



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

Étude d'existence et d'unicité de la solution du modèle de Catté et al

Présenté par :

M^r LACHACHE Mohamed

Soutenu publiquement le : 30/06/2019.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r Sengouga* Abdelmohcen

M.C.A, Université de M'sila

Encadreur : *M^r Benhamidouche* Nour eddine

Pr, Université de M'sila

Examineur : *M^r Bounab* Noura

M.C.B, Université de M'sila

Examineur : *M^r Chouder* Rafaa

M.C.B, Université de M'sila

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Egalement, je remercie infiniment Monsieur ..., mon enseignant, mon inspecteur, mon professeur et mon encadreur de recherche pour la confiance qu'il a bien voulu m'accorder en acceptant de diriger ce mémoire, pour la qualité de son encadrement, ses précieuses orientations, sa simplicité et sa patience.

Je tiens à exprimer aussi mes remerciements aux membres de jury d'avoir accepté de lire et d'évaluer ce travail. A tous les enseignants du Département des Mathématiques de l'université de M'sila qui ont assuré notre formation durant ce cursus universitaire.

Je remercie mon ami DJADJAD BOUM pour son soutien et sa collaboration.

Je remercie mes amis SAOUJI pour ses encouragements.

Mes remerciements vont à tous ceux qui ont participé de près ou de loin pour l'achèvement de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail qui n'aura jamais pu voir le jour sans les soutiens indéfectibles et sans limite de mes chers parents, le symbole de tendresses, pour leurs encouragements et leurs conseils, qui ne cessent de me donner avec amour le nécessaire pour que je puisse arriver à ce que je suis maintenant.

Que Dieu vous protège et que la réussite soit à ma portée pour que je puisse vous combler de bonheur.

Je dédie ce travail A tous mes frères et mes sœurs : Houssam, Halim, Samia, Youes.

Et à toute ma famille.

A tous ceux qui mon appris à lire et à écrire.

A tous mes enseignants tout au long de ma vie.

A tous mes camarades de la promotion 2018/2019.

Table des matières

1	EDP et traitement de l'image	8
1.1	Définition et propriétés sur les espaces fonctionnels	9
1.1.1	Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	10
1.1.2	Injection de Sobolev	10
1.1.3	Espaces des valeurs vectoriels	11
1.1.4	La continuité forte et la continuité faible	11
1.2	L'image numérique et mathématique	12
1.3	Filtrage linéaire- filtre de Gaussienne	14
1.4	Équation de la Chaleur et traitement de l'image	15
1.4.1	Équation de la Chaleur	15
1.5	Filtrage de diffusion non linéaire du Modèle de Perona-Malik	17
2	Régularisation du modèle de Perona Malik – modèle de Catté et al	20
2.1	Régularisation du modèle de Perona Malik- Modèle de Catté et al	21
2.1.1	Modèle Catté et al	21
2.1.2	Les avantages du modèle de Catté et al	24
2.2	L'existence et l'unicité de modèle Catté et al	24
2.2.1	Étape 1 : Unicité de la solution	25
2.2.2	Étape 2 : Existence de la solution	27
2.3	Un schéma itératif qui converge vers la solution du problème Catté et al	33
3	Résolution numérique du modèle Catté et al	34
3.1	Approximations par différences finies	35
3.2	Discrétisation par différences finies	36
3.3	Équation de la Chaleur	37
3.4	Équation de Perona Malik	38
3.5	Régularisation du l'équation de Perona Malik -équation de Catté et al	42
3.6	Comparaison entre les deux modèles	46
4	Conclusion générale	50
5	Annexe	52

Table des figures

1.1 Exemple d'image numérique avec son code du pixels.	12
1.2 Exemple d'image en binaires, avec son code du pixels du carré sélectionné dans l'image.	13
1.3 Exemple d'image en niveaux de gris, avec son code du pixels du carré sélectionné dans l'image.	13
1.4 Exemple d'image en couleurs, avec son code du pixels du carré sélectionné dans l'image.	14
1.5 Distribution Gaussienne 1-D avec moyenne 0 et $\sigma = 1$	14
1.6 Distribution Gaussienne 2-D avec moyenne (0, 0) et $\sigma = 1$	15
1.7 L'image filtrée par l'EDP de la Chaleur.	16
1.8 Fonction de diffusivité $g(s)$	17
1.9 Filtrage par le filtre de Perona Malik.	18
3.1 Image filtrée par le filtre de Chaleur	38
3.2 Image bruitée filtrée par le filtre de Chaleur	38
3.3 Filtrage par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/7$	40
3.4 L'image originale bruitée filtrée par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/7$	41
3.5 L'image originale filtrée par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/2$	41
3.6 l'image originale bruitée filtrée par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/2$	42
3.7 L'image originale filtrée par le filtre Catté et al, $\Delta t = 1/7$	43
3.8 L'image originale bruitée filtrée par le filtre Catté et al, $\Delta t = 1/7$	44
3.9 L'image originale filtrée par le filtre Catté et al, $\Delta t = 1/2$	44
3.10 L'image originale bruitée filtrée par le filtre Catté et al, $\Delta t = 1/2$ et $\sigma = 0.5$	45
3.11 Image originale filtrée par les trois modèle.	46
3.12 Image originale bruitée filtrée par les trois modèle.	47
3.13 en haut l'image originale filtrée par le filtre de Perona Malik, en bas l'image originale filtrée par le filtre de Catté et al $\Delta t = 1/2$ et $\sigma = 0.5$	48
3.14 en haut l'image originale bruitée filtrée par le filtre de Perona Malik, en bas l'image originale filtrée par le filtre de Catté et al $\Delta t = 1/2$ et $\sigma = 0.5$	49

Introduction générale

Parmi les premiers modèles mathématiques utilisés en traitement de l'image, c'est le modèle de la Chaleur qui constitue un modèle de filtrage linéaire $\frac{\partial u}{\partial t} = C\Delta u$ [3].

Cependant, ce modèle a un défaut il ne permet pas de détecter les contours d'image, donc pour améliorer la détection des contours en modifiant l'équation de la chaleur. Dans les années 90 Perona et Malik [8] ont introduit une importante amélioration de la théorie de la détection des contours. Ils proposent de remplacer l'équation de la chaleur par une équation non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla u|)\nabla u), \quad u(0) = u_0.$$

Où g est une fonction décroissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ .

Cependant, le modèle Perona Malik a de sérieuses difficultés pratique et théorique. En traitement d'images, pour filtrer les images bruitées, ce modèle ne permet pas de supprimer les bruits puisqu'il ne distingue pas entre les bords et les bruits. Théoriquement le problème est mal posé (n'admettent pas une solution faible).

Une façon de traiter le problème mal posé est d'introduire une régularisation qui rend le problème bien posé. Catté, Lions et Morel [2]. ont donc proposé une régularisation du modèle de Perona et Malik, qui leur permet alors de démontrer l'existence et l'unicité de la solution,

et éviter les difficultés du modèle de Perona Malik $\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|)\nabla u) \quad u(0) = u_0$, et

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution de ce modèle, et établir une comparaison entre ces modèles.

Le mémoire est organisé en trois parties :

Dans le chapitre 1, nous avons deux parties, la première partie nous parlerons de certaines définitions et propriétés sur les espaces fonctionnels, et la deuxième partie nous parlerons de certaines définitions générales sur l'images numériques et ces types avec le filtrage linéaire et non linéaire par les EDP (équation de la chaleur, équation de Perona Malik).

Dans le chapitre 2, nous introduisons la Régularisation du modèle de Perona Malik qui rend le problème bien posé, appelé Catté et al, et introduisons des avantages de ce modèle par rapport aux modèle de Perona Malik, et en étudierons l'existence et l'unicité de solution du modèle de Catté et al.

Dans le chapitre 3, nous étudierons la résolution numérique des modèles de la chaleur, Perona Malik et Catté et al, et nous utiliserons Les approximations par différences finies pour résoudre les schéma des EDPs, et nous présenterons quelque résultats numériques pour faire une comparaison de filtrage entre Perona Malik et Catté et al.

EDP ET TRAITEMENT DE L'IMAGE

Dans ce chapitre, nous avons deux parties, la première partie nous parlerons de certaines définitions et propriétés sur les espaces fonctionnels, et la deuxième partie nous parlerons de certaines définitions générales sur l'images numériques et ces types avec le filtrage linéaire et non linéaire par les EDP (équation de la chaleur , équation de Perona Malik).

1.1 Définition et propriétés sur les espaces fonctionnels

Dans toute la suite Ω désigne un domaine borné dans \mathbb{R}^n

Définition et propriétés élémentaires des espaces L_p

Définition 1.1. [5] On a

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ f est mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty \right\},$$

avec

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f|^p dx \right]^{1/p}.$$

Définition 1.2. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ f est mesurable et il existe un constant } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ a.e. sur } \Omega\},$$

avec

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C : |f(x)| \leq C \text{ a.e. sur } \Omega\}.$$

Notation :

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on note par p' l'exposant conjugué satisfaisant :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Propriétés 1.1. [4](L'inégalité de Young). Soit $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad ((a, b) > 0).$$

(L'inégalité de Young avec ϵ) :

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q \quad \text{for } C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}.$$

Propriétés 1.2. Inégalité de Hölder. Suppose que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Théorème 1.1. [5] L^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq P \leq \infty$.

Théorème 1.2. [5](Fischer-Riesz). L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Proposition 1.1. Convergence faible dans les $L^p(\Omega)$. Soient (u_n) une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ et p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite faiblement convergente, c'est-à-dire

$$\exists (u_{n_k}), \exists u \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega), \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{n_k} \varphi = \int_{\Omega} u \varphi$$

1.1.1 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ sont des espaces Banach analogues en certains sens au $C^{k,p}(\bar{\Omega})$.

Définition 1.3. Pour $p \geq 1$ et k un entier non négatif, on a

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour tous } \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ telle que } |\alpha| \leq k\},$$

avec

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Définition 1.4. Soit $1 \leq p < \infty$ on note par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Propriétés 1.3. (L'inégalité de Poincaré) Supposons que Ω un domaine borné ouvert. Alors, il existe une constante C telle que :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}, \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

1.1.2 Injection de Sobolev

Définition 1.5. Si $1 \leq p < n$ le conjugué de Sobolev de p est

$$p^* = \frac{pn}{n-p},$$

telle que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Théorème 1.3. (Gagliardo-Nirenberg-Injection de Sobolev). soit $1 \leq p < \infty$. suppose que Ω est une ouvert bornée dans \mathbb{R}^n , on a les injections continues suivant :

1. si $1 \leq p < n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[,$
2. si $p = n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, \infty[,$
3. si $p > n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}).$

Dans la prochaine théorème, nous donnerons les injections de Sobolev compact.

Théorème 1.4. soit $1 \leq p < \infty$. suppose que Ω est une ouvert bornée dans \mathbb{R}^n , on a les injections compacts suivant :

1. si $1 \leq p < n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[, q \leq \frac{pn}{n-p} = p^*,$
2. si $p = n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[,$
3. si $p > n$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c C(\bar{\Omega}).$

1.1.3 Espaces des valeurs vectoriels

Définition 1.6. L'espace $L^p(0, T; X)$ se compose de toutes les fonctions fortement mesurables $f : [0, T] \rightarrow X$, avec

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty,$$

pour $1 < p < \infty$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{0 < t < T} \text{ess} \|f\|_X < \infty.$$

Définition 1.7. L'espace $W^{1,p}(0, T; X)$ est défini comme suit :

$$W^{1,p}(0, T; X) = \{u(0, T) \rightarrow X; u, \partial u_t \in L^p(0, T; X)\},$$

avec

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \|u\|_{L^p(0, T; X)} + \|\partial u_t\|_{L^p(0, T; X)}.$$

Ces espaces sont des espaces réflexifs et Banach avec leurs normes associées (puisque X est un espace réflexif et Banach).

Définition 1.8. L'espace $C(0, T; X)$ comprend toutes les fonctions continues $f : [0, T] \rightarrow X$, avec

$$\max_{0 < t < T} \|u\|_X < \infty.$$

Théorème 1.5. Nous avons l'injection suivant

$$W^{1,p}(0, T; X) \hookrightarrow C(0, T; X).$$

1.1.4 La continuité forte et la continuité faible

La continuité forte

Théorème 1.6. Soient X, Y deux espaces de Banach tels que $X \subset Y$, X étant dense dans Y . soit $T > 0$ et p, q tels que $1 \leq p, q < \infty$, Alors l'espace

$$E_{p,q} = \left\{ v \in L^p(0, T; X); v' = \frac{dv}{dt} \in L^q(0, T; Y) \right\}$$

s'injecte continûment dans l'espace $C([0, T]; Y)$.

La continuité faible

Théorème 1.7. Soit Y un espace de Banach, on dit qu'une fonction $u : [0, T] \rightarrow Y$ faiblement continue si pour tout $\psi \in Y'$ la fonction défini par

$$t \in [0, T] \rightarrow \langle \psi(t), u(t) \rangle_{Y', Y}$$

est continue. On note par $C([0, T]; Y_{\text{faible}})$ l'espace des fonctions de $[0, T]$ à Y qui sont faiblement continue.

1.2 L'image numérique et mathématique

Définition 1.9. Une image numérique. Une image numérique est composée d'unités élémentaires (appelées pixels) qui représentent chacun une portion de l'image, les pixels sont organisés dans un tableau rectangulaire ordonné, Une image de taille (m, n) est une matrice I de m colonnes et de n lignes.

Exemple pour une image numérique :

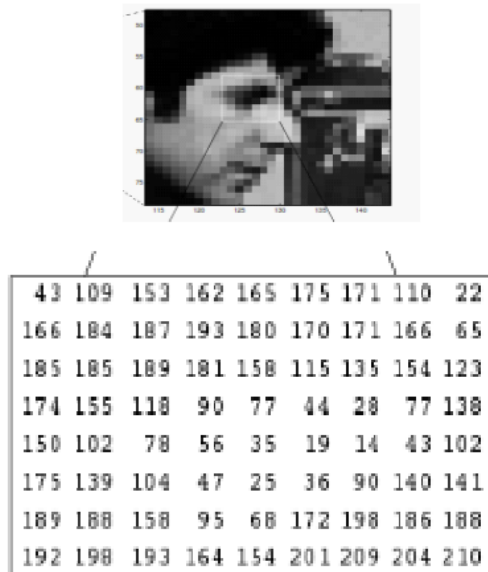


FIGURE 1.1 – Exemple d'image numérique avec son code du pixels.

Définition 1.10. Une image mathématique. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 (ex rectangle). Une image est définie comme une fonction

$$f : \Omega \text{ dans } \mathbb{R} \text{ (pour une image niveau de gris),}$$

et

$$f : \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^3 \text{ (pour une image couleur).}$$

Définition 1.11. Types d'images numériques

On a Trois types d'image

1. Les images binaires (noir ou blanc)

Une image binaire est une image numérique qui a deux valeurs d'intensité possibles par pixel, Cela signifie que chaque pixel est stocké sous la forme d'un seul bit, c'est-à-dire, un 0 pour le noir et 1 pour le blanc.

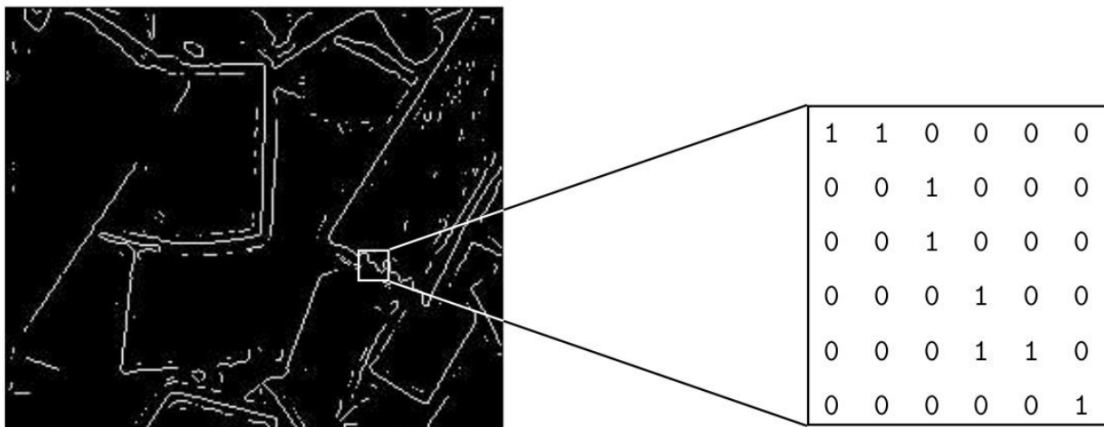


FIGURE 1.2 – Exemple d'image en binaires, avec son code du pixels du carré sélectionné dans l'image.

2. Les images en teintes de gris

En général, les images en niveaux de gris renferment 256 teintes de gris. Par convention la valeur zéro représente le noir (intensité lumineuse nulle) et la valeur 255 le blanc (intensité lumineuse maximale).

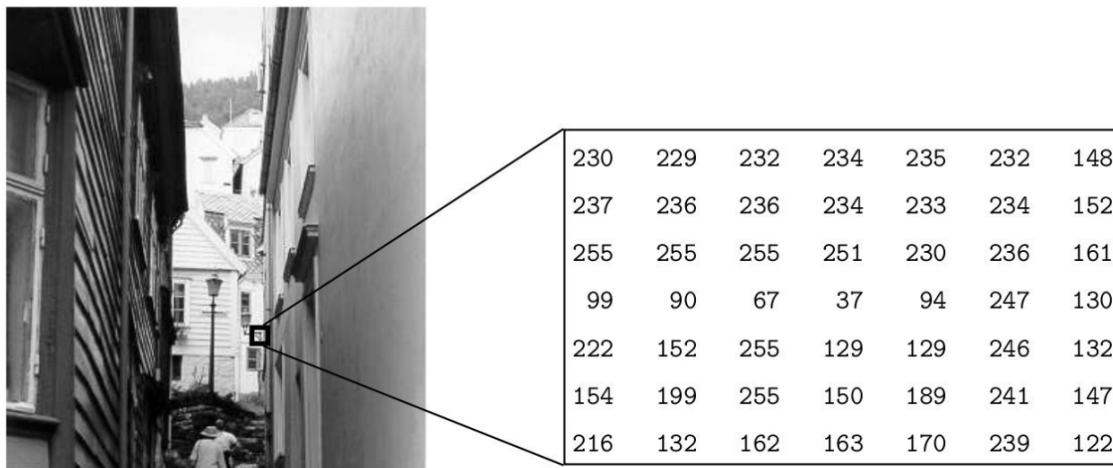


FIGURE 1.3 – Exemple d'image en niveaux de gris, avec son code du pixels du carré sélectionné dans l'image.

3. Les images en couleurs

Une image couleur est une image numérique qui inclut des informations de couleur pour chaque pixel, le plus utilisé pour le maniement des images numériques est l'espace couleur Rouge, Vert, Bleu (R,V,B).

La distribution Gaussienne en 2-D a la forme :

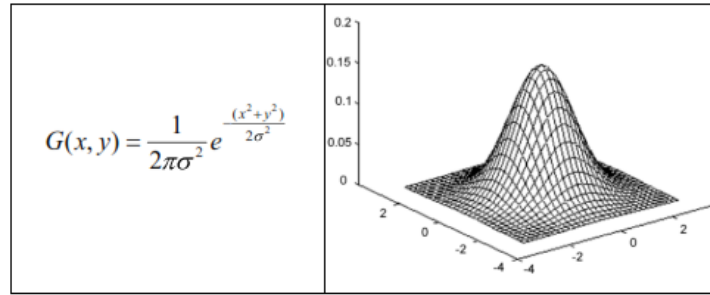


FIGURE 1.6 – Distribution Gaussienne 2-D avec moyenne $(0, 0)$ et $\sigma = 1$.

1.4 Équation de la Chaleur et traitement de l'image

1.4.1 Équation de la Chaleur

– Équation de la Chaleur sur \mathbb{R} [3]

Soit le problème de la Chaleur suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (1.1)$$

On sait que pour $f(x)$ continue, bornée, la solution du problème s'écrit comme

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4Kt}} dy, \quad k > 0.$$

Solution comme convolution

$$u(x, t) = f * G_{\sqrt{2t}},$$

avec le filtre Gaussien

$$G_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

σ représente l'échelle de filtrage.

- **Équation de la Chaleur sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$** [3]. Soit l'image définie par $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et soit l'équation de la Chaleur donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x, y, t); & t > 0, \\ u(x, y, 0) = u_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour f continue et bornée, la solution est donnée par

$$u(x, y, t) = u_0 * G_{\sqrt{2t}}(x, y),$$

avec

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}.$$

On peut remarquer que la solution de l'équation de la Chaleur représente un filtrage linéaire d'une image initial f par le filtre Gaussien à l'échelle $\sqrt{2t}$.

σ : représente l'échelle de filtrage.

Ce filtrage ne permet pas de détecter des contours d'images on a recours au filtrage non linéaire



FIGURE 1.7 – L'image filtrée par l'EDP de la Chaleur.

1.5 Filtrage de diffusion non linéaire du Modèle de Perona-Malik

On considère le problème linéaire de l'équation de la Chaleur suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u; & x \in \Omega t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0; & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Le défaut du filtre de la chaleur est qu'il ne permet pas de détection de contour (voir figure (1.7)). et Pour améliorer les résultats obtenus par l'EDP de la chaleur, Perona et Malik ont proposé une modification dans le modèle précédent comme suite [8]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\nabla u) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

où g est une fonction décroissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ .

L'idée est que le processus de lissage obtenu par l'équation (1.3) est «conditionnel» [2] :

- si $|\nabla u(x)|$ est grand, alors la diffusion sera faible (puisque $g(s)$ est petit pour un grand s) et donc la localisation exacte des "bords" sera gardée. (nous entendons par le bord un point où $|\nabla u(x, t)|$ est grand)
- si $|\nabla u(x)|$ est petit, alors la diffusion aura tendance à se lisser encore plus au voisinage de x

Remarque 1.1. si $g = 1$, on retrouve l'équation de la chaleur. on impose souvent que $g(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$. Ainsi, dans les régions de faible gradient, l'équation agit essentiellement comme l'EDP de la chaleur, et dans les régions de fort gradient, la régularisation est stoppée (ce qui permet de préserver les bords).

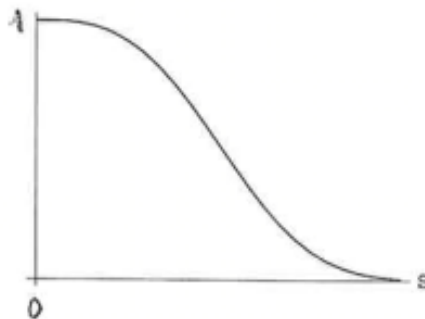


FIGURE 1.8 – Fonction de diffusivité $g(s)$.

Perona et Malik [8] ont fourni quelques exemples de fonctions g qui permettent à l'équation (3.1) d'afficher également le comportement «amélioration des bords». Ils ont proposé des fonction du diffusion du type

$$g(s) = e^{-\frac{s^2}{\lambda^2}},$$

ou bien

$$g(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\lambda}\right)^2},$$

le paramètre λ est appelé seuil de diffusion, et ils ont utilisé une flux fonction définie par

$$\phi(s) = sg(|s|),$$

cette fonction est une fonction non monotone. Plus précisément $\phi(s)$ croissante pour $s < \lambda$ mais décroissante pour $s > \lambda$, et de plus $\phi(s)$ tend vers zéro quand s tend vers l'infini.

Exemple pour le modèle de Perona Malik

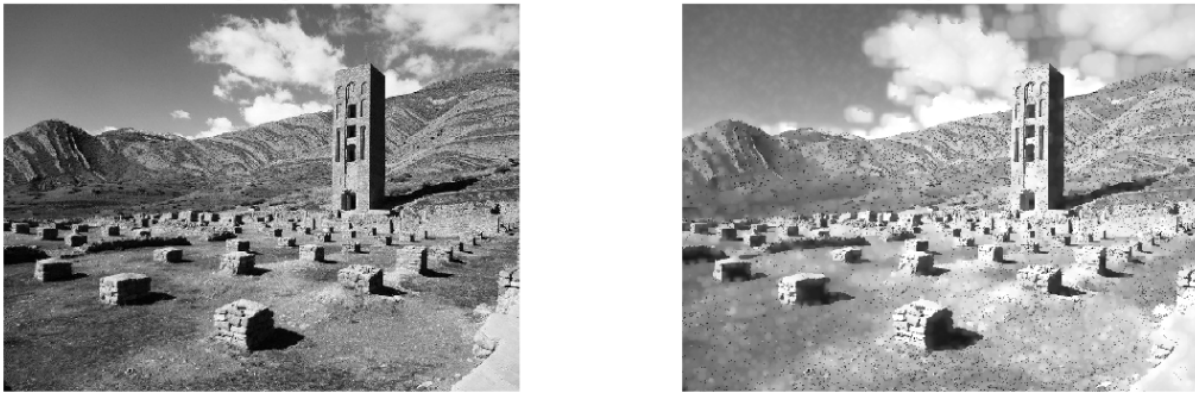


FIGURE 1.9 – Filtrage par le filtre de Perona Malik.

Définition 1.12. (Problème Bien-posé). Lorsqu'un problème de minimisation ou un EDP admet une solution unique qui dépend en permanence des données, on dit que le problème de minimisation ou le EDP sont bien posés au sens de Hadamard.

Si l'une des conditions suivantes : existence, unicité ou continuité échoue, on dit que le problème de minimisation ou l'EDP sont mal posés.

Lemme 1.1. *Le modèle de Perona et Malik est un problème mal-posé.*

Démonstration. Prenons le cas où le signal est unidimensionnel. L'équation devient

$$\frac{du}{dt} - (g(u')u')' = 0, \quad (1.4)$$

c'est-à-dire

$$\frac{du}{dt} - (g'(u'))u' + g(u')u'' = 0,$$

si $sg(s)$ décroissant à un certain s , alors

$$(sg(s))' \leq 0,$$

et on a

$$(sg(s))' = g(s) + sg'(s) \leq 0,$$

et s'il arrive que $x, u'(x) = s$ l'équation rassemble alors x comme

$$\frac{du}{dt} - (g'(s)s + g(s))u'' = 0,$$

on pose $(sg(s))' = g(s) + sg'(s) = -a$, donc l'équation (1.4) écrit comme suivant :

$$\frac{du}{dt} + au'' = 0,$$

c'est l'équation inverse de la Chaleur qui connue pour être mal-posé. □

RÉGULARISATION DU MODÈLE DE PERONA MALIK – MODÈLE DE CATTÉ ET AL

Dans ce chapitre, nous introduirons la Régularisation du modèle de Perona Malik qui rend le problème bien posé, appelé Catté et al, et introduisons des avantages de ce modèle par rapport aux modèle de Perona Malik, et en étudierons l'existence et l'unicité de solution du modèle de Catté et al.

2.1 Régularisation du modèle de Perona Malik- Modèle de Catté et al

Comme nous l'avons vu précédemment le modèle de Perona Malik [8] est mal posé. Une façon de traiter un problème mal posé est d'introduire une régularisation qui rend le problème bien posé. Puis, en réduisant la régularisation et en observant le comportement de la solution du problème régularisé, on peut obtenir des informations précieuses pour le premier. Cette méthode a été représenté par Catté et al [2].

L'idée est de substituer dans le coefficient $g(|\nabla u|)$ le gradient de l'image par une version lisse $\nabla G_\sigma * u$, où $G_\sigma = C\sigma^{1/2}e^{-|x^2|4\sigma}$. On voit que $G(x, t) = G_t(x)$ la solution fondamentale de l'équation de la Chaleur et le terme $(\nabla G_\sigma * u)$ est le gradient de la solution à temp σ de l'équation de la chaleur avec $u(x, t)$ en tant que référence initiale.

2.1.1 Modèle Catté et al

Catt, Lions et Morel ont proposé le modèle régularisé suivant [2] :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla (G_\sigma * u)|)\nabla u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissant telle que $g(0) = 1$, $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$.

Théorème 2.1. (Convolution et dérivation) [6]. Étant donné deux fonctions :

$$u \in C_c^1(\mathbb{R}), \quad G_\sigma \in L^1(\mathbb{R}),$$

leur convolé, $u * G_\sigma$, qui existe dans $L^1(\mathbb{R})$, est en fait de classe C^1 partout sur \mathbb{R} , et ses dérivées partielles d'ordre 1 s'obtiennent simplement en convolant G_σ avec les dérivées partielles correspondantes de u

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u * G_\sigma) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) * G_\sigma, \quad (i = 1 \dots n).$$

Autrement dit, la dérivation passe sous le signe d'intégration

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(u * G_\sigma)(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x-y, t) G_\sigma(y) dy \right), \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x-y, t) G_\sigma(y) dy \right), \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_i} * G_\sigma. \end{aligned}$$

Démonstration. ([6])

Soit $u \in C^1(\Omega)$ et on a $G_\sigma \in L^1(\mathbb{R})$ car

$$\begin{aligned}
\|G_\sigma\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{\sqrt{\sigma}} e^{-\left(\frac{|x|^2}{4\sigma}\right)} dx, \quad \left(\text{poson } s = \frac{x}{2\sqrt{\sigma}}\right), \\
&= \int_{\mathbb{R}} C e^{-s^2} ds, \\
&= C\sqrt{\pi} \leq \infty.
\end{aligned}$$

Traitons d'abord le cas de la dimension $d = 1$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ petit. Par linéarité, on calcule

$$\frac{(u * G_\sigma)(x+h) - (u * G_\sigma)(x)}{h} = \int_{\Omega} \left(\frac{u(x+h-y, t) - u(x-y, t)}{h} \right) G_\sigma(y) dy,$$

en soustrayant $(u' * G_\sigma)(x)$

$$\frac{(u * G_\sigma)(x+h) - (u * G_\sigma)(x)}{h} - (u' * G_\sigma)(x) = \int_{\Omega} \left(\frac{u(x+h-y, t) - u(x-y, t)}{h} - u'(x-y, t) \right) G_\sigma(y) dy,$$

poson $z = x - y$ on obtient

$$u(z+h, t) - u(z, t) = \int_z^{z+h} u'(s, t) ds,$$

en soustrayant $hu'(z, t)$ on obtient

$$u(z+h, t) - u(z, t) - hu'(z, t) = \int_z^{z+h} (u'(s, t) - u'(z, t)) ds,$$

En effectuant le changement de variable d'intégration

$$\begin{aligned}
s &= z + hv, \\
ds &= 0 + h dv,
\end{aligned}$$

on introduit une nouvelle variable d'intégration v qui varie dans $[0,1]$, ce qui donne

$$u(z+h, t) - u(z, t) - hu'(z, t) = h \underbrace{\int_0^1 (u'(z+hv, t) - u'(z, t)) dv}_{=: Rest_{u'}(z, h, t)},$$

autrement dit après division par h

$$\frac{u(z+h, t) - u(z, t)}{h} - u'(z, t) = Rest_{u'}(z, h, t). \quad (2.2)$$

Or la dérivée $u' \in C_c^0(\mathbb{R})$ est uniformément continue, à savoir on a l'inégalité d'uniforme continuité

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \eta(\epsilon), |z_2 - z_1| \leq \eta \implies |u'(z_2) - u'(z_1)| \leq \epsilon, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $|h| < \eta(\epsilon)$ et on a $v \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |z + hv - z| &\leq |hv|, \\ &\leq \eta(\epsilon). \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} |Rest_{u'}(z, h, t)| &\leq \int_0^1 |(u'(z + hv, t) - u'(z, t))dv|, \\ &\leq \int_0^1 \epsilon, \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Donc en revenant à l'équation (2.2), écrite avec $z = x - y$, multipliée par $G_\sigma(y)$ et intégrée, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{u * G_\sigma(x + h) - u * G_\sigma(x)}{h} - u' * G_\sigma(x) \right| &= \left| \int_\Omega Rest_{u'}(x - y, h, t) G_\sigma(y) dy \right|, \\ &\leq \epsilon \int_\Omega |G_\sigma| dy, \\ &\leq \epsilon \|G_\sigma\|_{L^1}, \end{aligned}$$

et ce, pour tout $|h| \leq \eta(\epsilon)$, ce qui conclut dans le cas de la dimension $d = 1$.

Ensuite, en dimension $d \geq 1$ quelconque, on procède d'une manière complètement similaire, en considérant des petits vecteurs non nuls

$$h_i = (0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0),$$

avec $h \in \mathbb{R}^*$ à la i -ème position, et on obtient, en termes de

$$Rest_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}(z, h, t) \leq \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(z + h_i v, t) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(z, t) \right) dv,$$

l'équation

$$\frac{(u * G_\sigma)(x + h_i v) - (u * G_\sigma)(x)}{h} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} * G_\sigma \right)(x) = \int_\Omega Rest_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}(x - y, h, t) G_\sigma(y) dy,$$

avec les mêmes estimées conclusives. □

D'après le théorème (2.1) on a $\nabla G_\sigma * u = \nabla(G_\sigma * u) = G_\sigma * \nabla u$, donc le modèle de Catté et al écrit comme suivant [2]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|) \nabla u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Où $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante telle que $g(0) = 1$, $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$

2.1.2 Les avantages du modèle de Catté et al

Ce modèle présente au moins deux avantages par rapport du modèles de Perona Malik :

- Si les données initiales sont très bruitées (introduisant de grandes oscilation dans le gradient de u), et on a le gradient de u est grand dans les bords, alors le modèle de Perona et Malik ne peuvent pas distinguer les «vrais» bords et «faux» bords créés par le bruit. Le modèle proposé (2.3) remplacer le $|\nabla u|$ de modèle précédent par le terme $(\nabla G_\sigma * u)(x, t)$ et évite cet inconvénient car l'équation diffuse maintenant si seulement si le gradient est estimé faible. De plus on a $G_\sigma(x)$ est un opérateur de lissage qui est utilisé pour brouilles les images et supprimer le bruit. En fait le modèle rend le filtre insensible au bruit à l'instant σ , puisque $(\nabla G_\sigma * u)(x, t)$ est le gradient de la solution de l'équation de la chaleur avec la donnée intiale $u(t, x)$
- Comme nous le prouvons ensuite, l'équation (2.3) est maintenant bien posée.

2.2 L'existence et l'unicité de modèle Catté et al

On note $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. Soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante avec $g(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ et $t \rightarrow g(t)$, telle que

$$g(t) = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Soit $\sigma > 0$, on suppose que G_σ est le filtre Gaussien telle que

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{4\sigma}}, \quad x = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Maintenant, on étude l'existence et l'unicité de solution de l'équation au dérivée partielle non linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|)\nabla u), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Telle que $u_0 \in L^2(\Omega)$ et

$$|\nabla G_\sigma * u| = \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial G_\sigma}{\partial x_i} * u \right)^2 \right]^{1/2}$$

Théorème 2.2. [2] Soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ décroissant, avec $g(0) = 1$, $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$, et $s \rightarrow g(\sqrt{s})$.

Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors il existe une fonction unique $u(t, x) \in C([0, T] : L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T], w^{1,2}(\Omega))$ vérifier aux sens distribution

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|)\nabla u) = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

De plus, $|u|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Omega))} \leq |u_0|_{L^2(\Omega)}$, et $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times]0, T[)$.

2.2.1 Étape 1 : Unicité de la solution

Soit u_1 et u_2 deux solution de (2.4) pour tout $t \in [0, T]$, nous avons

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} - \operatorname{div}(\alpha_1(t)\nabla u_1) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial N} = 0 \\ u_1(0) = u_0. \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} - \operatorname{div}(\alpha_2(t)\nabla u_2) = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial N} = 0 \\ u_2(0) = u_0. \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (2.6)$$

Telle que

$$\alpha_1 = g(|\nabla G_\sigma * u_1|)(t),$$

$$\alpha_2 = g(|\nabla G_\sigma * u_2|)(t).$$

En utilisant ((2.5)-(2.6)) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2)(t) + \operatorname{div}(\alpha_1(t)(\nabla u_1)(t)) - \operatorname{div}(\alpha_2(t)\nabla u_2(t)) = 0.$$

Par soustraction et l'addition ($\operatorname{div}(\alpha_1(t)(\nabla u_2)(t))$) on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2)(t) - \operatorname{div}(\alpha_1(t)(\nabla u_1 - \nabla u_2)(t)) = \operatorname{div}((\alpha_1 - \alpha_2)(t)\nabla u_2(t)).$$

Ensuite, en multipliant l'inégalité ci-dessus par $(u_1 - u_2)$, en intégrant sur Ω on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2)(t)(u_1 - u_2)dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_1(t)(\nabla u_1 - \nabla u_2)(t))(u_1 - u_2)dx = \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}((\alpha_1 - \alpha_2)(t)\nabla u_2(t))(u_1 - u_2)dx. \end{aligned}$$

On a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2)(t)(u_1 - u_2)dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} |u_1(t) - u_2(t)|^2 dx.$$

D'après formule de Green on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_1(t)(\nabla u_1 - \nabla u_2)(t))(u_1 - u_2)dx = \\ & = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial N}(\alpha_1(t)(u_1 - u_2))(u_1 - u_2)d\eta - \int_{\Omega} \alpha_1(t)|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx. \\ & = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \alpha_1(t) \frac{\partial}{\partial N}((u_1 - u_2))(u_1 - u_2)d\eta}_{=0. \text{condition Neuman}} - \int_{\Omega} \alpha_1(t)|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\alpha_1(t)(\nabla u_1 - \nabla u_2)(t))(u_1 - u_2)dx = - \int_{\Omega} \alpha_1(t)|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx.$$

Et on obtient le même pour

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}((\alpha_1 - \alpha_2)(t)\nabla u_2(t))(u_1 - u_2)dx = - \int_{\Omega} (\alpha_1(t) - \alpha_2(t))(\nabla u_1 - \nabla u_2)\nabla u_2 dx.$$

Alors la résultat final est comme suivant

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} |u_1(t) - u_2(t)|^2 dx + \int_{\Omega} \alpha_1(t) |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx = - \int_{\Omega} (\alpha_1(t) - \alpha_2(t)) (\nabla u_1 - \nabla u_2) \nabla u_2. \quad (2.7)$$

On a $u_1 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, alors $|\nabla G_\sigma * u_1| \in L^\infty([0, T]; C^\infty(\Omega))$ et il existe une constant $M = M(G_\sigma, |u_0|)$, telle que $|\nabla G_\sigma * u_1| \leq M \forall x \in \Omega$. Comme g est décroissant et positive, il s'ensuit que

$$\alpha_1 = g(|\nabla G_\sigma * u_1|) \geq g(M) = v > 0.$$

On utilise l'inégalité de Hölder, Alors (2.7) implique

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (|u_1(t) - u_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2) + v |\nabla u_1(t) - \nabla u_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^\infty(\Omega)} |\nabla u_1 - \nabla u_2|_{L^2(\Omega)} |\nabla u_2|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

De plus, puisque g et G_σ sont $C^\infty(\Omega)$, et d'après théorème de Lipschitzienne on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq C |u_1(t) - u_2(t)|_{L^2(\Omega)} \quad \forall C \in \mathbb{R},$$

et d'après l'inégalité de Young généralisé

$$ab < \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2} \quad \text{et pour } \epsilon = v.$$

(2.7) implique

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|u_1(t) - u_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + v |\nabla u_1 - \nabla u_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \frac{2}{v} C^2 |(u_1 - u_2)(t)|_{L^2(\Omega)}^2 |\nabla u_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{v}{2} |(\nabla u_1 - \nabla u_2)(t)|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|u_1(t) - u_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \frac{4}{v} C^2 |(u_1 - u_2)(t)|_{L^2(\Omega)}^2 |\nabla u_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.8)$$

D'après l'inégalité de Gronwall

$$\begin{aligned} & \text{si } y(t) \geq 0 \text{ satisfait } \frac{dy}{dt} \leq c_1(t)y(t) + c_2(t), \\ & \text{alors } y(t) \geq \left(y(0) + \int_0^t c_2(s) ds \right) e^{\left(\int_0^t c_1(s) ds \right)}. \end{aligned}$$

Appliquer cette inégalité à $y(t) = |u_1(t) - u_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2$, et puisque $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ on obtient

$$|u_1(t) - u_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0 \quad \text{car } c_2 = 0, \quad y(0) = 0.$$

Donc $u_1 = u_2$.

2.2.2 Étape 2 : Existence de la solution

Nous introduisons l'espace

$$W(0, T) = \left\{ w \in L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega)); \frac{dw}{dt} \in L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega)') \right\},$$

où $W^{1,2}(\Omega)'$ est le dual de $W^{1,2}(\Omega)$, et $W(0, T)$ est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|w\|_W = |w|_{L^2((0,T);W^{1,2}(\Omega))} + |w|_{L^2((0,T);W^{1,2}(\Omega)')}.$$

Soit $w \in W(0, T) \cap L^\infty((0, T); W^{1,2}(\Omega))$, de sorte que $|w|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))} \leq |u_0|_{L^2(\Omega)}$.

Nous présentons le problème (P_w)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * w|)\nabla u) = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{P}_w)$$

Formulation variationnelle

Soit $v \in W^{1,2}(\Omega)$, d'après la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * w|)\nabla u), v \rangle &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * w|)\nabla u) v dx \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial N} (g(|\nabla G_\sigma * w|)\nabla u) v ds}_{=0 \text{ condition Neumann}} - \int_{\Omega} g(|\nabla G_\sigma * w|)\nabla u \nabla v dx. \end{aligned}$$

Pour tout $v \in W^{1,2}(\Omega)$, et pour tout $t \in [0, T]$, Alors on obtient le problème variationnel (P_{v_w})

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \int_{\Omega} g(|\nabla G_\sigma * w|)\nabla u \nabla v dx = 0.$$

Comme on le voit à l'étape 1, il existe une constante $v > 0$ telle que $g(|\nabla G_\sigma * w(t)|) \geq v$ dans $\Omega \times]0, T[$. Donc, en appliquant résultats classique sur des équation paraboliques (voir [7], page 356), nous prouvons que le problème (P_w) a une solution unique u_w dans $W(0, T)$ satisfaisant les estimations

$$\begin{cases} |u_w|_{L^2((0,T);W^{1,2}(\Omega))} \leq c_1, \\ |u_w|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))} \leq |u_0|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \frac{du_w}{dt} \right|_{L^2((0,T);W^{1,2}(\Omega)')} \leq c_2, \end{cases} \quad (2.9)$$

où c_1 et c_2 sont des constants dépendant uniquement de g , G_σ et u_0 .

Démonstration. En construisant d'abord des solutions de certaines approximations finies en dimension finie de (2.4), puis en passant à la limite. c'est ce qu'on appelle la méthode de Galerkin [7]

1. Approximation de Galerkin

On suppose les fonction $z_k = z_k(x)$ sont lisse

$$\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ est base orthogonal de } W^{1,2}(\Omega),$$

et

$$\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ est base orthogonal de } L^2(\Omega).$$

On va chercher une solution approchée u_m se la forme

$$u_m = \sum_{i=1}^m h_{k,m}(t) z_k(x),$$

$$u'_m = \sum_{i=1}^m h'_{k,m}(t) z_k(x),$$

les $h_{i,m}$ étant à déterminer par les conditions.

$$(u'_m, z_k) + B(u_m, z_k, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T, k = 1, \dots, m), \quad (2.10)$$

$$u_m(0) = u_{0,m} = \sum_{k=1}^m h_{k,m}(0) z_k \rightarrow u_0 \text{ dans } W^{1,2}(\Omega), \quad (2.11)$$

où

$$B(u_m, v, t) = \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} g(|\nabla G_{\sigma} * u|) \nabla u(t) \nabla v dx. \quad (2.12)$$

On obtient donc , un système différentiable de m équation non linéaire de second d'ordre 2, on a

$$\det(z_k) \neq 0.$$

Comme $\{z_k\}$ est base orthogonal, la matrice $A = (z_{i,j})$ est inversible ($\det(A) \neq 0$), donc le système admet au moins une solution u_m résoudre (2.10).

2. Estimation d'énergie

Théorème 2.3. *Il existe un constant C dépendant seulement sur Ω, T telle que*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} +$$

$$\|u_m(t)\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)')} \leq C \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

For $m = 1, 2, \dots$.

Démonstration. On multiplie l'équation (2.10) par $h_{i,m}$, et la somme pour $k = 1; \dots, m$ on obtient

$$\sum_{k=1}^m (u'_m, h_{i,m} z_k) + \sum_{k=1}^m B(u_m, h_{i,m} z_k, t) = 0,$$

donc

$$(u'_m, u_m) + B(u_m, u_m, t) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} (u'_m, u_m) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

donc on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \underbrace{v \|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2}_{>0} = 0.$$

Alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Et on obtient

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

On retour l'équation (2.10) et on intègre sur $[0, T]$

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T v \|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + v \|u_m\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}^2 &= 0, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + v \|u_m\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}^2 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ v \|u_m\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}^2 &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \|u_m\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}^2 &\leq C_1 \text{ où } C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Soit $v \in W^{1,2}(\Omega)$ telle que $\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq 1$, et $v = v_1 + v_2$ où $v_1 \in \{z_k\}_{k=1}^m$, et

$$(v_2, z_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, m).$$

puisque les $\{z_k\}_{k=1}^m$ sont orthogonal dans $W^{1,2}(\Omega)$, on utilise (2.10) et on déduit que

$$(u'_m, v_1) + B(u_m, v_1, t) = 0,$$

implique

$$\langle u'_m, v \rangle = \langle u'_m, v \rangle = (u'_m, v_1) = -B(u_m, v_1, t),$$

par conséquent

$$\langle u'_m, v \rangle \leq C \|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Puisque $\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq 1$, alors

$$\|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

et donc

$$\int_0^T \|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)'}^2 dt \leq C \int_0^T \|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 dt$$

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)')} \leq C_3.$$

□

3. Passage a la limite

D'après l'estimation énergétique, la suite $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ est bornée dans $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$, et $\{u'_m\}_{m=1}^\infty$ est bornée dans $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)')$.

Par conséquence il existe une sous-suite $\{u_m\}_{l=1}^\infty \subset \{u_m\}_{m=1}^\infty$ telle que

$$\begin{cases} u_{ml} \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \\ u'_{ml} \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)'). \end{cases} \quad (2.13)$$

Soit $N > 0$ telle que $m \geq N$, et on prend $v \in C^1([0, T]; W^{1,2}(\Omega))$ telle que

$$v(t) = \sum_{k=1}^N h_k(t) z_k. \quad (2.14)$$

On multiplie (2.10) $h_k(t)$, et somme pour $k = 1, \dots, N$ on obtient

$$\sum_{k=1}^m (u'_m, h_k(t) z_k) + \sum_{k=1}^m B(u_m, h_k(t) z_k, t) = 0$$

on intègre sur $[0, T]$

$$\int_0^T (u'_m, v) + B(u_m, v, t) dt = 0,$$

pour $m = m_l$, et d'après (2.13) en passant a la limite faible on obtient

$$\int_0^T (u, v) + B(u, v, t) dt = 0. \quad (2.15)$$

On a pour tous $v \in L^2([0, T]; W^{1,2}(\Omega))$ en fonction de la forme (2.14) sont dense dans cette espace, en particule

$$(u', v) + B(u, v, t) = 0$$

pour tout $v \in W^{1,2}(\Omega)$.a.e $0 \leq t \leq T$, de théorème 3 dans 5.9.2 [5] on a $u \in C([0, T], L^2)$.

Afin de prouver $u(0) = u_0$, on note de (2.15),

$$\int_0^T -\langle v', u \rangle + B(u, v, t) dt = \int_0^T (u(0), v(0)), \quad (2.16)$$

pour tout $v \in C^1([0, T]; W^{1,2}(\Omega))$ avec $v(T) = 0$, de (2.14) on déduit

$$\int_0^T -\langle v', u_m \rangle + B(u_m, v, t) dt = \int_0^T (u_m(0), v(0)),$$

nous fixons $m = m_l$ et employons (2.13) à trouver

$$\int_0^T -\langle v', u \rangle + B(u, v, t) dt = \int_0^T (u_0, v(0)). \quad (2.17)$$

Puisque $u_{m_l} \rightarrow u_0$ dans $L^2(\Omega)$, et comme $v(0)$ est arbitraire, comparant (2.16) et (2.17) on déduit que $u(0) = u_0$. □

A partir de ces estimations (2.9), nous introduisons le sous-espace W_0 de $W(0, T)$ défini par

$$W_0 = \left\{ \begin{array}{l} w \in W(0, T), w(0) = u_0, \\ |w|_{L^2((0,T);W^{1,2}(\Omega))} \leq c_1, \\ |w|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))} \leq |u_0|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \frac{dw}{dt} \right|_{L^2((0,T);W^{1,2}(\Omega)')} \leq c_2. \end{array} \right\}$$

Par construction $w \mapsto S(w) \equiv u_w$ est une application de W_0 vers W_0 . De plus W_0 n'est pas vide, convexe et faiblement compact dans $W(0, T)$, ainsi, nous pouvons appliquer le théorème de point fixes de Schauder.

Démonstration. 1. On a $u_0 \in W_0$ alors W_0 n'est pas vide.

2. On montre que W_0 est convexe. Soit $u, v \in W_0$, alors

$$(1 - \lambda) \|u\|_{L^2([0,T];W^{1,2}(\Omega))} + \lambda \|v\|_{L^2([0,T];W^{1,2}(\Omega))} \leq (1 - \lambda)C_1 + \lambda C_1 \leq C_1.$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) |u|_{L^\infty([0,T];W^{1,2}(\Omega))} + \lambda |v|_{L^\infty([0,T];W^{1,2}(\Omega))} &\leq (1 - \lambda) |u_0|_{L^2(\Omega)} + \lambda |v_0|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 - \lambda) |u_0|_{L^2(\Omega)} + \lambda |u_0|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |u_0|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

$$(1 - \lambda) \left| \frac{du}{dt} \right|_{L^2([0,T]; W^{1,2}(\Omega)')} + \lambda \left| \frac{dv}{dt} \right|_{L^2([0,T]; W^{1,2}(\Omega)')} \leq (1 - \lambda)C_2 + \lambda C_2 \leq C_2.$$

Alors W_0 est convexe.

3. On montre W_0 est faiblement compact dans $w(0, T)$. soit $u_n \in W(0, T)$, alors u_n est borné dans $L^2([0, T]; W^{1,2}(\Omega))$ et u'_n bornée dans $L^2([0, T]; W^{1,2}(\Omega)')$, alors il existe une sous-suite $(u_n)_n \in W_0$ telle que $(u_n)_n \rightarrow u$ dans $W(0, T)$. Et on a

$$\begin{aligned} |(u_n)_n|_{L^2((0,T); W^{1,2}(\Omega))} &\leq c_1, \\ \left| \frac{d(u_n)_n}{dt} \right|_{L^2((0,T); W^{1,2}(\Omega)')} &\leq c_2. \end{aligned}$$

Alors W_0 est faiblement compact. □

Maintenant, nous appliquons le Théorème de point fixes de Schauder.

Théorème 2.4. (Théorème de point fixes de Schauder) [1]. Si E est un sous-ensemble convexe et compact d'un espace de Banach et si $S : E \rightarrow E$ est continue, alors il existe $x \in E$ telle que $S(x) = x$.

Nous démontrons que l'application $S : w \rightarrow u_w$ est faiblement continue ($W_0 \rightarrow W_0$). Soit $w_j \in W_0$ une suite qui converge faiblement vers w dans W_0 et soit $u_j = u_{w_j}$. Nous devons démontrer que $S(w_j) = u_j$ converge faiblement vers $S(w) = u_w$. À partir de (2.9) et des résultats classiques d'injection compacte dans les espaces de Sobolev, [11], (théorèmes de f Rellich and Kondrac [5]), on peut extraire de w_j , respectivement de u_j , une sous-suite (appelée w_j , respectivement u_j) telle que pour certains u , on a

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} &\rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ dans } L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega)') \\ u_j &\rightarrow u \text{ dans } L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega)) \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_k} &\rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_k} \text{ dans } L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega)) \\ w_j &\rightarrow u \text{ dans } L^2((0, T); L^2(\Omega)) \\ \frac{\partial G_\sigma}{\partial x_k} * w_j &\rightharpoonup \frac{\partial G_\sigma * u}{\partial x_k} \text{ dans } L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega)) \\ g(|\nabla G_\sigma * w_j|) &\rightarrow g(|\nabla G_\sigma * u|) \text{ dans } L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega)) \\ u_j(0) &\rightarrow u(0) \text{ dans } W^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Les convergences ci-dessus nous permettent de passer à la limite dans (Pv_w) et d'obtenir $u = u_w = S(w)$. De plus, comme la solution unique, tout suite $u_j = S(w_j)$ converge faiblement vers $u = S(w)$ dans W_0 . i.e S est faiblement continue. Donc d'après le théorème du point fixe de Schauder, il existe $w \in W_0$ telle que $w = S(w) = u_w$.

2.3 Un schéma itératif qui converge vers la solution du problème Catté et al

Théorème 2.5. soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. La suite $(u^n)_n$ Défini par (E_n) ,

$$\frac{du^{n+1}}{dt}(t) - \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * u^n(t)|)\nabla u^{n+1}(t)) = 0 \text{ a.e sur }]0, T[,$$

$$\frac{du^{n+1}}{dn}(t) = 0 \text{ a.e sur }]0, T[,$$

$$u^{n+1}(0) = u_0,$$

converge dans $C([0, T]; L^2(\Omega))$ vers solution forte de (2.3).

Démonstration. On note par $\alpha^n = g(|\nabla G_\sigma * u^n(t)|)$. par[Thm.(2.1).(2.8)], le problème (E_n) a une solution unique u^n . il est clair que

$$\alpha^n \geq g(\|\nabla G_\sigma * u^0(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) \text{ a.e sur }]0, T[\times\Omega.$$

Maintenant, nous prouvons que la suite u^n converge vers u dans $C([0, T]; L^2(\Omega))$ la solution forte de (2.3).

D'après l'estimation (2.8) on a

$$\frac{d}{dt} \left(\|u^{n+1}(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \frac{4C}{v} |(u^n - u)(t)|_{L^2(\Omega)}^2 |\nabla u(t)|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De plus, en utilisant le théorème (2.1), on a

$$\|u^1(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 \int_0^t a(s) ds,$$

telle que

$$a(s) = \frac{4C}{v} |\nabla u(s)|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On déduit

$$\frac{d}{dt} (\|u^2(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq C_0 a(t) \int_0^t a(s) ds.$$

Et ainsi

$$\|u^2(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 \frac{1}{2} \left(\int_0^t a(s) ds \right)^2.$$

Enfin, nous obtenons par itération

$$\|u^{n+1}(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_0^t a(s) ds \right)^{n+1}. \quad (2.18)$$

De (2.18) nous concluons $(u^n)_n$ converge vers u la solution forte de (2.3) dans $C([0, T]; L^2(\Omega))$. \square

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU MODÈLE CATTÉ ET AL

Dans ce chapitre, nous étudierons la résolution numérique des modèles de la chaleur, Perona Malik et Catté et al, et nous utiliserons Les approximations par différences finies pour résoudre les schéma des EDPs, et nous présenterons quelque résultats numériques pour faire une comparaison de filtrage entre Perona Malik et Catté et al.

3.1 Approximations par différences finies

Notation

Toutes les EDPs analysées nécessitent la connaissance d'un domaine $\Omega = [0, m] \times [0, m]$. Les valeurs de la fonction initiale sont données pour des échantillons (pixels) dans les deux directions. La dimension de l'image (en pixels) est $M \times N$; avec

$$M = \frac{m}{h} \text{ et } N = \frac{n}{h}.$$

Mathématiquement, la fonction continue $u : \Omega \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est remplacée par :

$$u(x, y, t) \rightarrow u(ih, jh, t), \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Toutes les équations présentées sont des processus récursifs nécessitant une discrétisation en temps. Nous considérons des temps discrets uniformément distribués, multiples d'un pas de discrétisation en temps, noté Δt . La représentation à l'instant t de l'image numérique qui évolue est donnée par

$$u(ih, jh, n\Delta t) = u_{i,j}^n,$$

nous notons par n le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre l'échelle t . Le même raisonnement s'applique sur les conditions initiales

$$u(ih, jh, 0) = u_{i,j}^0.$$

Approximations des dérivées partielles

Approximations des dérivées première

En un point x et pour une valeur h du pas de discrétisation tels que u soit trois fois dérivable sur l'intervalle $[x - h, x + h]$ la formule de Taylor-Young conduit aux deux relations :

$$u(x + h) = u(x) + \sum_{n=1}^3 \frac{h^n}{n!} u^{(n)}(x) + h^3 \epsilon_1(x, h),$$

$$u(x - h) = u(x) + \sum_{n=1}^3 \frac{(-h)^n}{n!} u^{(n)}(x) + h^3 \epsilon_1(x, h),$$

où les deux fonctions $\epsilon_i(x, h)$ convergent vers 0 avec h . Par conséquent,

$$\delta_+ u(x) = \frac{u(x + h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2} u''(x) + \frac{h^2}{3!} u^{(3)}(x) + h^2 \epsilon_1(x, h),$$

$$\delta_- u(x) = \frac{u(x - h) - u(x)}{h} = -u'(x) + \frac{h}{2} u''(x) - \frac{h^2}{3!} u^{(3)}(x) + h^2 \epsilon_2(x, h).$$

Ainsi, $\delta_+ u(x)$ et $\delta_- u(x)$ représentent des approximations d'ordre 1 de $u'(x)$.

En soustrayant les développements précédents, ce qui revient à faire la moyenne de deux différences finies antérieures et postérieure à $u(x)$, on obtient :

$$\delta_0 u(x) = \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{3!} u^{(3)}(x) + h^2 \epsilon_3(x, h).$$

Approximations de la dérivées second

En un point x et pour une valeur du pas de discrétisation tels que soit quatre fois dérivable sur l'intervalle $[x - h, x + h]$, la formule de Taylor-Young conduit à la relation,

$$u(x + h) = u(x) + \sum_{n=1}^4 \frac{h^n}{n!} u^{(n)}(x) + h^4 \epsilon_1(x, h),$$

$$u(x - h) = u(x) + \sum_{n=1}^4 \frac{(-1)^n (h)^n}{n!} u^{(n)}(x) + h^4 \epsilon_2(x, h),$$

où les deux fonctions $\epsilon_i(x, h)$ convergent vers 0 avec h . Par conséquent peut approcher $u''(x)$ par le terme

$$\frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)}{h^2}$$

3.2 Discrétisation par différences finies

On note u l'image considérée et $u_{i,j}$ sa valeur au pixel (i, j) . Pour approcher les solutions des modèles on aura besoin des approximations en espace des dérivées suivantes

1. Différences finies centrées

$$\frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2h},$$

et des formules similaires pour y .

$$\frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n}{2h}.$$

2. Différences finies décentrées à droite

$$\frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{h},$$

$$\frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{h}.$$

3. Différences finies décentrées à gauche

$$\frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{h},$$

$$\frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{h}.$$

4. Dans toutes les méthodes, la dérivée par rapport au temps est remplacée par une approximation d'ordre 1 à droite

$$\frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

5. Les dérivées secondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1,j+1}^n + u_{i-1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n}{4h^2}. \end{cases}$$

La forme numérique du Laplacien la plus utilisée

$$\begin{aligned} \Delta u_{i,j}^n &= \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial y^2} \\ &= \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2} + \frac{u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2}. \end{aligned}$$

3.3 Équation de la Chaleur

Soit le problème de l'équation de la Chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x, y, t); & t > 0, \\ u(x, y, 0) = u_0. \end{cases}$$

On peut utiliser deux approches pour discrétiser cette équation.

Schéma explicite

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2} + \frac{u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2}.$$

Pour $h = 1$ on obtient

$$u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n = \Delta t (u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n),$$

alors le schéma s'écrit

$$u_{i,j}^{n+1} = \Delta t (u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n) + \Delta t (u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n) + (1 - 4\Delta t) u_{i,j}^n.$$

Schéma implicite

On a

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1}}{h^2}, \\ u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n &= \Delta t (u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1}), \end{aligned}$$

alors

$$u_{i,j}^n = (1 + 4\Delta t) u_{i,j}^{n+1} - \Delta t (u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}) - \Delta t (u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}).$$



FIGURE 3.1 – Image filtrée par le filtre de Chaleur

Pour la Figure (3.1), à gauche c'est l'image originale et à droite l'image filtrée par le filtre de chaleur.

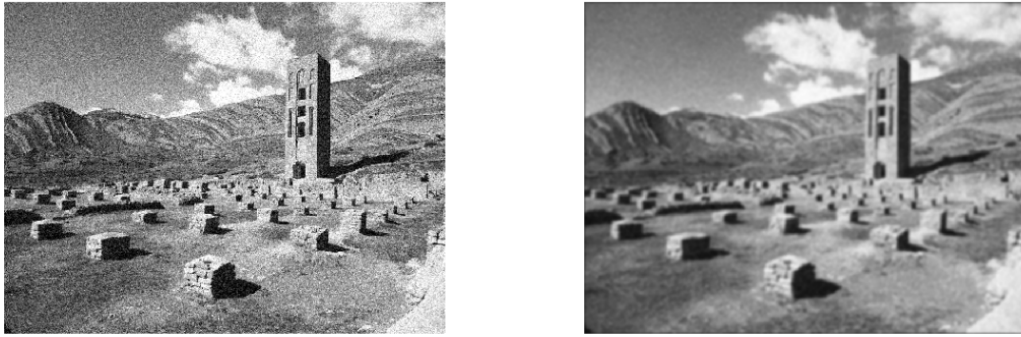


FIGURE 3.2 – Image bruitée filtrée par le filtre de Chaleur

Pour la Figure (3.2), l'image original bruitée en à gauche et à droite l'image bruitée filtrée par le filtre de Chaleur.

3.4 Équation de Perona Malik

La formule de base décrivant une diffusion de valeur scalaire est [11]

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(x, y, t)) = \text{DIV}(g(|\nabla u|)\nabla u(x, y, t)) \quad (3.1)$$

avec, $g(x, y, t)$ qui définit les poids de diffusion (scalaire), et $\nabla := \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]$ est le gradient spatial. Puisque $g(x, y, t)$ est une fonction de t , la diffusion est non-linéaire. Cela signifie que les poids de diffusion définis par la fonction $g(x, y, t)$ changent par rapport au temps t . Un possible $g(x, y, t)$ est, par exemple

$$g(x, y, t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|\nabla u(x, y, t)\|^2}{\lambda} \right)}$$

où $\|\nabla u(x, y, t)\|$ se réfère à la magnitude des dérivées de l'image. λ est un coefficient qui est utilisé pour contrôler les grandeurs de poids de diffusion par rapport à l'image dérivée.

1. Schéma semi-explicite

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \text{DIV}(g(|\nabla u_{i,j}^n|)\nabla u_{i,j}^n).$$

2. Schéma semi-implicite

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \text{DIV}(g(|\nabla u_{i,j}^n|)\nabla u_{i,j}^{n+1}).$$

Le schéma semi-explicite aux différences finies pour approcher la solution de l'équation de Pérona-Malik peut s'écrire[10] :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} &= \text{DIV}(g(|\nabla u_{i,j}^n|)^n \nabla u_{i,j}^n) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x} g(|\nabla u_{i,j}^n|) \right]}_{\varphi_{i,j}^n} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial y} g(|\nabla u_{i,j}^n|) \right]}_{\psi_{i,j}^n} \\ \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{i,j}^n &= \frac{\varphi_{i+\frac{1}{2},j}^n - \varphi_{i-\frac{1}{2},j}^n}{h} \\ &= g_{i+\frac{1}{2},j}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) - g_{i-\frac{1}{2},j}^n (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) \\ \frac{\partial}{\partial y} \psi_{i,j}^n &= \frac{\psi_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{h} \\ &= g_{i,j+\frac{1}{2}}^n (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) - g_{i,j-\frac{1}{2}}^n (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n). \\ u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta t (g_{i+\frac{1}{2},j}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) + g_{i-\frac{1}{2},j}^n (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) + g_{i,j+\frac{1}{2}}^n (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) \\ &\quad + g_{i,j-\frac{1}{2}}^n (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n)), \\ u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta t \left[g_{i+\frac{1}{2},j}^n DEU + g_{i-\frac{1}{2},j}^n DWU + g_{i,j+\frac{1}{2}}^n DSU + g_{i,j-\frac{1}{2}}^n DNU \right], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} DEU &= u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n, \\ DWU &= u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n, \\ DSU &= u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n, \\ DNU &= u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n, \end{aligned}$$

et on prend

$$\begin{aligned} g_{i+\frac{1}{2},j}^n &= g(|DEU|), \\ g_{i-\frac{1}{2},j}^n &= g(|DWU|), \\ g_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= g(|DSU|), \\ g_{i,j-\frac{1}{2}}^n &= g(|DNU|). \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons écrire la formulation d'Euler, semi-implicite, dans un format vectoriel / matriciel comme suit

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = A(u^n)(u^{n+1})$$

D'où $u := u_I$ avec $I = [1 \dots N]$. La matrice du système $A(u^n)$ est définie comme suit

$$A(u^n) = [a_{I,J}]$$

$$[a_{I,J}] := \begin{cases} -\Delta t g_{J I}^n & [J \in N(I)], \\ 1 + \sum \Delta t g_{J \approx I}^n & (J = I), \\ J \in N^-(I), & \\ J \in N^+(I), & \\ 0 & \text{Autrement} \end{cases}$$

où $g_{J \approx I}^n$ fait référence au poids de «diffusion» entre les pixels J et I à l'instant n.

Dans la suite, on reprinted le résultat du calcul sur Matlab.

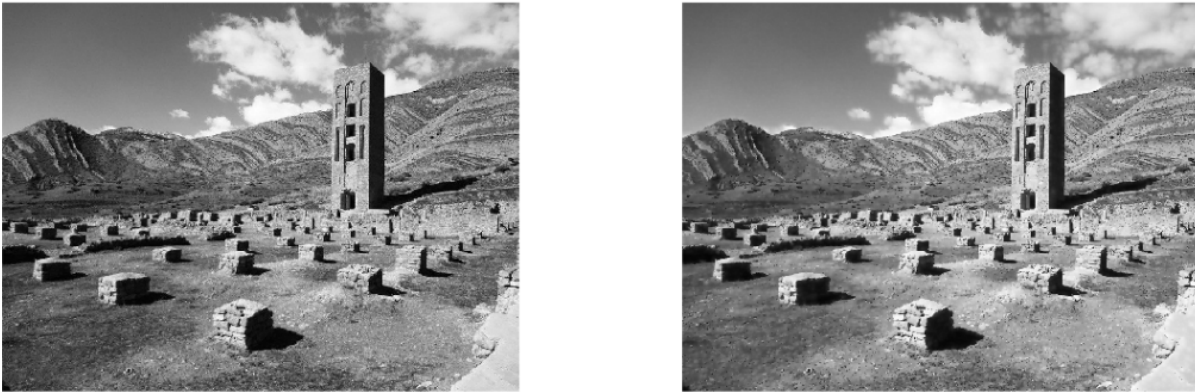


FIGURE 3.3 – Filtrage par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/7$.

Pour la Figure (3.3), l'image originale est à gauche et à droite l'image filtrée par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/7$.

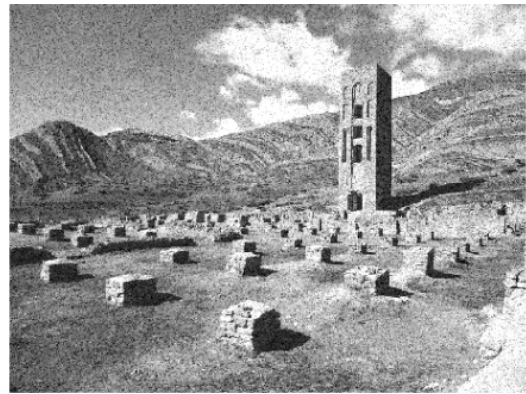
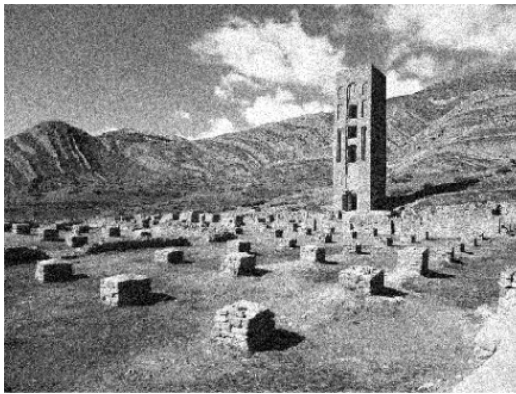


FIGURE 3.4 – L'image originale bruitée filtrée par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/7$.

Pour la Figure (3.4), l'image originale bruitée en à gauche et à droite l'image filtrée par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/7$.



FIGURE 3.5 – L'image original filtrée par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/2$.

Pour la Figure (3.5), l'image originale en à gauche et à droite l'image filtrée par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/2$.

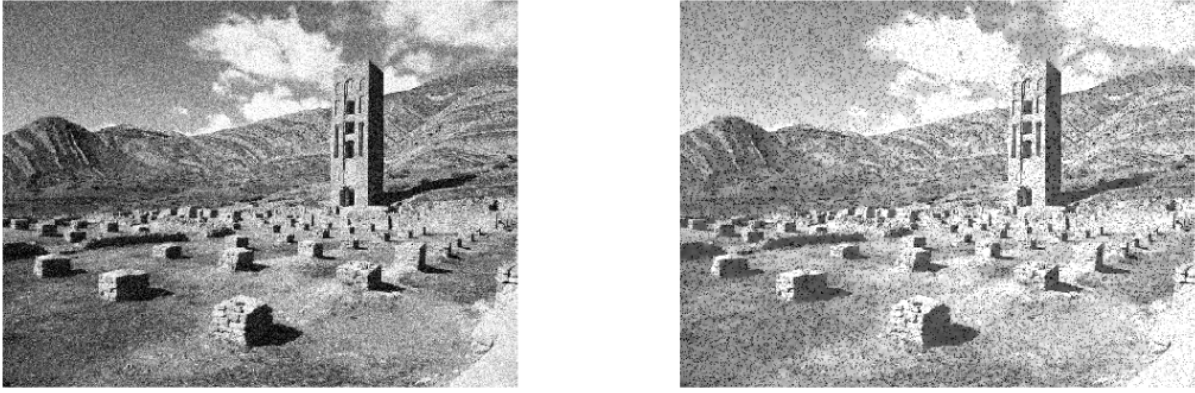


FIGURE 3.6 – l'image originale bruitée filtrée par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/2$.

Pour la Figure (3.6), l'image originale bruitée en à gauche et à droit l'image filtrée par le filtre de Perona Malik avec $\Delta t = 1/2$.

3.5 Régularisation du l'équation de Perona Malik -équation de Catté et al

Soit le modèle de Catté et al :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= \text{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|)\nabla u) \\
 &= \text{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)) \\
 &= \text{div} \left(\frac{\partial u}{\partial x} (g(|\nabla G_\sigma * u|)), \frac{\partial u}{\partial y} (g(|\nabla G_\sigma * u|)) \right) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} (g(|\nabla G_\sigma * u|)) \right] + \frac{\partial u}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} (g(|\nabla G_\sigma * u|)) \right].
 \end{aligned}$$

Discrétisation

Nous introduisons les coordonnées $(ih, jh, n\Delta t)$ telle que

$$h = \frac{1}{N+1}, \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad 0 \leq j \leq N+1,$$

et on note par $u_{i,j}^n$ l'approximation de $u(ih, jh, n\Delta t)$, et $\alpha_{i,j}^n$ l'approximation de $g(|\nabla G_\sigma * u|)(ih, jh, n\Delta t)$, Ensuite nous discrétisons

$$\frac{\partial u}{\partial x} (g(|\nabla G_\sigma * u|)) \quad \text{par} \quad \alpha_{i,j}^n \frac{\partial u}{\partial x} (ih, jh, n\Delta t)$$

, et $\frac{\partial u}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} (g(|\nabla G_\sigma * u|)) \right]$ par

$$\frac{1}{2h^2} \left[(\alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i,j}^n) u_{i-1,j}^{n+1} - (2\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i+1,j}^n) u_{i,j}^{n+1} + (\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i+1,j}^n) u_{i+1,j}^{n+1} \right].$$

De même pour $\frac{\partial u}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} (g(|\nabla G_\sigma * u|)) \right]$ par

$$\frac{1}{2h^2} [(\alpha_{i,j-1}^n + \alpha_{i,j}^n)u_{i,j-1}^{n+1} - (2\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i,j-1}^n + \alpha_{i,j+1}^n)u_{i,j}^{n+1} + (\alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i,j+1}^n)u_{i,j+1}^{n+1}].$$

Enfin, nous obtenons le schéma implicite

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \frac{1}{2h^2} [(\alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i,j}^n)u_{i-1,j}^{n+1} + (\alpha_{i,j-1}^n + \alpha_{i,j}^n)u_{i,j-1}^{n+1} \\ + (\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i+1,j}^n)u_{i+1,j}^{n+1} + (\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i,j+1}^n)u_{i,j+1}^{n+1} \\ - (4\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i+1,j}^n + \alpha_{i,j-1}^n + \alpha_{i,j+1}^n)u_{i,j}^{n+1}] = 0, \end{aligned}$$

$$u_{i,j}^0 = u_0(ih, jh), \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad 0 \leq j \leq N+1,$$

$$u_{i,0}^{n+1} = u_{i,1}^{n+1}, \quad u_{N,j}^{n+1} = u_{N+1,j}^{n+1}, \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad 0 \leq j \leq N+1,$$

$$u_{0,j}^{n+1} = u_{1,j}^{n+1}, \quad u_{i,N}^{n+1} = u_{i,N+1}^{n+1}, \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad 0 \leq j \leq N+1.$$

Maintenant, le problème discret peut être écrit

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + A_h(u^n)u^{n+1} = 0, \quad n \geq 0,$$

telle que la matrice A_h est tridiagonale par blocs et définie positif. Par des arguments classiques [9], la matrice $I + \Delta t A_h(u^n)$ est inversible.

Dans la suite, on reprinted le résultat du calcul sur Matlab.

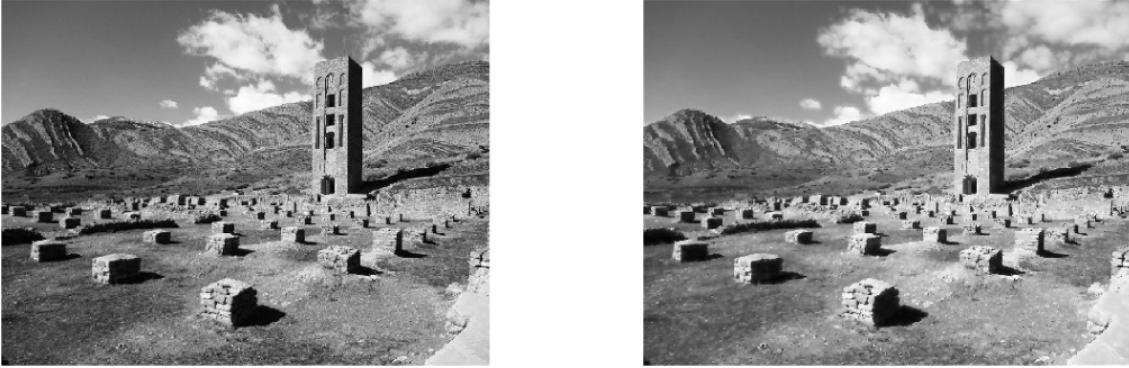


FIGURE 3.7 – L'image originale filtrée par le filtre Catté et al, $\Delta t = 1/7$.

Pour la Figure (3.7), l'image originale en à gauche et à droit l'image filtrée par le filtre de Catté et al avec $\Delta t = 1/7$ et $\sigma = 0.5$.



FIGURE 3.8 – L'image originale bruitée filtrée par le filtre Catté et al, $\Delta t = 1/7$.

Pour la Figure (3.8), l'image originale bruitée en à gauche et à droit l'image filtrée par le filtre de Catté et al avec $\Delta t = 1/7$ et $\sigma = 0.5$.



FIGURE 3.9 – L'image original filtrée par le filtre Catté et al, $\Delta t = 1/2$.

Pour la Figure (3.9), l'image originale en à gauche et à droit l'image filtrée par le filtre de Catté et al avec $\Delta t = 1/2$ et $\sigma = 0.5$.

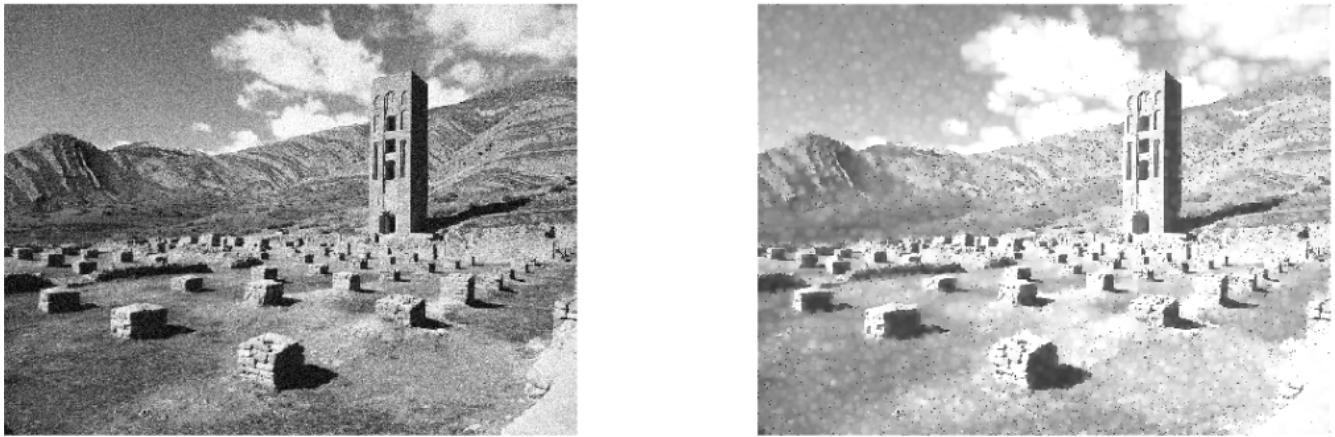


FIGURE 3.10 – L'image originale bruitée filtrée par le filtre Catté et al, $\Delta t = 1/2$ et $\sigma = 0.5$.

Pour la Figure (3.10), l'image originale bruitée en à gauche et à droite l'image filtrée par le filtre de Catté et al avec $\Delta t = 1/2$ et $\sigma = 0.5$.

3.6 Comparaison entre les deux modèles



FIGURE 3.11 – Image originale filtrée par les trois modèle.

Pour la figure (3.11), en haut à gauche- Image originale, et en haut à droite-Filtrage par le filtre de la Chaleur, en bas à gauche-Filtrage par le filtre de Perona Malik , et en bas à droit Filtrage par le filtre Catté et al avec $\Delta t = 1/7$ et $\sigma = 0.5$.

Pour l'image sans bruit dans (figure 3.11), On remarque que les EDP de Perona Malik et Catté et al sont mieux que l'équation de la Chaleur, et le filtrage par le filtre de Perona Malik presque le même que le filtre de Catté et al.



FIGURE 3.12 – Image originale bruitée filtrée par les trois modèle.

Pour la figure (3.12), en haut à gauche- Image originale bruitée , et en haut à droite-Filtrage par le filtre de la Chaleur, et en bas à gauche-Filtrage par le filtre de Perona Malik , et en bas à droite Filtrage par le filtre de Catté et al $\Delta t = 1/7$ et $\sigma = 0.5$.
 Pour l'image bruit dans (figure 3.12), On remarque que l'EDP de Catté et al est mieux que l'EDP de Perona Malik puisque l'image filtrée par Perona Malik est contient du bruits, D'autre part le bruit a été supprimé par le filtre de Catté et al



FIGURE 3.13 – en haut l’image originale filtrée par le filtre de Perona Malik, en bas l’image originale filtrée par le filtre de Catté et al $\Delta t = 1/2$ et $\sigma = 0.5$.

Pour l’image sans bruit dans (figure 3.13) et $(\Delta t = 1/2)$ et $\sigma = 0.5$, On remarque que le filtrage par le filtre de Perona Malik presque le même que le filtre de Catté et al.

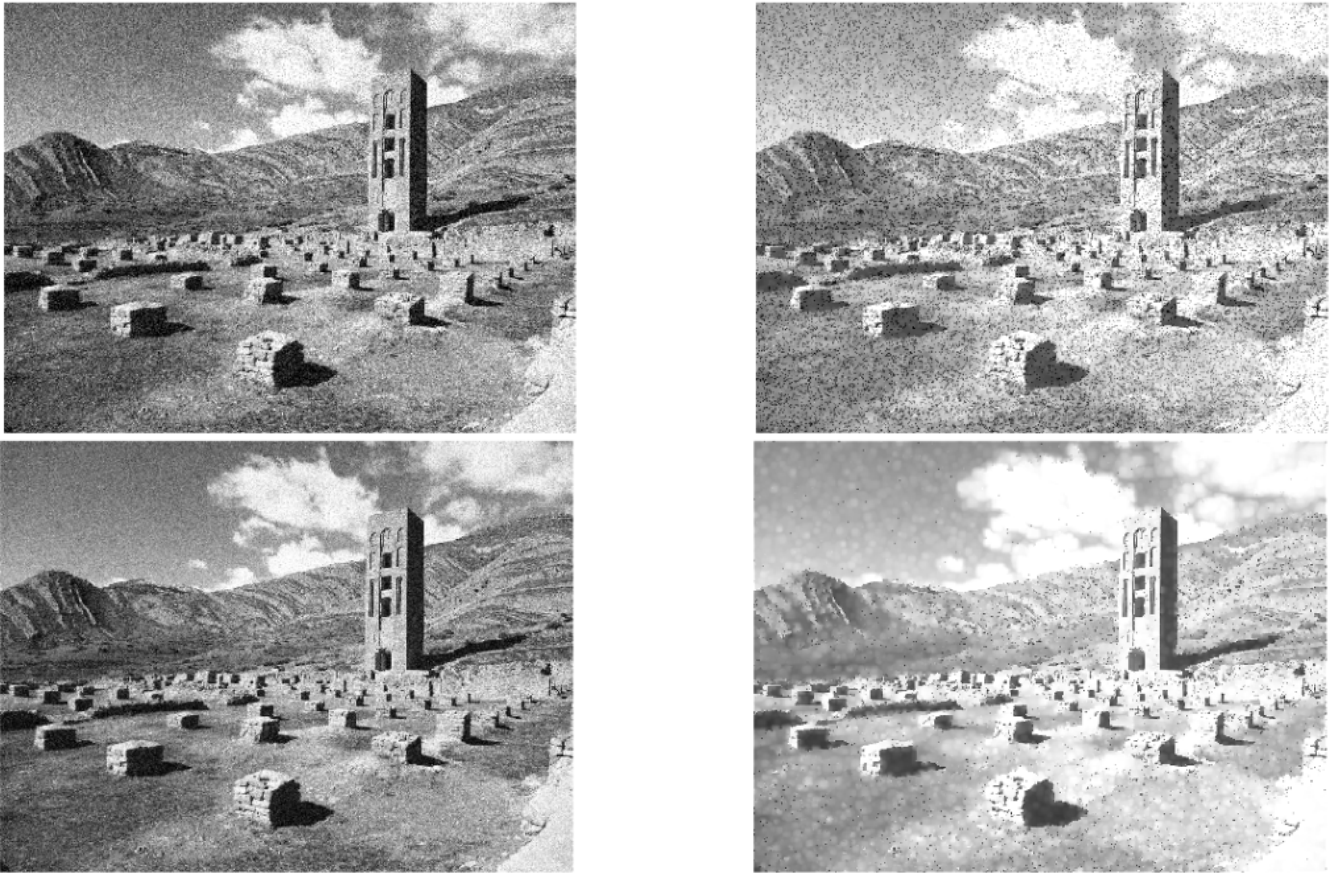


FIGURE 3.14 – en haut l’image original bruitée filtrée par le filtre de Perona Malik, en bas l’image original filtrée par le filtre de Catté et al $\Delta t = 1/2$ et $\sigma = 0.5$.

Pour l’image bruitée dans (figure 3.14) avec $\Delta t = 1/2$ et $\sigma = 0.5$, il est clair que le bruit existe dans l’image filtrée par le filtre de Perona Malik, par l’inverse, le bruit n’existe pas dans l’image filtrée par Catté et al .

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons étudié le modèle de Catté et al qui régularise le modèle connu de Perona Malik qui est mal posé et souffre numériquement d'instabilité au niveau des contours. Nous avons donc détaillé une analyse du modèle de Perona Malik et sa défaut en donnant les modifications pour introduire le modèle de Catté et al. Ainsi nous avons présenté et détaillé l'étude d'existence et d'unicité de la solution pour ce modèle et démontré numériquement l'amélioration des résultats, et dans la deuxième partie de notre travail nous avons établi une résolution numérique du modèle de Catté et al avec une illustration d'exemples, en établissant à la fin une comparaison numérique entre les deux modèles.

Bibliographie

- [1] A.Ralph. *Topics in nonlinear functional analysis*. UNIVERSITE BORDEAUX I, 2001.
- [2] J. MOREL et T. COLL F. CATTÉ, P. LIONS. *Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Feb, 1992.
- [3] J. FOURIER. *Théorie analytique de la chaleur*. 1822.
- [4] P.KORNPORST G, AUBERT. *Mathematical problems in Image processing :Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. new york,berlin,heidelberg,hong kong,london,milan paris,tokyo, 2002.
- [5] H.BREZIS. *ANALYSE FONCTIONNELLE Théorie et applications*. Université Pierre et Marie Curie et école Polytechnique, 1987.
- [6] J.MARKER. *Cours de L3 MFA*. Université Paris-Sud Orsay, 2013.
- [7] L.C.EVANS. *partial differential equations*. proceedings of the American Mathematical society, 1998.
- [8] J.MALIK P .PERONA. *Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1987.
- [9] P.CIARLET. *Introduction a l'Analyse Numirique Matricielle et a l'Optimisation*. Masson, Paris, 1982.
- [10] TEREDES R, M. *THÈSE DIFFUSIO DIRECTIONNELLE. APPLICATIONS A LA RESTAURATION ET A L'AMELIORATION D'IMAGE DE DOCUMENTS ANCIENS*. New York, providence, Rhode Idland, 2004.
- [11] R.ADAMS. *Sobolev spaces*. Academic Press,New York - San Francisco - ILondon, 1975.

ANNEXE

Dans ce mémoire on a utilise des méthodes numériques pour résoudre le problème de Catté et al, Perona-Malik et l'équation de la chaleur et on a utilise la programmation de ces méthodes avec Malabe :

Programme 1 : Résolution du modèle de Catté et al 2 - D

```

clc;clear all
%ANISODIFF2D Conventional anisotropic diffusion
%   DIFF_IM = ANISODIFF2D(IM, NUM_ITER, DELTA_T, KAPPA, OPTION)
%
% ARGUMENT DESCRIPTION:
% IM          - gray scale image (MxN).
% NUM_ITER    - number of iterations.
% DELTA_T     - integration constant (0 <= delta_t <= 1/7).
% Usually, due to numerical stability this
% parameter is set to its maximum value.
% KAPPA-      gradient modulus threshold that controls the conduction.
% OPTION-     conduction coefficient functions proposed by Perona & Malik
% 1 - g(x,y,t) = exp(-(nablaI/kappa).^2),
% privileges high-contrast edges over low-contrast ones.
% 2 - g(x,y,t) = 1./(1 + (nablaI/kappa).^2),
% privileges wide regions over smaller ones.
%
%           OUTPUT DESCRIPTION:
% DIFF_IM - (diffused) image with the largest scale-space parameter.
%
% Example
% -----
% s = phantom(512) + randn(512);
num_iter = 15;
delta_t = 1/7;
kappa = 30;
option = 2;
%ad = anisodiff2D(s,num_iter,delta_t,kappa,option);
%subplot(1,2,1), imshow(s,[]), subplot(1,2,2), imshow(ad,[])
%
% See also anisodiff1D, anisodiff3D.

```

```

% References:
% P. Perona and J. Malik.
% Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion.
% IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,
% 12(7):629-639, July 1990.
%
% G. Grieg, O. Kubler, R. Kikinis, and F. A. Jolesz.
% Nonlinear Anisotropic Filtering of MRI Data.
% IEEE Transactions on Medical Imaging,
% 11(2):221-232, June 1992.
%
% MATLAB implementation based on Peter Kovesei's anisodiff(.):
% P. D. Kovesei. MATLAB and Octave Functions for Computer
% Vision and Image Processing.
% School of Computer Science & Software Engineering,
% The University of Western Australia. Available from:
% <http://www.csse.uwa.edu.au/~pk/research/matlabfns/>.
%
% Credits:
% Daniel Simoes Lopes
% ICIST
% Instituto Superior Tecnico - Universidade Tecnica de Lisboa
% danlopes (at) civil ist utl pt
% http://www.civil.ist.utl.pt/~danlopes
%
% May 2007 original version.
% Convert input image to double.
im=imread('cameraman.tif')
%im=imnoise(id,'gaussian',0.05)
%im = imfilter(ih,t,'conv');
e= fspecial('gaussian',[11 11],0.5);
%im=rgb2gray(id);imshow(id);figure
%im = double(im);
% PDE (partial differential equation) initial condition.
diff_im = im;
% Center pixel distances.
dx = 1;
dy = 1;
dd = sqrt(2);
% 2D convolution masks - finite differences.
hN = [0 1 0; 0 -1 0; 0 0 0];
hS = [0 0 0; 0 -1 0; 0 1 0];
hE = [0 0 0; 0 -1 1; 0 0 0];
hW = [0 0 0; 1 -1 0; 0 0 0];
hNE = [0 0 1; 0 -1 0; 0 0 0];
hSE = [0 0 0; 0 -1 0; 0 0 1];
hSW = [0 0 0; 0 -1 0; 1 0 0];

```

```

hNW = [1 0 0; 0 -1 0; 0 0 0];
% Anisotropic diffusion.
for t = 1:1:num_iter
    % Finite differences. [imfilter(...,'conv')
    %can be replaced by conv2(...,'same')]

    nablaN1= imfilter(diff_im,e,'conv');
nablaN = imfilter(nablaN1,hN,'conv');
    nablaS1= imfilter(diff_im,e,'conv');
    nablaS = imfilter(nablaS1,hS,'conv');
    nablaW1= imfilter(diff_im,e,'conv');
    nablaW = imfilter(nablaW1,hW,'conv');
    nablaE1= imfilter(diff_im,e,'conv');
    nablaE = imfilter(nablaE1,hE,'conv');
    nablaNE1= imfilter(diff_im,e,'conv');
nablaNE = imfilter(nablaNE1,hNE,'conv');
    nablaSE1= imfilter(diff_im,e,'conv');
nablaSE = imfilter(nablaSE1,hSE,'conv');
    nablaSW1= imfilter(diff_im,e,'conv');
nablaSW = imfilter(diff_im,hSW,'conv');
    nablaNW1= imfilter(diff_im,e,'conv');
nablaNW = imfilter(nablaNW1,hNW,'conv');

    % Diffusion function.
    if option == 1
cN = exp(-(nablaN/kappa).^2);
cS = exp(-(nablaS/kappa).^2);
cW = exp(-(nablaW/kappa).^2);
cE = exp(-(nablaE/kappa).^2);
cNE = exp(-(nablaNE/kappa).^2);
cSE = exp(-(nablaSE/kappa).^2);
cSW = exp(-(nablaSW/kappa).^2);
        elseif option == 2
            cN = 1./(1 + (nablaN/kappa).^2);
cS = 1./(1 + (nablaS/kappa).^2);
cW = 1./(1 + (nablaW/kappa).^2);
cE = 1./(1 + (nablaE/kappa).^2);
cNE = 1./(1 + (nablaNE/kappa).^2);
cSE = 1./(1 + (nablaSE/kappa).^2);
cSW = 1./(1 + (nablaSW/kappa).^2);
cNW = 1./(1 + (nablaNW/kappa).^2);
        end
    diff_im = diff_im + ...
delta_t*(...
(1/(dy^2))*cN.*nablaN + (1/(dy^2))*cS.*nablaS + ...
(1/(dx^2))*cW.*nablaW + (1/(dx^2))*cE.*nablaE + ...
(1/(dd^2))*cNE.*nablaNE + (1/(dd^2))*cSE.*nablaSE + ...

```

```
(1/(dd^2))*cSW.*nablaSW + (1/(dd^2))*cNW.*nablaNW );
    % Discrete PDE solution.
    % Iteration warning.
    fprintf('\rIteration %d\n',t);
end
subplot(1,2,1), imshow(im);title('Image original')
subplot(1,2,2), imshow(diff_im);title('Image filtré')
```

Programme 2 : Résolution du modèle de Perona-Malik en 2-D

```
clc;clear all
%ANISODIFF2D Conventional anisotropic diffusion
% DIFF_IM = ANISODIFF2D(IM, NUM_ITER, DELTA_T, KAPPA, OPTION)
%performs conventional anisotropic diffusion (Perona & Malik)
%upon a gray scale image. A 2D network structure
%of 8 neighboring nodes is considered for
% diffusion conduction.
%
% ARGUMENT DESCRIPTION:
% IM - gray scale image (MxN).
% NUM_ITER - number of iterations.
% DELTA_T - integration constant (0 <= delta_t <= 1/7).
% Usually, due to numerical stability this
% parameter is set to its maximum value.
% KAPPA- gradient modulus threshold that controls the conduction.
%OPTION-conduction coefficient functions proposed by Perona & Malik
% 1 -  $g(x,y,t) = \exp(-(\nabla I/kappa).^2)$ ,
% privileges high-contrast edges over low-contrast ones.
% 2 -  $g(x,y,t) = 1./(1 + (\nabla I/kappa).^2)$ ,
% privileges wide regions over smaller ones.
%
% OUTPUT DESCRIPTION:
% DIFF_IM - (diffused) image with the largest scale-space parameter.
%
% Example
% -----
% s = phantom(512) + randn(512);
num_iter = 15;
delta_t = 1/2;
kappa = 30;
option = 2;
%ad = anisodiff2D(s,num_iter,delta_t,kappa,option);
%subplot(1,2,1), imshow(s,[]), subplot(1,2,2), imshow(ad,[])
%
% See also anisodiff1D, anisodiff3D.
% References:
% P. Perona and J. Malik.
```

```

% Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion.
% IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,
% 12(7):629-639, July 1990.
%
% G. Grieg, O. Kubler, R. Kikinis, and F. A. Jolesz.
% Nonlinear Anisotropic Filtering of MRI Data.
% IEEE Transactions on Medical Imaging,
% 11(2):221-232, June 1992.
%
% MATLAB implementation based on Peter Kovesei's anisodiff(.):
% P. D. Kovesei. MATLAB and Octave Functions for Computer
% Vision and Image Processing.
% School of Computer Science & Software Engineering,
% The University of Western Australia. Available from:
% <http://www.csse.uwa.edu.au/~pk/research/matlabfns/>.
%
% Credits:
% Daniel Simoes Lopes
% ICIST
% Instituto Superior Tecnico - Universidade Tecnica de Lisboa
% danlopes (at) civil ist utl pt
% http://www.civil.ist.utl.pt/~danlopes
%
% May 2007 original version.
% Convert input image to double.
id=imread('cameraman.tif')
im=imnoise(id,'gaussian',0.05)
%e= fspecial('gaussian',[11 11],0.7);
%im = imfilter(id,e,'conv');

%im=rgb2gray(id);imshow(id);figure
%im = double(im);
% PDE (partial differential equation) initial condition.
diff_im = im;
% Center pixel distances.
dx = 1;
dy = 1;
dd = sqrt(2);
% 2D convolution masks - finite differences.
hN = [0 1 0; 0 -1 0; 0 0 0];
hS = [0 0 0; 0 -1 0; 0 1 0];
hE = [0 0 0; 0 -1 1; 0 0 0];
hW = [0 0 0; 1 -1 0; 0 0 0];
hNE = [0 0 1; 0 -1 0; 0 0 0];
hSE = [0 0 0; 0 -1 0; 0 0 1];
hSW = [0 0 0; 0 -1 0; 1 0 0];
hNW = [1 0 0; 0 -1 0; 0 0 0];

```

```

% Anisotropic diffusion.
for t = 1:1:num_iter
    % Finite differences. [imfilter(.,.,'conv')
    %can be replaced by conv2(.,.,'same')]
        nablaN = imfilter(diff_im,hN,'conv');
        nablaS = imfilter(diff_im,hS,'conv');
        nablaW = imfilter(diff_im,hW,'conv');
        nablaE = imfilter(diff_im,hE,'conv');
        nablaNE = imfilter(diff_im,hNE,'conv');
        nablaSE = imfilter(diff_im,hSE,'conv');
        nablaSW = imfilter(diff_im,hSW,'conv');
        nablaNW = imfilter(diff_im,hNW,'conv');

        % Diffusion function.
        if option == 1
cN = exp(-(nablaN/kappa).^2);
cS = exp(-(nablaS/kappa).^2);
cW = exp(-(nablaW/kappa).^2);
cE = exp(-(nablaE/kappa).^2);
cNE = exp(-(nablaNE/kappa).^2);
cSE = exp(-(nablaSE/kappa).^2);
cSW = exp(-(nablaSW/kappa).^2);
            elseif option == 2
                cN = 1./(1 + (nablaN/kappa).^2);
cS = 1./(1 + (nablaS/kappa).^2);
cW = 1./(1 + (nablaW/kappa).^2);
cE = 1./(1 + (nablaE/kappa).^2);
cNE = 1./(1 + (nablaNE/kappa).^2);
cSE = 1./(1 + (nablaSE/kappa).^2);
cSW = 1./(1 + (nablaSW/kappa).^2);
cNW = 1./(1 + (nablaNW/kappa).^2);
            end
            diff_im = diff_im + ...
delta_t*(...
(1/(dy^2))*cN.*nablaN + (1/(dy^2))*cS.*nablaS + ...
(1/(dx^2))*cW.*nablaW + (1/(dx^2))*cE.*nablaE + ...
(1/(dd^2))*cNE.*nablaNE + (1/(dd^2))*cSE.*nablaSE + ...
(1/(dd^2))*cSW.*nablaSW + (1/(dd^2))*cNW.*nablaNW );
            % Discrete PDE solution.
            % Iteration warning.
            fprintf('\rIteration %d\n',t);
end
subplot(1,2,1), imshow(im);title('Image original')
subplot(1,2,2), imshow(diff_im);title('Image filtré')

```

Programme 3 : Résolution du modèle de la Chaleur 2 – D

```
I = imread('cameraman.tif');
%id=imread('cameraman.tif')
%I=imnoise(id,'gaussian',0.05)
% Creation filter, fspecial .
h = fspecial('gaussian',[11 11],2.5);
I2 = imfilter(I,h,'conv');
% Affichage original image et filtered image .
imshow(I)
%title('Original Image')
%figure
imshow(I2)
%title('Filtered Image');
subplot(1,2,1), imshow(I);title('Image original')
subplot(1,2,2), imshow(I2);title('Image filtré')
```

ملخص : في هذه المذكرة، قمنا بدراسة نموذج معادلات المشتقة جزئيا مسمى بـ :

نموذج : F.Catt , P.L.Lions, J.M.Morel

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|)\nabla u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

الهدف هو إثبات أن هذه المشكلة تم طرحها بشكل جيد ، بمعنى أنها تقبل بشكل أساسي حلا وحيد ، وإنشاء دقة عددية لنموذج Catté et al .

كلمات مفتاحية: معادلة الانتشار غير الخطية ، معالجة الصور ، تحسين الحواف .

Dans ce mémoire, nous avons étudié le modèle d'équations aux dérivées partielle appelé : Modèle de F.Catt,P.L.Lions, J.M.Morel :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|)\nabla u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Le but est de démontrer que ce problème est bien posé, c'est à dire qu'il admet essentiellement une solution unique, et établi une résolution numérique du modèle de Catté et al

Mots-Clés : Équation de diffusion non-linéaire, traitement de l'image, amélioration du contour.

In this memoir, we studied the model of partial differential equations called : F.Catt , P.L.Lions, J.M.Morel model :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|)\nabla u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

The aim is to demonstrate that this problem is well posed, i. e. it essentially recognizes a single solution, and established a numerical resolution of Catté et al's model

Keywords : Non-linear diffusion equation, image processing, enhancement of contour.