



Département de Génie Mécanique

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du diplôme de :

### MASTER

En Génie Mécanique

**Option** : Construction

Présenté par :

Djafri Khouloud & Nemiri Amina

### Thème

## SIMULATION DE L'EFFET D'USURE DES AILETTES D'UN ROTOR A ROUE CENTRIFUGE RADIAL SUR LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE

Devant le jury composé de :

NOM et Prénom	Grade	Qualité
Benkharbeche Houria	MCA	Président
Menasri Noureddine	MCA	Encadreur
Latrache Mohamed	MCB	Examineur

*Année Universitaire : 2020 / 2021*

N° d'ordre : GM/2020/2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

DÉDICACE

JE DÉDIE CE MODESTE TRAVAIL

À TOI MA BELLE MAMAN POUR VOTRE  
INDÉFACTIBLE ASSISTANCE ET SON SOUTIEN  
TOUT LE LONG DE MES ÉTUDES

À TOI MA TRÈS CHÈRE TANTE. LES MOTS NE  
PEUVENT EXPRIMER MON ENTIÈRE GRATITUDE ET  
MA RECONNAISSANCE POUR TOUS VOS  
SACRIFICES

À TOI MON CHER PÈRE, QUI A FAIT DE MOI LA  
FEMME QUE JE SUIS

À MON FRÈRE ISSAM

À MES SŒURS MARWA ET HAYET

À MON AMIE INTIME AMINA

À TOUS MES AMI(E) S SANS EXCEPTION

KHOULOU  
KHOULOU

A decorative border with intricate floral and scrollwork patterns surrounds the text.

DÉDICACE

JE DÉDIE CE MODESTE TRAVAIL

À MES TRÈS CHERS PARENTS, FATIHA  
ET HOCINE, QUI ONT TOUJOURS ÉTÉ LÀ  
POUR MOI.

À MA SŒUR ZAHRA ET MES FRÈRES  
RAINE ET BILAL POUR LEURS  
ENCOURAGEMENTS.

À MA BELLE KHOULOU

À MON MEC MONDHIR, QUI ONT  
TOUJOURS ÉTÉ LÀ POUR MOI. LEUR  
SOUTIEN INCONDITIONNEL ET LEURS  
ENCOURAGEMENTS ONT ÉTÉ D'UNE  
GRANDE AIDE.

AMINA  
AMINA

## REMERCIEMENT

TOUT D'ABORD NOUS REMERCIONS LE BON DIEU TOUT PUISSANT DE LA BONNE SANTÉ, LA VOLONTÉ, ET LA PATIENCE QU'IL NOUS A DONNÉE TOUT AU LONG DE NOTRE ÉTUDES.

NOS PREMIERS REMERCIEMENTS VONT NATURELLEMENT À NOTRE DIRECTEUR DE MÉMOIRE, MR. MENASRI NOUREDDINE POUR SES CONSEILS ET LE PARTAGE DE SES COMPÉTENCES SCIENTIFIQUES. CE FUT UN PLAISIR DE TRAVAILLER AVEC LUI. NOUS AVONS ÉGALEMENT APPRÉCIÉ LA GRANDE LIBERTÉ QU'IL NOUS A ACCORDÉE DANS LA GESTION DE NOTRE MÉMOIRE AINSI QUE SA PASSION POUR LA RECHERCHE ET SA BONNE HUMEUR TOUJOURS PRÉSENTE. BREF, MÉRITE TOUTE NOS RECONNAISSANCES.

NOUS REMERCIONS ÉGALEMENT RIYAD DE NOUS AVOIR AIDÉS À MENER À BIEN CE TRAVAIL. MERCI BEAUCOUP POUR VOS CONSEILS ET NOUS VOUS SOUHAITONS BONNE CHANCE AVEC THÈSE DE DOCTORAT.

ENSUITE NOUS SOUHAITONS REMERCIER L'ENSEMBLE DES MEMBRES DU JURY POUR LE TEMPS ET L'ÉNERGIE QU'ILS ONT DÉDIÉS À LA CORRECTION DE NOTRE THÈSE, ET TOUT LE PERSONNEL DU DÉPARTEMENT DU GÉNIE MÉCANIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE MSILA.

ENFIN, QUE TOUTES LES PERSONNES AYANT CONTRIBUÉ, DE PRÈS OU DE LOIN, À LA RÉALISATION DE CE TRAVAIL, SOIENT CHALEUREUSEMENT REMERCIÉES.

# Table des matières

Dédicace Khouloud

Dédicaces Amina

Remerciement

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction Générale ..... I

## Chapitre I : Modélisation des systèmes des rotors

Introduction ..... 1

I.1. Définition du rotor ..... 1

I.2. Les éléments constituant d'un rotor ..... 1

I.2.1. Disque ..... 2

I.2.2. Arbre ..... 2

I.2.3. Palier ..... 2

I.2.4. Balourd ..... 3

I.2.5. Assemblage des pièces ..... 3

I.3. Historique de la M.E.F : ..... 3

I.4. Technique des éléments finis appliquée à l'analyse structurale ..... 4

I. 5. Modélisation du rotor et équations du mouvement ..... 4

I. 5.1. Le disque ..... 6

I.5.2 .1. L'énergie cinétique ..... 8

I.5.2 .2. L'énergie de déformation ..... 8

I.5.3. Paliers ..... 10

I.5.4. Le Balourd ..... 12

I.6. Exemple d'application ..... 13

I.6.1. Modèle symétrique.....	15
I.6.2. Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation Diagramme de Campbell.....	15
I.6.3. Réponse aux forces d'excitation.....	19
I.6.3.a. Balourd .....	19
I.6.3.b. Force asynchrone.....	20
<b>Conclusion</b> .....	22

## **Chapitre II: Modélisation par éléments finis**

<b>Introduction</b> .....	<b>23</b>
<b>II.1. Expressions des énergies des éléments du rotor</b> .....	<b>24</b>
II.1.1. Energie de déformation d'un élément de rotor.....	24
II.1.2. Energie cinétique d'un élément de rotor.....	25
<b>II.2. Formulation matricielle</b> .....	<b>26</b>
II.2.1. Formulation matricielle des équations du disque .....	26
II.2.2. Formulation matricielle des équations de l'arbre .....	27
a) L'énergie cinétique .....	29
b) L'énergie de déformation .....	31
II.2.3. Formulation matricielle des équations du palier.....	32
<b>II.3. Exemple de Montage de Matrices Globales</b> .....	<b>32</b>

## **Chapitre III: simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par éléments fini (ANSYS)**

<b>Introduction</b> .....	<b>37</b>
<b>III.1. Description du ventilateur de tirage</b> .....	<b>38</b>
III.1.1. Caractéristique technique de rotor .....	40
III.1.2. Principe de Fonctionnement.....	41
<b>III.2. La conception du rotor a roue centrifuge radial par l'logiciel SOLIDWORKS 2016.</b>	<b>41</b>

<b>III.3. Modélisation des rotors par élément finis .....</b>	<b>44</b>
III.3.1. Eléments finis de rotor .....	44
III.3.1.1. Disque .....	44
III.3.1.2. Arbre .....	45
III.3.1.3. Paliers .....	46
<b>III.4. Analyse modale du rotor a roue centrifuge radial par logiciel Workbench ANSYS 1547</b>	
III.4.1. Caractéristique géométrique et mécanique de rotor.....	48
III.4.2. Génération et maillage de la géométrie de rotor .....	48
III.4.3. Les conditions aux limites.....	49
<b>III.5. Résultant de simulation numérique.....</b>	<b>50</b>
III.5.1 : Le déplacements et les fréquences .....	50
III.5.2 : Diagramme de Campbell .....	58
III.5.2.1. Cas 1 : Rotor sein .....	59
III.5.2.2. Cas 2 : Rotor avec une ailette usée.....	60
III.5.2.3. Cas 3 : Rotor avec 5 ailettes usées .....	61
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>62</b>
<b>Références</b>	
<b>Résumé</b>	


## Liste des figures

Figure I.1: Description du rotor .....	2
Figure I.2: Elément de balourd.....	3
Figure I.3: Exemple de rotor .....	5
Figure I.4 : Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible.....	6
Figure I.5 : Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor.....	9
Figure I.6 : Amortissement et raideur des paliers .....	11
Figure I.7 : Balourd .....	13
Figure I.8 : Schématisation du modèle simple du rotor .....	15
Figure I.9 : Diagramme de Campbell pour modèle simple.....	20
Figure I.10 : Réponse à un balourd .....	22
Figure I.11: Réponse à une force asynchrone .....	23
Figure II.1 : Degrés de liberté du disque.....	26
Figure II.2 : Degrés de liberté d'un élément arbre .....	27
Figure II.3 : Modèle de rotor avec éléments et noeuds.....	33
Figure III.1 : Dessin d'ensemble du rotor .....	39
Figure III.2: Diagramme du ventilateur de ciment [6].....	40
Figure III.3: Conception de l'arbre .....	42
Figure III.4 : Conception de Flasque arrière .....	42
Figure III.5 : Conception de moyeu .....	42
Figure III.6: Conception de l'ailette.....	42
Figure III.7 : Conception d'écrou.....	42
Figure III.8 : Conception de Vis .....	42
Figure III.9: Conception écrou arbre.....	42
Figure III.10 : Assemblage des éléments de la roue .....	43


Figure III.11 : Conception de Flasque avant .....	43
Figure III.12: Assemblage des éléments du ventilateur .....	43
Figure III.13: Maillage du rotor .....	49
Figure III.14: condition aux limites .....	49
Figure III.15 : Fréquence et déplacement spécifique de chaque mode calculé.....	50
Figure III.16 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 10 rpm.....	51
Figure III.17 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 450 rpm.....	51
Figure III.18 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 1000 rpm.....	52
Figure III.19 : rotor avec une ailette usée .....	53
Figure III.20: Fréquence et déplacement spécifique de chaque mode calculé.....	53
Figure III.21 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 10 rpm.....	54
Figure III.22 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 450 rpm.....	54
Figure III.23 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 1000 rpm.....	55
Figure III.24 : Fréquence et Déplacement spécifique de chaque mode calculé.....	56
Figure III.25 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 10 rpm.....	57
Figure III.26: le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 450 rpm.....	57
Figure III.27 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 1000 rpm.....	57
Figure III.28: Digramme de Campbell Cas 1 .....	59
Figure III.29 : Digramme de Campbell Cas 2 .....	60
Figure III.30: Digramme de Campbell Cas 3 .....	61

## Liste des tableaux

Tableau III.1 : Les données techniques de Ventilateur .....	40
Tableau III.2 : Les Données techniques de Moteur .....	41
Tableau III.3: Maillage du rotor.....	48
Tableau III.4 : vitesses de rotation en fonctionnement de $\Omega$ .....	50
Tableau III.5 : hypothèse d'ailette .....	50



**CHAPITRE I :**  
**MODÉLISATION DES**  
**SYSTÈMES DES**  
**ROTORS**



## **Chapitre I : Modélisation des systèmes des rotors**

### **Introduction**

Cette partie a pour but de développer les équations du mouvement afin de prévoir le comportement dynamique d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque connu. Les caractéristiques de chaque élément composant du rotor sont d'abord développées.

Un modèle éléments finis est développé dans le souci de traiter des systèmes réels. Les équations du mouvement du rotor sont obtenues par l'application des équations de **Lagrange** la méthode de **Rayleigh-Ritz** est utilisée pour mettre en place un modèle permettant de traiter des cas simples et de mettre en évidence des phénomènes de base.

### **I.1. Définition du rotor**

Par définition, un rotor est un élément tournant autour d'un axe fixe. Le champ d'application des rotors est vaste, nous les trouvons dans les satellites géostationnaires animés d'une rotation libre, dans les machines tournantes industrielles qui constituent des structures assez complexes à analyser. Le rôle principal des rotors est de transformer un mode d'énergie selon les applications auxquelles ils sont destinés (l'aéronautique, l'industrie pétrolière, centrale électrique et hydraulique, l'industrie électronique et pharmaceutique...etc.), ils sont souvent composés de plusieurs tronçons et soumis à des sollicitations d'origines diverses.

Les différents organes intervenant dans une machine tournante sont classés comme ci-dessous :

- Les arbres (éléments principaux des machines tournantes).
- Les éléments de support et de positionnement (paliers hydrauliques, paliers à roulement, paliers magnétiques ... etc.)
- Les éléments de transmission de mouvement
- Les éléments fonctionnels (roues aubages, broches, hélices... etc.) [1]

### **I.2. Les éléments constitutifs d'un rotor**

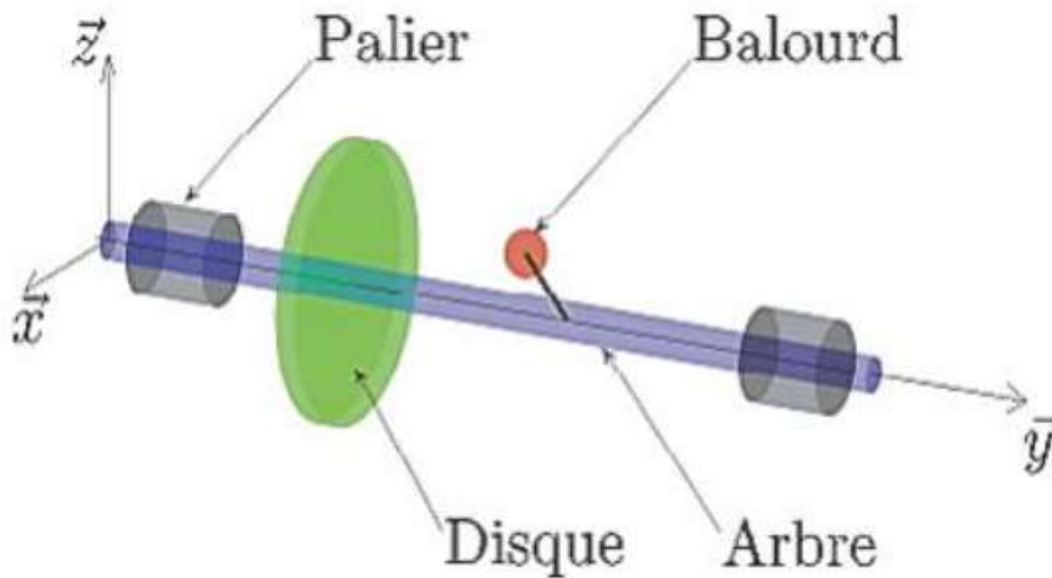
Le rotor d'une turbomachine est constitué de l'arbre, le disque, le balourd, les paliers et

# Chapitre I

## Modélisation des systèmes des rotors

L'aube.

Ces éléments sont visibles à la (Figure I.1)



**Figure I.1: Description du rotor [2]**

### I.2.1. Disque

La roue peut être modélisée par un disque, il peut être déformable ou rigide. Une roue peut être représentée géométriquement sous forme cylindrique ; mais dans l'analyse dynamique, cette forme s'avère limitée. [2]

### I.2.2. Arbre

C'est un organe qui porte les roues. Il peut être rigide ou flexible, ces propriétés dépendent de son matériau. L'arbre est considéré déformable dans l'analyse dynamique, cela permet de tenir compte des effets des déformations. Géométriquement, la section de l'arbre peut être constante ou variable. L'étude en flexion devient complexe pour l'arbre à section variable du fait que le mouvement est décrit par les équations différentielles linéaires à coefficients variables dont les solutions sont les fonctions de Bessel. [2]

# Chapitre I

## Modélisation des systèmes des rotors

### I.2.3. Palier

Le palier est aussi appelé support, il peut être flexible (isotrope ou anisotrope) ou rigide.

Le palier constitue un système de dissipation ou non lorsque la flexibilité est anisotrope. [2]

### I.2.4. Balourd

Le balourd est toute masse excentrée  $m_b$  d'un rotor. Il est localisé en une distance  $d$  du centre géométrique de l'arbre comme montré à la (Figure I.2)

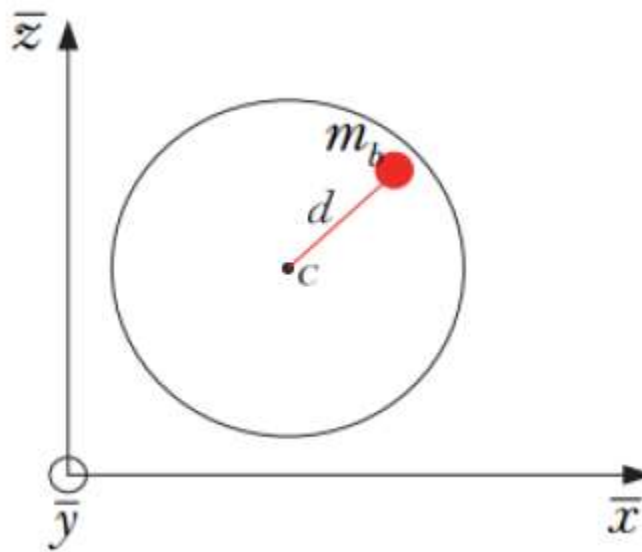


Figure I.2: Élément de balourd. [2]

### I.2.5. Assemblage des pièces

Les pièces assemblées sur un arbre en rotation déplacent naturellement leurs centres de masse. C'est le cas des turbines, moteurs électriques, ... il est crucial de veiller sur le procédé d'assemblage pouvant faire de deux pièces assemblées un bloc balourdé [2]

## I.3. Historique de la M.E.F :

Les bases théoriques de la M.E.F reposent d'une part sur la formation énergétique de la mécanique des structures dont la formulation des théorèmes énergétiques de l'élasticité a été effectuée au siècle dernier, en 1819 NAVIER définit une méthode d'étude des systèmes hyperstatiques basée sur l'application des conditions d'équilibre et de compatibilité par MAX

## Chapitre I

### Modélisation des systèmes des rotors

**WELL** en 1864 et **CASTIGLIANO** en 1878. [5] Et d'autres part les méthodes d'approximation, c'est au début du 20<sup>-ème</sup> siècle qu'ont été acquis des résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de **RITZ** en 1902 et de **GARLEKIN** en 1915 puis en 1943 **COURANT** établit les bases de **la M.E.F.** En 1954 **DENKE** systématise la méthode des forces. En fin de 1955 **AGURIS** présente une approche unifiée des méthodes de déplacement et des forces, puis l'année suivante **TURNER** et **CLOUTH** publient une présentation systématique de la méthode des déplacements, ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de **la M.E.F** comme technique de calcul des structures complexes Dès lors, on laisse au développement de nouveaux éléments tels que membranes, plaques, coques. Par ailleurs le domaine d'application de **la M.E.F** limité au début à la statique linéaire s'étend maintenant à la dynamique. Cette histoire perçut incomplète si l'on omet de mentionner le développement de programmes généraux d'analyse (encore appelés codes généraux), à partir des années 60, ce phénomène a été particulièrement important parce qu'il a véritablement abouti à faire rentrer **la M.E.F** dans la pratique industrielle. Il est certain que d'une part, **la M.E.F** se prête bien à la programmation sur ordinateur (les procédures numériques peuvent être rendues automatiques et modulaires) et que d'autre part, **la M.E.F** se caractérise par son universalité et son adoptabilité au traitement des problèmes les plus divers. [3]

#### **I.4. Technique des éléments finis appliquée à l'analyse structurale**

**La M.E.F** dans l'analyse structurale est une technique qui se base primordialement sur l'idée de décomposer la structure en un ensemble (ou en sous-ensemble) de différents composants, ayant chacun un modèle géométrique avec des propriétés physiques particulières. Notant que la structure peut être continue telle que les plaques, ou ayant par sa nature une forme discrète telle que les treillis. Chaque modèle de composants de la structure est connu comme un type spécifique d'élément finis. Chaque élément fini a une forme structurale bien déterminée et il est interconnecté avec les éléments qui lui sont adjacents par des nœuds ou « Points nodaux ». Les forces agissantes en chaque nœud sont dites « Forces nodales ». L'élément est sujet de déplacements ou rotations aux nœuds, appelés « Degrés de liberté ». [4]

# Chapitre I

## Modélisation des systèmes des rotors

### I. 5. Modélisation du rotor et équations du mouvement

Ce chapitre expose les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation. Il permet de définir aussi bien un modèle analytique d'analyse qu'un Modèle Éléments Finis à usage plus général.

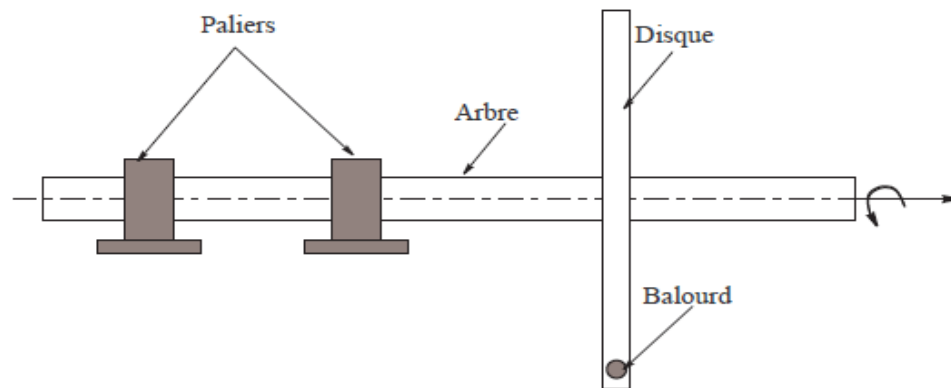


Figure I.3: Exemple de rotor

Les éléments de base des rotors sont l'arbre, les disques et les paliers. Les expressions des énergies cinétiques sont nécessaires pour caractériser l'arbre, le disque et le balourd (figure I.3). L'énergie potentielle est nécessaire pour caractériser l'arbre. Le travail virtuel est calculé pour les forces dues aux paliers. Les équations générales du rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

- ❖ L'énergie cinétique  $T$ , l'énergie de déformation  $U$  et le travail virtuel  $\delta W$  sont calculés pour tous les éléments du système.
- ❖ Une méthode de discrétisation est choisie : la méthode de **Rayleigh-Ritz** est bien adaptée aux systèmes simples et résulte en un faible nombre de degrés de liberté, la méthode des éléments finis est adaptée aux applications réelles.
- ❖ Les équations de **Lagrange** sont utilisées pour l'obtention des équations du mouvement,

Soit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F q_i \quad (\text{I.1})$$

$N$  ( $1 \leq i \leq N$ ) représente le nombre de degrés de liberté.

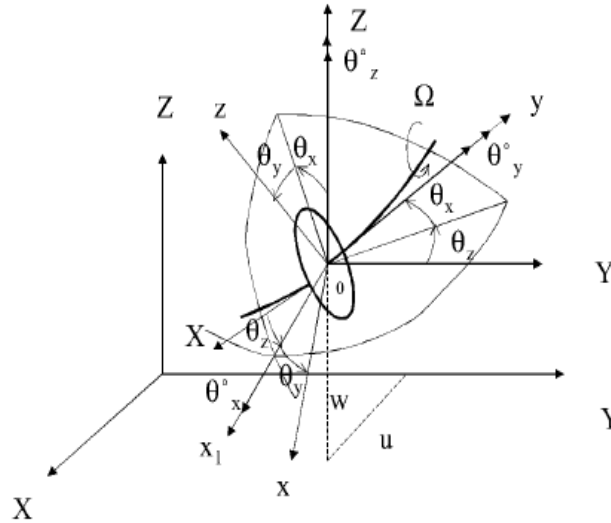
# Chapitre I

## Modélisation des systèmes des rotors

$q_i$  : sont les coordonnées généralisées indépendantes.

$Fq_i$  : est le vecteur force généralisée.

### I. 5.1. Le disque



**Figure I.4 :** Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

Le disque est supposé rigide. Seule son énergie cinétique est considérée. Soient

$R_0 (X, Y, Z)$  un repère fixe et  $R (x, y, z)$  un repère tournant lié au disque (**figure I.4**). Le système de coordonnées  $x, y$  et  $z$  est relié au système de coordonnées  $X, Y$  et  $Z$  par l'intermédiaire des angles  $\theta_x, \theta_y$  et  $\theta_z$ . Pour déterminer la position du disque, on effectue une rotation initiale d'un angle  $\theta_z$  autour de l'axe  $Z$ , puis d'un angle  $\theta_x$  autour du nouvel axe  $x$ , note  $x_1$ , en fin d'un angle  $\theta_y$  autour de l'axe de rotation propre du disque  $y$ .

Le vecteur rotation instantanée traduisant la position du repère  $R$  s'écrit :

$$\vec{\omega}_{R/R_0} = \dot{\theta}_z \vec{Z} + \dot{\theta}_x \vec{x}_1 + \dot{\theta}_y \vec{y} \quad (I.2)$$

où  $\vec{Z}, \vec{x}_1$  et  $\vec{y}$  sont les vecteurs unitaires suivant les axes  $\vec{Oz}, \vec{Ox}_1$  et  $\vec{Oy}$ .

L'énergie cinétique du disque autour de son centre de masse  $O$  est calculée dans le repère Tournant  $R$ .

Le vecteur de rotation instantanée s'exprime alors dans ce repère :

$$\vec{\omega}_{R/R_0} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_z \sin \theta_x \\ -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{bmatrix}_R \quad (I.3)$$

## Chapitre I

### Modélisation des systèmes des rotors

$\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  étant les composants du vecteur de rotation instantanée suivant  $x, y$  et  $z$ . Soient  $u$  et  $w$  les coordonnées du centre du disque  $O$  suivant  $OX, OZ$  dans  $R_0$ ; la coordonnée suivant  $OY$  restant constante.

La masse de disque  $m_d$  est donnée par :

$$m_d = \pi(R^2 - r^2)h\rho_d \quad (\text{I.4})$$

$R$  : est le rayon extérieur

$r$  : est le rayon intérieur

$\rho_d$ : est la densité volumique

$h$  : L'épaisseur

Le tenseur d'inertie est noté :

$$I_{/O} = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix}_R \quad (\text{I.5})$$

$$I_{dx} = I_{dzz} = \frac{m_d}{12} (3r^2 + 3R^2 + h^2)$$

$$I_{dy} = \frac{m_d}{2} (r^2 + R^2)$$

$I_{dx}$ ,  $I_{dy}$  et  $I_{dz}$  sont les moments d'inertie du disque suivant  $x, y$  et  $z$ .

L'expression générale de l'énergie cinétique du disque  $T_d$  s'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad (\text{I.6})$$

Cette expression peut être simplifiée quand le disque est symétrique  $I_{dx} = I_{dz}$ .

Lorsque les angles  $qx$  et  $qz$  sont petits et la vitesse angulaire constante ( $\dot{q}_y = W$ ), l'équation I.6 devient :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\theta_x + \theta_z^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\theta_z\theta_x) \quad (\text{I.7})$$

Le terme  $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$ , qui est constant, n'a pas d'influence. Le dernier terme  $I_{dy} \Omega \theta_z \theta_x$  représente l'effet gyroscopique (Coriolis).

#### I.5.2. L'arbre

L'arbre est assimilé à une poutre de section circulaire et caractérisé par ses énergies cinétique Et potentielle

# Chapitre I

## Modélisation des systèmes des rotors

### I.5.2.1. L'énergie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est similaire à celle développée pour Le disque (équation I.6). Pour un élément de longueur  $L$ , de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho S_a \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho I_a \left[ \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 \right] + \Omega I_a \left[ \theta_a \frac{\partial \theta_x}{\partial t} - \theta_x \frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right] \right\} dy \quad (\text{I.8})$$

$\rho$ : est la masse volumique.

$S_a$ : est la section.

$I_a$ : est le moment d'inertie transverse.

$J_a$ : est le moment d'inertie polaire.

La première intégrale de l'équation (I.8) correspond à l'expression de l'énergie cinétique d'une Poutre en flexion, la seconde à l'effet d'inertie dû à la rotation et la dernière intégrale représente L'effet gyroscopique.

### I.5.2.2. L'énergie de déformation

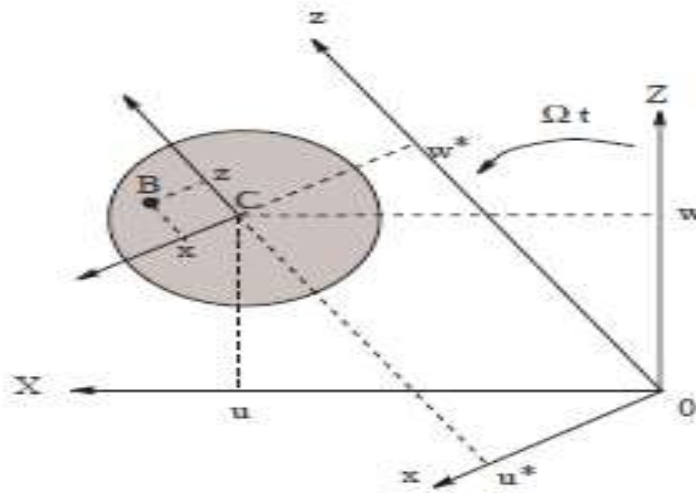
L'énergie de déformation n'est pas affectée par le mouvement du support car elle ne dépend Que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre par rapport au support. Dans ce calcul, (En néglige les effets de cisaillement). Les notations suivantes sont utilisées (figure I.3) :

C'est le centre géométrique de l'arbre,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  est un point typique de section,  $\mathbf{E}$  est le module De Young du matériau.  $\boldsymbol{\epsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  représente la déformation et la contrainte,  $\mathbf{u}^*$  et  $\mathbf{w}^*$  sont les déplacements du centre géométrique suivant les axes  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$  (dans le repère mobile).

Le déplacement d'un point de la section droite s'exprime en considérant seules les déformations dues à la flexion, les effets de cisaillement ne sont pas pris en compte.

# Chapitre I

## Modélisation des systèmes des rotors



**Figure I.5 :** Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor

La déformation en flexion d'un point de l'arbre de coordonnées  $x$  et  $z$  dans  $\mathbf{R}$  est  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{nl}$  avec :

- **Déformation linéaire:**

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (\text{I.9})$$

- **Déformation non linéaire:**

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{nl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{I.10})$$

L'expression générale de l'énergie de déformation du rotor en flexion est alors :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t [\boldsymbol{\sigma}] d\tau \quad (\text{I.11})$$

Où  $\int_V$  est le volume de l'arbre et  $\boldsymbol{\sigma}$  est la contrainte de flexion. La relation entre contraintes et déformations est :  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$  donc :

$$U = \frac{E}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}_l^2 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_l \boldsymbol{\varepsilon}_{nl}) d\tau \quad (\text{I.12})$$

A cause de la symétrie de l'arbre par rapport aux axes  $x$  et  $y$  :

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{nl} \boldsymbol{\varepsilon}_l d\tau = \mathbf{0} \quad (\text{I.13})$$

Le troisième terme de l'intégrale (I.11) représente l'effet d'une force axiale et n'est pas pris en compte dans cette étude. En utilisant (I.8) :

## Chapitre I

### Modélisation des systèmes des rotors

$$\int_V \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left( -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (\text{I.14})$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left( x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xy \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (\text{I.15})$$

Par symétrie, le troisième terme de (I.15) est nul et en introduisant les inerties de section :

$$I_x = \int_S z^2 dS$$

(I.16)

$$\int_S xz dS = 0$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy$$

(I.17)

Pour éviter des termes périodiques, explicitement fonction du temps, il est nécessaire compte

Tenu des propriétés des paliers, d'exprimer l'énergie de déformation en fonction de **U** et **W**

Composantes de déplacement dans **R0**. Le passage de **u\***, **w\*** à **u**, **w** s'écrit (figure I3) :

$$\begin{cases} u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \end{cases}$$

(I.18)

En remplaçant **u\*** et **w\*** par leurs valeurs (I.18) :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (\text{I.19})$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \cos^{-1} \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^{-1} \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) + \right. \\ \left. I_x \left( \sin^{-1} \Omega t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^{-1} \Omega t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \right) dy \quad (\text{I.20})$$

Pour un arbre symétrique où ( $I_x = I_z = I_a$ ) L'expression de l'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z (\cos^{-1} \Omega t + \sin^{-1} \Omega t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + (\sin^{-1} \Omega t + \cos^{-1} \Omega t) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \quad (\text{I.21})$$

Finalement :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (\text{I.22})$$

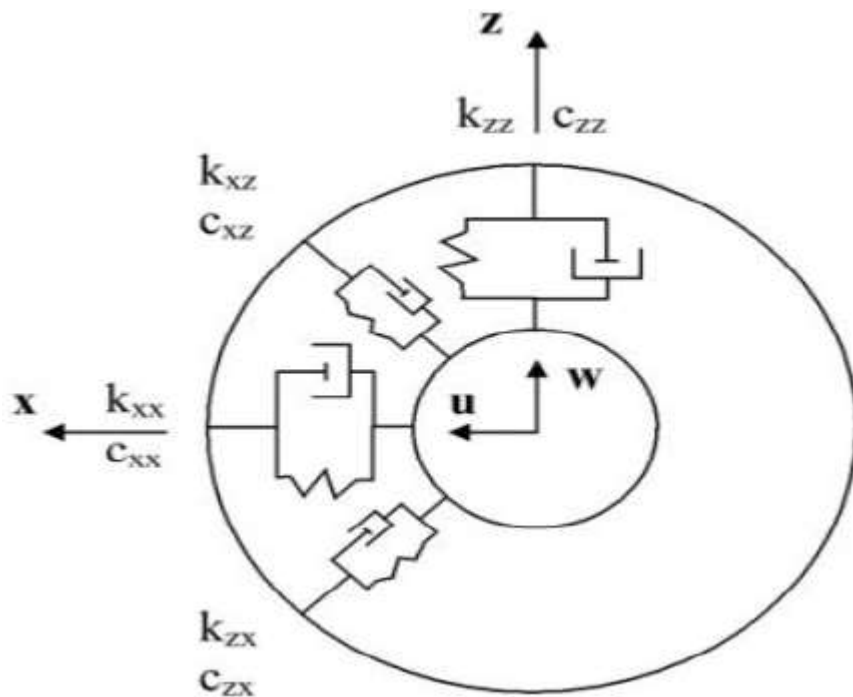
# Chapitre I

## Modélisation des systèmes des rotors

### I.5.3. Paliers

Un palier comporte des caractéristiques de raideur et d'amortissements dans les deux plans, plus des termes croisés (**figure I.6**). Les forces induites par ces paliers sont dues au déplacement de l'arbre (**repère R**) par rapport au support (**repère R<sub>s</sub>**). Elles ne dépendent donc pas du mouvement du repère **R<sub>s</sub>** par rapport au repère **R<sub>0</sub>**. Le travail virtuel  $\delta W_p$  des forces extérieures agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme :

$$\delta W_p = -K_{xx} u \delta u - K_{xz} w \delta u - K_{zz} w \delta w - K_{zx} u \delta w - C_{xx} u \delta \dot{u} - C_{xz} w \delta \dot{u} - C_{zz} u \delta \dot{w} \quad (\text{I.23})$$



**Figure I.6 :** Amortissement et raideur des paliers

Ou sous forme plus compacte :

$$\delta W = F \delta u + F \delta w \quad (\text{I.24})$$

Où  $F_u$  et  $F_w$  sont les forces généralisées déterminées à partir des caractéristiques de raideur et d'amortissement des paliers (**figure I.4**). En utilisant les deux équations (**I.22**) et (**I.24**) il vient :

## Chapitre I Modélisation des systèmes des rotors

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xz} \\ K_{zx} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (\text{I.25})$$

### Remarque :

Ces équations peuvent également être exprimées en fonction des déplacements dans le repère  $\mathbf{R}$ . Ces dernières ne font intervenir que  $\mathbf{k}_{xx}$  et  $\mathbf{k}_{zz}$  sont obtenues à partir de l'expression du travail virtuel suivant :

$$W_p = -K_{xx}(u^* \cos \Omega t + w^* \sin \Omega t)(\delta u^* \cos \Omega t + \delta w^* \sin \Omega t) - K_{zz}(-u^* \sin \Omega t + w^* \cos \Omega t)(-\delta u^* \sin \Omega t + \delta w^* \cos \Omega t) \quad (\text{I.26})$$

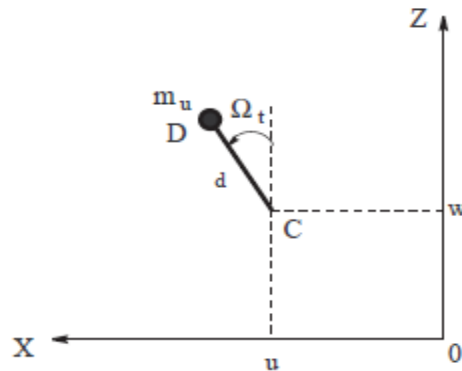
$$\delta W_p = - \left[ (K_{xx} \cos^{-1} \Omega t) u^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (K_{xx} - K_{zz}) w^* \right] \delta u^* - \left[ (K_{xx} \sin^{-1} \Omega t + K_{zz} \cos^{-1} \Omega t) w^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (K_{xx} - K_{zz}) u^* \right] \delta w^* \quad (\text{I.27})$$

L'équation (I.27) montre que si  $\mathbf{k}_{xx} \neq \mathbf{k}_{zz}$  la contribution des paliers ne permet pas dans ce cas d'éliminer la variable temps des équations.

### I.5.4. Le Balourd

Le balourd initial est généralement reparti de manière continue et quelconque sur le rotor

(Figure I.7).



**Figure I.7** : Balourd

La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe  $\mathbf{y}$ , sa coordonnée selon cet axe dans le repère  $\mathbf{R}_0$  est donc constante.

## Chapitre I Modélisation des systèmes des rotors

$$\vec{OD} =$$

$$\begin{bmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \cos \Omega t \end{bmatrix}_{R_0} \quad (\text{I.28})$$

La vitesse du balourd s'écrit alors :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OD}}{dt} =$$

$$\begin{bmatrix} u + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ w - d\Omega \sin \Omega t \end{bmatrix}_{R_0} \quad (\text{I.29})$$

L'expression de l'énergie cinétique  $T_b$  du balourd :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b (\vec{V}^0(D))^2$$

**(I.30)**

Introduisant **(I.29)** dans **(I.30)** :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (u^2 + w^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega u d \cos \Omega t - 2\Omega w d \sin \Omega t) \quad (\text{I.31})$$

Le terme  $\Omega^2 d^2 / 2$  est constant et n'interviendra pas dans les équations. La masse du balourd étant négligeable par rapport à la masse de rotor. L'expression de l'énergie cinétique peut être approximée par :

$$T_b \approx m_b \Omega d (u \cos \Omega t - w \sin \Omega t)$$

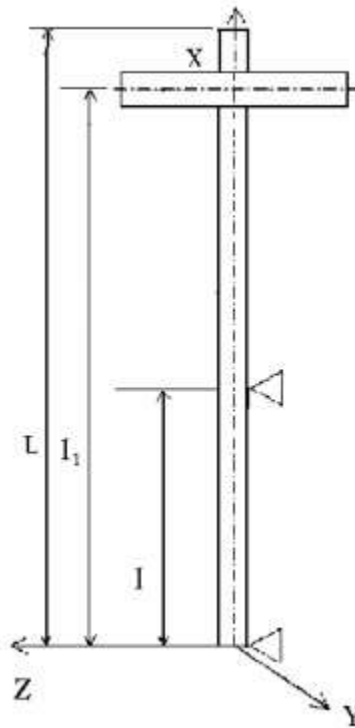
**(I.32)**

Les expressions de l'énergie cinétique, de déformation et le travail virtuel étant établies, la dissipation due à l'amortissement interne peut être développée via des modèles analytiques ou éléments finis.

# Chapitre I

## Modélisation des systèmes des rotors

### I.6. Exemple d'application



**Figure I.8 :** Schématisation du modèle simple du rotor

Les données numériques communes du cas étudié sont : Exemple : données :

**Disque :**

Rayon intérieur  $R_1 = 0.025$  m

Rayon extérieur  $R_2 = 0.15$  m

Épaisseur  $h = 0.03$  m

Masse volumique  $\rho = 7800$  kg // m<sup>3</sup>

$L_1 = 1$  m

La masse et les inerties du disque sont :

$$M_d = \pi(R_2^2 - R_1^2)h\rho = 16.07 \text{ kg}$$

$$I_{dx} = I_{d=} = \frac{M_d}{12}(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2) = 9.41 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{dy} = \frac{M_d}{12}(R_1^2 + R_1^2) = 0,1858 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Arbre :**

## Chapitre I

### Modélisation des systèmes des rotors

Langueur  $L = 1,2 \text{ m}$

Rayon de section droite  $R_1 = 0.025 \text{ m}$

Masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

$E = 200 \text{ GPa}$

L'aire de la section droite et le moment d'inertie sont :

$$S = \pi R_1^2 = 1.96 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi R_1^4}{4} = 3.066 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

**Balourd :**

Masse  $m_b = 10^{-4} \text{ kg}$

Distance  $d = 0.15 \text{ m}$

Les fonctions de déplacement sont celles du premier mode d'une poutre de section constante, en flexion et appuyée aux deux extrémités, soit :

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \sin \frac{\pi y}{1,2}$$

Les expressions générales de l'énergie cinétique  $T$ , de l'énergie de déformation  $U$  et du travail virtuel  $\delta W$  peuvent être obtenus. L'énergie cinétique a pour expression :

$$T = T_d + T_a + T_b$$

Où  $T_d, T_a, T_b$  sont les énergies cinétiques respectives du disque, de l'arbre, du balourd.

Tous calculs faits, on a :

$$T = 2.25(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 0.975\Omega\dot{q}_1q_2 + 7.5 \times 10^{-6}\Omega(\cos \Omega t\dot{q}_1 - \sin \Omega t\dot{q}_2) \quad (\text{I.33})$$

L'énergie de déformation à pour expression :

$$U_a = 17.28 \times 10^5 (q_1^2 + q_2^2) \quad (\text{I.34})$$

#### I.6.1. Modèle symétrique

L'application des équations de Lagrange en utilisant les expressions (I.33) et (I.34) conduit aux équations du mouvement :

$$\begin{aligned} 4.5\ddot{q}_1 - 0.975\Omega\dot{q}_2 + 3.456 \times 10^6 q_1 &= 0.75 \times 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \\ 4.5\ddot{q}_2 + 0.975\Omega\dot{q}_1 + 3.456 \times 10^6 q_2 &= 0.75 \times 10^{-5} \Omega^2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

Qui, sous forme générale s'écrivent :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= m_b d \Omega^2 f(l_1) \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= m_b d \Omega^2 f(l_1) \cos \Omega t \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

## Chapitre I Modélisation des systèmes des rotors

### I.6.2. Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation Diagramme de Campbell

Le rotor est tout d'abord étudié en mouvement libre. Seule la solution de système (I.38) sans second membre, est considérée :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{I.38})$$

La deuxième matrice, représente l'effet gyroscopique. Les deux autres matrices sont les matrices de masse et de raideur. Les solutions des équations sont de la forme :

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 \exp(rt) \\ q_2 = Q_2 \exp(rt) \end{cases} \quad (\text{I.39})$$

En remplaçant (I.41) dans (I.42), il vient :

$$\begin{bmatrix} k + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{I.40})$$

La solution simple  $Q_1 = Q_2 = 0$  est sans intérêt et les autres solutions sont celles qui correspondent à l'annulation du déterminant de la matrice. Le calcul du déterminant donne l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} (k + mr^2)^2 + a^2 \Omega^2 r^2 &= 0 \\ m^2 r^4 + (2km + a^2 \Omega^2) r^2 + k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

A l'arrêt ( $\Omega = 0$ ), les racines  $r_{10}$  et  $r_{20}$  de (I.42) sont :

$$r_{10}^2 = r_{20}^2 = j^2 \omega_{10}^2 = j^2 \omega_{20}^2 = -\frac{k}{m} \quad (\text{I.42})$$

Avec  $j^2 = -1$

Et les pulsations :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{I.43})$$

En rotation ( $\Omega \neq 0$ ), les racines de (I.40) sont  $r_1$  et  $r_2$  et les pulsations correspondantes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

Il vient :

$$r_1^2 = -\left[ \omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_1^2 \quad (\text{I.44})$$

Alors :

## Chapitre I

### Modélisation des systèmes des rotors

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}}\right)} \quad (\text{I.45})$$

Et :

$$r_2^2 = - \left[ \omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}}\right) \right] = j^2 \omega_2^2 \quad (\text{I.46})$$

Alors :

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}}\right)} \quad (\text{I.47})$$

A partir de (I.45) et (I.47) il est clair que :

$$\omega_1 < \omega_{10} = \omega_{20} < \omega_2$$

De plus, les équations (I.44) et (I.46) montrent que  $r_1^2$  et  $r_2^2$  sont des quantités négatives ; ainsi sont des quantités imaginaires et la solution générale du mouvement reste donc limitée dans le temps, le rotor est stable. La représentation de  $\omega$  en fonction de la vitesse de rotation,

$\omega_1 = \omega_1(\Omega)$  et  $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$  est le diagramme de Campbell. En général le diagramme de Campbell représente  $f_1$  et  $f_2$  :

$$f_1 = \omega_1 / 2\pi$$

$$f_2 = \omega_2 / 2\pi$$

En fonction de la vitesse de rotation  $N$  (tr/min) qui est reliée à  $\Omega$  (rad/s) par :

$$N = 30\Omega/\pi \quad (\text{I.48})$$

Ici  $\omega$  et  $\Omega$  sont des pulsations et  $f$  une fréquence. Dans ce qui suit les trois quantités sont simplement appelées fréquences. Compte tenu des symboles utilisés, il est facile de savoir de quelle unité il s'agit. Les formes modales (modes) sont examinées ensuite. La première équation de (I.40) donne :

$$Q_1 = \frac{a\Omega r Q_2}{k + mr^2} \quad (\text{I.49})$$

Il est clair que les modes sont complexes ( $r = \pm j\omega$ ) et leur interprétation délicate. Choisissons l'ensemble de conditions initiales suivant, à  $t_0 = 0$  :

$$\begin{cases} q_1 = q_{10} \\ q_2 = 0 \\ \dot{q}_1 = 0 \\ \dot{q}_2 = -\omega_2 q_{10} \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

Tous calculs faits, il vient :

## Chapitre I

### Modélisation des systèmes des rotors

$$\begin{aligned} q_1 &= -q_{10} \cos \omega_2 t \\ q_2 &= q_{10} \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

Les déplacements  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  d'un point situé à de l'origine de l'axe du rotor soit :

$$\begin{cases} u(l, t) = q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \cos \omega_2 t = R \cos \omega_2 t \\ u(l, t) = -q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \sin \omega_2 t = -R \sin \omega_2 t \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

Tel que :

$$R = \sqrt{u^2(l, t) + v^2(l, t)} = q_{20} \sin \frac{\pi l}{L} \quad (\text{I.53})$$

Pour notre cas le rotor est défini par les équations :

$$r^4 + (1.536 \times 10^6 + 4.69 \times 10^{-2} \Omega^2) r^2 + 5.898 \times 10^{11} = 0 \quad (\text{I.54})$$

Les fréquences à l'arrêt du rotor sont :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{7.68 \times 10^5 + 2.347 \times 10^{-2} \Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{6.544 \times 10^7}{\Omega^2}}\right)} \quad (\text{I.55})$$

$$f_2 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{7.68 \times 10^5 + 2.347 \times 10^{-2} \Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{6.544 \times 10^7}{\Omega^2}}\right)} \quad (\text{I.56})$$

Le diagramme de Campbell [ $f_1 = f_1(N)$ ,  $f_2 = f_2(N)$ ] est présenté sur (La Figure I.9) : et les intersections de  $f_1(N)$ ,  $f_2(N)$  avec deux droites sont indiquées. Les points **A** et **B** correspondent aux intersections avec la droite  $f = N/60$  ; à ces deux points une fréquence du rotor égale la fréquence de rotation. Les points **C** et **D** correspondent aux intersections avec la droite  $f = 0,5 N / 60$  ; ces deux points correspondent à une fréquence du rotor égale à la moitié de la fréquence de rotation. Il est intéressant d'avoir une expression générale des fréquences correspondant aux points **A**, **B**, **C**, **D**.

La relation entre  $\omega$  et  $\Omega$  est :

$$\omega = s\Omega \quad (\text{I.57})$$

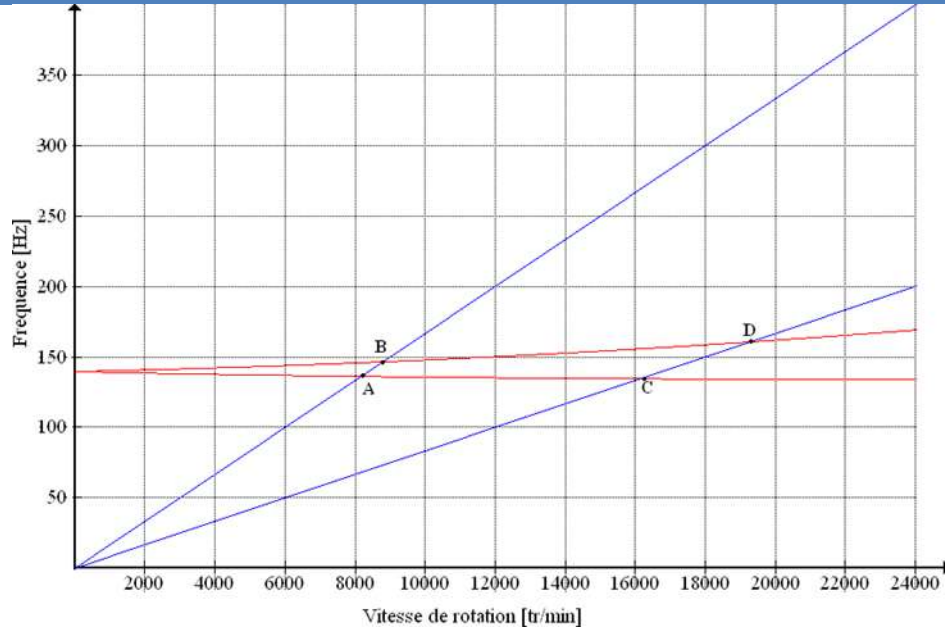
Où  $s = 1$  en A et B,  $s = 0,5$  en C et D, les expressions  $r_1^2 = j^2 \omega_1^2$  et  $r_2^2 = j^2 \omega_2^2$  permettent d'écrire :

$$\mathbf{r} = \pm j\omega = \pm js\Omega \quad (\text{I.58})$$

Substituent dans (I.41) on trouve :

$$\begin{aligned} s^4 m^2 \Omega^4 - (2km + a^2 \Omega^2) s^2 \Omega^2 + k^2 &= 0 \\ s^2 (s^2 m^2 - a^2) \Omega^4 - 2kms^2 \Omega^2 + k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.59})$$

## Chapitre I Modélisation des systèmes des rotors



**Figure I.9** : Diagramme de Campbell pour modèle simple

Les solutions de (I.59) sont :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (\text{I.60})$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (\text{I.61})$$

Et à partir de (I.57) on tire le fréquence  $\omega_1$  qui correspond aux points A( $s=1$ ) et C( $s=0,5$ )

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (\text{I.62})$$

Et de (I.57)  $\omega_2$  qui correspond aux points B( $s=1$ ) et D( $s=0,5$ )

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (\text{I.63})$$

Pour l'application :

- en A:  $f_1 = 135,5\text{Hz}$ ;  $N = 8190\text{tr/min}$
- en B:  $f_2 = 146,5\text{Hz}$ ;  $N = 8795\text{tr/min}$
- en C:  $f_1 = 134,7\text{Hz}$ ;  $N = 16170\text{tr/min}$
- en D:  $f_2 = 160,5\text{Hz}$ ;  $N = 19260\text{tr/min}$

## Chapitre I

### Modélisation des systèmes des rotors

#### I.6.3. Réponse aux forces d'excitation

Il s'agit ici de réponses en régime permanent. Seule la solution particulière des équations complètes (I.36) est considérée.

##### I.6.3.a. Balourd

Les équations avec  $m^* = m_b f(l_1)$  deviennent :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= m^*d\Omega^2 \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= m^*d\Omega^2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

Et comme il n'y a pas d'amortissement, les solutions peuvent être cherchées sous la forme :

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \sin \Omega t \\ q_2 &= Q_2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (\text{I.65})$$

Remplaçant (I.64) dans (I.63) :

$$\begin{aligned} -m\Omega^2 Q_1 + a\Omega^2 Q_2 + kQ_1 &= m^*d\Omega^2 \\ -m\Omega^2 Q_2 + a\Omega^2 Q_1 + kQ_2 &= m^*d\Omega^2 \end{aligned} \quad (\text{I.66})$$

$$\text{On trouve } Q_1 = Q_2 = \frac{m^* \cdot d\Omega^2}{k + (a-m)\Omega^2} \quad (\text{I.67})$$

La vitesse critique  $\Omega_c$ , correspond à la valeur de la vitesse qui rend les déplacements infinis et l'annulation du dénominateur de (I.67) entraîne :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m-a}} \quad (\text{I.68})$$

Ce résultat montre une seule vitesse critique, elle correspond à la valeur de  $\Omega$  donnée en (I.63), quand  $s = 1$ . La valeur correspondante est celle du point **B** de (la figure I.9) Pour le rotor défini par les équations (I.35)

Pour le rotor défini par les équations (I.35)

$$Q_1 = Q_2 = \frac{0.75 \times 10^{-3} \Omega^2}{3.456 \times 10^6 - 3.525 \Omega^2} \quad (\text{I.69})$$

et la vitesse critique correspond à  $\Omega_c / 2\pi = 157,5 \text{ Hz}$  ; soit  $N = 9453 \text{ tr/min}$ .

Il faut remarquer que lorsque  $\Omega$  croît, la valeur limite du déplacement est :

$$|Q_1| = |Q_2| = \left| \frac{m^* d}{a-m} \right| \quad (\text{I.70})$$

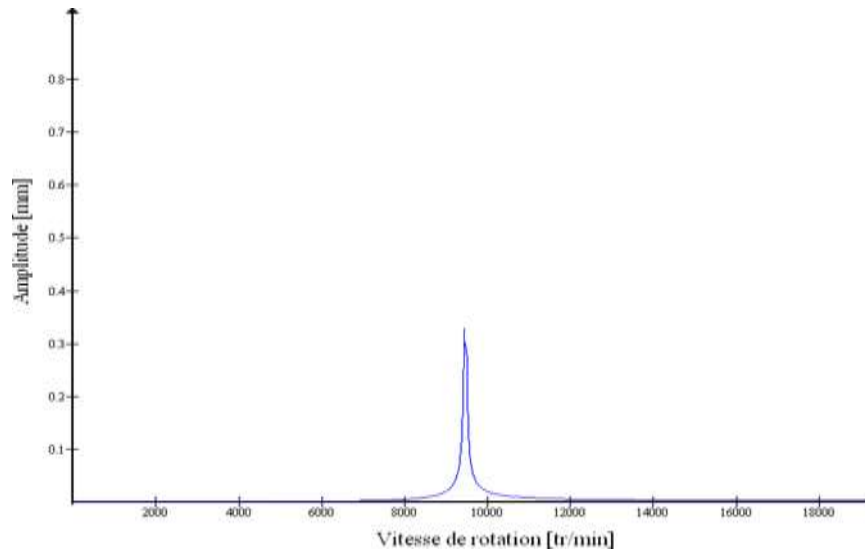
Pour notre cas :

$$|Q_1| = |Q_2| = 2,127 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (\text{I.71})$$

L'amplitude de la réponse  $Q_1$  est représentée sur (la figure I.10).

# Chapitre I

## Modélisation des systèmes des rotors



**Figure I.10 : Réponse à un balourd**

Amplitude :  $A_{max} = 0.35 \times 10^{-3} \text{ m}$  , vitesse de rotation :  $N = 9453 \text{ tr/min}$

### I.6.3.b. Force asynchrone

En fonctionnement le rotor peut être excité par des forces asynchrones. Une force asynchrone est une force d'amplitude constante  $F_0$  tournant à une vitesse ( $s \Omega$ ) différente de celle du rotor. Si cette force est en  $l_3$  il vient :

$$\begin{aligned} F_{g1} &= F_0 f(l_3) \sin s\Omega t = F \sin s\Omega t \\ F_{\theta^2} &= F_0 f(l_2) \cos s\Omega t = F \cos s\Omega t \end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

Les équations à résoudre :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= F \sin s\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= F \cos s\Omega t \end{aligned} \quad (\text{I.73})$$

Et comme il n'y a pas d'amortissement, les solutions peuvent être cherchées sous la forme :

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \sin s\Omega t \\ q_2 &= Q_2 \cos s\Omega t \end{aligned} \quad (\text{I.74})$$

D'où :

$$Q_1 = Q_2 = \frac{F}{k + (as - ms^2)\Omega^2} \quad (\text{I.75})$$

La vitesse critique  $\Omega_c$ , correspond à l'annulation du dénominateur de

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{s(ms-a)}} \quad (\text{I.76})$$

Le résultat montre une seule vitesse critique, elle correspond à la valeur de  $\Omega_2$  donnée en (I.60).

La valeur correspondante est celle du point **D** de (la figure I.11).

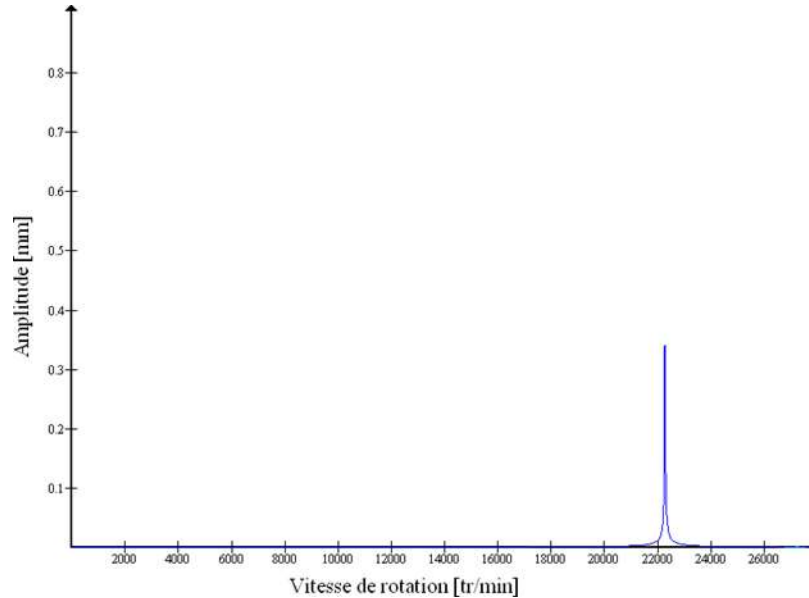
## Chapitre I Modélisation des systèmes des rotors

Pour le rotor défini par (I.35).

$$Q_1 = Q_2 = \frac{F}{3.456 \times 10^6 - 0.637 \Omega^2} \quad (\text{I.78})$$

Et la vitesse correspond à  $\Omega c / 2\pi = 370.8 \text{ Hz}$  ; soit  $N = 22\ 250 \text{ tr/min}$ . L'amplitude de la réponse

$Q_1$  est représentée sur la figure I.12 avec  $F = 1 \text{ N}$ .



**Figure I.11:** Réponse à une force asynchrone

Amplitude :  $A_{max} = 0.34 \times 10^{-3} \text{ m}$ , Vitesse de rotation :  $N = 22250 \text{ tr/min}$

### Conclusion

Les équations de mouvement de rotor ont été bien développées dans ce chapitre. A partir d'un développement analytique des équations de mouvement régies un système déformable quelconque en rotation, on focalise notre étude sur un rotor simple en déterminant leurs énergies cinétiques et énergie de déformation. Les équations de **Lagrange** sont bien adaptées pour trouver les équations de mouvements.



**CHAPITRE II :**  
**MODÉLISATION PAR**  
**ÉLÉMENTS FINIS**



## Chapitre II

### Modélisation par éléments finis

#### Introduction

Connue depuis les années 1950, la méthode des éléments finis a vu son apparition pour le calcul de contraintes et n'a cessé de se développer. Aujourd'hui, son champ d'application dépasse le cadre du génie mécanique. Désormais, elle est utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluides ou de transferts de chaleur, d'électromagnétisme ou d'hydrologie.

Elle est considérée comme une généralisation et amélioration de la méthode de **Rayleigh Ritz** qui permet de traiter facilement des systèmes d'équation complexes ou de hauts degrés causés par une complexité des formes géométrique et de la condition aux limites. Son principe est le même dans tous les cas de figures : dans un premier temps la structure étudiée est maillée c'est à dire divisée en petits éléments de géométries simples, puis dans un second temps un ou plusieurs champs (déplacement, contrainte, température, pression, ou autre) sont approchés localement, sur chaque élément du maillage, par des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation).

En dynamique des structures, l'utilisation des éléments finis permet de transformer les équations aux dérivées partielles modélisent le mouvement en des équations différentielles temporelles (on passe du cas continu au cas discret pour les variables spatiales).

## Chapitre II Modélisation par éléments finis

### II.1. Expressions des énergies des éléments du rotor

La méthode des éléments finis consiste à discrétiser la structure en éléments sur leur dimensions finis qui sont réunis en des points appelés points nodaux ou nœuds situés sur leur contour.

A partir d'hypothèses raisonnables sur le déplacement d'un point de l'élément, on calcule les énergies

Cinétiques, de déformation et de dissipation de l'élément en fonction des déplacements des nœuds.

Si la structure est composée de N éléments alors :

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (\text{II.1})$$

$$T = \sum_{i=0}^N T_i \quad (\text{II.2})$$

$$R = \sum_{i=0}^N R_i \quad (\text{II.3})$$

Où  $U_i$  est l'énergie de déformation ;  $T_i$  est l'énergie cinétique et  $R_i$  est la fonction de dissipation de l'élément  $i$ . Les forces généralisées sont déterminées en exprimant le travail virtuel des forces extérieures. Dans la dynamique des rotors  $R_i$  sont négligés quand les systèmes tournent à grandes vitesses.

#### II.1.1. Energie de déformation d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie de déformation d'un élément est donnée par :

$$U_i = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} d\tau \quad (\text{II.4})$$

Le vecteur de déplacement  $d$  d'un point de l'élément est relié au vecteur  $\delta$  regroupant tous les déplacements nodaux de l'élément par l'intermédiaire d'une matrice  $N$ , résultat de l'hypothèse sur les déplacements à l'intérieur de l'élément. Ceci donne une relation de la forme :

$$d = N(y)\delta \quad (\text{II.5})$$

Qui donne après dérivation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial d}{\partial y} = B(y)\delta \quad (\text{II.6})$$

C'est la relation qui relie les déformations aux déplacements nodaux.

La relation qui relie les contraintes et les déformations est :

$$\boldsymbol{\sigma} = D\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.7})$$

## Chapitre II

### Modélisation par éléments finis

Où  $\mathbf{D}$  est une matrice carrée symétrique dont les termes dépendent des caractéristiques mécaniques des matériaux, généralement le module de Young  $\mathbf{E}$  et le coefficient de poisson  $\nu$ . En substituant les équations (II.6) et (II.7) dans (II.4) on obtient l'équation :

$$U_i = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B}(\mathbf{y})\delta)^t \mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{y})\delta d\tau \quad (\text{II.8})$$

$$= \frac{1}{2} \delta^t \left[ \int \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\tau \right] \delta \quad (\text{II.9})$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$U_i = \frac{1}{2} \delta^t \mathbf{K} \delta \quad (\text{II.10})$$

Où

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\tau$$

C'est la matrice raideur de l'élément qui est symétrique car la matrice  $\mathbf{D}$  est symétrique ainsi que la matrice produit  $\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B}$

#### II. 1. 2. Energie cinétique d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie cinétique d'un élément est :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho V^2 d\tau \quad (\text{II.11})$$

Où

$\rho$ : est la masse volumique d'un élément d'arbre.

$V$  : est la vitesse d'un point de l'arbre obtenu par dérivation par rapport au temps du déplacement  $\mathbf{d}$  donné par (II.5), soit :

$$V = \mathbf{N}(\mathbf{y}) \frac{d\delta}{dt} = \mathbf{N}(\mathbf{y}) \dot{\delta} \quad (\text{II.12})$$

En substituant (II.12) dans (II.11) et en considérant que  $V^2 = (\mathbf{N}\dot{\delta})^t \mathbf{N}\dot{\delta}$  On aura :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (\mathbf{N}\dot{\delta})^t \mathbf{N}\dot{\delta} d\tau \quad (\text{II.13})$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\delta}^t \left[ \int \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\tau \right] \dot{\delta} \quad (\text{II.14})$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t \mathbf{m} \dot{\delta} \quad (\text{II.15})$$

Où

$$\mathbf{m} = \int \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\tau$$

## Chapitre II

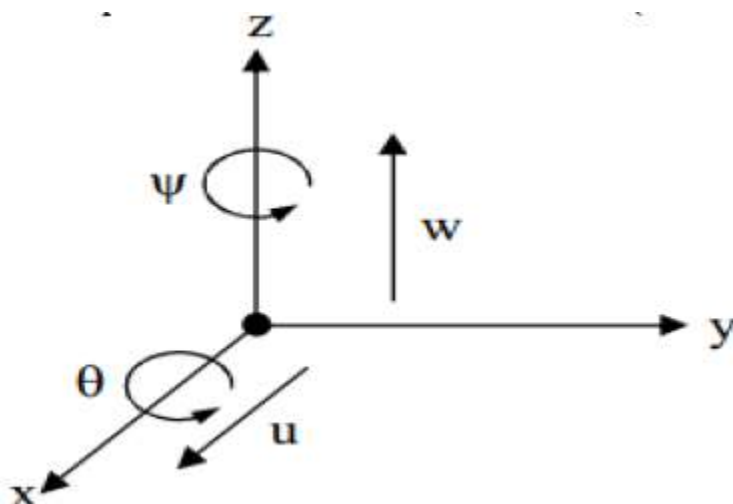
### Modélisation par éléments finis

C'est la matrice masse d'un élément d'arbre qui est aussi symétrique comme la matrice  $\mathbf{K}$ .

## II.2. Formulation matricielle

### II.2.1. Formulation matricielle des équations du disque

Le disque est modélisé par un nœud possédant quatre degrés de liberté ; deux translations  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  et deux rotations  $\theta$  et  $\Psi$  respectivement autour des axes  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$  (figure II.1).



**Figure II.1 :** Degrés de liberté du disque

Le vecteur des déplacements nodaux  $\delta$  s'écrit sous la forme :  $\delta = [\mathbf{u}, \mathbf{w}, \theta, \Psi]$  La matrice masse et la matrice gyroscopique sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange à l'expression

(II.10) soit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_i} \left[ \frac{1}{2} M_d (\dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\Omega\Psi\theta) \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left\{ \frac{1}{2} M_d (u^2 + w^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\theta^2 + \Psi^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\Omega\Psi\theta) \right\} \quad (\text{II.16})$$

Ou aura donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy'} \\ 0 & 0 & I_{dy'} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Avec :

## Chapitre II

### Modélisation par éléments finis

$$M_d = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I'_{dx} \end{bmatrix} \quad (I) \quad (I.18)$$

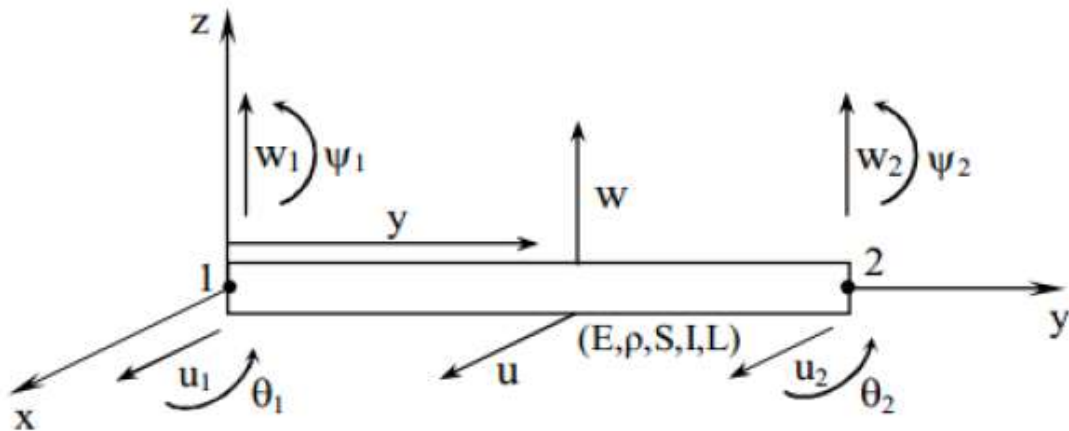
Et

$$G_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy'} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (II.19)$$

$M_d$  étant la matrice masse et  $G_d$  la matrice gyroscopique.

#### II.2.2. Formulation matricielle des équations de l'arbre

Les résultats présentés concernent le cas d'un élément arbre symétrique qui est modélisé par un élément poutre de section constante. L'élément fini utilisé à deux nœuds et quatre degrés de liberté (figure II.2).



**Figure II.2 :** Degrés de liberté d'un élément arbre

La fonction de déplacement  $w$  qui est normale à la poutre (arbre) est donnée par le polynôme d'interpolation du 3ième degré.

$$w = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 \quad (II.20)$$

L'inclinaison ou la autour de  $z$  est donnée par la dérivée de la fonction de déplacement  $w$ .

$$\theta = \frac{\partial w(y)}{\partial y} = a_2 + 2a_3 y + 3a_4 y^2 \quad (II.21)$$

## Chapitre II

### Modélisation par éléments finis

Les constantes  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  sont déterminées en appliquant les conditions aux limites sur les polynômes (II.20) et (II.21).

Pour  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  (nœud 1) on a  $\begin{cases} \mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{a}_2 \end{cases}$

ystème (a)

Pour  $\mathbf{y} = \mathbf{L}$  (nœud 2) on

$$a \begin{cases} \mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 L + \mathbf{a}_3 L^2 + \mathbf{a}_4 L^3 \\ \boldsymbol{\theta}_2 = \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 L + 3\mathbf{a}_4 L^2 \end{cases} \quad \text{système (b)}$$

Après avoir résolu le système (b) et en remplaçant les constantes  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  par leurs valeurs on trouve :

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\theta}_1$$

$$\mathbf{a}_3 = 3 \frac{\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1}{L^2} - \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + 2\boldsymbol{\theta}_1}{L}$$

$$\mathbf{a}_4 = -2 \frac{\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1}{L^3} + \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2}{L^2}$$

On remplace les valeurs des constants  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  dans  $\mathbf{w}$  pour avoir :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(y) = & \left(1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}\right) \mathbf{w}_1 + \left(y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \boldsymbol{\theta}_1 + \left(\frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}\right) \mathbf{w}_2 \\ & + \left(-\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \boldsymbol{\theta}_2 \end{aligned} \quad \text{(II.22)}$$

Ou bien :

$$\mathbf{w}(y) = \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{\varphi}_i(y) \boldsymbol{\delta}_i \quad \text{(II.23)}$$

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\boldsymbol{\delta} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\Psi}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\Psi}_2]^t \quad \text{(II.24)}$$

Qui est à son tour séparé en deux vecteurs de déplacements dont chacun correspond à une direction :

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{u} = [\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\Psi}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\Psi}_2]^t \quad \text{(II.25)}$$

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{w} = [\mathbf{w}_1, \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{w}_2, \boldsymbol{\theta}_2]^t \quad \text{(II.26)}$$

Les déplacements sont exprimés à partir des expressions suivantes :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_1(y) \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \quad \text{(II.27)}$$

Et

## Chapitre II

### Modélisation par éléments finis

$$\mathbf{w} = N_2(\mathbf{y}) \delta \mathbf{w} \quad (\text{II.28})$$

Où

$N_1$  et  $N_2$ : sont les vecteurs des fonctions de forme classique d'un élément de poutre en flexion.

$$N_1(\mathbf{y}) = \left[ \mathbf{1} - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -\mathbf{y} + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (\text{II.29})$$

$$N_2(\mathbf{y}) = \left[ \mathbf{1} - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \mathbf{y} - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (\text{II.30})$$

Où  $N_1(\mathbf{y})$  et  $N_2(\mathbf{y})$  sont obtenues en posant  $\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{y} + \mathbf{a}_3 \mathbf{y}^2 + \mathbf{a}_4 \mathbf{y}^3$

Avec la rotation autour de  $\mathbf{x}$  donnée par  $\Psi = -\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial y}$ .

Les relations exprimant donc les déplacements et les pentes sont :

$$\boldsymbol{\theta} = \partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{y} \quad (\text{II.31})$$

$$\Psi = -\partial u / \partial \mathbf{y} \quad (\text{II.32})$$

Le nombre total de degrés de liberté pour chaque nœud est de quatre ; les matrices élémentaires de l'arbre sont donc de taille  $8 \times 8$  qui obtenues en remplaçons  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\Psi$  par leurs expressions dans les énergies cinétique et de déformation de l'arbre.

#### a) L'énergie cinétique

L'utilisation de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre (III.15) pour un élément conduit à :

$$T_a = \frac{\rho s}{2} \int_0^L \left[ \delta \mathbf{u}^t N_1^t N_1 \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{w}^t N_2^t N_2 \delta \mathbf{w} \right] dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[ \delta \mathbf{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \mathbf{w} \right] dy + \rho I L \Omega^2 - 2 \rho I \Omega \int_0^L \delta \mathbf{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \mathbf{w} dy \quad (\text{II.33})$$

En substituant (II.27) et (II.28) ainsi que leurs dérivées dans (II.33) on aura la forme compacte suivante :

$$T_a = \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{w}^t \mathbf{M}_2 \delta \mathbf{w} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{M}_3 \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{w}^t \mathbf{M}_4 \delta \mathbf{w} + \delta \mathbf{u}^t \mathbf{M}_5 \delta \mathbf{w} + \rho I L \Omega^2 \quad (\text{II.34})$$

Les matrices obtenues sont de l'ordre  $4 \times 4$ .  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  sont les matrices classiques de masse,  $\mathbf{M}_3$  et  $\mathbf{M}_4$  représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre et la matrice  $\mathbf{M}_5$  représente l'effet gyroscopique. Le terme qui est une constante à une

contribution nulle de l'application des équations de **Lagrange**. L'expression (II.34) se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_a}{\partial \dot{\boldsymbol{\delta}}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \boldsymbol{\delta}} = (\mathbf{M}_c + \mathbf{M}_g) \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{G} \boldsymbol{\delta} \quad (\text{II.35})$$

## Chapitre II

### Modélisation par éléments finis

Où  $\mathbf{M}_c$  et  $\mathbf{M}_g$  sont déduites respectivement de  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{M}_3$ , et  $\mathbf{M}_4$  et  $\mathbf{G}$  est déduite de  $\mathbf{M}_5$ , Les matrices sont donc les suivantes :

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & -22L \\ 13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

$$\mathbf{M}_3 = \frac{\rho l}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

$$\mathbf{M}_4 = \frac{\rho l}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

$$\mathbf{M}_5 = \frac{\rho l \Omega}{15L} \begin{bmatrix} -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

Rassemblons les matrices qui ont les mêmes propriétés  $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$  et  $\mathbf{M}_g = \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4$

d'où :

$$\mathbf{M}_c = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 & 0 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

$$\mathbf{M}_g = \frac{\rho l}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

## Chapitre II

### Modélisation par éléments finis

Et

$$G = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

#### b) L'énergie de déformation

L'application des expressions (II.29) et (II.30) sur l'équation de l'énergie de déformation donnée par la formule (II.10) donne :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \delta u^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^1} \delta u + \delta w^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \frac{dy^2}{\delta} w \right] dy \quad (\text{II.44})$$

Où

$$U_a = \frac{EI}{2} \left[ \delta u^t \left( \int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} dy \right) \delta u + \delta w^t \left( \int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy \right) \delta w \right] \quad (\text{II.45})$$

Qui peut s'écrire sous la forme réduite :

$$U_a = \frac{1}{2} \delta u^t K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t K_2 \delta w \quad (\text{II.46})$$

Où

$$K_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

$$K_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

$K_1$  et  $K_2$  sont les matrices classiques de raideur.

La matrice global  $K$  est :

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \Psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

## Chapitre II

### Modélisation par éléments finis

Dans le cas où nous tiendrons compte de l'effet de cisaillement notre matrice prend la forme suivante :

$$K = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

La quantité caractérisant le cisaillement est  $a = \frac{12EI}{GS_r L^2}$ , où  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  est le module de cisaillement et  $\nu$  est le coefficient de poisson et  $S_r \approx S$  (section réduite).

#### II.2.3. Formulation matricielle des équations du palier

En général, l'influence des pentes des moments est négligée pour les paliers on ne tient compte que des forces généralisées  $F_u$  et  $F_w$  qui sont liées aux déplacements  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$ . En tenant compte de (3.1.30) on a :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\psi \\ F_w \\ F_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & K_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zx} & 0 & K_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Psi \\ \mathbf{w} \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

La première matrice est une matrice de raideur et la seconde est une matrice d'amortissement. Ces matrices sont en général asymétriques et peuvent varier de manière significative en fonction de vitesse de rotation.

#### III.2.4. Formulation matricielle des équations du balourd

L'application des équations de Lagrange sur l'équation de l'énergie cinétique d'un balourd donne :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_b}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_b}{\partial \delta} = -m_b d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

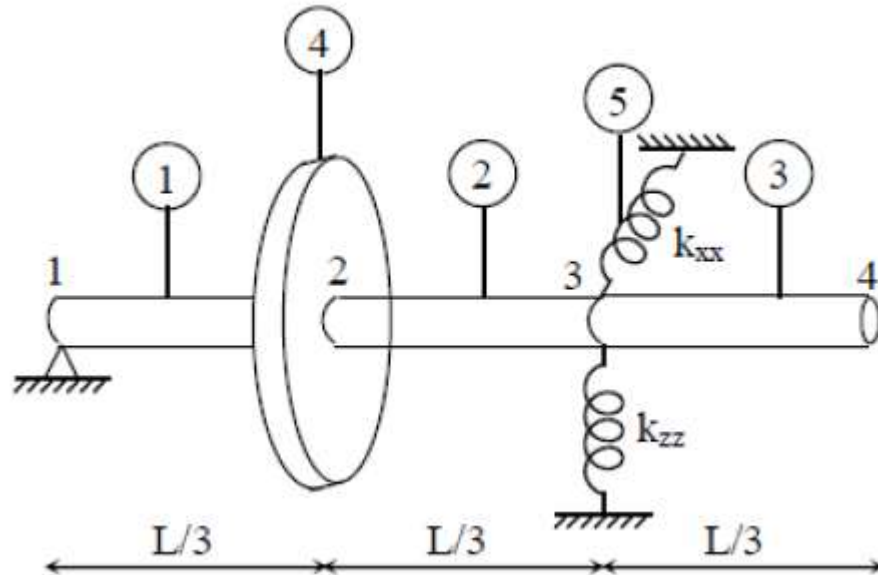
Avec  $\delta = [\mathbf{u} \quad \mathbf{w}]^t$ .

### II.3. Exemple de Montage de Matrices Globales

Considérons le modèle de rotor étudié qui est schématisé sur la **figure III.3** ayant quatre noeuds et cinq éléments : un élément disque, un élément palier et trois éléments arbre de même longueur

## Chapitre II Modélisation par éléments finis

$$l = l_1 = l_2 = l_3 = L/3 .$$



**Figure II.3 :** Modèle de rotor avec éléments et noeuds. [5]

Dans le modèle au-dessus, les noeuds de chaque élément de l'arbre, du palier ou du disque sont en rapport avec les noeuds du rotor d'après la table ci-dessous :

Nombre d'élément	Type d'élément	Noeuds du rotor	Vecteur de déplacements $\delta$
1	Arbre	1-2	$u_1, w_1, \theta_1, \Psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2$
2	Arbre	2-3	$u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2, u_3, w_3, \theta_3, \Psi_3$
3	Arbre	3-4	$u_3, w_3, \theta_3, \Psi_3, u_4, w_4, \theta_4, \Psi_4$
4	Disque	2	$u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2$
5	Palier	3	$u_3, w_3$

## Chapitre II

### Modélisation par éléments finis

Les matrices globales de masse, de rigidité et de Coriolis sont obtenues en superposant les matrices élémentaires selon le tableau. Chaque type de matrice globale est obtenu en sommant les trios matrices des trois éléments.

#### a) Matrice globale classique de masse

$M_{ct} =$

$$\frac{\rho l}{420} \begin{bmatrix}
 156 & 0 & 0 & -221 & 54 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 156 & 221 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 221 & 41^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -221 & 0 & 0 & 41^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 54 & 0 & 0 & -131 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -131 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 131 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -131 & 156 & 0 & 221 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 156 & -221 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & -221 & 41^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & -31^2 & 221 & 0 & 41^2
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 u_1 \\
 w_1 \\
 \theta_1 \\
 \Psi_1 \\
 u_2 \\
 w_2 \\
 \theta_2 \\
 \Psi_2 \\
 u_3 \\
 w_3 \\
 \theta_3 \\
 \Psi_3 \\
 u_4 \\
 w_4 \\
 \theta_4 \\
 \Psi_4
 \end{matrix}$$

$l_1 = l_2 = l_3 = l = L/3 = 0,13333 \text{ m}$

#### b) Matrice globale représentant l'effet gyroscopique

$M_{gt}$

$$= \frac{\rho l}{301} \begin{bmatrix}
 36 & 0 & 0 & -36 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 36 & 31 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 31 & 41^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -31 & 0 & 0 & 41^2 & 361 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 31 & 0 & 0 & -1^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 36 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 36 & -31 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & -31 & 41^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -1^2 & 31 & 0 & 0 & 41^2
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 u_1 \\
 w_1 \\
 \theta_1 \\
 \Psi_1 \\
 u_2 \\
 w_2 \\
 \theta_2 \\
 \Psi_2 \\
 u_3 \\
 w_3 \\
 \theta_3 \\
 \Psi_3 \\
 u_4 \\
 w_4 \\
 \theta_4 \\
 \Psi_4
 \end{matrix}$$



## Chapitre II

### Modélisation par éléments finis

$$K_{xx} = \frac{10^5 N}{m}$$

$$K_{zz} = 5 \cdot 10^5 N/m$$

f) Matrice du balourd

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = 1,5 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix}$$

Où


$$mb. d=1,5 \cdot 10^{-5} Kg. m$$

g) Matrice globale du disque (masse et gyroscopique)

$$M_d = \begin{bmatrix} 16, & 47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16,47 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 9,247 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,247 \cdot 10^{-2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\Psi}_2 \end{Bmatrix}$$

$$+ \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1861 \\ 0 & 0 & 0,1861 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\Psi}_2 \end{Bmatrix}$$

Avec  $Md=16,47Kg$   $Idx=9,247 \cdot 10^{-2}Kg. m^2$  et  $Idy=0,1861Kg$



**CHAPITRE III :**  
**SIMULATION NUMÉRIQUE**  
**DU COMPORTEMENT**  
**DYNAMIQUE D'UN ROTOR**  
**PAR ÉLÉMENTS FINI**  
**(ANSYS)**

# **Chapitre III**

## **simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)**

### **Introduction**

La simulation numérique a connu depuis longtemps, l'une des utiles les plus importants pour le calcul en dynamique des structures et vibration, notamment après le progrès et le développement des machines de calcul et informatique. Dans notre jour, il existe plusieurs logiciels permettant de calculer et simuler en dynamique des structures tel que, Matlab/ Femlab, Astran, Abaqus, cosmos et Ansys ...

Pour mener notre étude par une simulation numérique, on utilise le code de calcul numérique ANSYS, qui est l'un des codes les plus efficaces dont l'analyse est basée sur la méthode des éléments finis.

Le code de calcul ANSYS comprend plusieurs composantes telles que : ANSYS/Professionnel, ANSYS/Mechanical, ANSYS/Structural, ANSYS /Dynamical, ANSYS/Multiphysics...etc.

Chaque composante est destinée à l'un des domaines d'ingénierie, et son choix met automatiquement à la disposition de l'utilisateur et les processus adéquats (type d'élément, conditions aux limites, tracés). Dans notre analyse, on utilise le module analyse dynamique dans ANSYS/Structural, qui permet de traiter la majorité des problèmes de la dynamique des structures et vibration. L'analyse dynamique peut se présenter comme étant une technique utilisée pour déterminer le comportement dynamique d'une structure ou d'un composant, quand l'inertie de la structure (effet de la masse) et son amortissement jouent un rôle important.

Ce chapitre sera réservé pour présenter la description du ventilateur de tirage, son principe de fonctionnement et à la fin la conception et l'analyse vibratoire du rotor à roue centrifuge radial (cas rotor sain et cas d'usure des ailettes) par éléments finis.

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

### III.1. Description du ventilateur de tirage

Le rotor a roue centrifuge radial (**figureIII.1 et figureIII.2**) est constitué de la roue à aubes (11) avec moyeu d'assemblage (13), arbre (15), turbine de refroidissement (16), paliers (18) et (06) et enveloppe (17) à flasque avant (03), flasque arrière (05) et pavillon d'aspiration (02).

La roue à aubes (11) est conçue comme roue fermée constituée d'un moyeu coulé (13) auquel la roue elle-même est boulonnée.

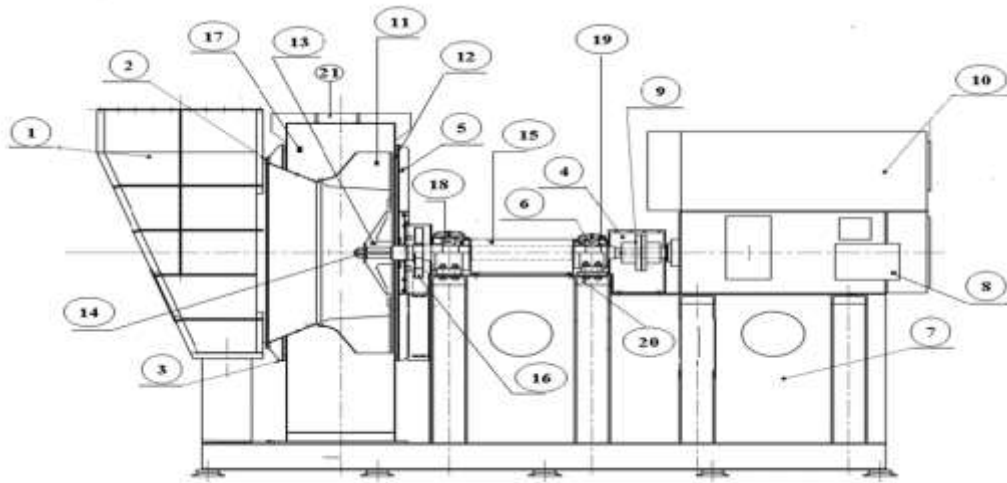
L'ajustement entre arbre et moyeu (13) est un ajustement glissant, h/H. La roue à aubes a subi un équilibrage dynamique.

L'arbre est construit en acier d'arbre. Les paliers (18) et (06) sont à roulements à rouleaux à butée sphérique Désignation de base 22332 à voile C3 pour le palier (18) et 22328 à voile C3 pour le palier (06). Ils sont frettés sur l'arbre. L'un d'eux, conçu comme palier de guidage, est monté près du moteur. L'autre est mobile dans son corps.

Tous ces deux paliers sont montés dans des corps de paliers FLS coulés (19), montés sur le tabouret (20). Une turbine de refroidissement (16) est montée sur l'arbre à proximité de l'enveloppe vu que Les rotors doivent travailler à des températures supérieures à 125°C. L'enveloppe du ventilateur est constituée de la carcasse elle-même (17), flasque avant (03), flasque arrière (05) et pavillon d'aspiration (02). L'enveloppe du ventilateur étanchée par corde de bourrage (12), est dotée d'une trappe de visite (21). La flasque avant est boulonnée à l'enveloppe.

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)



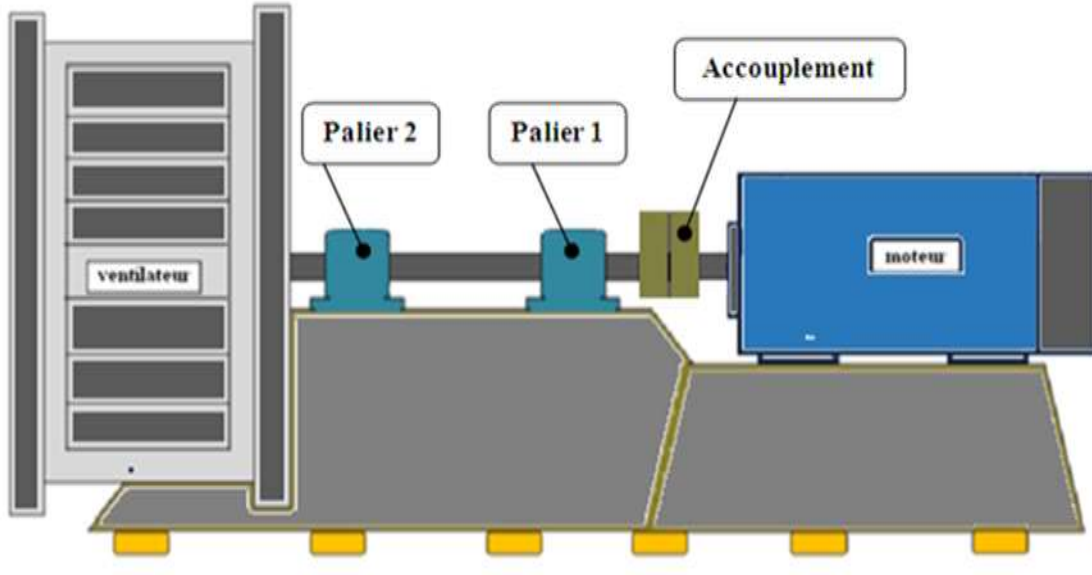
**Figure III.1 :** Dessin d'ensemble du rotor [6]

- 1-Enveloppe et ouïe de refoulement
- 2-Pavillon d'aspiration
- 3-Flasque avant
- 4-Carter d'accouplement
- 5-Flasque arrière
- 6-Palier à roulement (22328/C3)
- 7-Support moteur
- 8-Moteur
- 9-Accouplement flexible
- 10-Protecteur moteur
- 11-Roue à aubes
- 12-Corde de bourrage
- 13-Moyeu
- 14-Ecrou
- 15-Arbre
- 16-Tabouret de palier
- 17-Corps de palier
- 18-Palier à roulement (22332/C3)

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

19-Trappe de visite



**Figure III.2:** Diagramme du ventilateur de ciment [6]

### III.1.1. Caractéristique technique de rotor

Le ventilateur comprend essentiellement :

- Un moteur d'entraînement ABB
- Un accouplement flexible
- Une turbine à aubes montées sur un arbre avec 2 paliers **SKF**, munis de roulements à rotule sur rouleaux coniques.

Les données techniques de rotor et de Moteur sont données dans **Tableau (1et 2)**

Type	MTSS 224/224	
Nbre de pales	16	
Température	84 C°	
Vitesse	985 tr/mn	
Roulements	Palier1	22328/C3
	Palier2	22332/C3

**Tableau III.1 :** Les données techniques de Ventilateur

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

Marque	ABB	
Puissance	500 kW	
Tension	11000 V	
Poids	53 Kg	
Intensité	33 A	
Vitesse	995 tr/mn	
Roulements	DE	6324/C3
	NDE	6326/C3

**Tableau III.2** : Les Données techniques de Moteur

### III.1.2. Principe de Fonctionnement

Déplacer l'air d'un emplacement à un autre en créant une pression différentielle qui crée un courant d'air.

- Le moteur de commande entraîne le rotor du Ventilateur
- Le ventilateur renvoie l'air vers l'extérieur grâce à la force centrifuge
- Cela crée une pression statique négative ( $P_s$ ) à l'entrée du ventilateur
- La pression atmosphérique ( $P_a$ ) force l'air dans l'entrée
- L'air qui quitte le ventilateur a une pression positive.
- La Pression totale = Pression dynamique + Pression Statique ( $P_t = P_s + P_d$ )

### III.2. La conception du rotor a roue centrifuge radial par l'logiciel

#### SOLIDWORKS 2016

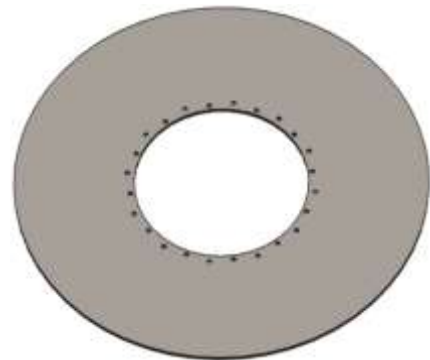
Les figures ci-dessous présentent la conception des pièces et leur assemblage du rotor en utilisant **SolidWorks**

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)



**Figure III.3:** Conception de l'arbre



**Figure III.4 :** Conception de Flasque arrière



**Figure III.5 :** Conception de moyeu



**Figure III.6:** Conception de l'ailette



**Figure III.7 :** Conception d'écrou



**Figure III.8 :** Conception de Vis



**Figure III.9:** Conception écrou arbre

### Chapitre III

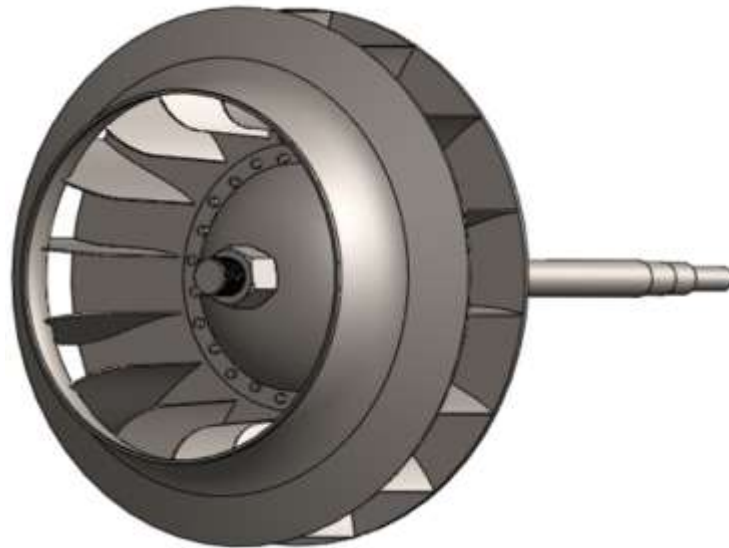
## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)



**Figure III.10 :** Assemblage des éléments de la roue



**Figure III.11:** Conception de Flasque avant



**Figure III.12:** Assemblage des éléments du ventilateur

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

### III.3. Modélisation des rotors par élément finis

La mise en équations d'un système de solides, reliés par des éléments flexibles (de raideurs connues) et des amortisseurs (de constantes données) fournit une modélisation exacte du système. La modélisation en système continu (masse et rigidité réparties sur tout l'élément) fournit des résultats analytiques en s'appuyant sur la mécanique des milieux continus. Ses formulations sont générales mais limitent à des cas élémentaires. Les vibrations d'une structure plus complexe, admettant un nombre élevé de degrés de liberté (ddl), nécessitent une méthode générale, modulable et programmable.

La méthode des éléments finis (MEF) décompose une structure en éléments simples élémentaires, de type poutre, plaque, rotor... Le comportement vibratoire de l'élément est ramené à celui des nœuds. Ensuite on connecte les différents éléments (maillage) en respectant les conditions de continuité.

On peut alors extraire les matrices de masse et de raideur de la structure complète et déduire les pulsations propres du système non amorti et ses modes normaux. Cet outil de simulation de systèmes mécaniques permet de mieux comprendre le comportement d'un rotor.

L'effet gyroscopique doit être pris en compte et des méthodes de résolution spécifiques peuvent être avantageusement employées.

#### III.3.1. Eléments finis de rotor

Il est nécessaire de définir les éléments finis permettant de modéliser les rotors : disque, arbres, paliers, et de représenter les forces extérieures, en particulier celles dues aux balourds.

##### III.3.1.1. Disque

On applique les équations de Lagrange sur l'expression (II.16) de l'énergie cinétique de disque on trouve les différents matrices et vecteur de disque (matrice de masse, matrice d'amortissement, matrice de raideur et vecteur force).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = [M_d] \{\dot{\delta}\} [C_d] \{\delta\} + [K^*_d] \{\delta\}$$

Avec  $[M_d]$  et  $[C_d]$  respectivement son le matrice de masse et la matrice l'effet gyroscopique qu'ont pour expression

## Chapitre III

### simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \begin{bmatrix} 1034.16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1034.16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 415.41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 415.41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -415.42 \\ 0 & 0 & 415.42 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

#### III.3.1.2. Arbre

##### a- L'énergie cinétique :

Les matrices obtenues sont de l'ordre  $4 \times 4$ .  $M_1$  et  $M_2$  sont les matrices classiques de masse,  $M_3$  et  $M_4$  représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre et la matrice  $M_5$  représente l'effet gyroscopique. Le terme qui est une constante à une contribution nulle de l'application des équations de Lagrange. L'expression (II.34) se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = (M_c + M_g) \ddot{\delta} + G \dot{\delta}$$

Où  $M_c$  et  $M_g$  sont déduites respectivement de  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , et  $M_4$  et  $G$  est déduite de  $M_5$ . Les matrices sont donc les suivantes :

$$G = \frac{\rho I \Omega}{38.77} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -7.75 & 0 & 0 & 36 & -7.75 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -7.75 & -36 & 0 & 0 & -7.75 \\ 7.75 & 0 & 0 & -26.72 & -7.75 & 0 & 0 & 6.68 \\ 0 & 7.75 & 26.72 & 0 & 0 & -7.75 & -6.68 & 0 \\ 0 & 36 & 7.75 & 0 & 0 & -36 & 7.75 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -7.75 & 36 & 0 & 0 & 7.75 \\ 7.75 & 0 & 0 & 6.68 & -7.75 & 0 & 0 & -26.72 \\ 0 & 7.75 & -6.68 & 0 & 0 & -7.75 & 26.72 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_c = 0.096 \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -56.87 & 54 & 0 & 0 & 33.60 \\ 0 & 156 & 56.87 & 0 & 0 & 54 & -33.60 & 0 \\ 0 & 56.87 & 26.72 & 0 & 0 & 33.60 & -20.046 & 0 \\ -56.87 & 0 & 0 & 26.72 & -33.60 & 0 & 0 & -20.04 \\ 54 & 0 & 0 & -33.605 & 156 & 0 & 0 & 56.87 \\ 0 & 54 & 33.60 & 0 & 0 & 156 & -56.87 & 0 \\ 0 & -33.60 & -20.04 & 0 & 0 & -56.87 & 26.72 & 0 \\ 33.60 & 0 & 0 & -20.04 & 56.87 & 0 & 0 & 26.72 \end{bmatrix}$$

## Chapitre III

### simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

$$M_g = \frac{\rho I}{77.55} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -7.75 & -36 & 0 & 0 & -7.75 \\ 0 & 36 & 7.75 & 0 & 0 & -36 & 7.75 & 0 \\ 0 & 7.75 & 26.72 & 0 & 0 & -7.75 & -26.72 & 0 \\ -7.75 & 0 & 0 & 26.72 & 7.75 & 0 & 0 & -6.68 \\ -36 & 0 & 0 & 7.75 & 36 & 0 & 0 & 7.75 \\ 0 & -36 & -7.75 & 0 & 0 & 36 & -7.75 & 0 \\ 0 & 7.75 & 6.68 & 0 & 0 & -7.75 & 26.72 & 0 \\ -7.75 & 0 & 0 & 6.68 & 7.75 & 0 & 0 & 26.72 \end{bmatrix}$$

#### b- L'énergie de déformation

L'application des expressions (II.29) et (II.31) sur l'équation de l'énergie de déformation donnée par la formule (II. 10) donne :

$$U_a = \frac{1}{2} \delta u^t K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t K_2 \delta w$$

Où  $K_1$  et  $K_2$  sont les matrices classiques de raideur. L'effet de cisaillement n'est pas pris en compte.

Déformation de celle-ci dans les paliers nous présentons par la suite une réflexion sur la résolution du système d'équation dynamique mis place.

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -15.51 & -12 & 0 & 0 & -15.51 \\ 0 & 12 & 15.51 & 0 & 0 & -12 & 15.51 & 0 \\ 0 & 15.51 & 26.72 & 0 & 0 & -15.51 & 13.36 & 0 \\ -15.51 & 0 & 0 & 26.72 & 15.51 & 0 & 0 & 13.36 \\ -12 & 0 & 0 & 15.51 & 12 & 0 & 0 & 15.51 \\ 0 & -12 & -15.51 & 0 & 0 & 12 & -15.51 & 0 \\ 0 & 15.51 & 13.36 & 0 & 0 & -15.51 & 26.72 & 0 \\ -15.51 & 0 & 0 & 13.36 & 15.51 & 0 & 0 & 26.72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \Psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$$

#### III.3.1.3. Paliers

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement relient les forces aux déplacements et vitesses.

L'influence des pentes et des moments est habituellement négligée et compte

$$\begin{Bmatrix} F_{u_1} \\ F_{\Psi_1} \\ F_{w_1} \\ F_{\theta_1} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3, 2 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1, 2 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \Psi \\ w \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3, 3 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1, 5 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\Psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

## Chapitre III

### simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

$$\begin{Bmatrix} F_{u_2} \\ F_{\psi_2} \\ F_{w_2} \\ F_{\theta_2} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3,69 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \psi \\ w \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2,6 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

#### III.3.2. Système d'équations

L'obtention du système d'équations se fera classiquement en appliquant les équations de Lagrange.

Le système d'équations générales est :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{Effort\}$$

Il convient de le réécrire en dissociant les équations en forces et en moments :

$$\begin{cases} [M_f]\{\ddot{q}\} + [C_f]\{\dot{q}\} + [K_f]\{q\} = \{F_{ext}\} \\ [M_M]\{\ddot{\theta}\} + [C_M]\{\dot{\theta}\} + [K_M]\{\theta\} = \{M_{ext}\} \end{cases}$$

Avec  $\{q\}$  le vecteur des inconnues en déplacement et  $\{\theta\}$  le vecteur des inconnues angulaires.

Les équations de mouvements pour un système en tenant compte l'effet de l'amortissement interne s'écrit :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + ([C] + [C_i])\{\dot{\delta}\} + ([K] + [K_i])\{\delta\} = \{Effort\}$$

La résolution des équations que nous venons de déterminer conduira donc à obtenir les Informations relatives au comportement dynamique du rotor, c'est -à-dire le mouvement et là

#### III.4. Analyse modale du rotor a roue centrifuge radial par logiciel Workbench ANSYS 15

Les études essentielles de la dynamique des rotors concernant le tracé du diagramme de Campbell qui représente l'évolution des fréquence propres en fonction de vitesse de rotation et le calcul des réponses à balourd principalement lors du passage des vitesse critiques. Pour réaliser de telles étude, on dispose aujourd'hui de nombreux outils de modélisation comme la méthode des élément finis. Dans ce qui suit on présente la simulation numérique du rotor a roue centrifuge radial par le code calcul ANSYS 15 Workbench.

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

### III.4.1. Caractéristique géométrique et mécanique de rotor

#### a- Propreté géométrique

- Pour l'arbre : longueur  $L_a = 2,585m$ , diamètre  $D_a = 0,16m$
- Pour le disque : diamètre extérieur  $D_{d_e} = 2,255m$ , diamètre intérieur  $D_{d_i} = 0,16m$

#### b- Propreté mécanique

- Pour l'arbre et disque : masse volumique  $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ , module de Yong  $E=2e11 \text{ Pa}$

Et de coefficient de poissant  $\nu=0.3$

- Pour paliers :

Pour palier1(Roulements 22328/C3) : raideur  $K_{yy} = 3.2 \times 10^7 \text{ N/m}$ ;  $K_{zz} = 1.2 \times 10^7 \text{ N/m}$  et d'amortissement visqueux  $C_{yy} = 3.3 \times 10^3 \text{ N.s/m}$ ;  $C_{zz} = 1.510^3 \text{ N.s/m}$

Pour palier 2 (Roulements 22332/C3) : raideur  $K_{yy} = 3.69 \times 10^7 \text{ N/m}$ ;  $K_{zz} = 1.4 \times 10^7 \text{ N/m}$  et d'amortissement visqueux  $C_{yy} = 2.6 \times 10^3 \text{ N.s/m}$ ;  $C_{zz} = 1.5 \times 10^3 \text{ N.s/m}$

### III.4.2. Génération et maillage de la géométrie de rotor

La génération de la géométrie du rotor dans le code de calcul ANSYS est obtenue par importation de la géométrie SolidWorks et son maillage est obéie au choix des éléments de maillage correspond chaque élément de rotor.

Le maillage global de rotor (élément arbre, disque, est palier additionnés) représente le modèle global de rotor à élément fini est illustré sur la **Figure III.13**

Structure	Elément	Nœud
Rotor	485526	485526

**Tableau III.3:** Maillage du rotor

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)



Figure III.13: Maillage du rotor

### III.4.3. Les conditions aux limites

Les conditions aux limites dans notre modèle de rotor correspondent :

Le système en rotation suivant l'axe **OX** (  $[\omega, \text{Rot}] \times x$  ), les mouvements de flexion suivant l'axe **Z** et **Y**. Pour les paliers dans le cas où son effet est négligeable on a supposé qu'ils sont rigides (on supprime tous les degrés de liberté suivant les 3 directions dans le point de raccordement avec l'arbre et les points de raccordement avec la fondation. Si son effet n'est pas négligeable on garde les degrés de liberté suivant les axes **OY** et **OZ** et on supprime le déplacement et la rotation suivant **OX** dans les points de raccordement avec l'arbre voir la **Figure III.14**

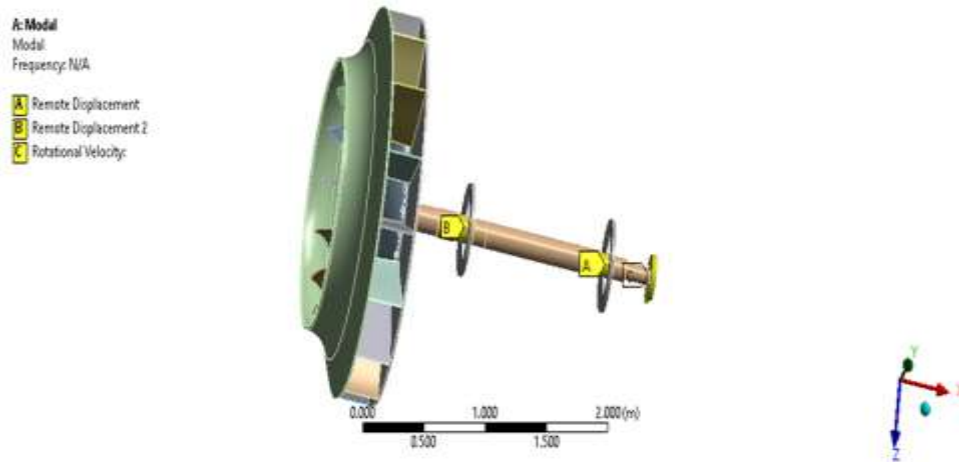


Figure III.14: condition aux limites

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

### III.5. Résultant de simulation numérique

La simulation a été faite pour les vitesses de rotation de fonctionnement  $\Omega$  différentes et différentes hypothèses des ailettes :

Vitesse	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
Valeur (rpm)	10	450	1000

**Tableau III.4 :** vitesses de rotation en fonctionnement de  $\Omega$

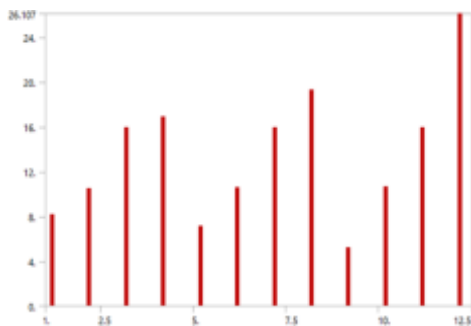
N° de cas	1	2	3
Hypothèses	Rotor sein	Une ailette usée	5 ailettes usées

**Tableau III.5 :** hypothèse d'ailette

#### III.5.1 : Le déplacements et les fréquences

##### Cas 1 : Rotor sein

Le tableau dessus présent les déplacement max est les fréquences de chaque mode en fonction de la vitesse.



Definer	Vitesse de Rotation [rpm]	Mode	Frequences [Hz]
1.	1.	1.	8.1684
2.		2.	10.47
3.		3.	15.939
4.		4.	16.935
5.	2.	1.	7.0892
6.		2.	10.566
7.		3.	15.94
8.		4.	19.335
9.	3.	1.	5.2196
10.		2.	10.628
11.		3.	15.94
12.		4.	26.107

**Figure III.15 :** Fréquence et déplacement spécifique de chaque mode calculé

Les résultats de déplacement illustrent aux figures suivant (**voir figures IV 16.17.18**)

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

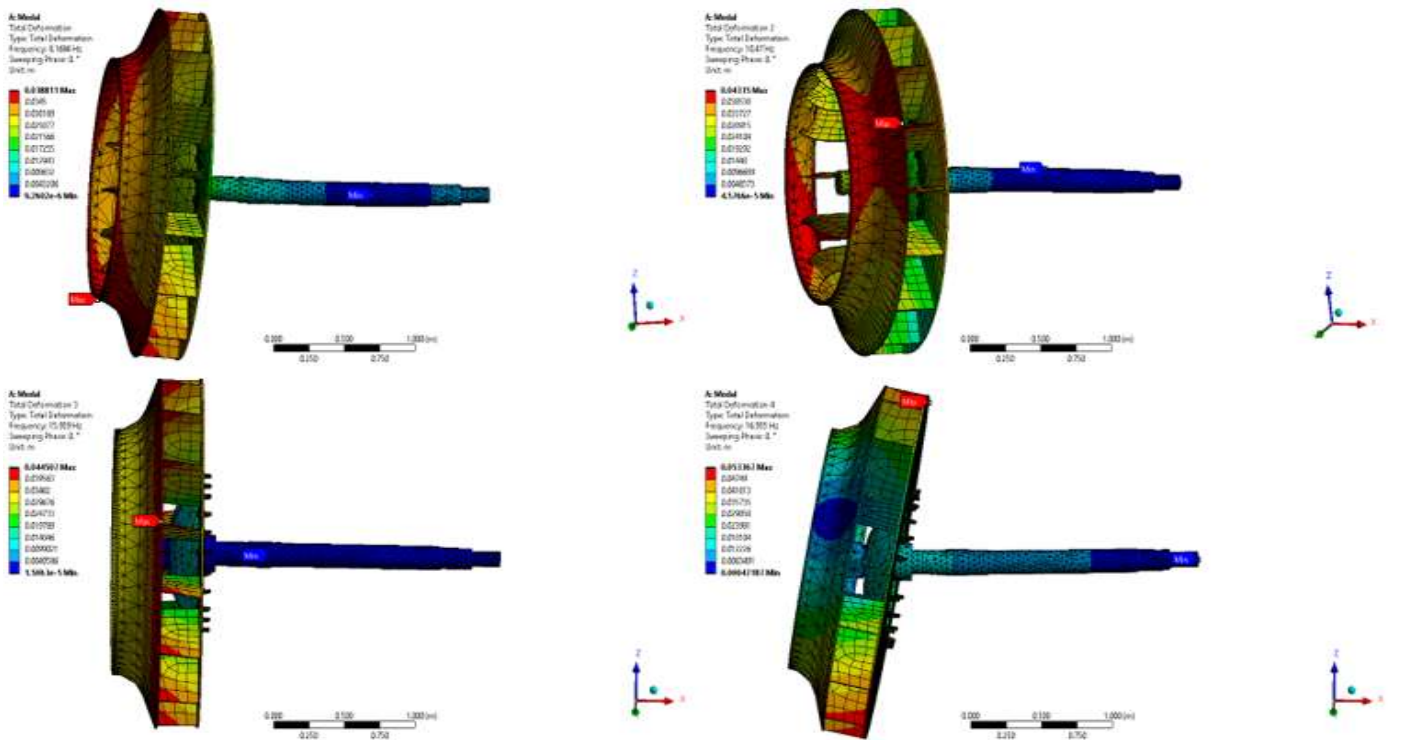


Figure III.16 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 10 rpm

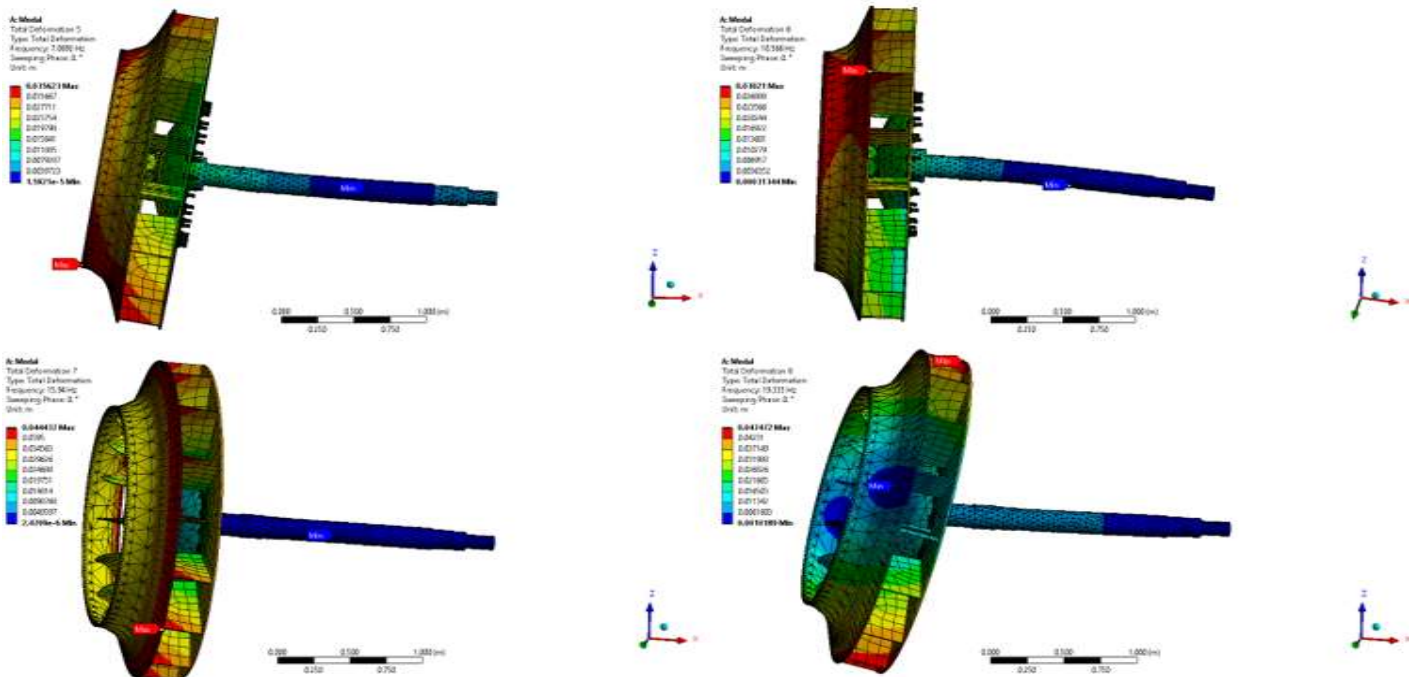
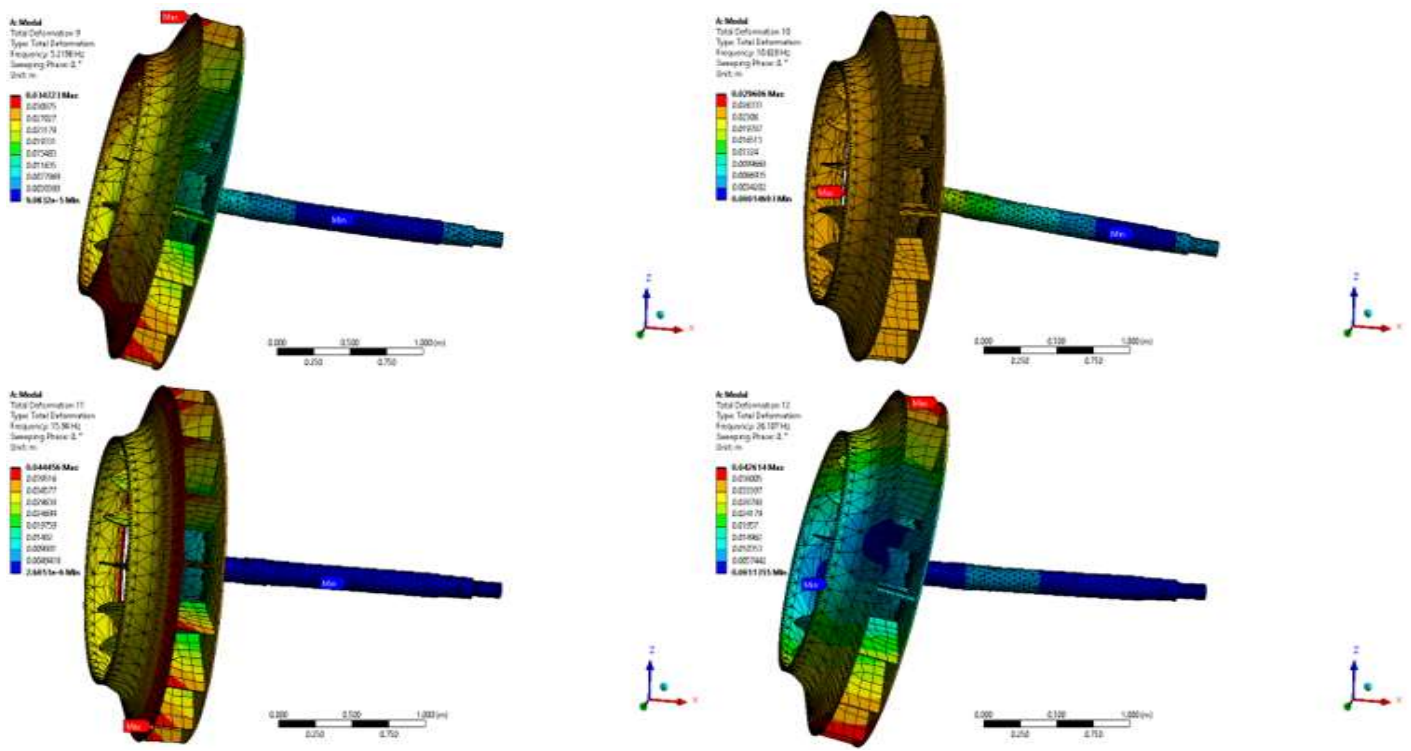


Figure III.17 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 450 rpm

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)



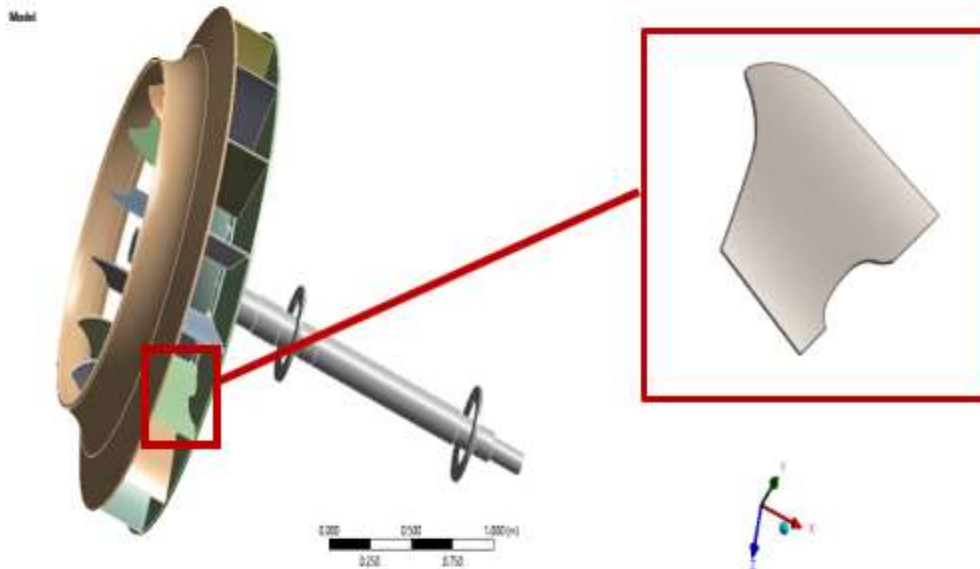
**Figure III.18 :** le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 1000 rpm

Definer	Vitesse de rotation [rpm]	Mode	le déplacement Min	le déplacement Max
1.	1.	1.	9.2602e-6	0.038811
2.		2.	4.5766e-5	0.04335
3.		3.	1.5063e-5	0.044507
4.		4.	0.00047187	0.53367
5.	2.	1.	1.5921e-5	0.035623
6.		2.	0.00031344	0.03021
7.		3.	2.4709-6	0.044437
8.		4.	0.0010189	0.047472
9.	3.	1.	9.0832e-5	0.034723
10.		2.	0.00014693	0.029606
11.		3.	2.6051e-6	0.044456
12.		4.	0.001355	0.042614

# Chapitre III

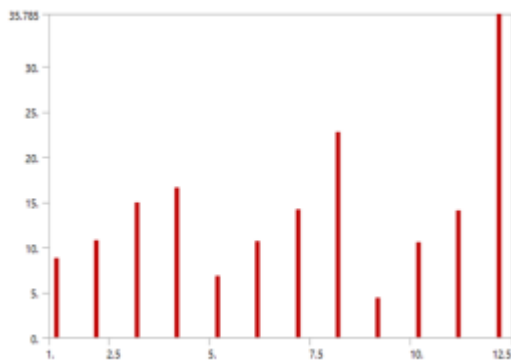
## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

### Cas 2 : Rotor avec une ailette usée



**Figure III.19 :** rotor avec une ailette usée

Le tableau dessus présent les déplacement max est les fréquences de chaque mode en fonction de la vitesse.



Definer	Vitesse de rotation [rpm]	Mode	Frequences [Hz]
1.	1.	1.	8.7955
2.		2.	10.763
3.		3.	14.916
4.		4.	16.56
5.	2.	1.	6.8256
6.		2.	10.622
7.		3.	14.215
8.		4.	22.688
9.	3.	1.	4.3811
10.		2.	10.585
11.		3.	14.09
12.		4.	35.785

**Figure III.20:** Fréquence et déplacement spécifique de chaque mode calculé

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

Les résultats de déplacement illustrent aux figures au-dessous (voir figures III.22.23.24)

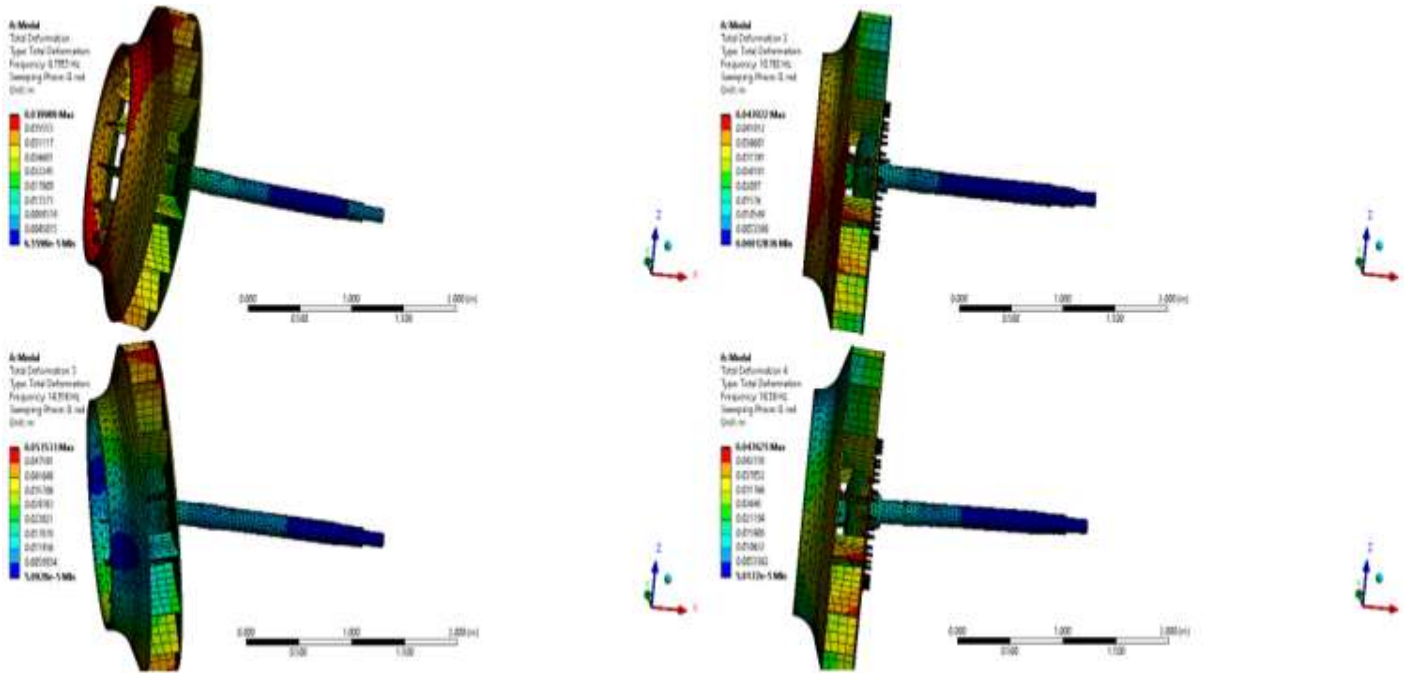


Figure III.21 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 10 rpm

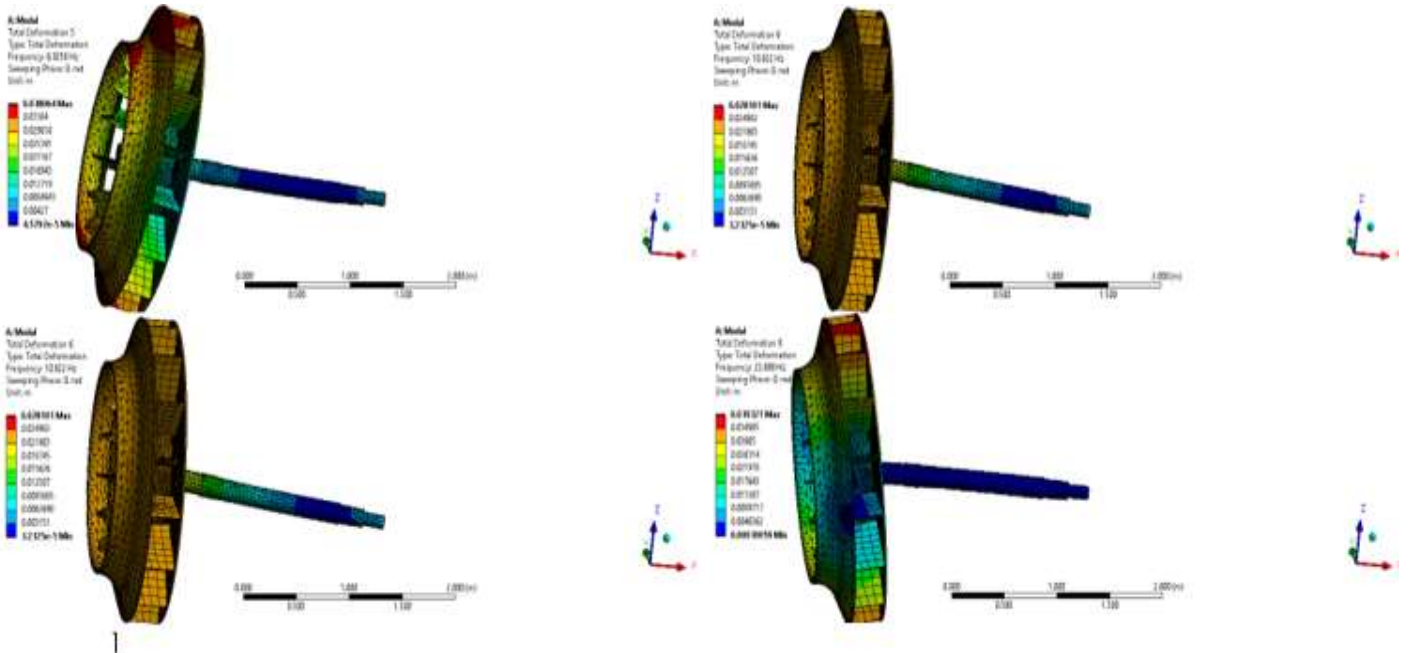
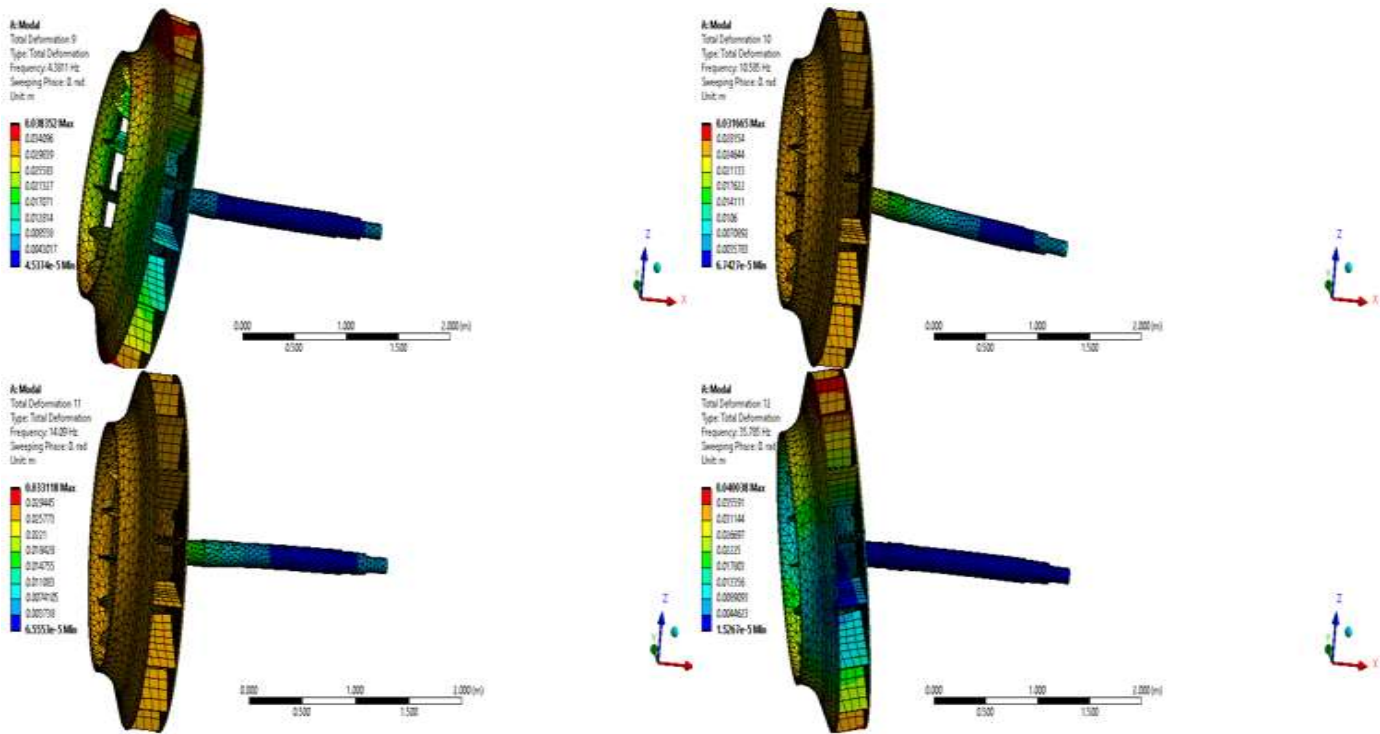


Figure III.22 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 450 rpm

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)



**Figure III.23 :** le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 1000 rpm

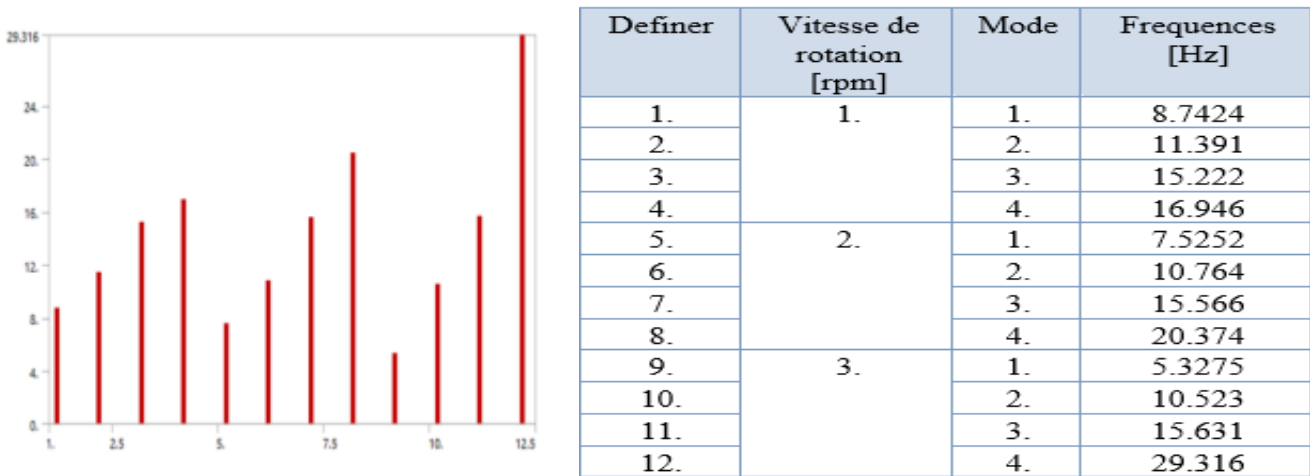
Definer	Vitesse de rotation [rpm]	Mode	le déplacement Min	le déplacement Max
1.	1.	1.	6.5598e-5	0.035553
2.		2.	0.00012836	0.047022
3.		3.	5.0928e-5	0.053533
4.		4.	5.0172 e-5	0.047625
5.	2.	1.	4.5797e-5	0.038064
6.		2.	3.2325 e-5	0.028101
7.		3.	5.8767e-5	0.030338
8.		4.	0.00030059	0.03932
9.	3.	1.	4.5374e-5	0.038352
10.		2.	6.7427 e-5	0.031665
11.		3.	6.5553e-5	0.033118
12.		4.	1.5267 e-5	0.040038

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

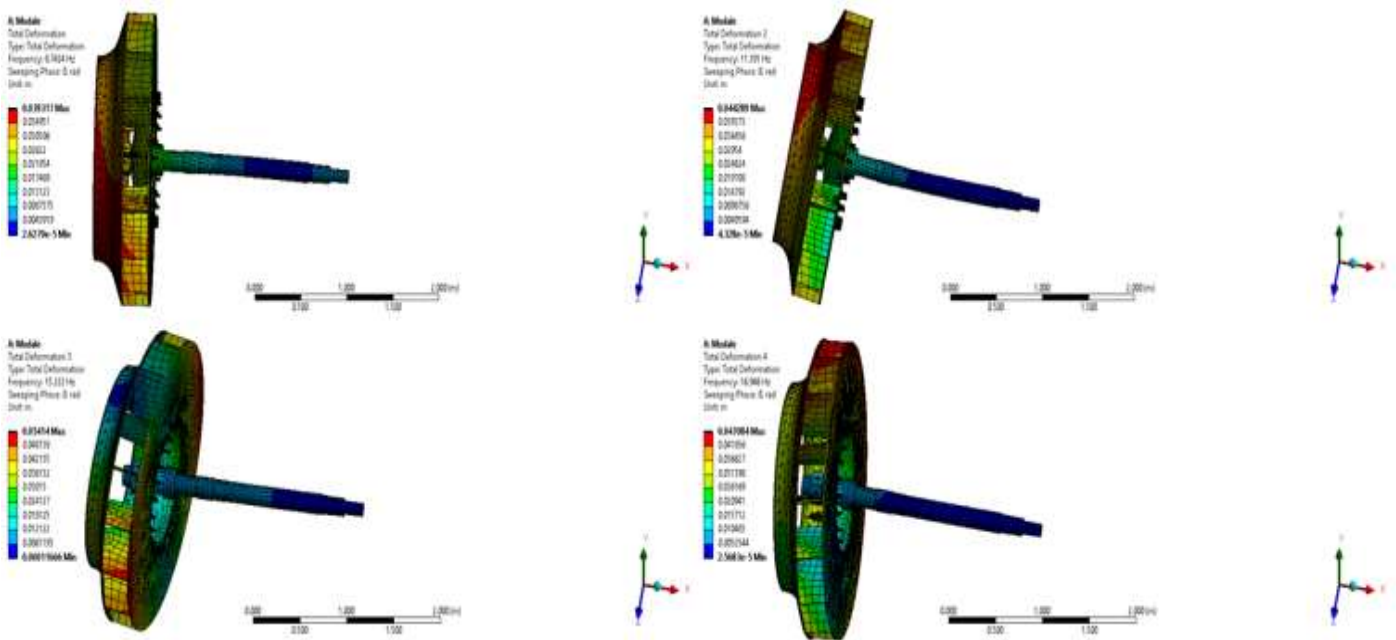
### Cas 3 : Rotor avec 5 ailettes usées

Le tableau dessus présent les déplacement max est les fréquences de chaque mode en fonction de la vitesse.



**Figure III.24** : Fréquence et Déplacement spécifique de chaque mode calculé

Les résultats de déplacement illustrent aux figures au-dessous (voir figures IV 25.26.27)



**Figure III.25** : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 10 rpm

# Chapitre III

## simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

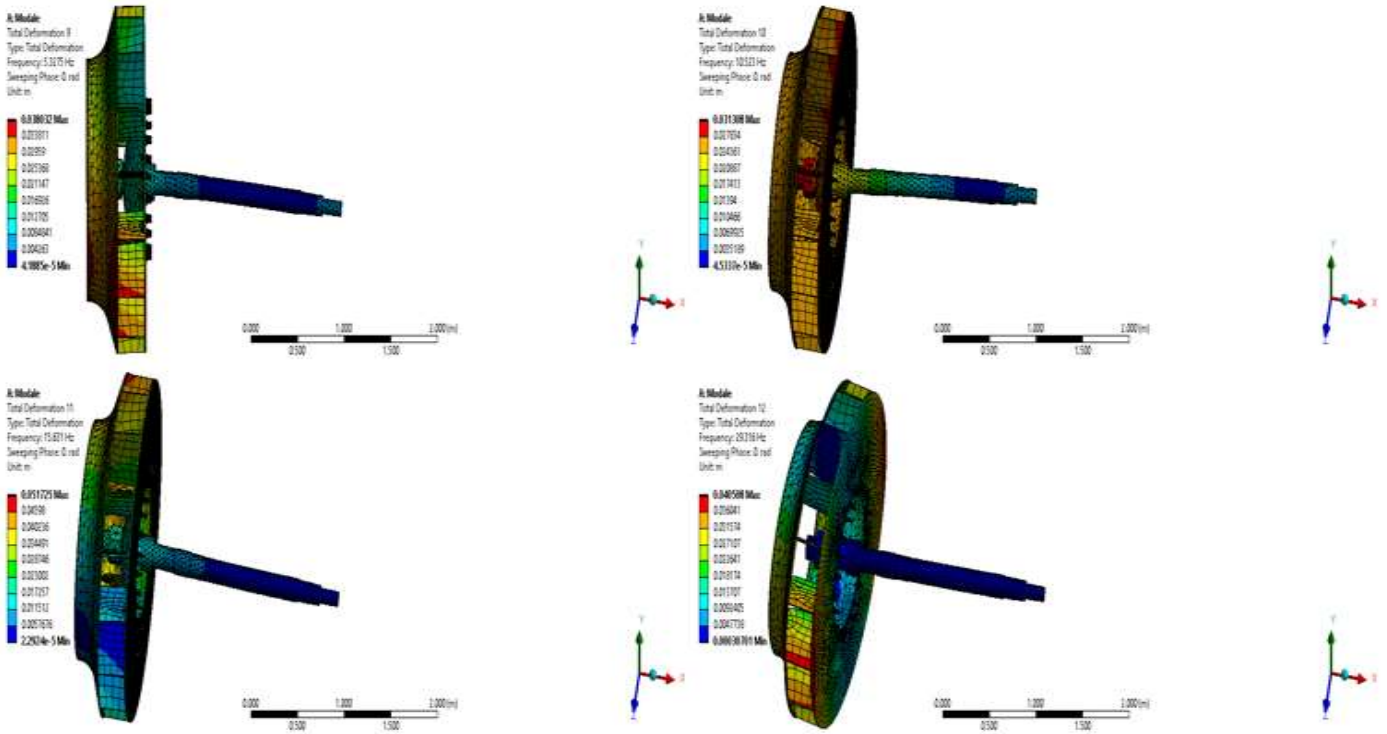


Figure III.26: le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 450 rpm

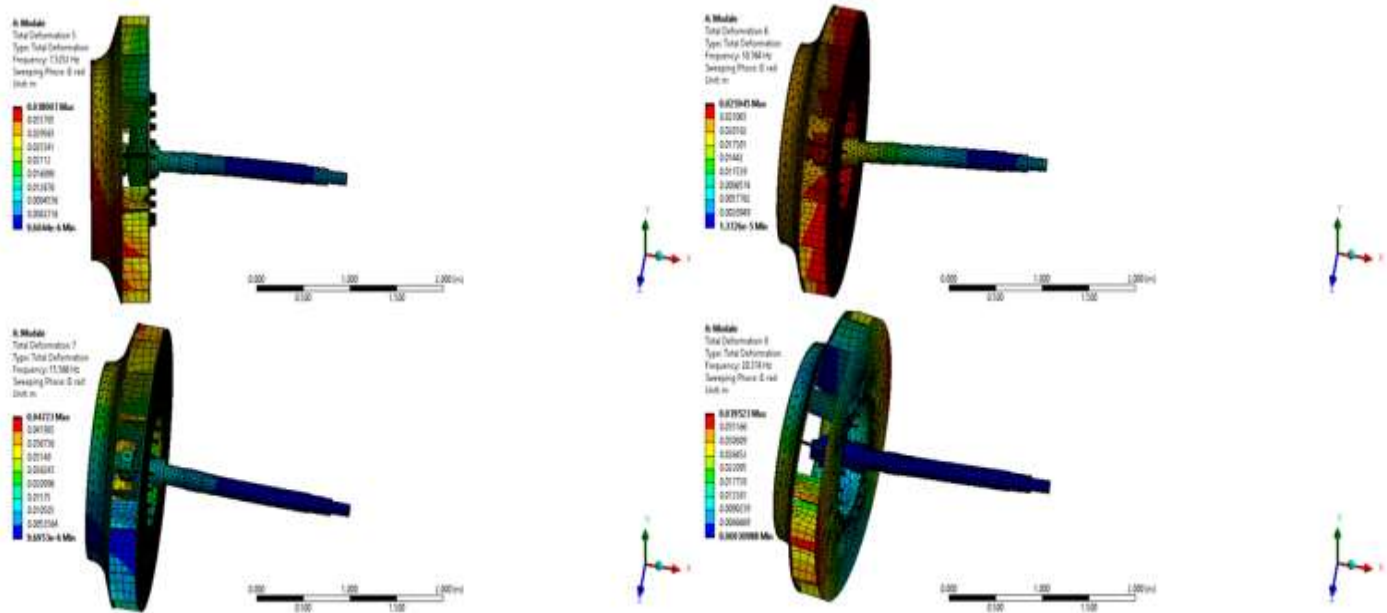


Figure III.27 : le déplacement max pour la vitesse de fonctionnement 1000 rpm

## Chapitre III

### simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

Definer	Vitesse de rotation [rpm]	Mode	le déplacement Min	le déplacement Max
1.	1.	1.	2.6279e-5	0.039317
2.		2.	4.328 e-5	0.044289
3.		3.	0.0001666	0.05414
4.		4.	2.5683 e-5	0.047084
5.	2.	1.	9.6044e-6	0.038007
6.		2.	1.3726 e-5	0.025945
7.		3.	9.6953e-6	0.041983
8.		4.	0.00030988	0.039523
9.	3.	1.	4.1885e-5	0.038032
10.		2.	4.5337 e-5	0.031308
11.		3.	2.2924e-5	0.051725
12.		4.	0.00030701	0.040508

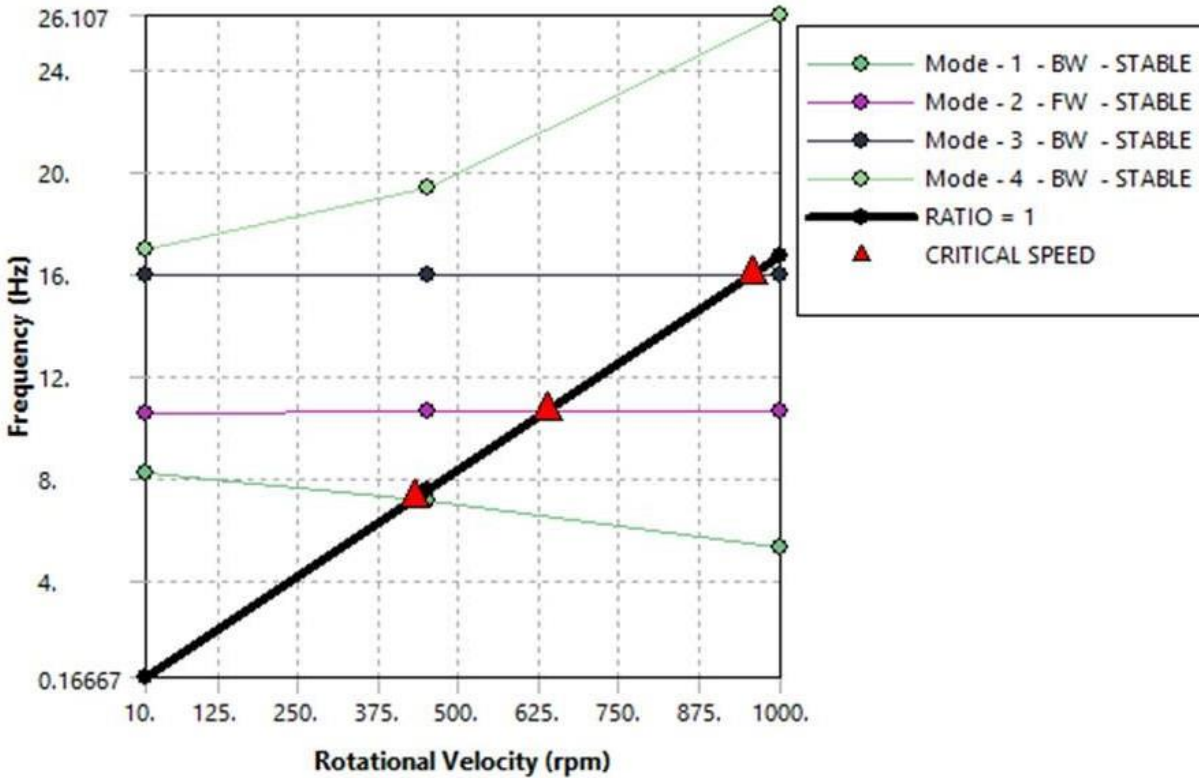
#### III.5.2 : Diagramme de Campbell

Le diagramme de Campbell permet nous de déterminer les vitesses critiques pour divers types d'excitation, pour une excitation synchrone de type force de balourd la vitesse critique est obtenue par l'intersection de droit harmonique bissectrice avec les droites des modes de vibration de rotor, le diagramme de Campbell pour les hypothèses d'ailette aux **figures (28.29.30)**

# Chapitre III

## Simulation numérique du comportement dynamique d'un rotor par élément FINIS (ANSYS)

### III.5.2.1. Cas 1 : Rotor sein



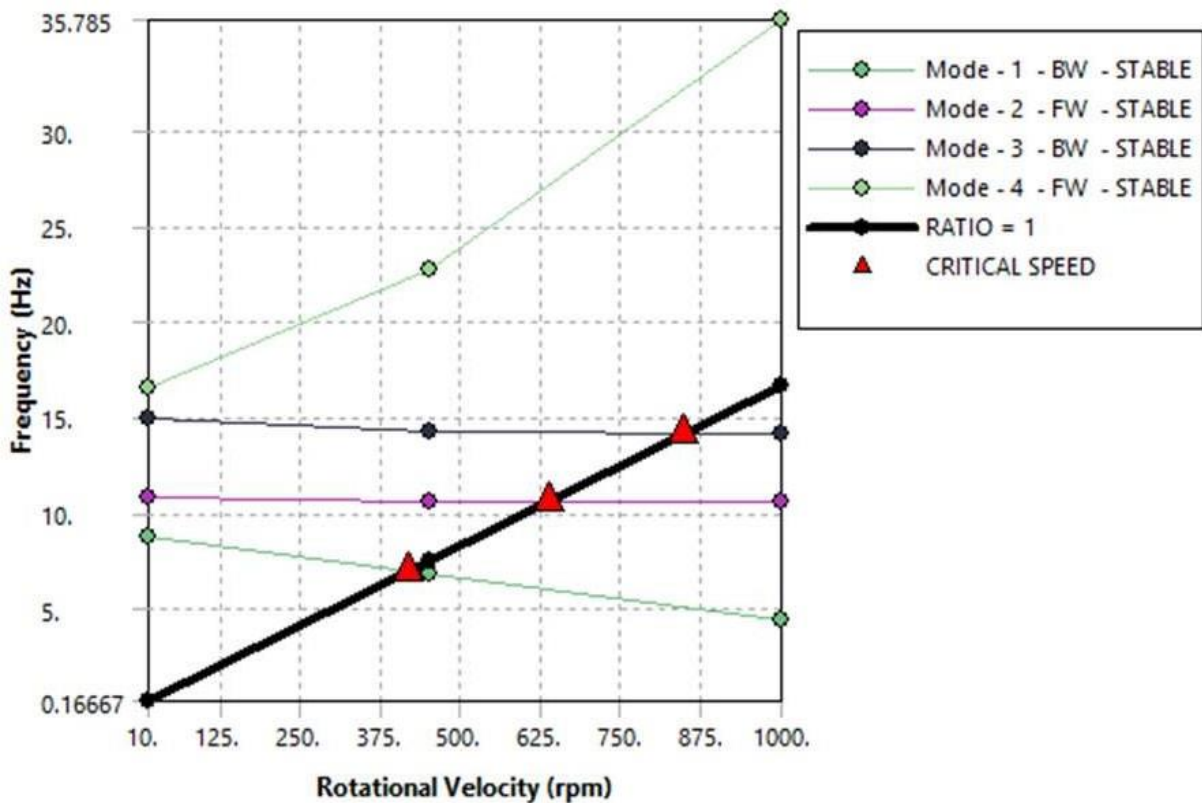
**Figure III.28:** Diagramme de Campbell Cas 1

Dans ce cas présent 3 vitesse critique la première vitesse critique correspond le 3 -ème mode est située à la vitesse  $\Omega c1 = 956.38$  rpm et la deuxième vitesse critique correspond le 2 -ème mode est située à la vitesse  $\Omega c2 = 635.23$  rpm le troisième vitesse critique correspond le premier mode est située à la vitesse  $\Omega c3=428.51$  rpm

## Chapitre III

### Simulation numérique du comportement dynamique d'un rotorpar élément FINIS (ANSYS)

#### III.5.2.2. Cas 2 : Rotor avec une ailette usée



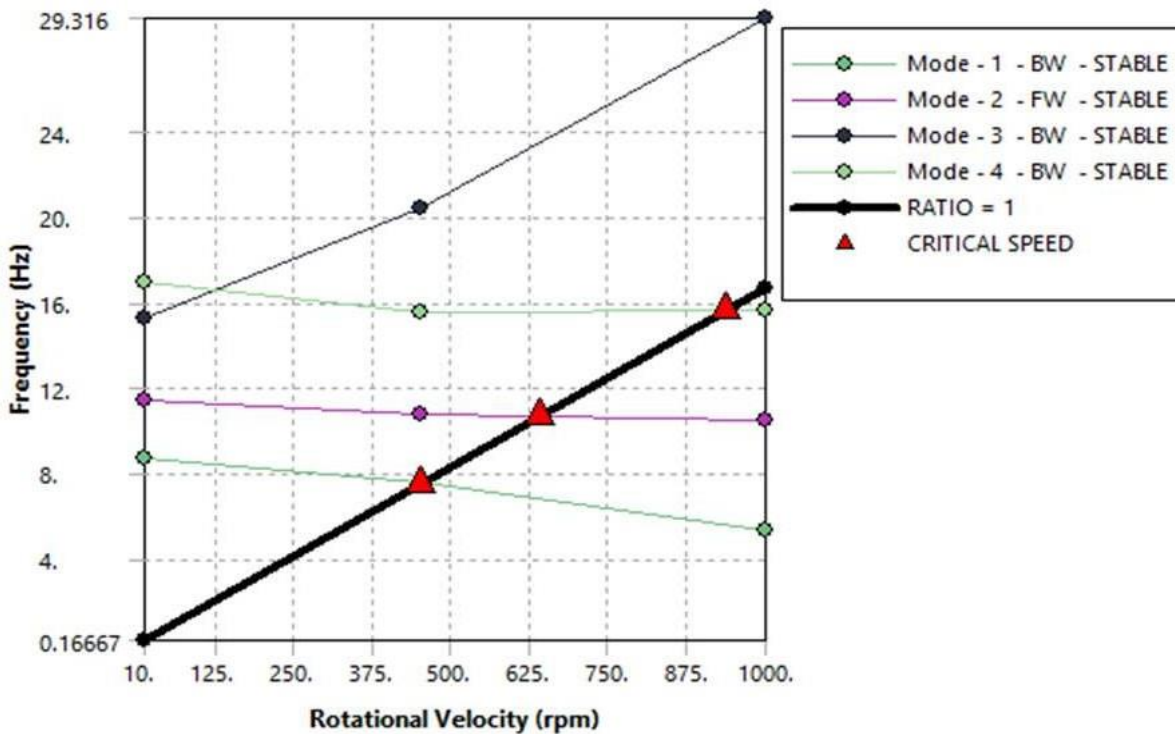
**Figure III.29 :** Diagramme de Campbell Cas 2

Dans ce cas présent 3 vitesse critique la première vitesse critique correspond le 3 -ème mode est située à la vitesse  $\Omega_{c1} = 847.48$  rpm, et la deuxième vitesse critique correspond le 2 -ème mode est située à la vitesse  $\Omega_{c2} = 636.58$  rpm, le troisième vitesse critique correspond la première mode est située à la vitesse  $\Omega_{c3} = 418.1$  rpm

# Chapitre III

## Simulation numérique du comportement dynamique d'un rotorpar élément FINIS (ANSYS)

### III.5.2.3. Cas 3 : Rotor avec 5 ailettes usées

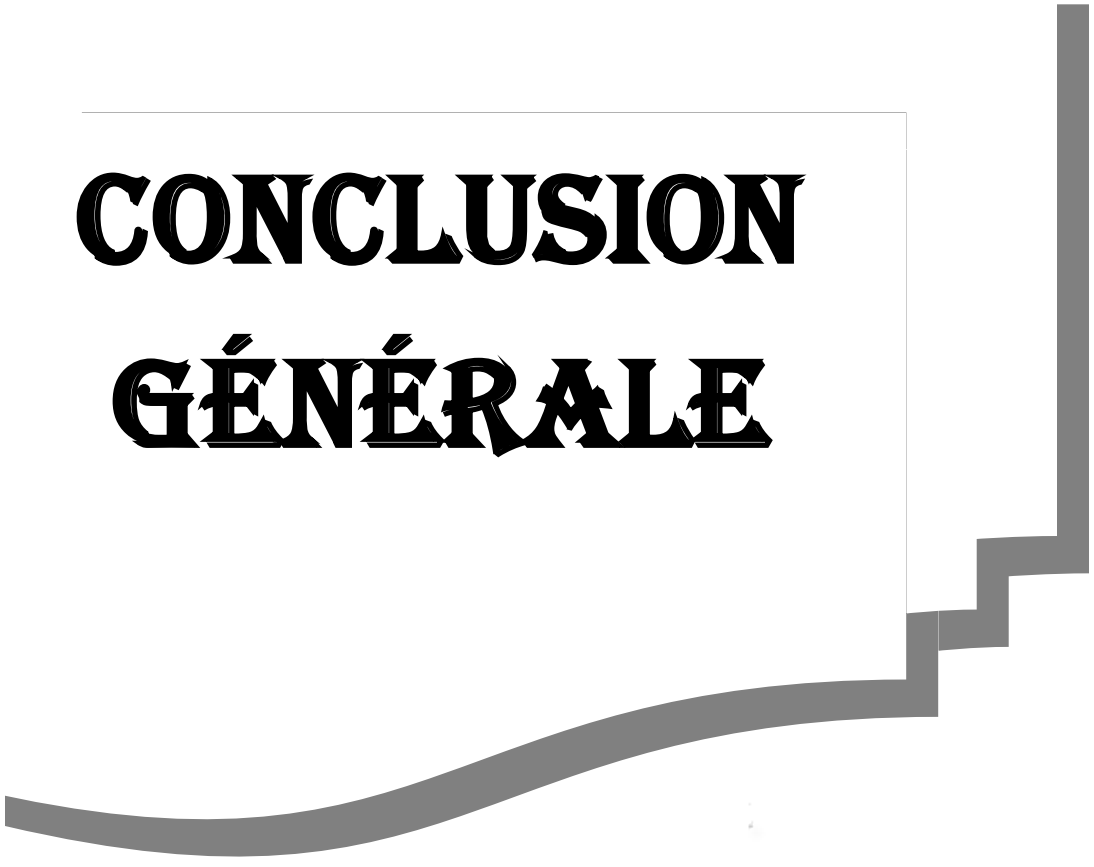



**Figure III.30:** Diagramme de Campbell Cas 3

Dans ce cas présent 3 vitesse critique la première vitesse critique correspond le 4 -ème mode est située à la vitesse  $\Omega c1= 937.4$  rpm et la deuxième vitesse critique correspond le 2 -ème mode est située à la vitesse.  $\Omega c2= 640.84$  rpm, le troisième vitesse critique correspond le premier mode est située à la vitesse  $\Omega c3= 451.22$  rpm.

On conclusion dans le cas de rotor sein et le cas de rotor avec une ailette usée que les vitesse critique correspondre aux mêmes modes, tandis que dans le cas de rotor avec 5 ailettes usées le troisième vitesse critique correspond le premier mode comme les deux cas précédents et la situation est différente pour la première et deuxième vitesse critique.

En comparant les trois cas précédents on trouve que les user dans l'ailettes du rotor affecte le mode vibratoire.



**CONCLUSION  
GÉNÉRALE**

## Conclusion générale

### Conclusion générale

Ce travail avait pour objectif d'apporter d'étude dynamique de rotors par élément finis.

Le premier chapitre d'après l'introduction générale de ce travail est édifié à partir d'une synthèse bibliographique sur le comportement dynamique et vibratoire d'un rotor flexible. Il synthétise les généralités sur les rotors des machines tournantes industrielles, l'historique et les travaux de recherche qui contribuent au développement sur le dynamique de rotor ,D'après une étude détaillée dans les littératures qu'on a vue, on est conclus que le début de recherche sur le comportement dynamique des rotors est généralement limité sur la détermination des vitesses critiques et les modes de vibrations, mais récemment les points de vue des chercheurs s'orientent vers l'étude des systèmes non linéaire et l'analyse de stabilité du système dynamique. Et est présente la modélisation de rotor par équation fondamentales de mouvement de rotor. On a déterminé les énergies (cinétiques et déformation), On est appliqué, les équations de Lagrange pour trouver finalement les équations de mouvement de rotor.

Le deuxième chapitre consacré à la modélisation de rotor par la méthode des éléments fini, on a déterminé les différentes matrices des paramètres dynamique de rotor, matrice de masse, matrice d'amortissement et matrice de rigidité.

Enfin, L'étude menée au dernier chapitre est pour objectif de détermine les fréquences est déplacements max par trois hypothèse (rotor sein, rotor avec une ailette usée et rotor avec 5 ailettes usées), ces études ont été faite par simulation en **ANSYS WORKBENSH** et ils sont présentés par le diagramme de Campbell.

D'après ces résultats, on souhaite à la future d'approfondir et de développer la recherche sur les sujets des systèmes dynamiques et surtout sur la stabilité de mouvements de rotor, ainsi que l'interaction de rotor avec le fluide (effet aérodynamique).

## Références

### Références

[1] **Brahmi Hamza** “Etude du comportement vibratoire et simulation numérique des charges dynamiques d’un rotor flexible.”

[2] **TR2SOR KANYIK** “Simulation par la méthode des éléments finis du comportement vibration d’un rotor”

[3] **RAHMANIO et Kbdanis** « introduction à la méthode des élément finis pour les ingénieurs »

[4] **GLLAGHERR.H.** « introduction aux élément finis »

[5] **BELAHRCHE SALAHA.** « Analyse dynamique des corps continus en rotation : application aux arbres moteur »

[6] **AIMEUR Nouredine** « Etude dynamique d’un rotor par éléments finis »

## Résumé

Le progrès technologique exige sans cesse des systèmes plus performants. Pour les machines tournantes, de grandes puissances et des vitesses très élevées sont parmi les objectifs voulus. Cependant, les problèmes vibratoires liés leurs éléments principaux tels que les arbres et les rotors sont des phénomènes qui demeurent encore préoccupants malgré les progrès réalisés dans la conception.

Ces derniers qui sont dus, par exemple, aux inévitables défauts d'usinage et de montage limitent les performances des machines en affectant leur fonctionnalité et leur fiabilité. Ils peuvent causer des dégâts sérieux ou mener à leurs ruines. Une compréhension complète du comportement vibratoire et une connaissance suffisante sur la dynamique des rotors sont donc nécessaires pour trouver les moyens d'éviter ou de réduire ou de supprimer les vibrations. Initialement, les premiers soucis et efforts étaient de prédire les vitesses de rotation critiques de résonance et après modifier la conception pour les changer afin de les éviter. Mais, il a longtemps été observé que quand les vitesses d'opération dépassèrent les vitesses critiques des problèmes indésirables variés d'instabilité apparaissaient. Le travail présenté dans ce mémoire traite un problème réel concernant l'analyse du comportement dynamique vibratoire d'un rotor à roue centrifuge radial. La modélisation a été faite par la méthode des éléments finis en utilisant le code de calcul ANSYS pour déterminer les fréquences propres, les déformées modales, les vitesses critiques du rotor à partir de trois cas (rotor sein, rotor avec une ailette usée et rotor avec 5 ailettes usées).

**Mots clés :** Simulation, rotors, éléments finis, analyse modale.

## ملخص

التقدم التكنولوجي يتطلب أنظمة أكثر فعالية من أي وقت مضى. بالنسبة للأجهزة الدوارة، تعد الطاقة العالية والسرعات العالية من بين الأهداف المرجوة. ومع ذلك، فإن المشاكل الاهتزازية المتعلقة بعناصرها الأساسية مثل المحاور والدورات هي ظواهر لا تزال مقلقة على الرغم من التقدم المحرز في التصميم. على سبيل المثال، بسبب أخطاء التصنيع والتجميع المفر منها، تحد من أداء الماكينة من خلال التأثير على الاداء الوظيفي والموثوقية يمكن أن تسبب أضرارا خطيرة أو تؤدي إلى تلفهم لذلك فإن الفهم الكامل لسلوك الاهتزاز والمعرفة الكافية لديناميكيات الدوار ضرورية لايجاد طرق لتجنب أو تقليل الاهتزازات أو التخلص منها. في البداية، كانت المخاوف والجهود الأولى هي التنبؤ بسرعات دوران الرنين الحرجة وبعد تعديل التصميم لتغييرها من أجل تجنبها. ولكن، لوحظ منذ فترة طويلة أنه عندما تتجاوز سرعات التشغيل السرعات الحرجة، تنشأ العديد من مشاكل عدم الاستقرار غير المرغوب فيها.

العمل المقدم في هذه الرسالة يتعلق بتحليل السلوك الديناميكي لدوار عجلة طرد مركزي شعاعي. تم إجراء النمذجة باستخدام طريقة العناصر المنتهية باستخدام كود ANSYS لتحديد حالات الرنين الذاتي، وتشوهات الذاتية، والسرعات الحرجة من خلال ثلاث حالات للدوار.

**الكلمات المفتاحية:** المحاكاة، الدورات، العناصر المنتهية، التحليل الذاتي.