathcal{I}_{0+}^{(n+1)\alpha} |E_0(t)|, \\ &= L^{n+1} \frac{1}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n\alpha + \alpha - 1} |E_0(t)| d\tau, \\ &\leq \frac{L^{n+1} \|E_0\|_{\infty} T^{n\alpha + \alpha}}{\Gamma(n\alpha + \alpha)(n\alpha + \alpha)}. \end{aligned}$$

D'après [1], on a :

$$\Gamma(n\alpha + \alpha) \sim \sqrt{2\pi} e^{-n\alpha} (n\alpha)^{n\alpha + \alpha - \frac{1}{2}},$$

Puis

$$\frac{L^{n+1} T^{n\alpha + \alpha}}{\Gamma(n\alpha + \alpha)(n\alpha + \alpha)} \sim \frac{L^{n+1} T^{n\alpha + \alpha}}{\sqrt{2\pi} e^{-n\alpha} (n\alpha)^{n\alpha + \alpha - \frac{1}{2}} (n\alpha + \alpha)}.$$

où L est la constante de Lipschitz. On peut trouver un nombre réel délimitée L_1 , qui satisfait :

$$L_1^{\alpha} = L.$$

tel que

$$\frac{L^{n+1} T^{n\alpha + \alpha}}{\sqrt{2\pi} e^{-n\alpha} (n\alpha)^{n\alpha + \alpha - \frac{1}{2}} (n\alpha + \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{\alpha}} \left(\frac{L_1 T e}{n\alpha} \right)^{n\alpha + \alpha} \frac{(n\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(n\alpha + \alpha)}.$$

On a donc

$$\|E_{n+1}\|_{\infty} \leq \frac{\|E_0\|_{\infty} (L_1 T e)^{n\alpha + \alpha} (n\alpha)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} e^{\alpha} (n\alpha)^{n\alpha + \alpha} (n\alpha + \alpha)}.$$

où L_1 , T et $\|E_0\|_{\infty}$ sont des constantes. Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|E_{n+1}\|_{\infty} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|E_0\|_{\infty} (L_1 T e)^{n\alpha + \alpha} (n\alpha)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} e^{\alpha} (n\alpha)^{n\alpha + \alpha} (n\alpha + \alpha)} \right), \\ &\leq \frac{\|E_0\|_{\infty}}{\sqrt{2\pi} e^{\alpha}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(L_1 T e)^{n\alpha + \alpha}}{(n\alpha)^{n\alpha + \alpha}} \right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.1. Nous considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} y' = 2ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

on a : $f(t, y(t)) = 2ty$, $\alpha = 1$, et aussi $y_0 = 1$, car $g(t) = 1$ Alors nous avons les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 1, \\ y_1(t) &= g(t) + \int_0^t y'_0(x) + 2xy_0(x)dx = 1 + t^2, \\ y_2(t) &= g(t) + \int_0^t y'_1(x) + 2xy_1(x)dx = 1 + t^2 + \frac{1}{2!}t^4, \\ y_3(t) &= g(t) + \int_0^t y'_2(x) + 2xy_2(x)dx = 1 + t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + \frac{1}{3!}t^6, \\ y_4(t) &= g(t) + \int_0^t y'_3(x) + 2xy_3(x)dx = 1 + t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + \frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{4!}t^8, \\ &\vdots \\ y_{n+1}(t) &= g(t) + \int_0^t y'_n(x) + 2xy_n(x)dx = 1 + t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + \frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{4!}t^8 + \dots + \frac{1}{n!}t^{2n}. \end{aligned}$$

Rappelez que la solution exacte est donnée par $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ cela donne la solution exacte $y(t) = \exp(t^2)$

2.2 La méthode HPM

La méthode des perturbation de l'homotopie (HPM) a été établie par Ji-Haun-He en 1999. La méthode a été utilisée par beaucoup de chercheurs et appliquée pour résoudre plusieurs équations linéaires et non-linéaires.

2.2.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, On considère l'équation différentielle non- linéaire suivante (voir : [8],[9],[7])

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega. \quad (2.2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0, \quad r \in \Gamma. \quad (2.2.2)$$

où A est un opérateur différentiel général, $f(r)$ est une fonction analytique connue, B est un opérateur définissant les conditions aux limites, u est la fonction inconnue et Γ la frontière du domaine K. L'opérateur A peut être généralement décomposé en deux opérateurs

L et N qui sont respectivement linéaire et non linéaire. Par conséquent, l'équation (2.2.1) peut être écrite comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0.$$

On construit une homotopie $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, qui satisfait :

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \quad (2.2.3)$$

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (2.2.4)$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre d'homotopie et u_0 est une approximation initiale de l'équation (2.2.1) qui satisfait les conditions aux limites (2.2.2). A partir des équations (2.2.3) et (2.2.4), on a :

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0$$

Le changement de p de zéro à l'unité transforme $u_0(r)$ en $u(r)$. En topologie avec cette dernière propriété, la fonction $v(r, p)$ est appelée homotopie. Selon la méthode HPM, nous pouvons d'abord utiliser le paramètre p comme un petit paramètre et assumer que les solutions des équations (2.2.3) et (2.2.4) peuvent être écrites comme des séries de puissance en p :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.2.5)$$

Pour $p = 1$, la solution approchée de l'équation (2.2.1) s'écrit :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (2.2.6)$$

La convergence de la série (2.2.6) a été prouvée dans ([3], [2]).

2.2.2 Analyse de convergence

Asma et al. [5] ont étudié la convergence de la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) pour les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée au sens de Caputo, en considérant l'équation aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire suivante :

$$({}^C\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha u)(t) = f(t, u(t), \mathcal{D}^{n_1}u(t), \mathcal{D}^{n_2}u(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u(t)), t \in [0, T] \quad (2.2.7)$$

$$u^k(0) = b^k, \quad u(x, t) = g(x, t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.8)$$

où ${}^C\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , $m - 1 \leq \alpha \leq m$. On considère que l'application $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec l'hypothèse que

$f(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$ existe et est continue avec des dérivées continues et bornées $\frac{\partial f}{\partial u_i}$. On suppose de plus que $f(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$ satisfait la condition de Lipschitz

$$\begin{aligned} & | f(t, u_1(t), \mathcal{D}^{n_1}u_1(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u_1(t)) - f(t, u_2(t), \mathcal{D}^{n_1}u_2(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u_2(t)) | \\ & \leq L | f(u_1, \mathcal{D}^{n_1}u_1, \dots, \mathcal{D}^{n_q}u_1) - f(u_2, \mathcal{D}^{n_1}u_2, \dots, \mathcal{D}^{n_q}u_2) |, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

où L désigne la constante de Lipschitz. Pour illustrer les concepts de base de la méthode HPM pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaire (2.2.7) avec les conditions initiales (2.2.8), nous construisons l'homotopie suivante :

$$(1 - p)({}^c\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha u)(x, t) + p({}^c\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha u)(x, t) - f(t, u(t), \mathcal{D}^{n_1}u(t), \mathcal{D}^{n_2}u(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u(t)) = 0 \quad (2.2.10)$$

ou

$$({}^c\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha u)(x, t) = p(f(t, u(t), \mathcal{D}^{n_1}u(t), \mathcal{D}^{n_2}u(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u(t))) \quad (2.2.11)$$

En substituant (2.2.5) dans (2.2.11) et par identification avec les termes des différents monômes en p , on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 & : ({}^c\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha u_0)(x, t) = f(x, t), \\ p^1 & : ({}^c\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha u_1)(x, t) = f(t, u_0(t), \mathcal{D}^{n_1}u_0(t), \mathcal{D}^{n_2}u_0(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u_0(t)), \\ p^2 & : ({}^c\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha u_2)(x, t) = f(t, u_1(t), \mathcal{D}^{n_1}u_1(t), \mathcal{D}^{n_2}u_1(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u_1(t)), \\ & \quad \vdots \\ p^n & : ({}^c\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha u_n)(x, t) = f(t, u_{n-1}(t), \mathcal{D}^{n_1}u_{n-1}(t), \mathcal{D}^{n_2}u_{n-1}(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u_{n-1}(t)), \\ & \quad \vdots \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

On utilise l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville \mathcal{I}_{0+}^α , (qui est l'opérateur inverse de la dérivée de Caputo ${}^c\mathcal{D}_t^\alpha$), sur les deux membres de (2.2.12). Les premiers termes de la solution sont données par :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) & = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b^k t^k}{k!} + (\mathcal{I}_0^\alpha, f)(x, t), \\ u_1(x, t) & = \mathcal{I}_0^\alpha(f(t, u_0(t), \mathcal{D}^{n_1}u_0(t), \mathcal{D}^{n_2}u_0(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u_0(t))), \\ u_2(x, t) & = \mathcal{I}_0^\alpha(f(t, u_1(t), \mathcal{D}^{n_1}u_1(t), \mathcal{D}^{n_2}u_1(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u_1(t))), \\ & \quad \vdots \\ u_n(x, t) & = \mathcal{I}_0^\alpha(f(t, u_{n-1}(t), \mathcal{D}^{n_1}u_{n-1}(t), \mathcal{D}^{n_2}u_{n-1}(t), \dots, \mathcal{D}^{n_q}u_{n-1}(t))). \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

La solution de (2.2.7) est écrite sous forme de la série suivante :

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots \quad (2.2.14)$$

Exemple 2.2.1. Nous considérons en premier temps l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} u' + u^2 &= 0 & ; t \geq 0, t \in \Omega \\ u(0) &= 1. \end{aligned}$$

d'où la solution exacte est $u(t) = \frac{1}{1+t}$ Nous pouvons construire l'homotopie suivante $v : \Omega * [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

$$(1 - p)(v' - u'_0) + p(v' + v^2) = 0, \quad p \in [0, 1], t \in \Omega. \quad (2.2.15)$$

avec l'approximation initiale $u_0 = 1$. Supposons que la solution de (1.2.1) soit sous la forme :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.2.16)$$

En remplaçant (2.2.16) dans (2.2.15), et identifions les termes avec les puissances identiques de p,

$$\begin{aligned} p^0 &: v'_0 = u_0 \\ p^1 &: v'_1 + u'_0 + v_0^2 = 0 & v_1(0) = 0 \\ p^2 &: v'_0 + 2v_0v_1 = 0 & v_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, les premiers composants de la solution sont données par :

$v_0 = 1, v_1 = -t, v_2 = t^2$, Donc la solution de est :

$$\begin{aligned} u &= \lim_{p \rightarrow 1} v, \\ &= v_0 + v_1 + v_2, \\ &= 1 - t - t^2. \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

Dans ce chapitre on fait des application sur des problèmes différentiels linéaire et non-linéaire en utilisant les méthodes qui est on a être dire dans le chapitre précédant

3.1 cas linéaire

3.1.1 Méthode VIM

Exemple 3.1.1. Nous considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivant :

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha y = -y, \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \quad (3.1.1)$$

avec la condition initiale suivante :

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (3.1.2)$$

où ${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha$ désigne le dérivée fractionnaire ou sens de Caputo pour $\alpha = 2$, la solution exacte de l'équation

$$u' = -u, \quad (3.1.3)$$

avec la condition initiale(3.1.2) est donnée par :

$$u = \cos(x). \quad (3.1.4)$$

la solution approchée de l'équation (3.1.1) d'après la méthode VIM et écrit sous la forme suivant :

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

telle que

$$y_{n+1} = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y_n(x)) dx,$$

et

$$g(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(j)} \frac{t^j}{j!},$$

D'après la formule (3.1.1) et la condition initiale(3.1.2) dans cet exemple $f(x, y(x)) = -y$; et $g(t) = 1$. D'après la formule(2.1.8), nous obtenons les formules donnant les premiers termes

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 1, \\ y_1(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t -(t-x)^{\alpha-1} y_0 dx, \\ y_2(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t -(t-x)^{\alpha-1} y_1 dx, \\ y_3(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t -(t-x)^{\alpha-1} y_2 dx, \\ &\vdots \\ y_{n+1}(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t -(t-x)^{\alpha-1} y_n dx, \end{aligned}$$

nous obtenons les premiers termes de la solution approchée :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 1 \\ y_1(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ y_2(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ y_3(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \\ &\vdots \\ y_n(t) &= 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + \dots + (-1)^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \end{aligned}$$

comme

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

alors

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + \dots + (-1)^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \right)$$

D'après la définition(1.1.3) de Mittag-Leter

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(-t^\alpha). \quad (3.1.5)$$

En substituant $\alpha = 2$ dans(3.1.5), nous obtenons :

$$y(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots = \cos(x)$$

D'autre part le développement en série de Taylor ou voisinage de $x=0$ pour la solution exacte (3.1.4) est donné par :

$$y(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots ,$$

Cela confirme donc notre résultat,

TABLE 3.1 – Erreur absolue lorsque différentes valeurs de x pour l'equ (3.1.1)

x	exacte	approuché	erreur 1.0e-015
-1	0.5403	0.5403	0.1110
-0.8	0.6967	0.6967	0
-0.6	0.8253	0.8253	0
-0.4	0.9211	0.9211	0
-0.2	0.9801	0.9801	0
0	1.0000	1.0000	0
0.2	0.9801	0.9801	0
0.4	0.9211	0.9211	0.1110
0.6	0.8253	0.8253	0
0.8	0.6967	0.6967	0

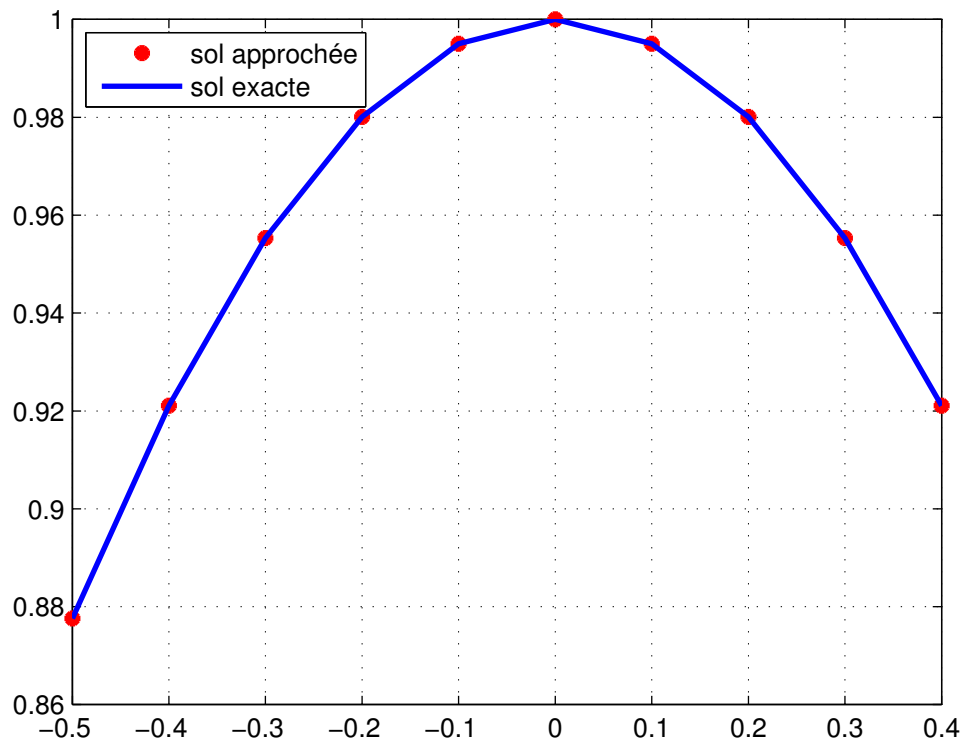


FIGURE 3.1 – Comparaison entre la solution exacte et approchée pour l'équation(3.1.1)

3.1.2 Méthode HPM

Exemple 3.1.2. Nous considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire à coefficients variables suivante :

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}u - 2xu = -2x, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.1.6)$$

avec la condition initiale suivante :

$$u(0) = 2, \quad (3.1.7)$$

ou ${}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo pour $\alpha = 1$, la solution exacte de l'équation

$$y' - 2xy = -2x. \quad (3.1.8)$$

avec la condition initiale (3.1.7) est donnée par :

$$y = \exp(x^2) + 1. \quad (3.1.9)$$

D'après la formule (2.2.3) nous pouvons construire l'homotopie comme suit :

$$(1 - p)[{}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}v - {}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}u_0] + p[{}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}v - 2xv + 2x] = 0, p \in [0, 1]$$

ou

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v - {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_0 + p {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_0 - 2xp[v] + 2p(x) = 0, \quad (3.1.10)$$

nous essayons maintenant d'obtenir une solution pour (3.1.10) sous la forme :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots . \quad (3.1.11)$$

En substituant (3.1.11) dans (3.1.10), et en identifiant avec les termes des différents monômes en p nous obtenons les équations différentielles d'ordre fractionnaire suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 & : {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_0 = {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_0, \\ p^1 & : {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_1 + {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_0 - 2xv_0 - 2x = 0, \\ p^2 & : {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_1 - 2xv_1 = 0, \\ p^3 & : {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_2 - 2xv_2 = 0, \\ & \vdots \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

D'après (3.1.12) et la condition initiale (3.1.7), nous obtenons les premiers termes suivants :

$$\begin{aligned} v_0(x) & = 2, \\ v_1(x) & = \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} x^{\alpha+1}, \\ v_2(x) & = \frac{4(\alpha + 2)}{\Gamma(2\alpha + 3)} x^{2\alpha+2}, \\ v_3(x) & = \frac{8(\alpha + 2)(2\alpha + 3)}{\Gamma(3\alpha + 4)} x^{3\alpha+3}, \\ v_4(x) & = \frac{16(\alpha + 2)(2\alpha + 3)(3\alpha + 4)}{\Gamma(4\alpha + 5)} x^{4\alpha+4}, \\ & \vdots \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

et comme

$$u(x) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(x),$$

la solution approchée de l'équation (3.1.6) s'exprime comme suite :

$$u(x) = 2 + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} x^{\alpha+1} + \frac{4(\alpha + 2)}{\Gamma(2\alpha + 3)} x^{2\alpha+2} + \frac{8(\alpha + 2)(2\alpha + 3)}{\Gamma(3\alpha + 4)} x^{3\alpha+3} + \dots . \quad (3.1.14)$$

pour $\alpha = 1$, nous obtenons les quatre premiers termes de la solution approchée de l'équation (3.1.6) dans le cas entier

$$u(x) = 2 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots . \quad (3.1.15)$$

D'autre part le développement en série de Taylor ou voisinage de $x=0$ pour la solution exacte (3.1.9) est donné par :

$$u(x) = 1 + (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots),$$

Cela confirme donc notre résultat.

TABLE 3.2 – Erreur absolue lorsque différentes valeurs de x pour l'equ (3.1.6)

x	exacte	approché	erreur 1.0e-015
-1	1	0.9101	0.0899
-0.8	0.6400	0.5696	0.0704
-0.6	0.3600	0.3113	0.0487
-0.4	0.1600	0.1329	0.0271
-0.2	0.0400	0.0310	0.0090
0	0	0	0
0.2	0.0400	0.0310	0.0090
0.4	0.1600	0.1329	0.0271
0.6	0.3600	0.3113	0.0487
0.8	0.6400	0.5696	0.0704

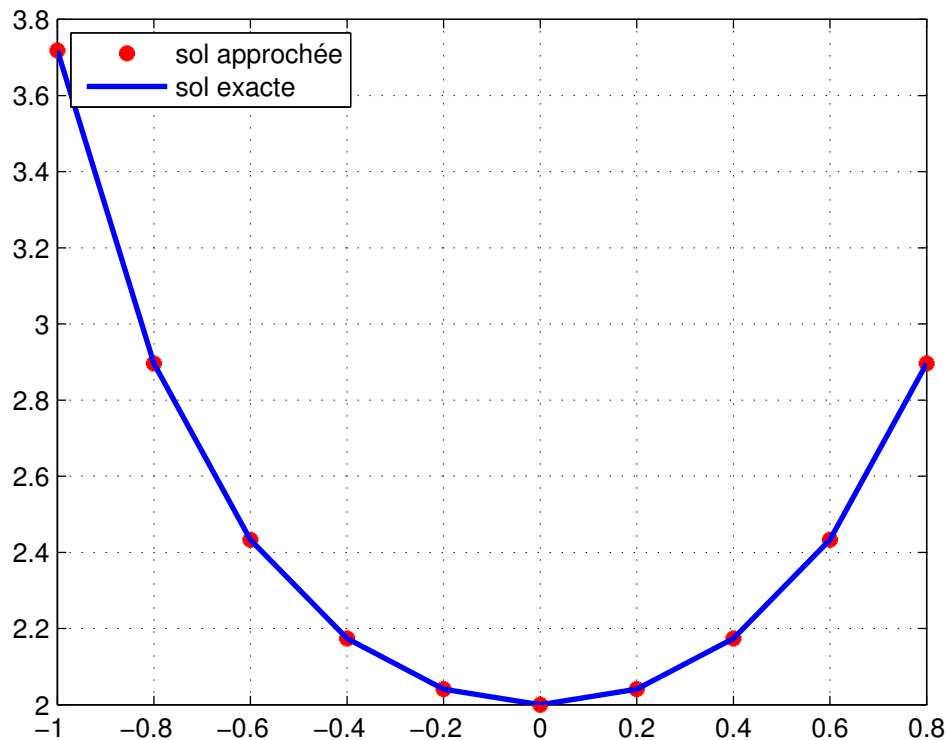


FIGURE 3.2 – Comparaison entre la solution exacte et approchée pour l'équation(3.1.6)

3.2 cas non-linéaire

3.2.1 Méthode VIM

Exemple 3.2.1. Nous considérons l'équation différentielle non-linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha y = y^2 + 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.2.1)$$

avec la condition initiale suivante :

$$y(0) = 0. \quad (3.2.2)$$

où ${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire ou sens de Caputo pour $\alpha = 1$, la solution exacte de l'équation

$$u' = u^2 + 1 \quad (3.2.3)$$

avec la condition initiale(3.2.2) est donnée par :

$$u = \tan(x)$$

la solution approchée de l'équation (3.2.1) d'après la méthode VIM est écrite ce la forme

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

telle que

$$y_{n+1} = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y_n(x)) dx \quad (3.2.4)$$

dans cet exemple $f(x, y(x)) = y^2 + 1$, et $g(t) = 0$ D'après (3.2.1) car

$$g(t) = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(j)} \frac{t^j}{j!}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.2.5)$$

D'après la formule (3.2.4), nous obtenons les formules donnant les premiers termes

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \\ y_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} (y_0^2 + 1) dx \\ y_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} (y_1^2 + 1) dx \\ y_3(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} (y_2^2 + 1) dx \\ &\vdots \\ y_{n+1}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} (y_n^2 + 1) dx \end{aligned}$$

nous obtenons les premiers termes de la solution approchée :

$$\begin{aligned}
 y_0(t) &= 0 \\
 y_1(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
 y_2(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \\
 y_3(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)}t^{5\alpha} \\
 &\quad + \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)t^{7\alpha}}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)} \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

comme

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)}t^{5\alpha} \\
 &\quad + \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)t^{7\alpha}}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

En substituant $\alpha = 1$ dans (3.2.7), nous obtenons la série suivante :

$$y(t) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{t^7}{63} + \frac{38t^9}{2835} + \dots$$

pour les solutions approchées on prend quatre termes

TABLE 3.3 – Erreur absolue lorsque différentes valeurs de x pour l'équ (3.2.1)

x	exacte	approché	erreur 1.0e-015
-1	-1.5574	-1.4959	0.0615
-0.8	-1.0296	-1.0195	0.0102
-0.6	-0.6841	-0.6829	0.0012
-0.4	-0.4228	-0.4227	0.0001
-0.2	-0.2027	-0.2027	0
0	0	0	0
0.2	0.2027	0.2027	0
0.4	0.4228	0.4227	0.0001
0.6	0.6841	0.6829	0.0012
0.8	1.0296	1.0195	0.0102

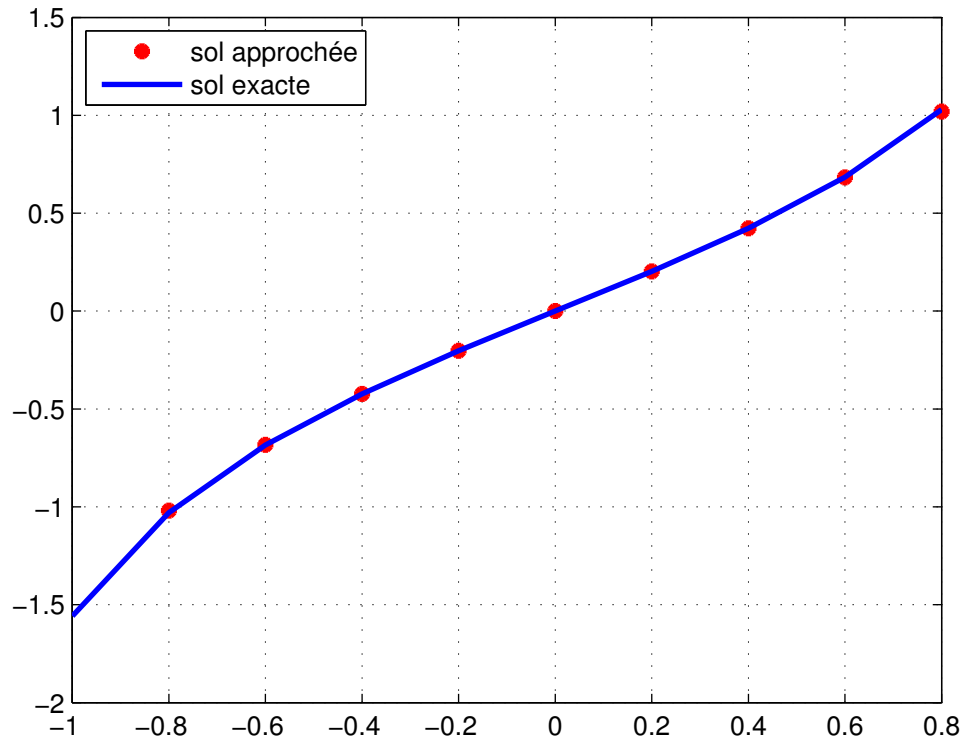


FIGURE 3.3 – Comparaison entre la solution exacte et approchée pour l'équation(3.2.1)

3.2.2 Méthode HPM

Exemple 3.2.2. Nous considérons l'équation différentielle non-linéaire d'ordre fractionnaire à coefficients variable suivante :

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u - 2u + u^2 = -1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.2.8)$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 2, \quad (3.2.9)$$

où ${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Si $\alpha = 1$, on obtient l'équation suivante :

$$y' - 2y + y^2 = -1, \quad (3.2.10)$$

l'équation (3.2.10) est une équation de Riccati qui admet la solution exacte suivante :

$$y(x) = \frac{1}{1+x} + 1, \quad |x| < 1.$$

D'après la formule (2.2.3), nous pouvons construire l'homotopie suivante :

$$(1-p)[{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v - {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_0] + p[{}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v - 2v + v^2 + 1] = 0,$$

$$p \in [0, 1],$$

ou

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v - {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_0 + p {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_0 - p[2v - v^2 - 1] = 0, \quad (3.2.11)$$

nous essayons maintenant d'obtenir une solution pour(3.2.11) sous la forme :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots . \quad (3.2.12)$$

En substituant(3.2.12) dans(3.2.11), et identifiant les termes de mêmes puissances de p,nous obtenons les équations différentielles d'ordre fractionnaire suivants :

$$\begin{aligned} p^0 & : {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_0 = {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_0, \\ p^1 & : {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_1 + {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_0 - 2v_0 - v_0^2 + 1 = 0, \\ p^2 & : {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_1 - 2v_1 + 2v_0v_1 = 0, \\ p^3 & : {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_2 - 2v_2 + 2v_0v_2 + v_1^2 = 0, \\ & \vdots \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

A partir de l'équation (3.2.13) et la condition (3.2.9) nous obtenons les premiers termes suivants :

$$\begin{aligned} v_0(x) & = 2, \\ v_1(x) & = \frac{-1}{\Gamma(\alpha + 1)}x^\alpha, \\ v_2(x) & = \frac{2}{\Gamma(2\alpha + 1)}x^{2\alpha}, \\ v_3(x) & = \frac{-4 - \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)}x^{3\alpha}, \\ & \vdots \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

et comme

$$u(x) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(x),$$

nous obtenons les premiers termes de la solution approchée de l'équation (3.2.8) :

$$u(x) = 2 + \frac{-1}{\Gamma(\alpha + 1)}x^\alpha + \frac{2}{\Gamma(2\alpha + 1)}x^{2\alpha} + \frac{-4 - \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)}x^{3\alpha} + \dots . \quad (3.2.15)$$

substituant $\alpha = 1$ dans (3.2.15) , nous obtenons la solution approchée de l'équation (3.2.8) dans le cas entier

$$u(x) = 2 - x + x^2 - x^3 + \dots .$$

TABLE 3.4 – Erreur absolue lorsque différentes valeurs de x pour l'equ (3.2.8)

x	sol app	Exact	erreur
-0.5	2.9980	3	0.002
-0.4	2.6665	2.6667	0.0002
-0.3	2.4286	2.4286	0
-0.2	2.2500	2.2500	0
-0.1	2.1111	2.1111	0
0	2.0000	2.0000	0
0.1	1.9091	1.9091	0
0.2	1.8333	1.8333	0
0.3	1.7692	1.7692	0
0.4	1.7142	1.7143	0.0001

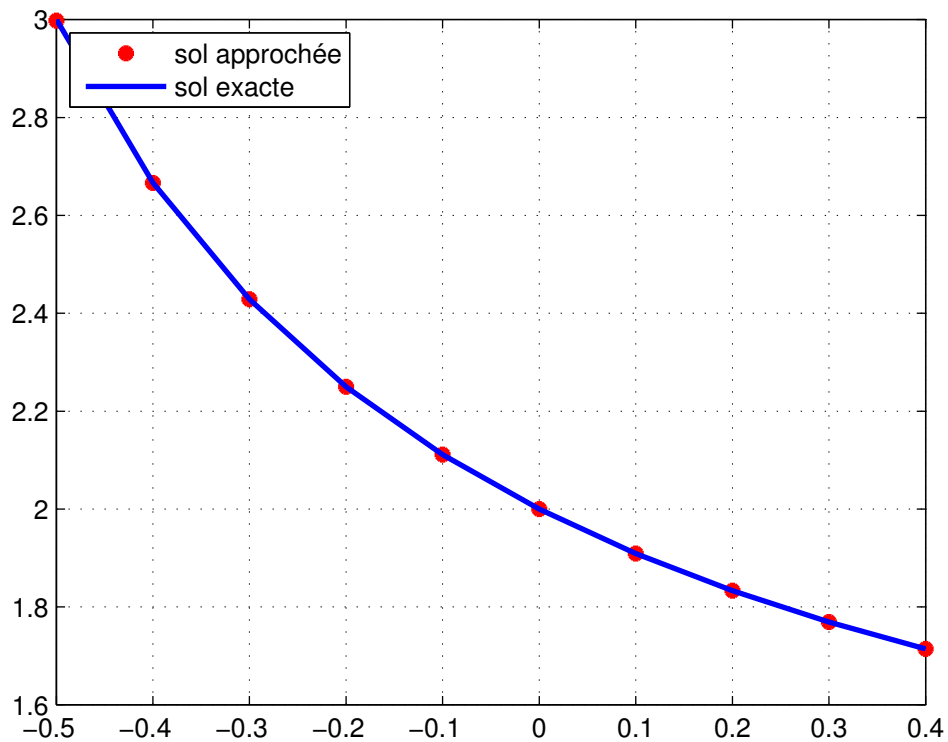


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la solution exacte et approchée pour l'équation(3.2.8)

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons essayé d'introduire deux méthodes les plus utilisées dans le calcul des approximations analytiques des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Nous avons cité les méthodes :VIM et HPM.

Puis nous nous sommes intéressés à l'équation étudiée. L'analyse de convergence pour cette solution, on termine ce travail par des résultats qui assurent l'efficacité de ces méthodes d'approximation justifiées par plusieurs exemples.

TABLE DES NOTATIONS

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail :

$\Gamma(z)$ \cdots la fonction Gamma

$\beta(p, q)$ \cdots la fonction de beta

$E_\alpha(x)$ \cdots La fonction de Mittag-Leffter

$E_{\alpha, \beta}(x)$ \cdots la fonction de Mittag-Leffter généralisée

\mathcal{I}_a^α \cdots L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

\mathcal{D}_a^α \cdots La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville

${}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha$ \cdots la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche

${}^c\mathcal{D}_{b^-}^\alpha$ \cdots la dérivée fractionnaire de Caputo à droite

L \cdots la constante de Lipschitz

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abramowitz.M,Stegun.I.A, "Handbook of Mathematical Functions",Nauka,Moscow,(1979).
- [2] Biazar.J,Aminikhah.H,"Study of convergence of homotopy perturbation method for systems of partial differential equations",Comput.Math.Appl.58.(2009),2221-2230.
- [3] Biazar.J,Ghazvini.H,"convergence of the homotopy method for partial differential equations",Nonl.Anal.Real W.Appl,10,(2009),2633-2640.
- [4] Diethelm.K,Ford.N.J,"Analysis of fractional differential equations",J.math.Anal.Appl,265,(2002),229-248.
- [5] Elbeleze.A.A,Kjjjcmán.A,Taib.B.N,"Note on the convergence Analysis of Homotopy Perturbation Method for Fracttional Partial Differential Equations",H.Pup.corp.Abst.Appl.Anal,A.ID 803902,(2014),1-8.
- [6] Ghorbani.A,Nadjufi.J.S,"An effective modification of He's variational iteration method",Nonl.Anal.real W.Appl,10,(2009),2828-2833.
- [7] He.J.H,"homotopy pertubation technique",Comput.Math.Appl.Mech.Eng. 178(3),(1999),257-262.
- [8] He.J.H,"A coupling method of homotopy technique and pertubation technique or non-linear problems",Int.J.Non-Linear Mech,35,(2000),37-43
- [9] He.J.H,"Application of homotopy perturbation method to non-linear ware equations",Chaos Solitions raactals,26(3),(2005),695-700.
- [10] Kaddouri.M,"Problèmes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire",Mémoire du diplôme de Master,Université Dr Tahar Moulay - Saïda,(2017)
- [11] Kilbas.A.A.,Srivastava.H.M and Trujillo.J.J, "Theory and applications of fractional differential Equations", North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam,(2006).

- [12] Miller.K.S and Ross.B,3An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations3, John Wiley, New York, (1993).
- [13] Podlubny.L,"Fractional Differenal Equations",Academic Press,San Diego,(1999).
- [14] SAMKO.S.G,KILBAS.A.A and MARICHEV.O.I,"Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications", Gordon and Breach Science Publishers,Switzerland,(1993).
- [15] Wem.Z,Yi.J,Liu.H , "Convergence Analysis of Variational Iteration Method for Caputo Fractional Differential Equations",V.324 of the series Commu. in Comp and Inf Sci,Asia Sim,(2012),2506-2509.
- [16] XU.L,"The variational iteration method for solving integral equations",Comp.Math Appl,54,(2007),1071-1078.
- [17] Zeiane.D,"Méthode combinée des perturbations HPM et VIM pour la résolution des équations différentielles ordinaires et EDP d'ordre fractionnaire".Thèse Doctort en Mathématique,EDP-Amylase Numérique,Université D'ORAN 1, Ahemd Ben Bella,(2016).