

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

N° :.....



DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES

FILIERE : ELECTRONIQUE

OPTION : INSTRUMENTATION

**Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique**

Intitulé:

Filtrage et compression des signaux et
des images par la décomposition en
valeurs singulières (SVD)

Présenté par :
Fathi Chahrazad

Soutenu devant le jury composé de:

Dr. Hamza ben nacer	University of M'sila	Président
Dr. Mohamed Assam Ouali	University of M'sila	Encadreur
Pr. Mohamed Ladjal	University of M'sila	Co-Encadreur
Dr khennouf Salah	University of M'sila	Examineur

Année Universitaire : 2023-2024

Remerciement

Remerciement

En premier lieu, nous tenons à remercier notre ALLAH, notre
Créateur pour nous avoir la force pour accomplir ce travail
Nous remercions également tous les enseignants du département des Science et
Technologie qui ont contribué, de près ou de loin, à notre
étude et pour tous les enseignements de l'université de M'sila
En particulier notre promoteur Mr Ladjal Mohamed et Mr Ouali
Mohamed Assam pour ces conseils et l'aide qu'il nous a apporté.
Respectivement le chef de département
je remercie aussi, tous les membres de jury, pour l'intérêt qu'ils ont
porté à ce travail. Nous leur exprimons toute mes reconnaissances
Que Toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation
de ce travail accepte nos grands et sincères remerciements.

Dédicaces

Dédicaces

Nous dédions ce travail

A ma chère mère et mon cher père

Et à tous mes chers frères, notamment mes sœurs expatriées, Houda et Fatima

Mon frère Abd elkader n'est malheureusement pas parmi nous aujourd'hui

Ils seront fiers de moi

Tous mes amis

À tous mes camarades de classe de 2024

Je ne peux pas mettre fin à nos dédicaces sans rendre un immense hommage à mon

Créateur " Mr. Ouali Mohamed Assam "

Juste pour me donner beaucoup d'énergie pour y parvenir

un travail.

ملخص

لقد عرفت تصفية وضغط الاشارات والصور تطورا مستمرا جنبا الى جنب مع تطور الاتصالات والوسائط المتعددة منذ الستينات تم اقتراح تقنية جديدة وهي تقنية قوية وبسيطة وسهلة التنفيذ لانه يحلل المصفوفات الى مكونات فردية والكشف عن البيانات و الهياكل الاساسية و توفير حلول لتحسين جودة الاشارة وتقليل حجم الصور دون خسارة كبيرة في الجودة وتحسين استخدام النطاق الترددي للشبكة

من خلال النتائج التي تم الحصول عليها نجد ان من خلال تطبيق تقنية على الاشارات و الصور يتم تحليل اداء من حيث تصفية الضوضاء وضغط البيانات ومقارنته بالطرق التقليدية وتظهر النتائج تحسنا م ملحوظا في جودة البيانات وانخفاضا كبيرا في متطلبات التخزين

Résumé :

J'ai appris le filtrage et la compression des signaux et des images SV développement continu parallèlement au développement des communications et du multimédia depuis les années 1960, une nouvelle technologie SVD a été proposée, qui est une technologie puissante, simple et facile à mettre en œuvre, car elle décompose les matrices en composants individuels, révélant les données sous-jacentes de base. structures et fournir des solutions efficaces pour améliorer la qualité du signal et réduire la taille de l'image sans perte significative de qualité et améliorer l'utilisation de la bande passante du réseau.

A travers les résultats obtenus par l'application des techniques de SVD aux signaux et aux images. Les performances de la SVD en termes de filtrage du bruit et de compression des données sont analysées et comparées aux méthodes traditionnelles. Les résultats démontrent une amélioration notable de la qualité des données et une réduction significative des besoins en stockage.

Abstract :

I learned about filtering and compression of signals and images SV continuous development Along with the development of communications and multimedia since the 1960s, a new SVD technology was proposed, which is a powerful, simple and easy to implement technology. work, because it breaks down matrices into individual components, revealing the basic underlying data. structures and provide effective solutions to improve signal quality and reduce image size without significant loss of quality and improve network bandwidth utilization.

Through the results obtained by the application of SVD techniques to signals and images. The performance of SVD in terms of noise filtering and data compression is analyzed and compared with traditional methods. The results demonstrate a notable improvement in data quality and a significant reduction in storage requirements.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Remerciement.....	I
Dédicaces	II
Résumé.....	III
Sommaire.....	IV
Introduction générale	1

Chapitre I: Fondements du Traitement d'Images et de Signaux

1. Introduction.....	2
2. Concepts Fondamentaux.....	2
2.1 Image.....	2
2.1.1 Caractéristiques d'une image.....	2
a. Spécialisation contextuelle.....	2
b. Composition pixelaire.....	2
c. Dimensionnalité.....	2
d. Modalités.....	3
e. Représentation Numérique.....	3
f. Interprétation et Sémantique.....	3
2.1.2 Types d'images.....	3
a. Images Réelles.....	3
b. Images Synthétique	3
c. L'image Médicales	3
d. Images Satellitaires.....	3
e. Images Numériques.....	3
2.2 Signal.....	3
2.2.1 Caractéristiques d'un Signal.....	4
a. Variabilité Temporelle ou Spatiale.....	4
b. Forme Ondeforme.....	4
c. Nature Analogique ou Numérique.....	4
d. Classification	4
e. Mesurabilité et Interprétation.....	4
2.2.2 Types de Signaux	4
a. Signaux Audio.....	4
b. Signaux Electriques.....	4
c. Signaux visuels.....	5
d. Signaux Biomédicaux.....	5
e. Signaux Numérique.....	5
2.3 Echantillonnage et Quantification.....	5
2.4 Transformation.....	5

3. .Technique de Traitement des images et signaux	5
3.1.Filtrage.....	5
3.1.1. .Filtrage spatial.....	5
3.1.2. .Filtrage Fréquentiel.....	5
3.2..Restauration d'image.....	5
3.2.1. .Débruitage.....	6
3.2.2. .Restauration d'images dégradées.....	6
3.3..Segmentation.....	6
3.3.1. .Seuillage.....	6
3.3.2. .Détection de contours.....	6
3.4..Transformation d'images.....	6
3.4.1. .Transformée de fourier.....	6
3.4.2. .Transformée en ondelettes.....	6
3.5..Reconnaissance et classification.....	6
3.5.1. .Extraction de caractéristiques.....	6
3.5.2. .Classification.....	6
3.6..Compression.....	6
3.6.1. .Compression sans perte.....	7
3.6.2. .Compression avec perte.....	7
4. .Application.....	7
4.1.Imagerie médicale.....	7
4.2..Vision par ordinateur.....	7
4.3..Traitement du signal audio.....	7
4.4..Télédétection et imagerie satellite.....	7
4.5.Traitement d'images pour la sécurité et la surveillance.....	8
4.6..Traitement d'images pour l'industrie.....	8
4.7..Communication et multimédia.....	8
4.8..Biologie et sciences de la vie.....	8
5. .Image Numérique.....	8
5.1..Types d'images numériques.....	8
5.1.1. .Images vectorielles.....	8
5.1.2. .Images matricielle.....	8
5.2..Caractéristiques d'une image numérique.....	9
5.2.1. .Pixel.....	9
5.2.2. .Résolution.....	10
5.2.3. .Taille d'une image.....	10
5.2.4. .Bruit.....	10
5.2.5. .Compression des images.....	11
a. .Compression avec perte.....	11
b. .Compression sans perte.....	11
c. .Compression par ondelettes.....	12
6. .Signal électrocardiogramme.....	12
6.1..Ondes principales.....	12
6.2..Segment et intervalles.....	13
6.3..Filtrage du signal électrocardiogramme.....	13
a. .Bruit électrique ambiant.....	13
b. .Mouvements musculaires.....	13
c. .Interférences de ligne de base.....	13
d. .Interférences électromagnétiques.....	13
7. .Types de Filtrage.....	14

a. .Filtrage passe-bas.....	14
b. .Filtrage passe-haut.....	14
c. .Filtrage passe-band.....	14
d. .Filtrage adaptatif.....	14
e. .Filtrage médian.....	14
f. .Filtrage par transformée en ondelettes	14
8. .Conclusion.....	14

Chapitre II : Méthodes et techniques algébriques

1. .Introduction.....	16
2. .Systèmes d'équation.....	16
3. .Multiplication des matrices.....	18
3.1..Méthode 1.....	18
3.2..Méthode 2	18
3.3..Méthode 3	18
4. .Inverse d'une matrice	19
5. .Transposé d'une matrice.....	19
6. .Espace vectoriel	19
6.1..Espace des colonnes d'une matrice.....	21
6.2..Espace Nul d'une matrice.....	21
6.3..Rang d'une matrice.....	22
6.4..Indépendance.....	22
6.5..Génération d'un espace "span".....	23
6.6..Base.....	23
6.7..Dimension.....	23
7. .Quatre espaces fondamentaux.....	23
8. .Matrices de rang unitaire.....	24
9. .Projection.....	25
10. .Méthodes des moindres carrées.....	26
11. .Orthogonalité.....	27
12. .Valeurs et vecteurs propres.....	28
13. .Matrices symétriques.....	29
14. .Matrices Symétrique définies positive.....	30
15. .Décomposition en valeurs singulières SVD.....	30
16. .Inverses généralisés.....	33
16.1. .Inverse ordinaire (bilatérale).....	33
16.2. .Inverse gauche.....	33
16.3. .Inverse droite.....	34
16.4. .Pseudo inverse.....	35
17. .Conclusion.....	36

Chapitre III : RESULTATS ET DISCUSSION

1. .Introduction.....	38
2. .Méthodes des moindres carrées.....	38
2.1 .Principe de l'orthogonalité.....	39
2.2 .Les équations normales	39
2.3 .Propriétés de la matrice d'autocorrélation	41
2.4 .Reformulation des équation normales	42

3. .SVD et la résolution d'un système linéaire aux moindres carrés.....	43
3.1.Théorème de la SVD.....	43
4. .Filtrage,Compression et réduction de rang.....	44
4.1..Principe de la méthode.....	44
4.2..Filtrage du signal électrocardiogramme par la SVD	45
4.3..Compression des images par SVD.....	50
5. Conclusion.....	51

LISTES DES FIGURES

Figure I-1: Image vectorielle et l'image matricielle.....	9
Figure I-2:Exemple d'image 12x12 pixels.....	9
Figure I-3:Modèles de résolution.....	10
Figure I-4:(a) Image avec bruit ; (b) Image sans bruit.....	10
Figure I-5:Signal ECG.....	12
Figure II-1:Résolution par la forme en ligne.....	17
Figure II-2:Résolution par la forme en colonnes.....	17
Figure II-3: a) Exemple d'un espace vectoriel R^2 ; b) contre-exemple d'un espace vectoriel.....	20
Figure II-4: Sous espace vectoriel.....	20
Figure II-5: Espace de colonnes défini par $col1$ et représentant un sous espace de R^3	21
Figure II-6:Représentation des espaces fondamentaux.....	24
Figure II-7:Projection.....	25
Figure II-8: Projection d'un vecteur de mesure dans l'espace $C(A)$ (bidimensionnel).....	26
Figure II-9:Principe géométrique des moindres carrés.....	27
Figure II-10:Effet d'une matrice.....	28
Figure II-11: Idée géométrique de l'SVD.....	31
Figure.II-12:Représentation géométrique de l'inverse gauche.....	33
Figure.II-13:Représentation géométrique de l'inverse droite.....	34
Figure.II-14:Singularité de la matrice A	35
Figure.III-1 : Signal électrocardiogramme.....	45
Figure.III-2: Résultats de débruitage pour $\text{var}(v) = 0.01mv^2$ et un opérateur de projection P_6	46
Figure.III-3: Résultats de débruitage pour $\text{var}(v) = 0.01mv^2$ et un opérateur de projection P_4	47
Figure. III-4: Résultats de débruitage pour $\text{var}(v) = 0.01mv^2$ et un opérateur de projection P_2	48
Figure.III-5: L'image Street1.....	50
Figure.III-6 :Résultat de compression en utilisant différent opérateur de projection.....	51

Liste des abréviations :

GIF	Graphic Interchange Formal
PNG	Portable Network Graphics
WSQ	Wavelet Scalar Quantization
JPEG	Joint Photographic Experts Group

SVD

Singular Value Decomposition

Introduction Générale

La croissance exponentielle des données numériques au cours des dernières décennies a mis en lumière la nécessité de techniques efficaces pour le traitement et la gestion des signaux et des images. Le filtrage et la compression sont deux aspects cruciaux de ce domaine, permettant de réduire le bruit, d'améliorer la qualité des données et de minimiser les besoins en stockage. Parmi les diverses méthodes disponibles, la décomposition en valeurs singulières (SVD) s'est révélée être un outil puissant et polyvalent. Ce mémoire explore l'application de la SVD dans le contexte du filtrage et de la compression des signaux et des images, en s'appuyant sur des fondements théoriques solides et des méthodes algébriques avancées.

Ce rapport est organisé en trois chapitres. Le premier chapitre **Fondements du Traitement d'Images et de Signaux** Le premier chapitre établit les bases du traitement des images et des signaux. Nous y abordons les concepts fondamentaux tels que la représentation des signaux et des images sous forme de matrices, les notions de bruit et de signal utile, ainsi que les techniques classiques de traitement telles que la transformation de Fourier et les filtres passe-bas et passe-haut. Ces concepts sont essentiels pour comprendre comment les méthodes de filtrage et de compression peuvent être appliquées pour améliorer la qualité des données et réduire les besoins en stockage.

Le deuxième chapitre se concentre sur les méthodes et techniques algébriques, avec un accent particulier sur la décomposition en valeurs singulières (SVD). Nous y présentons les principes mathématiques sous-jacents à la SVD, en expliquant comment cette méthode permet de décomposer une matrice en composantes singulières qui représentent les structures fondamentales des données. Nous discutons également de l'application de la SVD au filtrage du bruit et à la compression des images, en illustrant ces concepts par des exemples concrets et des études de cas.

Le troisième chapitre présente les résultats obtenus à partir de l'application des techniques de SVD aux signaux et aux images. Nous y analysons les performances des méthodes de filtrage et de compression, en comparant les résultats avec ceux obtenus par des techniques traditionnelles. Une discussion approfondie sur les avantages et les limites de la SVD est également incluse, mettant en lumière les situations où cette méthode est particulièrement efficace.

Nous concluons par des perspectives sur les recherches futures et les améliorations potentielles dans le domaine du traitement des signaux et des images.

CHAPTER 1:

Fondements du Traitement d'Images et de Signaux

1. Introduction

Le domaine du traitement d'images et de signaux s'est considérablement développé au fil des dernières décennies. Le traitement numérique des images et des signaux englobe toutes les méthodes visant à altérer une image ou un signal afin de les améliorer ou d'en extraire des informations pertinentes. Le traitement d'images et de signaux est ainsi un ensemble de méthodes et de techniques visant à rendre ces opérations possibles, plus simples, plus efficaces et plus agréables, permettant ainsi d'améliorer l'aspect visuel des images et des signaux et d'extraire des informations pertinentes.

Dans ce chapitre introductif, nous explorerons les principes fondamentaux du traitement d'images et de signaux, jetant les bases nécessaires pour comprendre les techniques avancées et les applications dans les chapitres suivants.

2. Concepts Fondamentaux

2.1. Image

Une image peut être définie de manière étendue comme une représentation visuelle ou une abstraction de la réalité qui est généralement enregistrée ou affichée sur un support physique ou numérique. Cette définition englobe les images dans un large spectre, qu'elles soient des photographies, des peintures, des diagrammes, des schémas, des représentations graphiques, ou même des modèles abstraits dans des domaines tels que la vision par ordinateur ou les neurosciences.

2.1.1. Caractéristiques d'une Image

a. Spécialisation Contextuelle

Une image capture généralement une scène ou une information visuelle spécifique à un moment donné dans le temps et dans un contexte donné.

b. Composition Pixelaire

Les images sont composées d'éléments discrets appelés pixels (éléments d'image en deux dimensions) ou voxels (éléments en trois dimensions). Chaque pixel ou voxel contient des informations sur la couleur, l'intensité lumineuse ou d'autres attributs visuels.

c. Dimensionnalité

Les images peuvent être bidimensionnelles (2D), comme les images photographiques ou les images affichées sur un écran, ou tridimensionnelles (3D), telles que les images volumétriques générées par des scanners médicaux.

d. Modalités

Les images peuvent être capturées ou générées à partir de différentes modalités, telles que la lumière visible, les ondes électromagnétiques (par exemple, les rayons X, l'infrarouge, l'ultraviolet), les ondes sonores (pour les images échographiques), ou même des données numériques synthétiques.

e. Représentation Numérique

Dans le contexte numérique, une image est souvent représentée sous forme de matrice de pixels, où chaque pixel est associé à des valeurs numériques représentant ses caractéristiques visuelles, telles que la couleur (dans le cas d'une image RVB) ou l'intensité lumineuse (dans le cas d'une image en niveaux de gris).

f. Interprétation et Sémantique

Les images peuvent être interprétées de manière subjective par des observateurs humains, mais aussi analysées de manière objective par des algorithmes d'apprentissage automatique ou des systèmes de vision par ordinateur pour extraire des informations utiles ou des structures significatives.

2.1.2. Types d'Images

a. Images Réelles

Les images réelles sont des représentations directes de scènes ou d'objets capturés à l'aide de dispositifs de capture d'images tels que des caméras.

b. Images Synthétiques

Les images synthétiques sont générées par des ordinateurs pour représenter des objets ou des environnements fictifs ou modélisés.

c. Images Médicales

Les images médicales sont des images utilisées en médecine pour le diagnostic, la planification chirurgicale, la recherche, etc., et peuvent inclure des images radiologiques, des images d'échographie, des images de résonance magnétique, etc.

d. Images Satellitaires

Les images satellitaires sont des images de la surface de la Terre capturées par des satellites artificiels pour diverses applications telles que la cartographie, la surveillance environnementale, la météorologie, etc.

e. Images Numériques

Les images numériques sont des images stockées et traitées sous forme de données numériques, pouvant être manipulées et analysées à l'aide d'outils informatiques.

2.2. Signal

Un signal est une représentation physique ou mathématique de toute quantité mesurable qui varie en fonction du temps, de l'espace ou d'autres variables indépendantes. Les signaux peuvent être

transmis, traités et analysés dans une grande variété de domaines, y compris l'électronique, les télécommunications, l'ingénierie des systèmes, la physique, les neurosciences et bien d'autres.

2.2.1. Caractéristiques d'un Signal

a. Variabilité Temporelle ou Spatiale

Les signaux peuvent varier en fonction du temps, de l'espace ou d'autres variables indépendantes. Par exemple, un signal audio peut varier en intensité sonore au fil du temps, tandis qu'une image thermique peut varier spatialement en fonction de la température.

b. Forme Ondéformée

Les signaux peuvent être représentés graphiquement sous forme d'ondes, où l'amplitude (ou l'intensité), la fréquence et la phase peuvent varier en fonction de la variable indépendante.

c. Nature Analogique ou Numérique

Les signaux peuvent être analogiques, c'est-à-dire qu'ils varient de manière continue dans le temps ou l'espace, ou numériques, où ils sont discrétisés en échantillons à des intervalles réguliers.

d. Classification

Les signaux peuvent être classés en différentes catégories en fonction de leurs caractéristiques, telles que les signaux continus ou discrets, périodiques ou non périodiques, déterministes ou aléatoires.

e. Mesurabilité et Interprétation

Les signaux peuvent être mesurés et interprétés à l'aide d'instruments de mesure appropriés ou d'algorithmes de traitement de signal pour extraire des informations utiles ou des caractéristiques importantes.

2.2.2. Types de Signaux

a. Signaux Audio

Les signaux audio représentent des variations de pression acoustique dans l'air et sont utilisés pour transmettre des informations sonores telles que la voix humaine, la musique, etc.

b. Signaux Électriques

Les signaux électriques représentent des variations de tension, de courant ou de champ électrique et sont utilisés dans les circuits électroniques, les systèmes de communication, etc.

c. Signaux Visuels

Les signaux visuels représentent des informations visuelles telles que des images, des vidéos, des diagrammes, etc., et sont utilisés dans la vision par ordinateur, la télévision, la surveillance, etc.

d. Signaux Biomédicaux

Les signaux biomédicaux sont des signaux générés par des processus physiologiques dans le corps humain, tels que l'électrocardiogramme (ECG), l'électroencéphalogramme (EEG), etc., et sont utilisés en médecine pour le diagnostic et la surveillance.

e. Signaux Numériques

Les signaux numériques sont des signaux qui sont discrétisés en valeurs numériques et sont souvent manipulés et traités par des ordinateurs ou des dispositifs électroniques numériques.

2.3. Échantillonnage et Quantification

L'échantillonnage consiste à prélever des échantillons d'un signal continu à des intervalles réguliers. La quantification consiste à attribuer une valeur discrète à chaque échantillon prélevé.

2.4. Transformation

Les transformations sont des opérations qui modifient la représentation d'un signal ou d'une image dans un domaine différent, tel que le domaine fréquentiel. Les transformations fréquentielles, telles que la transformée de Fourier, permettent d'analyser les signaux et les images en termes de composantes de fréquence.

3. Techniques de Traitement des images et signaux

Les techniques de traitement des images et des signaux sont des méthodes utilisées pour manipuler, analyser et extraire des informations à partir de données visuelles ou de signaux. Voici quelques-unes des techniques les plus couramment utilisées dans ce domaine :

3.1. Filtrage

3.1.1. Filtrage Spatial

Il s'agit d'une technique de base qui consiste à appliquer un masque (filtre) à chaque pixel de l'image en fonction des valeurs de ses voisins. Cela peut être utilisé pour atténuer le bruit, améliorer les contours, etc.

3.1.2. Filtrage fréquentiel

Cette technique consiste à transformer l'image dans le domaine fréquentiel à l'aide de la transformée de Fourier, puis à supprimer ou atténuer certaines fréquences indésirables avant de retransformer l'image dans le domaine spatial.

3.2. Restauration d'Image

3.2.1. Débruitage

Élimination ou réduction du bruit dans une image en utilisant des filtres adaptés, tels que les filtres moyennateurs, les filtres médians, ou des méthodes plus avancées comme la déconvolution.

3.2.2. Restauration d'images dégradées

Correction des images affectées par des distorsions telles que le flou, la distorsion géométrique, etc. Cela peut être réalisé en utilisant des techniques de restauration telles que la déconvolution.

3.3. Segmentation

3.3.1. Seuillage

Division d'une image en régions ou en objets en fonction de la valeur des pixels. Cela peut être réalisé en utilisant des seuils fixes ou des seuils adaptatifs.

3.3.2. Détection de contours

Identification des contours et des frontières des objets dans une image. Les techniques couramment utilisées incluent la détection de gradients (par exemple, l'opérateur de Sobel), la détection de contours basée sur les contours actifs, etc.

3.4. Transformation d'Images

3.4.1. Transformée de Fourier

Transformation d'une image du domaine spatial vers le domaine fréquentiel pour analyser ses composantes de fréquence. Cela est utile pour la suppression de fréquences indésirables ou pour l'extraction de caractéristiques spécifiques.

3.4.2. Transformée en ondelettes

Technique de transformation qui permet d'analyser l'image à différentes échelles et résolutions. Elle est largement utilisée pour la compression d'images, la détection de contours, etc.

3.5. Reconnaissance et Classification

3.5.1. Extraction de caractéristiques

Identification et extraction des caractéristiques pertinentes d'une image ou d'un signal, telles que les textures, les formes, les motifs, etc.

3.5.2. Classification

Attribution d'une étiquette ou d'une catégorie à une image ou à un signal en fonction de ses caractéristiques extraites. Les techniques de classification courantes incluent les méthodes supervisées (par exemple, les machines à vecteurs de support) et non supervisées (par exemple, le clustering).

3.6. Compression

3.6.1. Compression sans perte

Réduction de la taille d'une image ou d'un signal sans perte d'information. Les algorithmes courants incluent la codification de Huffman, la codification Run-Length, etc.

3.6.2. Compression avec perte

Réduction de la taille d'une image ou d'un signal en acceptant une perte d'information acceptable. Les techniques courantes incluent la transformée en cosinus discrète (DCT) utilisée dans JPEG, la transformée en ondelettes utilisée dans JPEG2000, etc.

4. Applications

Les applications du traitement d'images et de signaux sont diverses et touchent de nombreux domaines. Voici quelques-unes des applications les plus courantes :

4.1. Imagerie médicale

- **Tomographie par rayons X, IRM, et TEP** : Pour le diagnostic et le suivi des maladies.
- **Segmentation d'organes et de tumeurs** : Pour l'analyse et le traitement ciblé.
- **Restauration d'images médicales** : Pour améliorer la clarté et la qualité des images

4.2. Vision par ordinateur

- **Reconnaissance faciale** : Pour l'authentification, la sécurité et la surveillance.
- **Suivi d'objets** : Pour la surveillance vidéo, la robotique et les interfaces homme-machine.
- **Analyse de mouvement** : Pour l'animation, le suivi des gestes et la réalité virtuelle.

4.3. Traitement du signal audio

- **Compression audio** : Pour le stockage efficace et la diffusion de musique et de son.
- **Reconnaissance de la parole** : Pour les assistants vocaux, la transcription automatique et les systèmes de commande vocale.
- **Suppression de bruit** : Pour améliorer la qualité audio dans les applications de communication et de divertissement.

4.4. Télédétection et imagerie satellite

- **Classification des terrains** : Pour la cartographie, la surveillance environnementale et l'agriculture de précision.
- **Détection des changements** : Pour surveiller les évolutions environnementales, urbaines et agricoles.

4.5. Traitement d'images pour la sécurité et la surveillance

- **Détection d'intrusion** : Pour les systèmes de sécurité et de surveillance vidéo.
- **Analyse de comportement** : Pour détecter les comportements suspects ou anormaux dans les environnements surveillés.

4.6. Traitement d'images pour l'industrie

- **Contrôle qualité** : Pour l'inspection automatisée des produits manufacturés.
- **Vision industrielle** : Pour le guidage robotique, l'assemblage automatisé et la reconnaissance de pièces.

4.7. Communication et multimédia

- **Compression d'images et de vidéos** : Pour le stockage et la diffusion efficace des médias.
- **Traitement des images pour les réseaux sociaux** : Pour les filtres et les effets spéciaux.

4.8. Biologie et sciences de la vie

- **Microscopie d'imagerie** : Pour l'analyse cellulaire et la recherche biomédicale.
- **Imagerie cérébrale** : Pour l'étude du cerveau et des processus cognitifs.

5. Image Numérique

Les images qu'on va utiliser tout au long de ce mémoire de fin d'étude sont des images numériques. Une image numérique est une mosaïque de points unicolores (pixels), et peut être définie comme une fonction bidimensionnelle, $f(x, y)$, où x et y sont des coordonnées spatiales (plan) pour chaque pixel. Ces pixels seront affectés de nombres binaires permettant de définir des teintes de gris ou des couleurs.

5.1. Types d'images numériques

5.1.1. Image vectorielles

Une image vectorielle appelée aussi une image en mode trait, est une image numérique composée par des formules géométriques individuelles, des primitives géométriques (cercle, courbe de Bézier, droite) définie pour différentes caractéristiques comme leur forme, position, couleurs, etc....

5.1.2. Images matricielle

Une image matricielle nommée aussi carte de point (bitmap), est une image constituée d'une matrice ou d'un tableau sous forme de grille) ou chaque case possède une couleur (point coloré) qui lui est propre. Il s'agit donc d'une juxtaposition de point de couleur formant dans leur ensemble, une image, ces points de couleurs appelés dans le domaine d'image numérique « pixel ».

Les avantages de ce mode sont :

- Simplicité de stockage en mémoire, puisqu'il suffit de coder la succession des valeurs de la matrice.
- Grande facilité de traitement par des algorithmes primitifs au niveau du pixel.

Les inconvénients de ce type de représentation sont :

- Espace mémoire important pour gérer des grandes images ou des images de bonne qualité.

- Algorithme de tracé plus complexe (défaut de reproduction dû au mode d'affichage des lignes en marche d'escalier)

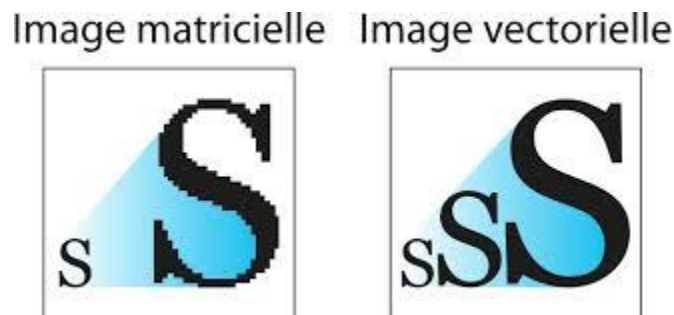


Figure I-1. Image vectorielle et l'image matricielle.

5.2. Caractéristiques d'une image numérique

L'image est un ensemble structuré d'informations caractérisé par les paramètres suivants :

5.2.1. Pixel

Contraction de l'expression anglaise " *Picture Element* " élément d'image, un pixel est la plus petite unité d'une image numérique. C'est un petit point coloré qui constitue une partie de l'image. Les images numériques sont composées d'une grille de pixels, chaque pixel ayant une couleur et une position spécifiques. Plus il y a de pixels dans une image, plus elle est détaillée.

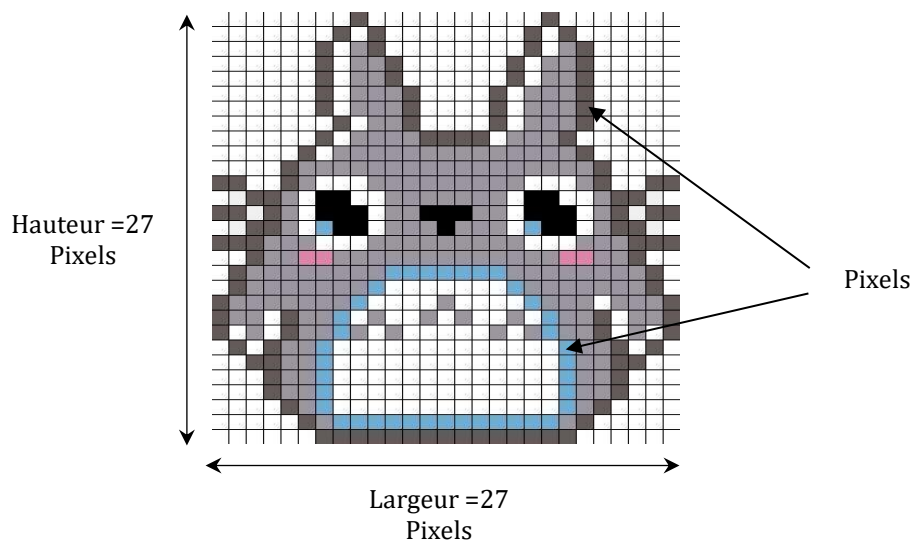


Figure I-2. Exemple d'image 12x12 pixels.

5.2.2. Résolution

La résolution d'une image se réfère à la quantité de détail qu'elle contient, généralement exprimée en pixels par pouce (**ppp**) ou en pixels par unité de longueur. Une résolution plus élevée signifie qu'il y a plus de pixels par unité de longueur, ce qui permet d'obtenir une image plus détaillée et de meilleure

qualité lorsqu'elle est imprimée ou affichée à une taille donnée. Une résolution plus faible produit une image moins détaillée et peut apparaître floue ou pixélisée lorsqu'elle est agrandie.

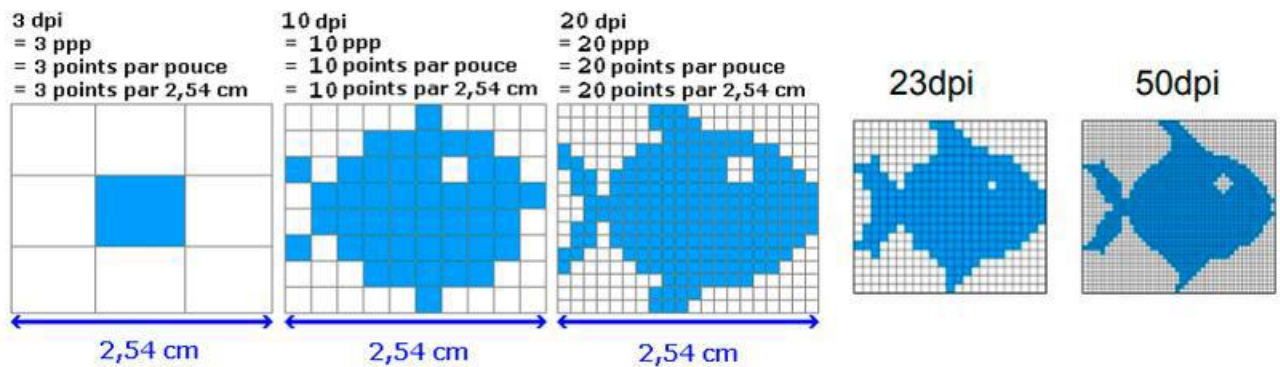


Figure I-3. Modèles de résolutions.

5.2.3. Taille d'une image

La taille d'une image est une mesure qui décrit soit les dimensions physiques de l'image (comme sa largeur et sa hauteur en pixels ou en unités physiques telles que les pouces ou les centimètres), soit la quantité d'espace qu'elle occupe sur un disque dur ou dans la mémoire (exprimée en octets, kilo-octets, méga-octets, etc.).

5.2.4. Bruit

Le bruit dans une image numérique est une perturbation aléatoire qui peut se manifester sous forme de variations de luminosité ou de couleur indésirables. Il est souvent causé par des facteurs tels que la sensibilité du capteur, les conditions d'éclairage, ou les processus de transmission et de traitement de l'image. Le bruit peut rendre une image moins nette et altérer sa qualité visuelle. Les techniques de réduction de bruit sont souvent utilisées pour atténuer ces perturbations et améliorer la qualité de l'image.



Figure I-4 : (a) Image avec bruit ; (b) Image sans bruit.

5.2.5. Compression des images

La compression d'images est un processus utilisé pour réduire la taille d'un fichier image en conservant autant que possible sa qualité visuelle. Il existe deux types de compression d'images : la compression avec perte et la compression sans perte. Il existe plusieurs techniques de

compression d'images, chacune ayant ses propres avantages et inconvénients. Voici quelques-unes des techniques de compression d'images les plus couramment utilisées :

a. Compression avec perte

- **JPEG (Joint Photographic Experts Group)** : JPEG est l'un des formats de compression d'images les plus populaires pour les photographies et les images avec des variations de couleurs subtiles. Il utilise une combinaison de transformations de cosinus discrètes et de quantification pour réduire la taille des fichiers. La compression JPEG est efficace pour réduire considérablement la taille des fichiers, mais elle peut entraîner une perte de qualité perceptible, en particulier à des niveaux de compression élevés.
- **WebP** : Développé par Google, WebP est un format d'image moderne qui prend en charge la compression avec perte et sans perte. Il utilise des techniques de prédiction, de segmentation et de transformation pour réduire la taille des fichiers sans perte de qualité significative. WebP est de plus en plus utilisé sur le web en raison de ses performances de compression élevées.

b. Compression sans perte

- **PNG (Portable Network Graphics)** : Le format PNG est largement utilisé pour les images nécessitant une transparence ou une qualité sans perte. Il utilise une combinaison de techniques de compression LZ77 et Huffman pour réduire la taille des fichiers sans perte de qualité. PNG est idéal pour les graphiques, les illustrations et les images nécessitant une netteté et une précision élevées.
- **GIF (Graphics Interchange Format)** : GIF est un format d'image couramment utilisé pour les animations et les images simples nécessitant une faible profondeur de couleur. Il utilise une technique de compression sans perte basée sur la substitution de motifs pour réduire la taille des fichiers. Bien que GIF soit limité en termes de nombre de couleurs, il reste populaire pour les petites animations et les images à faible résolution.

c. Compression par ondelettes

- **JPEG 2000** : JPEG 2000 est une version améliorée du format JPEG qui utilise la transformée en ondelettes pour la compression. Il offre une meilleure qualité d'image que JPEG pour des niveaux de compression similaires et prend en charge la compression sans perte ainsi que la compression avec perte.
- **Wavelet Scalar Quantization (WSQ)** : WSQ est une technique de compression d'image utilisée principalement dans le domaine de la biométrie pour les empreintes

digitales. Il utilise la transformée en ondelettes et la quantification scalaire pour réduire la taille des fichiers tout en préservant les caractéristiques importantes de l'image.

6. Signal électrocardiogramme

Le signal qu'on va utiliser tout au long de ce mémoire de fin d'étude est un signal biomédical qui est le signal électrocardiogramme. Un signal électrocardiographique, souvent abrégé en ECG, est une représentation graphique des impulsions électriques générées par l'activité électrique du cœur au fil du temps. Ces impulsions électriques sont enregistrées à l'aide d'électrodes placées sur la peau du patient, généralement sur le torse, les bras et les jambes. L'ECG présente plusieurs ondes distinctes qui correspondent à différents événements du cycle cardiaque, tels que la contraction et la relaxation des différentes parties du cœur. Ces ondes comprennent notamment les ondes P, QRS et T. L'analyse de l'ECG est essentielle pour diagnostiquer les problèmes cardiaques tels que les arythmies, les infarctus du myocarde et d'autres affections cardiovasculaires.

L'électrocardiogramme (ECG) est une représentation graphique de l'activité électrique du cœur. Il est utilisé pour évaluer la santé cardiaque en enregistrant les impulsions électriques qui provoquent les battements cardiaques. Voici quelques éléments clés de l'ECG :

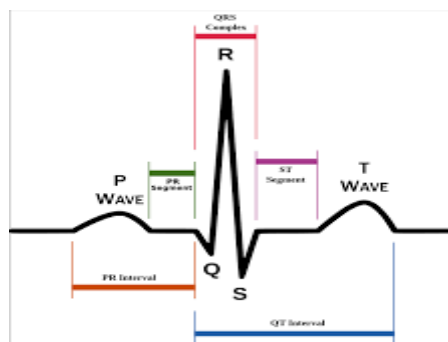


Figure I-5. Signal ECG.

6.1. Ondes principales

- ✓ **Onde P** : Représente la dépolarisation des oreillettes, indiquant la contraction des oreillettes.
- ✓ **Complexe QRS** : Représente la dépolarisation des ventricules, indiquant la contraction des ventricules.
- ✓ **Onde T** : Représente la repolarisation des ventricules, indiquant la relaxation des ventricules.

6.2. Segments et intervalles

- ✓ **Segment PR** : Temps entre le début de l'onde P et le début du complexe QRS, représentant la conduction à travers les nœuds auriculoventriculaires.

- ✓ **Segment ST** : Période entre la fin du complexe QRS et le début de l'onde T, qui indique la phase de dépolarisation ventriculaire.
- ✓ **Intervalle QT** : Temps entre le début de l'onde QRS et la fin de l'onde T, représentant la durée totale de la dépolarisation et de la repolarisation ventriculaire.

6.3. Filtrage du signal électrocardiogramme

L'enregistrement du signal ECG peut être affecté par plusieurs sources de bruit, ce qui peut compromettre la qualité des données et rendre l'interprétation difficile. Voici quelques-unes des sources de bruit courantes et des techniques pour les atténuer :

- a. Bruit électrique ambiant** : Les appareils électriques, les lignes électriques et d'autres équipements électroniques peuvent introduire du bruit électrique dans le signal ECG. Pour réduire ce bruit, il est recommandé d'enregistrer le signal dans un environnement calme et éloigné des sources d'interférences électriques. Des techniques de filtrage appropriées peuvent également être appliquées pour éliminer ce bruit.
- b. Mouvements musculaires** : Les mouvements musculaires du patient peuvent introduire des artefacts dans le signal ECG, en particulier lors d'une activité physique ou de mouvements involontaires. Des techniques de filtrage adaptatives peuvent être utilisées pour réduire ce bruit, ou des méthodes de prétraitement telles que l'utilisation de techniques de fixation adéquates pour minimiser les mouvements du patient.
- c. Interférences de ligne de base** : Ces interférences peuvent être causées par des variations lentes du niveau de base du signal ECG, telles que celles causées par le déplacement du patient ou les changements dans la position des électrodes. Des méthodes de filtrage passe-haut peuvent être utilisées pour éliminer ces variations lentes et stabiliser la ligne de base du signal.
- d. Interférences électromagnétiques** : Les appareils électroniques, les téléphones portables et d'autres équipements électriques peuvent générer des interférences électromagnétiques qui perturbent le signal ECG. Pour réduire ce type de bruit, il est recommandé d'éloigner ces appareils du patient ou d'utiliser des techniques de blindage pour protéger le système d'enregistrement du signal ECG.

Le filtrage des signaux ECG est essentiel pour éliminer le bruit indésirable et améliorer la qualité du signal, facilitant ainsi son interprétation et son analyse. Voici quelques techniques de filtrage couramment utilisées :

- a. Filtrage passe-bas** : Il atténue les composantes de haute fréquence du signal, éliminant ainsi le bruit haute fréquence tout en préservant les caractéristiques importantes du signal ECG. Cela aide à lisser le signal et à réduire le bruit provenant de sources telles que les interférences électriques et les artefacts musculaires.

- b. Filtrage passe-haut :** Il réduit les basses fréquences indésirables, telles que les dérives du signal de base et les mouvements du patient, tout en préservant les variations rapides associées aux complexes QRS et aux ondes P et T. Cela permet de stabiliser la ligne de base du signal ECG et d'éliminer les artefacts de mouvement.
- c. Filtrage passe-bande :** Il sélectionne une plage spécifique de fréquences qui correspond aux composantes du signal ECG tout en atténuant les fréquences hors de cette plage. Cela aide à éliminer le bruit provenant de sources spécifiques tout en conservant les informations cardiaques essentielles.
- d. Filtrage adaptatif :** Cette méthode ajuste les paramètres du filtre en fonction des caractéristiques du signal ECG en temps réel. Elle peut être utile pour s'adapter aux variations du signal dues à des facteurs tels que les changements de posture du patient ou les interférences environnementales.
- e. Filtrage médian :** Plutôt que de calculer une moyenne des points de données, ce filtre remplace chaque point par la médiane des valeurs dans une fenêtre temporelle donnée. Cela aide à éliminer les pics de bruit tout en préservant les caractéristiques du signal ECG.
- f. Filtrage par transformée en ondelettes :** Cette technique décompose le signal en différentes échelles et fréquences à l'aide de la transformée en ondelettes, permettant une analyse multi-résolution et la suppression efficace du bruit à différentes échelles.

8. Conclusion

En conclusion, ce chapitre a jeté les bases essentielles du traitement d'images et de signaux, offrant ainsi un aperçu approfondi des concepts fondamentaux et des techniques clés utilisées dans ces domaines passionnants de l'informatique et de l'ingénierie.

CHAPITRE II:

METHODES ET TECHNIQUES ALGEBRIQUES

1. Introduction

La majorité des algorithmes numériques existants actuellement ont été issus de l'algèbre linéaire. L'algèbre linéaire est donc un outil très important pour comprendre les bases des méthodes qu'on peut rencontrer en plusieurs domaines tels que traitement de signaux, télécommunications, control, ...

Vu cet intérêt, nous avons envisagé de présenter dans ce chapitre le bagage essentiel en algèbre linéaire qui nous permet d'éclairer aux lecteurs la structure des algorithmes qui seront présentés au sein de ce mémoire.

2. Systèmes d'équations

Le problème principal de l'algèbre linéaire se résume pratiquement dans la résolution d'un système d'équations linéaires. Le cas également le plus normal sera celui de n équations linéaires avec n inconnues. Un système d'équations linéaires peut être vu ou représenté par deux formes différentes :

➤ **Forme 1** : forme en lignes .

➤ **Forme 2** : forme en colonnes.

Si on considère la représentation simultanée lignes colonnes à la fois, on obtient ce qu'on appelle "forme matricielle", définie par une matrice A .

▪ Exemple 1

Soit à résoudre le système à deux équations et à deux inconnues suivant :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned} \quad (1)$$

Ce système peut être représenté par la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_b \quad (2)$$

- **Forme en lignes** : dans cette représentation, chaque équation dans (II.1) est une ligne ; donc, si on trace dans le plan $(x - y)$ ces deux lignes, la solution du système sera le point d'intersection de ces deux lignes comme le montre la figure .1.
- **Forme en colonnes** : dans cette représentation, le système (II.1) est mis sous la forme suivante :

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

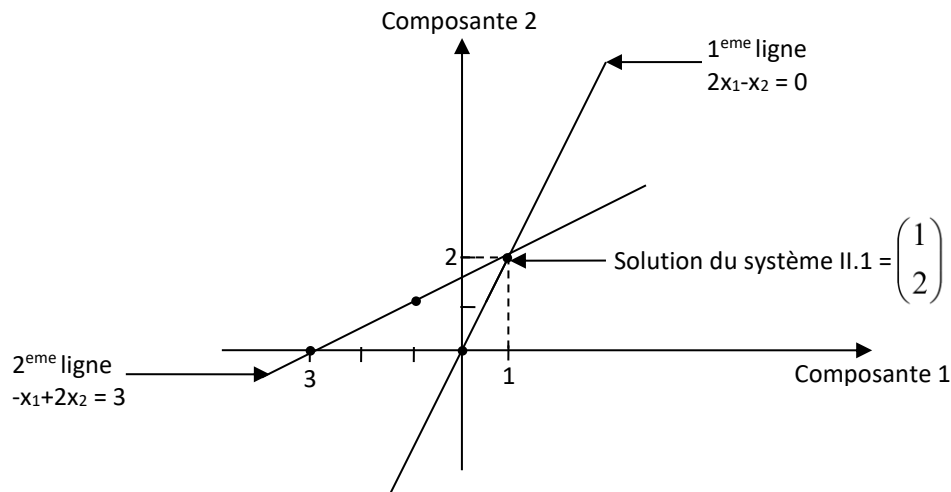


Figure II-1. Résolution par la forme en ligne.

On remarque que cette forme utilise les colonnes de la matrice A , et on peut dire que le vecteur b est une combinaison linéaire des colonnes de A . Comme le montre la figure. 2, la solution de ce système est donnée par les valeurs de x_1 et x_2 telle que la combinaison des colonnes donne le vecteur b .

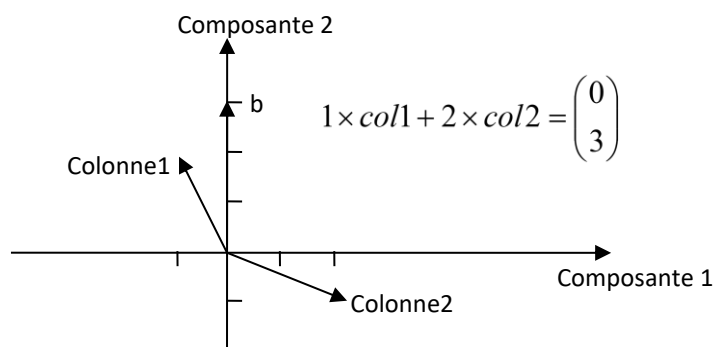


Figure II-2. Résolution par la forme en colonnes.

▪ **Remarque** : si on considère toutes les combinaisons de $col1$ et $col2$, on obtient ce qu'on appelle espace des colonnes.

• **Forme matricielle** : dans cette forme, le système (1) devient :

$$Ax = b$$

La multiplication d'une matrice par un vecteur sera définie par la combinaison linéaire des colonnes de A comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 2 + & \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 1 & = & \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \\ Col1 & Col2 & & Col1 & Col2 & & \end{array}$$

Donc, Ax est une combinaison linéaire des colonnes de A . L'ensemble de tous les vecteurs définis par cette combinaison linéaire s'appelle "Espace des colonnes".

La multiplication d'un vecteur par une matrice sera définie par la combinaison des lignes de A comme suit:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 5 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Ligne1}} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{Ligne2}}$$

3. Multiplication des matrices

Soit trois matrices $A: m \times n$, $B: n \times p$ et $C: m \times p$ tel que :

$$A \cdot B = C$$

Cette multiplication peut être faite par les trois méthodes non classiques suivantes :

3.1. Méthode 1

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \\ A & B & \uparrow \quad C \quad \uparrow \\ & & A \cdot \text{Col1}(B) \quad A \cdot \text{Colp}(B) \end{array}$$

Chaque colonne de la matrice C est une combinaison des colonnes de A .

3.2. Méthode 2

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{ccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \\ A & B & C \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{lig1}(A) \cdot B \\ \leftarrow \text{ligm}(A) \cdot B \end{array}$$

Chaque ligne de la matrice C est une combinaison des lignes de B .

3.3. Méthode 3

$$A \cdot B = \text{Somme des } (\text{Cols}(A)) \cdot (\text{Ligne de } B)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Remarque :** si une matrice est le produit d'une colonne par une ligne, alors toutes les colonnes de la matrice résultante sont dans le même sens (ainsi la même remarque pour toutes les lignes).

4. Inverse d'une matrice

Pour le moment, l'inverse d'une matrice sera associé seulement aux matrices carrées ($m = n$) ; une matrice carrée peut avoir un inverse comme elle ne peut l'avoir. Si cet inverse existe, il sera noté par A^{-1} , et dans le cas négatif, on dit que A est singulière .

La matrice A est dite singulière si les colonnes ou les lignes sont dépendantes (existence d'une relation linéaire entre les colonnes ou entre les lignes) comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Si une relation linéaire existe entre les colonnes de A , alors :

$$Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc, dans ce cas A n'a pas d'inverse (puisque $Ax=0$).

L'inverse d'une matrice carrée est un inverse gauche et droite à la fois, c'est-à-dire :

$$A^{-1}A = I = AA^{-1} \quad (4)$$

Où I est une matrice identité.

Finalement on peut dire que si A une matrice carrée, alors elle n'a pas d'inverse si on peut trouver x tel que : $Ax = 0$.

5. Transposé d'une matrice

La matrice transposée de $A = (a_{ij})$ sera noté par A^T , et il est défini par :

$$A^T = (a_{ji}) \quad (5)$$

Le transposé d'une matrice symétrique reste égal à la même matrice, c'est-à-dire, $A^T = A$.

Notons que le produit d'une matrice transposée par la matrice elle-même nous donne une matrice symétrique, c'est-à-dire, $A^T A$ est une matrice symétrique.

6. Espace vectoriel

Les deux seules opérations qu'on peut effectuer sur les vecteurs sont l'addition et la multiplication par un scalaire. Un ensemble de vecteurs munis de ces deux opérations peut former donc des combinaisons linéaires. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires sera appelé " Espace vectoriel ".

La figure.3.a représente un espace vectoriel à deux dimensions, car si on applique les deux opérations (+, .) sur un vecteur de cet espace, le résultat sera toujours dans le même espace. La figure .3.b n'est pas un espace vectoriel, car si on multiplie un vecteur appartenant au premier quadrant par (-1), le résultat sera alors à l'extérieur de ce quadrant.

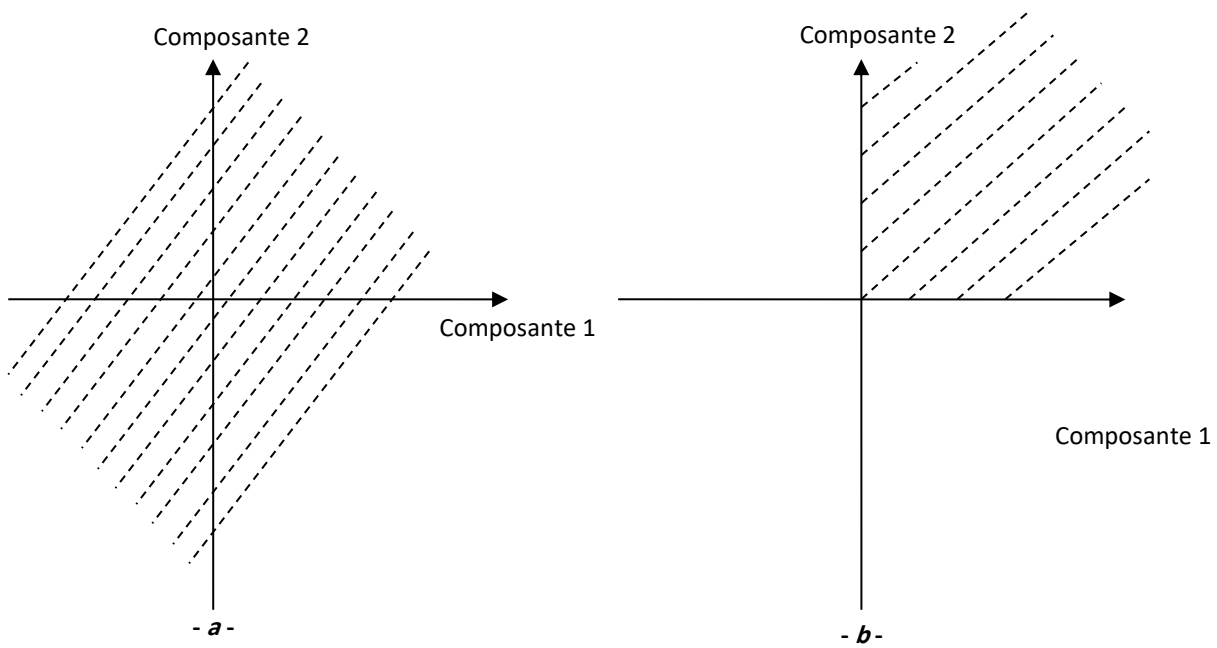


Figure II-3. : *a)* Exemple d'un espace vectoriel R^2
b) contre-exemple d'un espace vectoriel.

Un espace vectoriel qui est une partie d'un autre sera appelé sous espace vectoriel, comme le montre par exemple la figure.4. La ligne passant par l'origine sera un sous espace vectoriel dans R^2 comme le montre la figure.4.

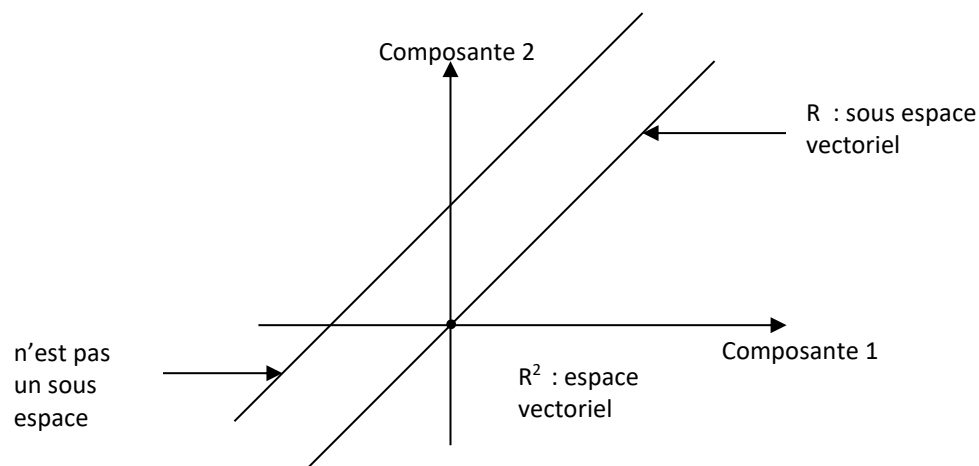


Figure II-4. Sous espace vectoriel.

Les sous espaces vectoriels de R^2 sont tous les vecteurs dans R^2 , toutes les droites qui traversent l'origine et finalement le point 0 (origine).

▪ **Exemple**

Si A est une matrice dans l'espace vectoriel R^3 , donnée par : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Les colonnes de A sont dans l'espace vectoriel R^3 , mais elles forment un sous espace dans R^3 de dimension deux appelé l'espace des colonnes $C(A) = R^2$ comme le montre la figure .5.

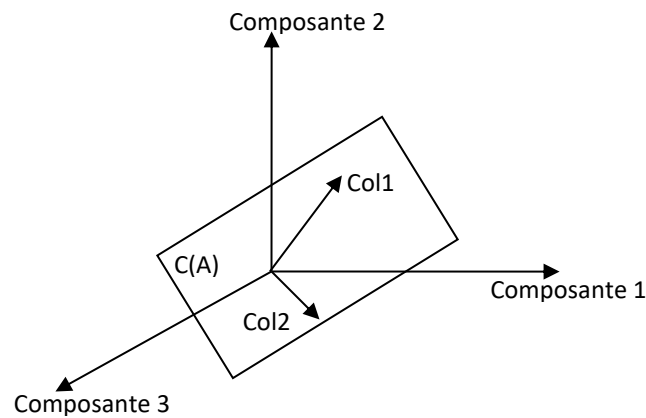


Figure II-5. Espace de colonnes défini par $col1$ et $col2$ représentant un sous espace de R^3 .

6.1.Espace des colonnes d'une matrice

Si par exemple A est une matrice 4×3 donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

On remarque que les colonnes de A sont des vecteurs dans l'espace R^4 puisque elles ont quatre composantes. Les trois colonnes de A génèrent donc un sous espace de dimension 3 (R^3), on va appeler cet espace " espace des colonnes ", c'est un sous espace de R^4 , et il est noté $C(A)$; noter que cette espace est formé par toutes les combinaisons linéaires des colonnes de A .

Le système linéaire $Ax = b$ possèdera des solutions que si le vecteur b appartient à l'espace des colonnes de A . Dans le cas contraire, si $b \notin C(A)$, le système d'équations ne possède pas de solutions, car $b \in R^4$ et $C(A) \subseteq R^4$, donc la seule condition pour l'existence d'une solution est que $b \in R^3$ (quatrième composante soit nulle) qui veut dire aussi que b doit être une combinaison linéaire des colonnes de A .

6.2.Espace Nul d'une matrice

Soit toujours la matrice A définie dans le paragraphe précédent. L'espace Nul de A noté $N(A)$ ou $Ker(A)$ sera formé par tous les vecteurs x vérifiant $Ax = 0$, dans cet exemple, le vecteur x possède trois composantes, donc notre espace nul sera inclus dans R^3 .

- **Remarque** : pour la matrice $A:4 \times 3$, l'espace $C(A)$ est dans R^4 et l'espace $N(A)$ dans R^3 ; donc généralement pour une matrice $A:m \times n$ $C(A)$ sera dans R^m et $N(A)$ sera dans R^n .
- **Remarque** : notons que le vecteur nul appartient toujours à l'espace $Nul N(A)$.

6.3.Rang d'une matrice

La résolution d'un système d'équations peut être faite par la méthode d'élimination qui va nous donner le nombre de pivots. Ce nombre de pivots reflète une information très utile dans la théorie des matrices, c'est une grandeur qui nous donne le nombre des colonnes linéairement indépendantes. On va appeler ce nombre "rang de la matrice" qui sera noté par r appelé aussi *Rank* (A). Si A est une matrice $m \times n$ de rang r , alors :

$$\begin{aligned} r &\leq m \\ r &\leq n \end{aligned} \tag{6}$$

Ou bien :

$$r \leq \min(m, n)$$

Plusieurs cas peuvent être distingués :

➤ Rang complet en colonnes : $r = n < m$

dans ce cas l'espace nul contient seulement le vecteur nul et le système possède une seule solution si $b \in C(A)$.

➤ Rang complet en lignes : $r = m < n$

dans ce cas l'espace nul contient d'autres éléments que le vecteur 0, et le système aura une infinité de solution quelque soit b .

➤ Rang complet : $r = n = m$

pour ce cas, toutes les matrices sont carrées, et sont toutes inversibles, et le système aura une seule solution car l'espace nul contient seulement le vecteur nul.

➤ $r < n$ et $r < m$

dans ce cas, soit on n'a pas de solution si $b \notin C(A)$ soit on a une infinité de solutions si $b \in C(A)$.

6.4.Indépendance

Un ensemble de vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est linéairement indépendant si aucune combinaison donne le vecteur nul, c'est-à-dire :

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \neq 0 \tag{7}$$

A l'exception de la combinaison zéro ou tous les c_i sont nuls.

Pour une matrice $A: m \times n$ ou $m < n$, on a $N(A) \neq 0$, donc le système $Ax = 0$ possède des solutions non nulles c'est-à-dire, pour $x \neq 0$ on a $Ax = 0$. (Seulement dans le cas où le nombre d'inconnus dépasse le nombre des équations).

Les colonnes d'une matrice A sont dépendantes s'il existe des vecteurs non nuls dans l'espace $Nul N(A)$ et si $N(A) = 0$, les colonnes sont donc indépendantes.

6.5.Génération d'un espace "Span"

Générer ou spanner un espace par les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ veut dire obtenir l'espace de toutes les combinaisons des ces vecteurs.

Comme exemple, on peut dire que les colonnes d'une matrice A Span l'espace des colonnes.

6.6.Base

Une base d'un espace vectoriel est une séquence de vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_d$ avec deux propriétés :

- 1) Ils sont indépendants
- 2) Ils span l'espace.

6.7.Dimension

Etant donné un espace vectoriel, chaque base de cet espace possède le même nombre de vecteurs. On appelle ce nombre dimension de l'espace qui reflète la grandeur de l'espace.

▪ Exemple

Soit l'espace $Span C(A)$ tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Après élimination on trouve que le nombre de pivots est deux, qui veut dire que le rang de A est deux ($Rank(A) = 2$). Le rang de A est la dimension de l'espace $C(A)$, donc :

$$rank(A) = \dim C(A) = \text{nombre de pivots} = 2$$

et bien sur, les deux premières colonnes de A forment une base de $C(A)$.

L'espace nul de A est de dimension deux selon la formule :

$$\dim N(A) = n - r = 4 - 2 = 2$$

Où : $r = rank(A)$

7. Quatre espaces fondamentaux

Les quatre espaces fondamentaux représentent vraiment le cœur de l'algèbre linéaire. Ces espaces sont :

- L'espace des colonnes $C(A)$
- L'espace nul $N(A)$
- L'espace des lignes (combinaison linéaire des lignes de la matrice) noté $C(A^T)$
- L'espace nul de A^T noté $N(A^T)$ est appelé espace nul gauche de A .

Si la matrice A est $m \times n$, alors :

- $C(A) \subseteq R^m$, $\dim C(A) = r$ où $r = \text{rang}(A)$
- $N(A) \subseteq R^n$, $\dim N(A) = n - r$
- $C(A^T) \subseteq R^n$, $\dim C(A^T) = r$
- $N(A^T) \subseteq R^m$, $\dim N(A^T) = m - r$.

D'où la représentation suivante des quatre espaces :

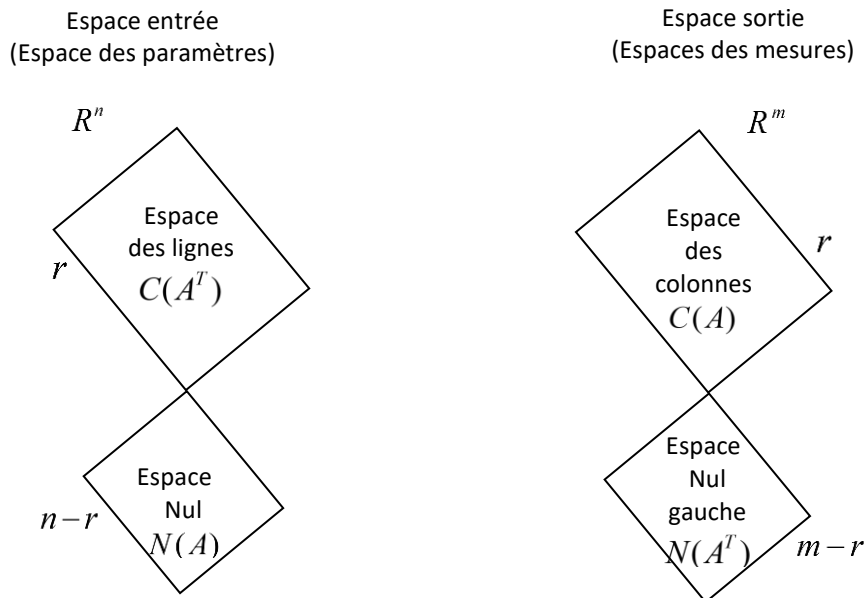


Figure II-6. Représentation des espaces fondamentaux.

L'espace des lignes est orthogonal à l'espace nul, car si $Ax = 0$, cela veut dire que chaque ligne dans A est perpendiculaire au vecteur x . On constate la même remarque (perpendicularité) pour les espaces colonnes et $N(A^T)$.

8. Matrices de rang unitaire

Une matrice de rang unitaire est une matrice vérifiant $\text{rang}(A) = r = 1$.

Soit par exemple la matrice $A: 2 \times 3$ telle que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

La 2^{ème} ligne est un multiple de la première ligne, donc la première ligne est une base de l'espace des lignes. On a aussi :

$$\dim C(A) = \text{rang} = \dim C(A^T) = 1$$

De telles matrices peuvent être représentées par le produit de deux vecteurs comme suit : (1^{ère} colonne $\times$ 1^{ère} ligne)

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \quad 4 \quad 8]$$

donc, généralement :

$$A = UV^T$$

9. Projection

Soit à projeter un vecteur b sur un autre vecteur a comme le montre la figure II.7. Le sens de cette projection est de trouver un point sur la droite a qui soit le plus proche possible de b , ce point sera donc la projection perpendiculaire de b sur a .

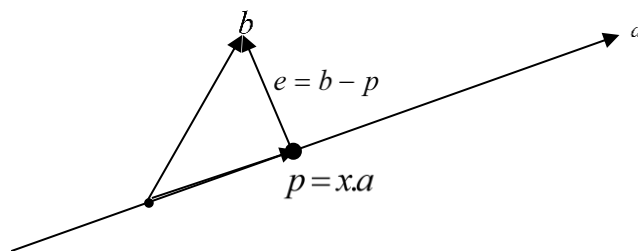


Figure II-7. Projection.

Le vecteur e représente l'erreur entre b et a .

On a :

$$a^T (b - x \cdot a) = 0 \Rightarrow x = \frac{a^T b}{a^T a} \quad (8)$$

Donc, la projection sera donnée par :

$$p = a \cdot x = a \cdot \frac{a^T b}{a^T a} \quad (9)$$

Cette projection peut être exprimée aussi par le biais de la matrice de projection :

$$p = \frac{a \cdot a^T}{a^T a} b = P \cdot b \quad (10)$$

En résumé, on peut dire que si a est un vecteur (droite), la quantité $\frac{a \cdot a^T}{a^T a} = P$ représente une matrice qui lorsque on la multiplie par n'importe quel vecteur, on obtient la projection de ce dernier sur la ligne a

10. Méthodes des moindres carrées

Puisque le système $Ax = b$ peut ne pas avoir une solution, nous sommes amenés alors à approximer b par sa projection dans l'espace des colonnes, ce qui nous donne le vecteur p . Alors on a :

$$A\hat{x} = p$$

où $p = \text{proj}_{C(A)} b$ et $\hat{x}$ la valeur approximée de x .

Cette situation est clairement illustrée dans la figure suivante :

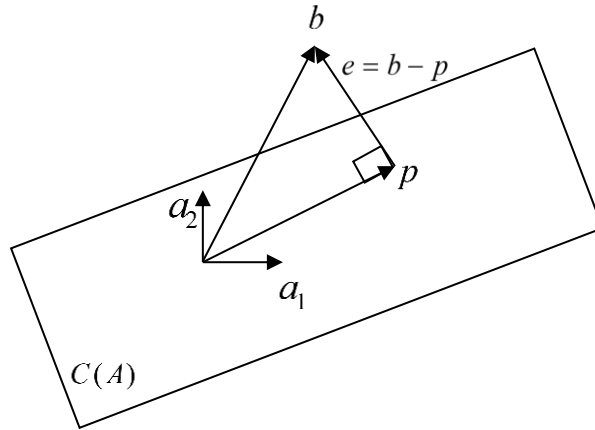


Figure II-8. Projection d'un vecteur de mesure dans l'espace $C(A)$ (bidimensionnel).

Suivant la figure II.8, la matrice $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, où a_1 et a_2 sont les colonnes de la matrice A .

On a :

$$p = \hat{x}_1 a_1 + \hat{x}_2 a_2 = A\hat{x} \quad (11)$$

Notre problème maintenant sera de déterminer $\hat{x}$.

Nous avons : $b - A\hat{x} \perp C(A) \Rightarrow$

$$a_1^T(b - A\hat{x}) = 0 \quad \text{et} \quad a_2^T(b - A\hat{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix} (b - A\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^T(b - A\hat{x}) = 0 \Rightarrow A^T A\hat{x} = A^T b$$

$$\Rightarrow \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (12)$$

L'équation (12) représente les solutions au sens des moindres carrées du système $Ax = b$.

Donc, et après (12), la matrice de projection sera :

$$p = A \cdot (A^T A)^{-1} A^T b = P \cdot b \quad (13)$$

où $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ est la matrice de projection du vecteur b dans l'espace des colonnes.

Géométriquement, les principes des moindres carrés sont représentés dans les quatre espaces fondamentaux par la figure.9 :

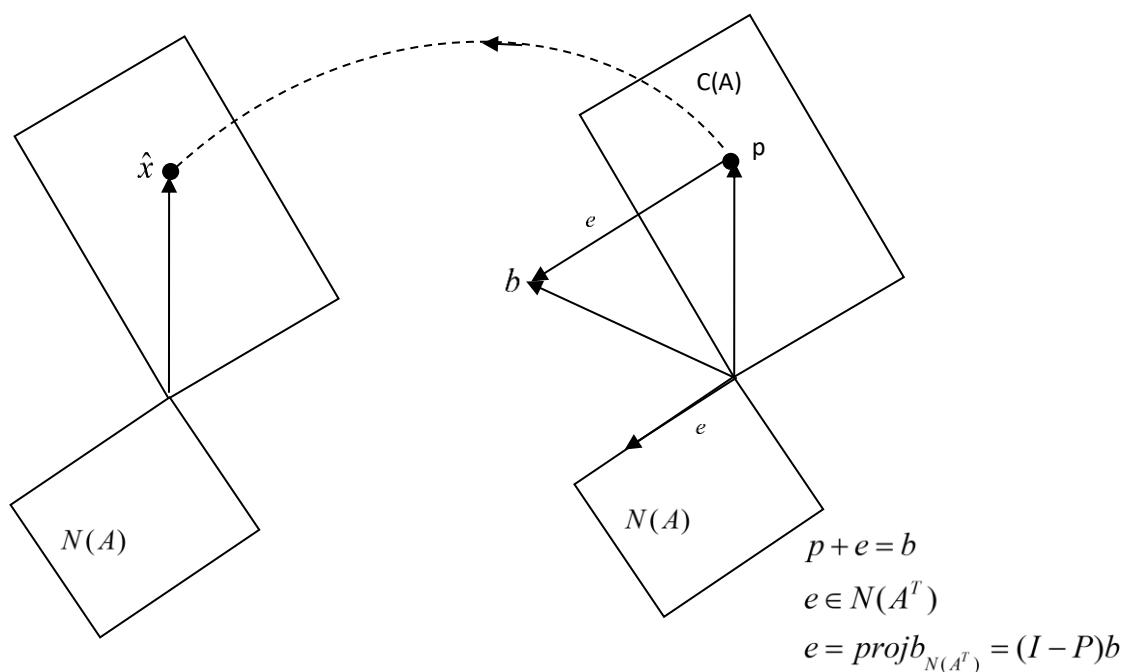


Figure II-9. Principe géométrique des moindres carrés.

11. Orthogonalité

Un ensemble de vecteurs $q_1, q_2, \dots, q_n$ est dit ortho normal si :

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases} \quad (14)$$

Si cet ensemble de vecteurs est mis dans une matrice Q comme suit :

$$Q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]$$

Alors l'identité suivante sera vraie :

$$Q^T Q = I$$

Dans le cas particulier où la matrice Q est carrée, alors on l'appelle matrice ortho normale et on déduit que :

$$Q^T = Q^{-1} \quad (15)$$

La projection sur l'espace des colonnes de Q sera obtenu par :

$$P = Q(Q^T Q)^{-1} Q^T = Q Q^T \quad (16)$$

Donc, $Q Q^T$ est une matrice de projection, et si dans le cas particulier où Q est carrée, alors :

$$P = Q Q^T = I$$

L'application de l'orthogonalité à la méthode des moindres carrés sera par le remplacement de A par Q , ce qui nous donne :

$$\hat{x} = Q^T b$$

où chaque paramètre $\hat{x}_i = q_i^T b$.

Le passage de la matrice A vers la matrice Q s'obtient par ce qu'on appelle orthogonalisation de Gram-schmidt.

12. Valeurs et vecteurs propres

Les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice A sont définis par :

$$Ax = \lambda x \quad (17)$$

où λ sont les valeurs propres de A et les x sont les vecteurs propres de A .

La multiplication d'une matrice A par un vecteur x va changer de direction à ce vecteur comme le montre la figure suivante :

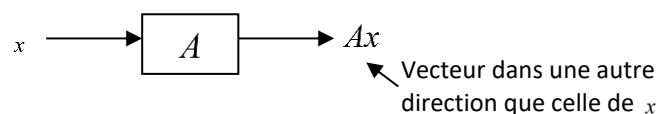


Figure II-10. Effet d'une matrice.

On conclut donc de l'équation (17) que les vecteurs propres de A sont les vecteurs qui lorsqu'on les multiplie par A ne changent pas de direction mais changent d'amplitude.

De l'équation (17) on a :

$$(A - \lambda I)x = 0$$

cela veut dire que les colonnes de $A - \lambda I$ sont linéairement dépendantes, donc la matrice $A - \lambda I$ est singulière, alors :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (18)$$

L'équation (18) nous permet de calculer les valeurs propres et l'équation (17) les vecteurs propres.

Si A est une matrice $n \times n$, tel que nous avons n valeurs et vecteurs propres, en effectuant maintenant la multiplication de A par la matrice S formée par les vecteurs propres de A , alors :

$$\begin{aligned} AS &= A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} AS &= S\Lambda \Rightarrow A = S\Lambda S^{-1} \\ &\Rightarrow \Lambda = S^{-1}AS \end{aligned} \quad (19)$$

Donc cette méthode nous permet de diagonaliser la matrice A puisque la matrice résultante est diagonale (Λ). On dit aussi qu'on a décomposé la matrice A en $S\Lambda S^{-1}$.

13. Matrices symétriques

Une matrice A est dite symétrique si $A = A^T$. Pour ce type de matrices on a deux propriétés principales :

- 1) toutes les valeurs propres de A sont réelles
- 2) les vecteurs propres peuvent être choisis perpendiculaires.

Pour la deuxième remarque, si les vecteurs propres sont orthonormaux, alors S devient Q et on obtient alors :

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$$

Donc si A est symétrique, alors :

$$A = Q\Lambda Q^T \quad (20)$$

La décomposition (20) nous donne :

$$A = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} = \lambda_1 q_1 q_1^T + \cdots + \lambda_n q_n q_n^T$$

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i q_i^T \quad (21)$$

Chaque quantité $q_i q_i^T$ est une matrice de projection, donc, si A est symétrique, alors A est une combinaison linéaire de n matrices de projection (théorème de la décomposition spectrale).

14. Matrices symétrique définies positives

De telles matrices sont caractérisées par :

- Toutes les valeurs propres sont positives
- Tous les pivots sont positifs
- Tous les sous déterminants sont positifs
- $x^T A x > 0$

La matrice $A^T A$ est une matrice toujours positive définie, ce type de matrices nous le rencontrons dans la méthode des moindres carrés.

$$A^T A \text{ est positive} \Rightarrow x^T (A^T A) x > 0$$

La vérification de ça peut être faite comme suit :

$$x^T (A^T A) x = (Ax)^T (Ax) \text{ qui est toujours positive.}$$

Donc $x^T (A^T A) x > 0 \Rightarrow A^T A$ est positive définie et aussi bien sûr symétrique est de rang n (puisque $A : m \times n$).

15. Décomposition en valeurs singulières SVD

C'est la dernière et la plus importante décomposition des matrices que nous allons présenter dans ce chapitre. Les deux premières ont été : décomposition propre $A = S\Lambda S^{-1}$ et décomposition orthogonale $A = Q\Lambda Q^T$. Ces deux décompositions ont l'inconvénient qu'elles exigent que A soit une

matrice carrée. La décomposition en SVD est plus générale et concerne même la décomposition des matrices rectangulaires ($A : m \times n$).

La décomposition SVD d'une matrice $A : m \times n$ est donnée par :

$$A = UWV^T$$

$$V = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n]$$

$$U = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m]$$

$$W = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

où V est une matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs de base de l'espace d'entrée (espace lignes) ($V : n \times n$) (base ortho normale dans R^n).

U est une matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs de base de l'espace de sortie (espace des colonnes) ($U : m \times m$)

W : Matrice diagonale d'ordre $m \times n$.

De ce contexte, la matrice A transforme tous les vecteurs V_i de l'espace des lignes en des vecteurs u_i dans l'espace des colonnes par la transformation Av_i . En suite, une normalisation des u_i sera faite comme suit :

$$u_i = \frac{Av_i}{\|Av_i\|} \Rightarrow Av_i = \|Av_i\|u_i$$

Notons $\|Av_i\| = \sigma_i > 0$, alors $Av_i = \sigma_i u_i \quad \sigma_i > 0$

Ce passage peut être représenté graphiquement par :

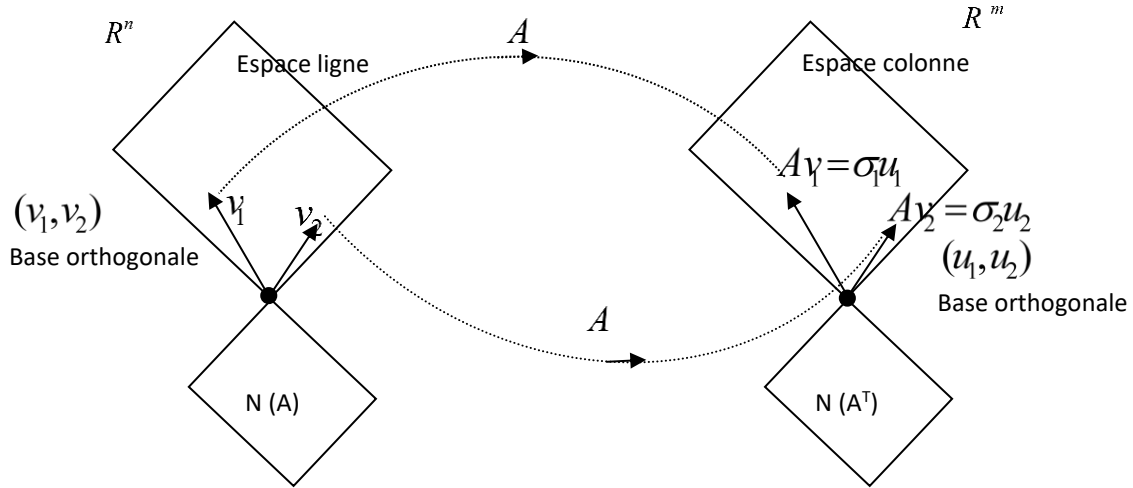


Figure II-11. Idée géométrique de l'SVD.

Ecrivons maintenant toutes ces transformations par une seule équation :

$$\underbrace{A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_r & v_{r+1} & \cdots & v_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Base orthogonale} \\ n \times r \quad n \times (m-r) \\ n \times n}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r & u_{r+1} & \cdots & u_m \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Base orthogonale} \\ m \times r \quad m \times (m-r) \\ m \times m}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Espace ligne} \\ m \times n}}$$

Donc :

$$AV = UW \Rightarrow A = UWV^T \quad (22)$$

L'équation (II.22) est dite décomposition en SVD de la matrice A.

Notons que $A^T A = (UWV^T)^T (UWV^T) = VW^2V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \sigma_2^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots \end{bmatrix} V^T$, donc les σ_i^2 sont les valeurs

propres de la matrice $A^T A$ et les v_i sont ses vecteurs propres.

Le cas inverse, $AA^T = (UWV^T)(UWV^T)^T = UW^2U^T = U \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots \\ \vdots & \sigma_2^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots \end{bmatrix} U^T$

16. Inverses généralisés

16.1. Inverse ordinaire (bilatérale)

Soit A une matrice carrée $n \times n$ de rang $r = n = m$ (rang complet), alors, l'inverse de A existe et vérifie :

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A \quad (23)$$

On dit que cet inverse est bilatéral, car A^{-1} peut être multipliée soit par la gauche ou par la droite de A pour donner I .

16.2. Inverse gauche

Si A est une matrice $m \times n$ avec $m > n$ et $r = n$ (colonnes indépendantes). Dans ce cas on dit que A ne peut pas être inversée directement sauf si nous introduisant une astuce. Puisque $r = n$; alors $A^T A$ peut être inversée, donc :

$$(A^T A)^{-1} (A^T A) = I_n \quad (24)$$

$$\underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{A^{-1}_{\text{gauche}}} A = I_n \quad (25)$$

$$\text{donc : } A^{-1}_{\text{gauche}} \cdot A = I \quad (26)$$

L'expression $(A^T A)^{-1} A^T$ est appelée inverse gauche de A , et c'est cet inverse qu'on utilise dans la méthode des moindres carrés où :

$$\hat{x}_{LS} = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{A_g^{-1}} y \quad (27)$$

C'est-à-dire, si $Ax = y$ et $A : m \times n$, alors l'inverse ordinaire n'existe pas, donc $\hat{x}_{LS} = A_g^{-1} y$, comme le montre la figure suivante :

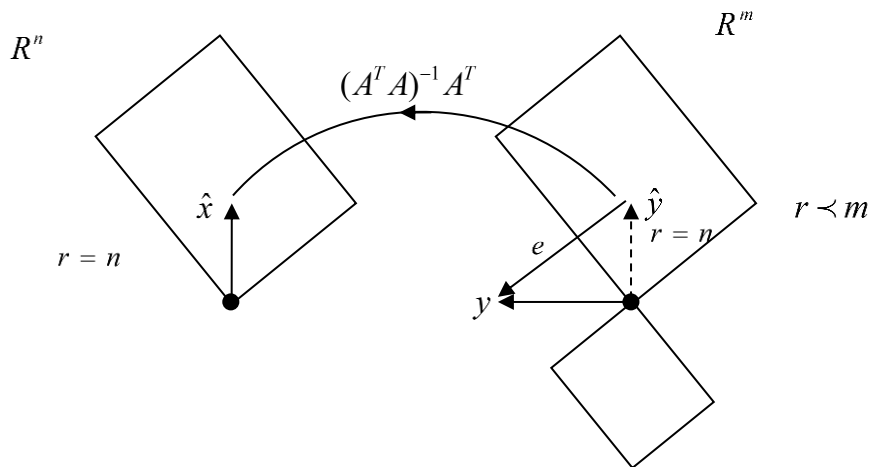


Figure II-12. Représentation géométrique de l'inverse gauche.

16.3. Inverse droite

Dans ce cas A est une matrice $m \times n$ avec $n > m$ et $r = m$ (lignes indépendantes). A est dite de rang complet en lignes. L'inverse de A est obtenue par l'inverse de (AA^T) puisque cette dernière est de rang complet. Donc :

$$\underbrace{AA^T (AA^T)^{-1}}_{A_{\text{droite}}^{-1}} = I_m \Rightarrow A A_d^{-1} = I \quad (28)$$

Et l'expression $A^T (AA^T)^{-1}$ est appelée inverse droite de A . Et c'est cet inverse qu'on utilise dans la méthode des moindres normes où :

$$\hat{x}_{LS} = A^T (AA^T)^{-1} y \quad (29)$$

Comme la montre la figure suivante :

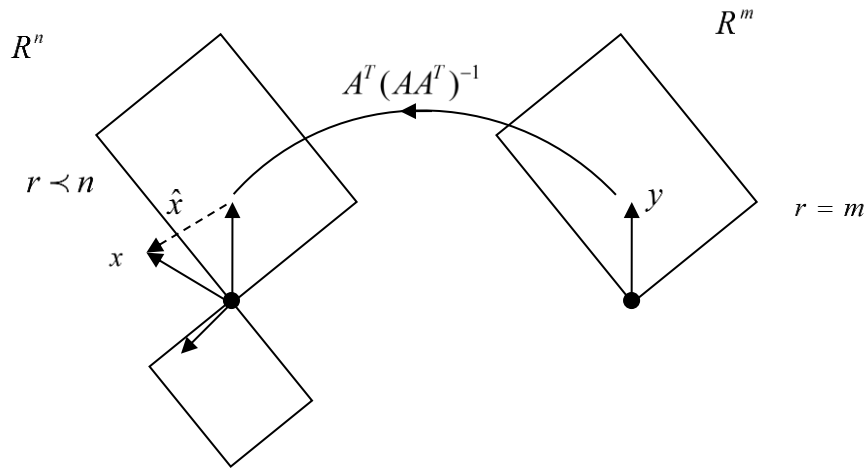


Figure II-13. Représentation géométrique de l'inverse droite.

▪ **Remarque :** si on multiplie l'inverse gauche à la droite par A on obtient :

$$A(A^T A)^{-1} A^T$$

Cette matrice représente la matrice de projection P sur l'espace des colonnes car :

$$Py = \hat{y} \quad (30)$$

$$Py = A\hat{x} = A(A^T A)^{-1} A^T y \quad (31)$$

$$\Rightarrow P = A(A^T A)^{-1} A^T \quad (32)$$

Même remarque pour l'inverse droite si on le multiplie par la gauche de A on obtient :

$$A^T (AA^T)^{-1} A \quad (33)$$

Qui représente la matrice de projection sur l'espace des lignes, car :

$$PX = \hat{x} = A^T (AA^T)^{-1} Ax \quad (34)$$

$$\Rightarrow P = A^T (AA^T)^{-1} A \quad (35)$$

16.4. Pseudo inverse

Dans cette section nous allons discuter le cas où la matrice A est d'ordre général, c'est-à-dire $r < m$ et $r < n$, dans ce cas $N(A)$ et $N(A^T)$ sont tous les deux non nuls, on sait bien que ces deux espaces sont la cause des singularités lorsqu'ils sont $\neq \{0\}$. Donc, une matrice singulière (non inversible) est une matrice où :

$$N(A) \neq \{0\}.$$

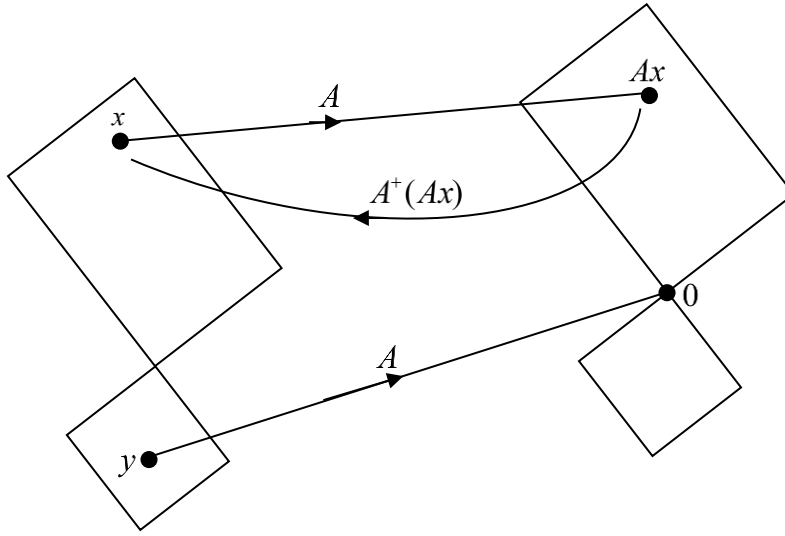


Figure II-14. Singularité de la matrice A .

De la figure .14 on remarque que chaque $x \in$ à l'espaces des lignes, a une image Ax dans $C(A)$, et on peut revenir à x par inversion spéciale de A qu'on va noter par A^+ (pseudo inverse ou inverse généralisée). On remarque aussi si $y \in N(A)$ alors $Ay = 0$, et on ne peut pas retrouver le y concerné par inversion, ce qui crée la singularité de la matrice A . Donc, la matrice pseudo inverse A^+ est une matrice inverse entre seulement l'espace des lignes et l'espace des colonnes.

$$A = UWV^T$$

avec :

$$W_{m \times n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \sigma_r & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W_{n \times m}^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \frac{1}{\sigma_r} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^+ = (UWV^T)^{-1} = VW^+U^T \quad (36)$$

Donc, la matrice pseudo inverse A^+ est donnée par :

$$A^+ = VW^+U^T \quad (37)$$

Cette matrice sera utilisée dans la méthodes des moindres carrées dans le cas où $N(A) \neq \{0\}$.

17. Conclusion

L'algèbre est la partie plate des mathématiques. Toutes les techniques mathématiques qui seront utilisées dans notre travail se basent sur l'algèbre linéaire, et c'est pour cette raison que nous avons vu nécessaire de faire introduire ce chapitre dans le but de faciliter les choses aux lecteurs de ce mémoire.

Dans ce chapitre nous avons présenté une synthèse générale sur les points principaux de la théorie de l'algèbre linéaire. L'algèbre présenté est pris du point de vu de Matlab. Les points traités ont touché principalement, Les opérations matriciels, Projection, Espaces fondamentaux, Moindres carrées, Décompositions simples, Décomposition SVD et Inverses généralisé.

CHAPITRE III:

RESULTATS ET DISCUSSION

1 . Introduction

La décomposition en valeurs singulières (SVD) est une méthode de l'algèbre linéaire qui permet de décomposer n'importe quelle matrice (rectangulaire ou carrée) et permet aussi de calculer les pseudos inverses. Dans ce chapitre nous allons essayer d'appliquer cette méthode pour le filtrage du signal électrocardiogramme et la compression des images.

2. Méthodes des moindres carrées

Soit à approximer l'ensemble de données (x_i, d_i) par le modèle de convolution discret suivant (somme de convolution) :

$$d(i) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(i-l) + v(i) \quad (1)$$

où d est le signal observé (mesuré) obtenu à partir du signal d'entrée x , h_l sont les paramètres inconnus du modèle et v représente le bruit de mesure qui est une variable aléatoire (non observable). Il est d'usage de supposer que v est blanc de moyenne nulle dont la variance est σ_v^2 .

Notre objectif est d'estimer les paramètres h_l , étant donnés les deux ensembles de données observables : $\{x(i)\}$ et $\{d(i)\}$ avec $i = 1, 2, \dots, N$. Pour cela, on définit le signal d'erreur comme la différence entre le signal désiré d et la sortie du modèle y d'un filtre RIF (Réponse impulsionnelle Finie) qui a pour coefficients h_l avec $l = 0, 1, \dots, L-1$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} e(i) &= d(i) - y(i) \\ &= d(i) - \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(i-l) \end{aligned} \quad (2)$$

Dans la méthode des moindres carrés (MC), on choisit les paramètres h_l qui minimisent la fonction de coût suivante :

$$J_{LS} = \sum_{i=1}^{i=i2} e^2(i) \quad (3)$$

où i_1 et i_2 sont des indices qui représentent l'intervalle dans lequel la minimisation se fait. Pour cette minimisation, les coefficients du filtre $h_0, h_1, \dots, h_{L-1}$ sont constants pendant l'intervalle $i_1 \leq i \leq i_2$. Le filtre obtenu par cette minimisation est un filtre linéaire au sens des moindres carrés

Dans la suite, on utilisera $i_1 = L$ et $i_2 = N$. Dans ce cas le signal d'entrée peut être réarrangé sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x(L) & x(L+1) & \dots & x(N) \\ x(L-1) & x(L) & \dots & x(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(1) & x(2) & \dots & x(N-L+1) \end{bmatrix}$$

2.1. Principe de l'orthogonalité

La fonction de coût qu'on cherche à minimiser au sens des moindres carrées est :

$$\begin{aligned} J_{LS} &= \sum_{i=L}^N e^2(i) \\ &= \sum_{i=L}^N \left[d(i) - \sum_{l=0}^{L-1} h_l x(i-l) \right]^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Pour obtenir les coefficients de ce filtre RIF qui donnent la valeur minimale de J_{LS} , le gradient de (4) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{LS}}{\partial h_l} &= 2 \sum_{i=L}^N \frac{\partial e(i)}{\partial h_l} e(i) \\ &= -2 \sum_{i=L}^N x(i-l) e(i) \end{aligned} \quad (5)$$

doit être égal à zéro :

$$\frac{\partial J_{LS}}{\partial h_l} = 0 \quad \text{avec } l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (6)$$

Soit $e_{\min}$ l'erreur pour laquelle J_{LS} est minimisée, alors :

$$\sum_{i=L}^N x(i-l) e_{\min}(i) = 0 \quad \text{avec } l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (7)$$

L'expression précédente est la description mathématique de la version temporelle du principe d'orthogonalité. En d'autres termes: la suite temporelle $e_{\min}(i)$ est orthogonale à la suite temporelle $x(i-1)$ quand le filtre opère dans les conditions des moindres carrés.

2.2. Les équations normales

Il existe une autre manière de décrire le principe d'orthogonalité : c'est le système d'équations normales. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=L}^N x(i-l)e_{\min}(i) &= 0 \quad \text{avec } l = 0, 1, \dots, L-1 \\ \sum_{i=L}^N x(i-l) \left[d(i) - \sum_{k=0}^{L-1} h_{opt,k} x(i-k) \right] &= 0 \\ \sum_{k=0}^{L-1} h_{opt,k} \sum_{i=L}^N x(i-l)x(i-k) &= \sum_{i=L}^N x(i-l)d(i) \\ \sum_{k=0}^{L-1} h_{opt,k} r(k,l) &= p(-l) \quad \text{avec } l = 0, 1, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (8)$$

où :

$$r(k,l) = \sum_{i=L}^N x(i-l)x(i-k) \quad \text{avec } l, k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (10)$$

est la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée x , et :

$$p(-l) = \sum_{i=L}^N x(i-l)d(i) \quad \text{avec } l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (10)$$

est l'intercorrélacion entre la sortie désirée d et l'entrée x .

On peut facilement vérifier que les équations normales peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$Rh_{opt} = p \quad (11)$$

avec :

$$R = \begin{bmatrix} r(0,0) & r(1,0) & \dots & r(L-1,0) \\ r(0,1) & r(1,1) & \dots & r(L-1,1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(0,L-1) & r(1,L-1) & \dots & r(L-1,L-1) \end{bmatrix}$$

est la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée x , et :

$$p = [p(0) \quad p(-1) \quad \dots \quad p(-L+1)]^T$$

est le vecteur d'intercorrélacion entre la sortie désirée d et l'entrée x , et :

$$h_{opt} = [h_{opt,0} \quad h_{opt,1} \quad \dots \quad h_{opt,L-1}]^T$$

est le filtre optimal au sens des moindres carrés.

En supposant que R est inversible, on a donc :

$$h_{opt} = R^{-1}p \quad (12)$$

2.3. Propriétés de la matrice d'autocorrélation

Soit le vecteur suivant :

$$\mathbf{x}(i) = [x(i) \quad x(i-1) \quad \cdots \quad x(i-L+1)]^T$$

La matrice d'autocorrélation peut se réécrire :

$$R = \sum_{i=L}^N \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i) \quad (13)$$

Nous donnons maintenant quelques propriétés de cette matrice :

- ✓ **Propriété 1.** La matrice d'autocorrélation R est symétrique, c'est-à-dire $R = R^T$.
- ✓ **Propriété 2.** La matrice d'autocorrélation R est toujours définie non négative, c'est-à-dire $\mathbf{z}^T R \mathbf{z} \geq 0, \forall \mathbf{z}$.
- ✓ **Propriété 3.** La matrice d'autocorrélation R est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro.
- ✓ **Propriété 4.** Les valeurs propres de la matrice d'autocorrélation R sont toutes réelles et non négatives.
- ✓ **Propriété 5.** La matrice d'autocorrélation R est le produit d'une matrice rectangulaire de toeplitz et la transposée de cette même matrice.

En effet, soit la matrice rectangulaire de Toeplitz de taille $L \times (N - L + 1)$ suivante :

$$\mathbf{X}^T = [\mathbf{x}(L) \quad \mathbf{x}(L+1) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(N)] \quad (14)$$

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} x(L) & x(L+1) & \cdots & x(N) \\ x(L-1) & x(L) & \cdots & x(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(N-L+1) \end{bmatrix}$$

On voit bien que :

$$R = X^T X \quad (15)$$

- ✓ **Propriété 6.** La matrice d'autocorrélation R est inversible si et seulement si le rang colonne de la matrice X est égal à L .

2.4. Reformulation des équations normales

L'équation normale $h_{opt} = R^{-1}p$ peut encore s'écrire en fonction de la matrice d'entrées X . On a d'une part :

$$R = X^T X$$

et de l'autre part, on a :

$$p(-l) = \sum_{i=l}^N x(i-l)d(i) \text{ avec } l = 0, 1, \dots, L-1$$

soit sous forme matricielle :

$$p = X^T d$$

d'où la nouvelle forme de l'équation normale :

$$h_{opt} = (X^T X)^{-1} X^T d \quad (16)$$

L'estimation de d (sortie du modèle) au sens des moindres carrés est donc :

$$\begin{aligned} \hat{d} &= X h_{opt} \\ &= X (X^T X)^{-1} X^T d \end{aligned}$$

la matrice :

$$P = X (X^T X)^{-1} X^T \quad (17)$$

est un opérateur de projection pour le sous-espace X .

On vérifie directement l'égalité $PX = X$. L'opérateur de projection orthogonale est défini Par :

$$P^\perp = I - P \quad (18)$$

d'où :

$$\hat{d} = Pd \quad (19)$$

et :

$$e_{\min} = d - \hat{d} = d - Pd$$

$$= P^\perp d \quad (VI.20)$$

3. SVD et la résolution d'un système linéaire aux moindres carrés

On rappelle que l'équation normale est :

$$h_{opt} = (X^T X)^{-1} X^T d \quad (21)$$

tel que la matrice X contient les échantillons du signal d'entrée x . Définissons maintenant la matrice suivante :

$$X^+ = (X^T X)^{-1} X^T \quad (22)$$

alors l'équation normale peut encore s'écrire :

$$h_{opt} = X^+ d \quad (23)$$

avec la matrice X^+ est le pseudo inverse de la matrice X .

En pratique, il arrive très souvent que la matrice X ne soit pas de rang plein, c'est-à-dire cette matrice contient des colonnes qui sont linéairement dépendantes. Dans ce cas, la matrice $X^T X$ n'est pas inversible et le système a une infinité de solutions. Donc, laquelle il faut choisir ?

3.1. Théorème de la SVD

Nous sommes intéressés au système d'équations linéaires suivant :

$$X h_{opt} = d \quad (24)$$

où la matrice X est de taille $K \times L$, d est un vecteur de longueur K , et h_{opt} (qui représente l'estimation du vecteur de paramètres inconnus) est un vecteur de dimension L .

Etant donnée la matrice X , il existe deux matrices orthogonales V (de taille $L \times L$) et U (de taille $K \times K$) telles que :

$$U^T X V = \begin{bmatrix} W & 0_{r \times L-r} \\ 0_{K-r \times r} & 0_{K-w \times L-w} \end{bmatrix} \quad (25)$$

où

$$W = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \quad (26)$$

est une matrice diagonale et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$. L'expression (V.25) représente ce qu'on appelle théorème de la SVD (voir chapitre 2) où r représente le rang de la matrice X .

La pseudo inverse de la matrice X sera définie par :

$$X^+ = V \begin{bmatrix} W^{-1} & 0_{r \times k-r} \\ 0_{L-r \times r} & 0_{L-r \times k-r} \end{bmatrix} U^T \quad (27)$$

où:

$$W^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}) \quad (28)$$

avec r le rang de X . Cette définition s'applique quelle que soit la matrice X , quelle que soit "sur ou sous déterminée" et quel que soit son rang. Ce pseudo inverse peut être encore s'écrire :

$$X^+ = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T \quad (29)$$

Finalement la solution du problème des moindres carrés :

$$X h_{opt} = d \quad (30)$$

Donc :

$$h_{opt} = X^+ d \quad (31)$$

4. Filtrage, Compression et réduction de rang

4.1. Principe de la méthode

Les matrices U et V (25) peuvent être réarrangées suivants le rang r (le nombre des valeurs singulières différentes de zéro) comme suit :

$$X = U W V^T = \begin{bmatrix} U_r & U_r^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^T \\ (V_r^\perp)^T \end{bmatrix} \quad (32)$$

où:

$$U_r = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_r] \quad \text{et} \quad U_r^\perp = [u_{r+1} \quad u_{r+2} \quad \dots \quad u_m]$$

$$V_r = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_r] \quad \text{et} \quad V_r^\perp = [v_{r+1} \quad v_{r+2} \quad \dots \quad v_n]$$

et $W_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. Les vecteurs singuliers u_i et v_i dans U_r et V_r correspondants aux plus grandes valeurs singulières sont connus sous le nom de vecteurs dominants (signaux dominants), de

la même façon, les vecteurs singuliers associés avec les plus petites valeurs singulières sont connus sous le nom de vecteurs singuliers sous dominant (introduisent des bruit). Un peu de bruit dans les données change les valeurs singulières zéro en petits nombres positifs différents de zéro. Cependant, la perturbation du sous dominant espace $U_r(V_r)$ reste relativement insignifiante.

4.2. Filtrage du signal électrocardiogramme par la SVD

Dans cette section le filtrage d'un signal ECG bruité va être présenté. Le signal ECG est enregistré sous forme d'un vecteur x tel que (voir figure 1) :

$$x = [x(1) \quad x(2) \quad \dots \quad x(n)]$$

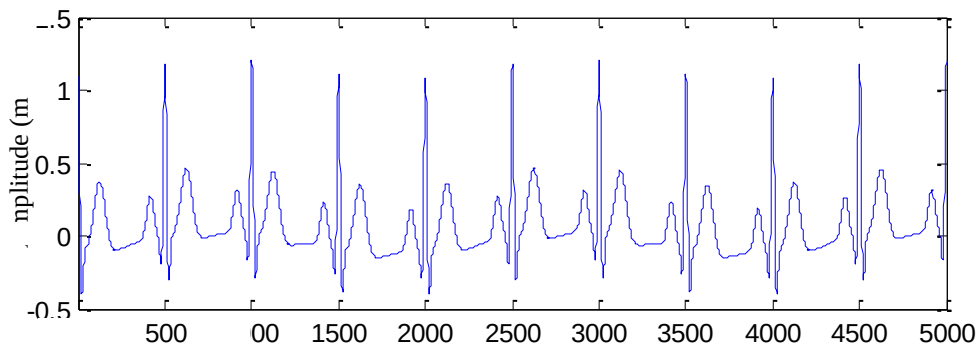


Figure.III-1 : Signal électrocardiogramme.

Le bruitage de cet ECG s'effectue en ajoutant un bruit au vecteur x comme suit:

$$x_b = x + v \quad (33)$$

avec v une source du bruit blanc.

La problématique du filtrage suppose que nous avons un signal bruité x_b , et la question sera comment estimé le signal utile x ?

- ✓ A partir des données enregistrées x_b de l'ECG, former la matrice de données de toeplitz X_b :

$$X_b = \begin{pmatrix} X_b(i) & X_b(i-1) & \dots & X_b(2) & X_b(1) \\ X_b(i+1) & X_b(i) & X_b(i-1) & \dots & X_b(2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ X_b(n) & \dots & \dots & \dots & X_b(i) \end{pmatrix}$$

On note que dans notre cas le rang de cette matrice est :

$$r = 23$$

- ✓ chercher la meilleure matrice X_{bk} approximante de rang k pour X_b , pour cela on utilisant une réduction de rang.

- ✓ utiliser la pseudo inverse au sens des moindres carrées pour le calcul de la matrice de projection

P_k :

$$X_{bk} = P_k X_b \Rightarrow P_k = X_{bk} X_b^+$$

- ✓ En fin estimer le signal x comme suit :

$$\hat{x} = P_k X_b$$

Dans ce qui suit, nous allons tester l'opération de filtrage d'un signals électrocardiogramme par l'algorithme de la décomposition en valeurs singulières.

Nous avons simulé la méthode avec un bruit blanc de mesures (telle que $\text{var}(v) = 0.01 \text{mv}^2$).

Les figures suivantes représentent les résultats de ce type de filtrage avec différents opérateurs de projection P_k :

- 1) Opérateur de projection : P_6

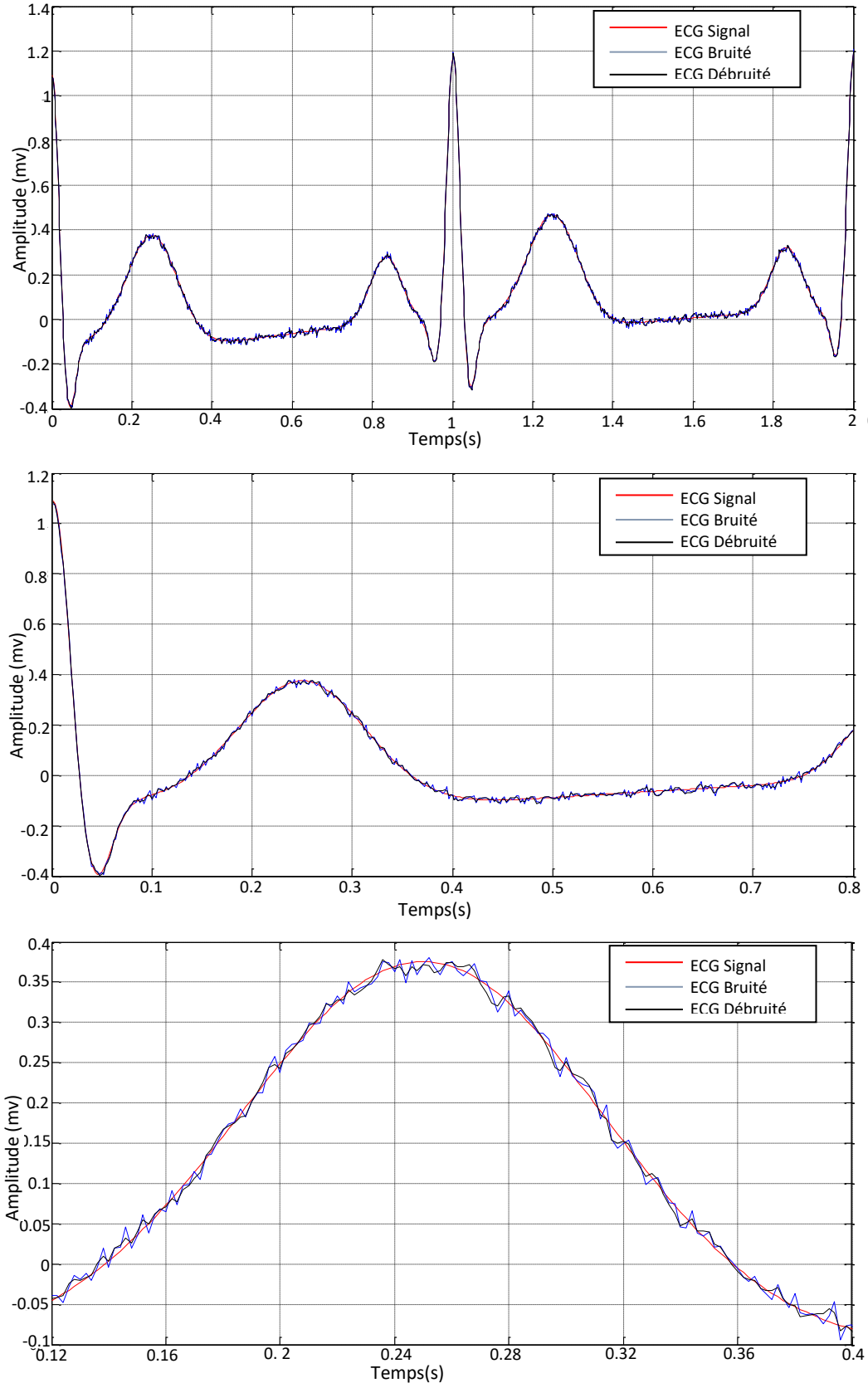


Figure.III-2: Résultats de débruitage pour $\text{var}(v) = 0.01 \text{mv}^2$
et un opérateur de projection P_6 .

2) Opérateur de projection : P_4

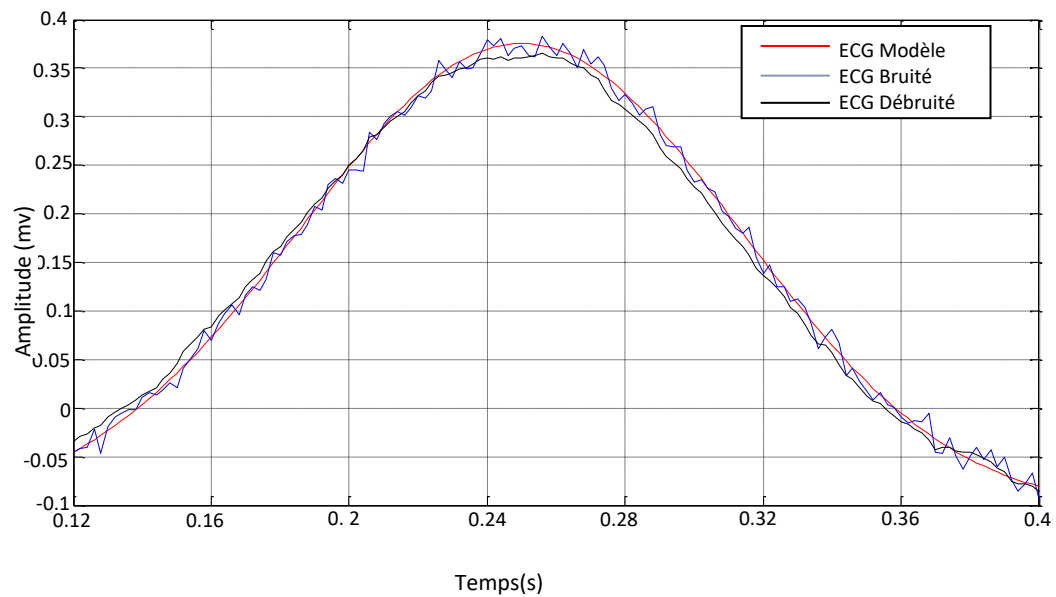
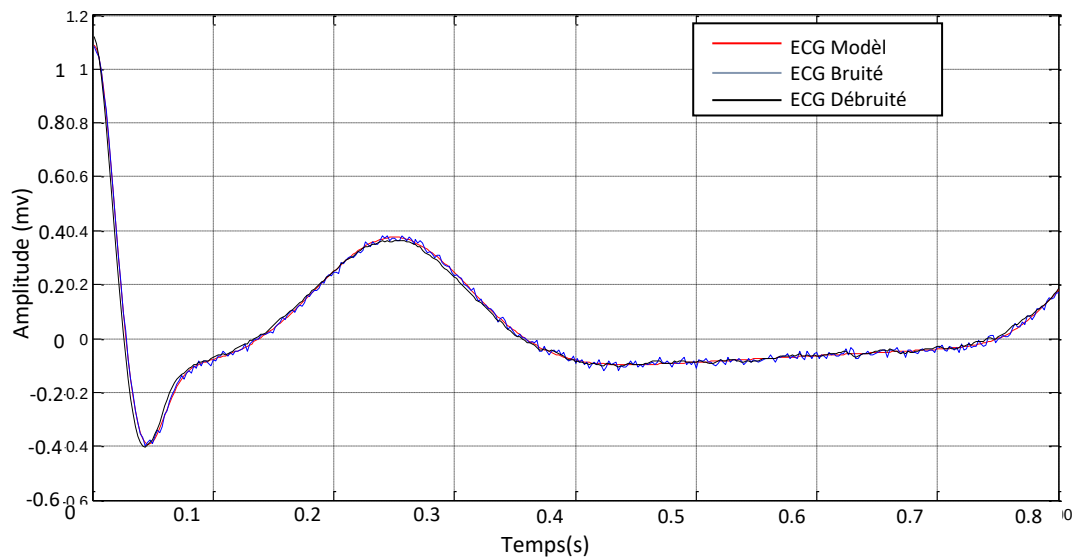
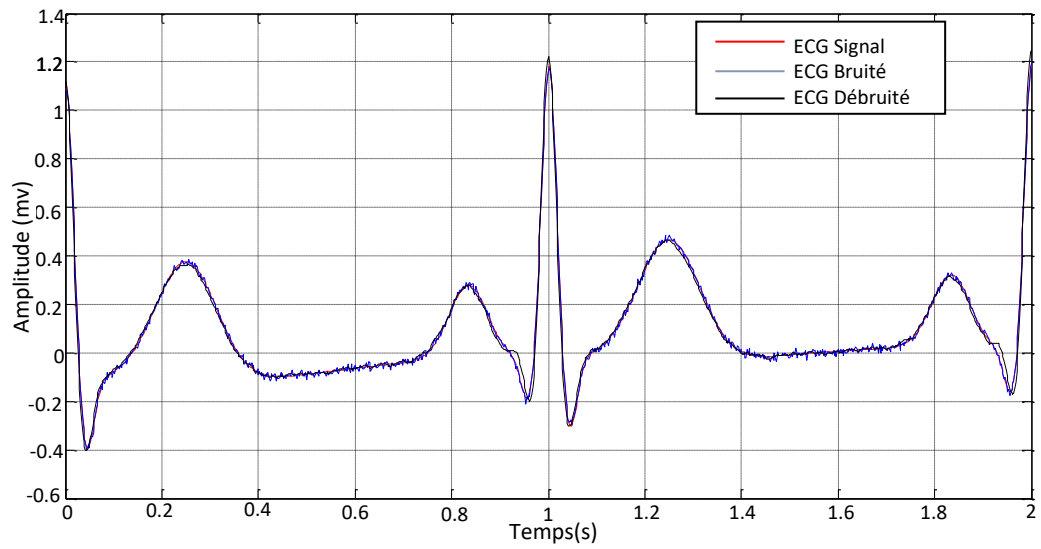
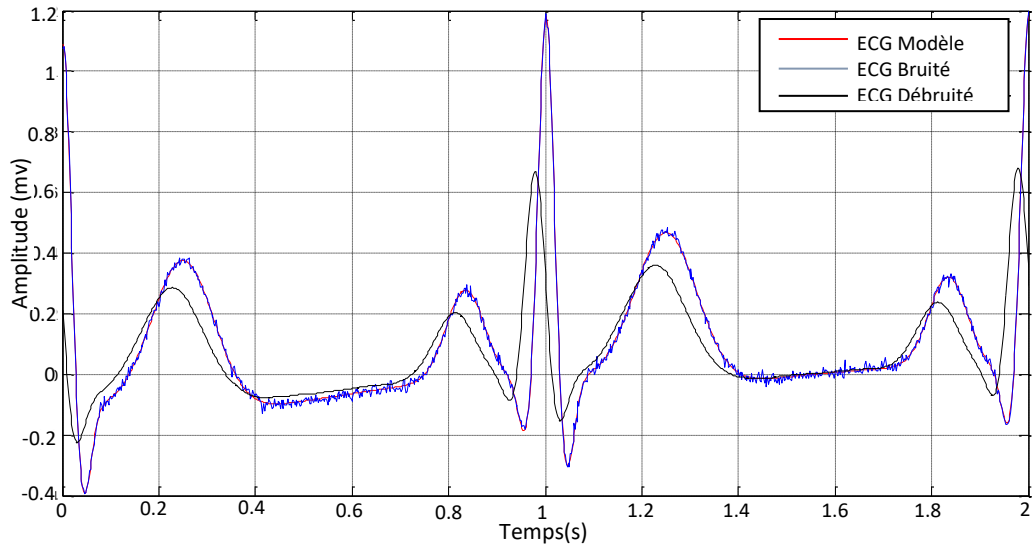


Figure. III-3: Résultats de débruitage pour $\text{var}(v) = 0.01 \text{mv}^2$
et un opérateur de projection P_4 .

3) Opérateur de projection : P_2



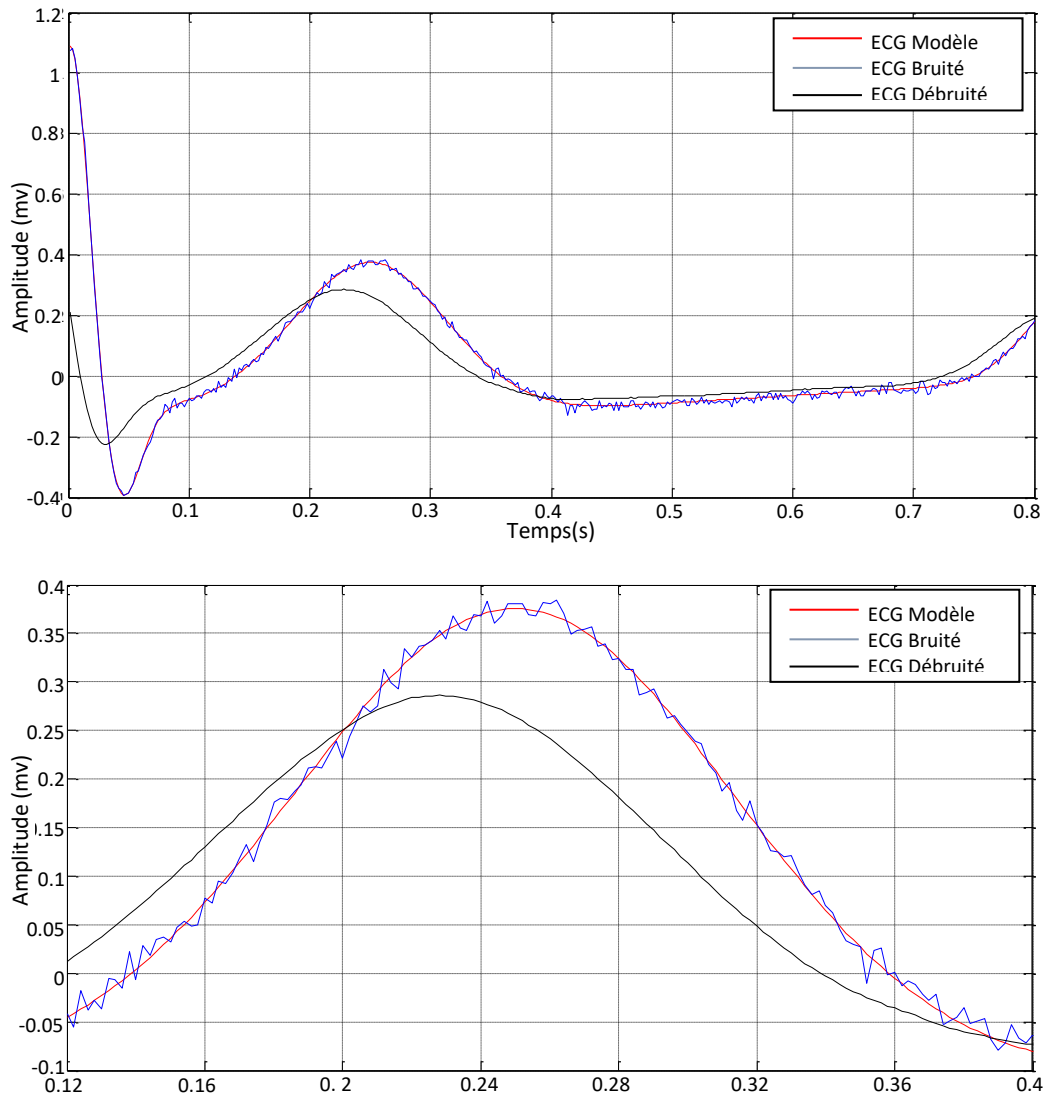


Figure. III-4. :Résultats de débruitage pour $\text{var}(v) = 0.01 \text{mv}^2$
et un opérateur de projection P_2 .

On remarque des figures 2 et 3 que le filtrage a été réalisé avec succès et cela avec des opérateurs de projection P_6 et P_4 . Mais avec un opérateur de projection P_2 l'opération de filtrage a échoué ce qui reflète le fait d'une très grande réduction de rang.

4.3. Compression des Images par SVD

Dans cette section nous allons appliquer la méthode SVD pour la compression des images. L'SVD a été appliqué sur l'image street1 de MATLAB de taille 480X460.



Figure. III- 5. L'image Street1.

Les figures suivantes représentent les résultats de ce type de filtrage avec différents opérateurs de projection P_k :

Original (Rank 480)



compressed (Rank 200)



compressed (Rank 100)



compressed (Rank 50)



Figure. III-6. Résultat de compression en utilisant différent opérateur de projection.

En observant visuellement, on peut constater que l'opération de compression a été réussie pour les deux cas, $R=200$ et $R=100$. Cela aboutit à une nouvelle image compressée dont la taille peut aller jusqu'à un tiers de celle de l'image originale.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la technique SVD pour filtrer les signaux électrocardiographiques et compresser des images. En examinant visuellement nos résultats, nous avons constaté l'efficacité de la méthode SVD pour le filtrage et la compression des signaux et des images, en particulier avec un choix judicieux de l'opérateur de projection.

Conclusion Générale

Ce mémoire a exploré en profondeur l'application de la décomposition en valeurs singulières (SVD) pour le filtrage et la compression des signaux et des images. À travers une approche structurée en trois chapitres principaux, nous avons établi un cadre théorique solide, exploré des techniques algébriques avancées et présenté des résultats expérimentaux démontrant l'efficacité de la SVD dans ce contexte. la décomposition en valeurs singulières (SVD) s'est révélée être une technique puissante et efficace pour le filtrage et la compression des signaux et des images. En alliant une base théorique solide à des méthodes algébriques avancées et à des résultats expérimentaux convaincants, ce mémoire a démontré le potentiel de la SVD pour améliorer la qualité des données et optimiser leur gestion.

Ce projet a été une occasion d'apprentissage intense que ce soit sur le plan théorique que pratique. En effet, la compréhension des méthodes a nécessité une revue intensive des notions mathématiques sur lesquels sont fondées les deux techniques. Ensuite il fallait mettre en œuvre les algorithmes en prenant en considération leur caractère numérique. Il est clair que dans le cas d'algorithmes de calcul numérique il faut faire attention aux problèmes d'erreurs numériques.

Les perspectives futures incluent l'exploration de méthodes hybrides combinant la SVD avec d'autres techniques avancées, ainsi que l'application de la SVD à des domaines émergents tels que l'apprentissage automatique et la vision par ordinateur. Ces avenues de recherche promettent de continuer à faire progresser le domaine du traitement des signaux et des images, en exploitant pleinement les capacités de la SVD pour relever les défis actuels et futurs.

Bibliographique

Références Bibliographiques :

- [1] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Digital Image Processing*, 3rd ed. Pearson, 2007.
- [2] G. A. Baxes, **Digital Image Processing: Principles and Applications**, New York: John Wiley & Sons, 1994.
- [3] R. O. Green et al., "Imaging Spectroscopy and the Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer (AVIRIS)," in **Remote Sensing of Environment**, vol. 65, no. 3, pp. 227-248, Sept. 1998.
- [4] A. V. Oppenheim and A. S. Willsky, *Signals and Systems*, 2nd ed. Prentice Hall, 1996
- [5] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. Prentice Hall, 2009.
- [6] S. K. Mitra, *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*, 4th ed. McGraw-Hill, 2010.
- [7] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. Prentice Hall, 2009.
- [8] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Digital Image Processing*, 3rd ed., Prentice Hall, 2007.
- [9] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Digital Image Processing*, 4th ed. Pearson, 2018.
- [10] J. Shi and J. Malik, "Normalized Cuts and Image Segmentation," in **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, vol. 22, no. 8, pp. 888-905, Aug. 2000.
- [11] J. W. Woods and S. D. O'Neil, *Digital Image Processing*, 4th ed. Pearson, 2018.
- [12] R. O. Duda, P. E. Hart, and D. G. Stork, *Pattern Classification*, 2nd ed. Wiley-Interscience, 2001.
- [13] W. B. Pennebaker and J. L. Mitchell, *JPEG: Still Image Data Compression Standard*, Van Nostrand Reinhold, 1993.
- [14] J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, and J. F. Hughes, *Computer Graphics: Principles and Practice*, 3rd ed. Addison-Wesley, 2013.
- [15] A. K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice-Hall, 1989.
- [16] W. B. Pennebaker and J. L. Mitchell, *JPEG: Still Image Data Compression Standard*, Van Nostrand Reinhold, 1993.
- [17] J. G. Webster, *Medical Instrumentation: Application and Design*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2010.

- [18] J. D. Wilson and J. G. Webster, *Medical Instrumentation: Application and Design*, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1997.
- [19] S. K. Mitra and J. F. Kaiser, *Handbook for Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1993.
- [20] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 5th ed. Wellesley-Cambridge Press, 2016.
- [21] C. R. Johnson and R. D. Riess, *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2015.
- [22] P. Lancaster and M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices: With Applications*, 2nd ed. Academic Press, 1985.
- [23] S. Lipschutz and M. Lipson, *Linear Algebra*, 5th ed. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 2013.
- [24] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed. Springer, 2015.
- [25] D. C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, 5th ed. Pearson, 2016.
- [26] D. C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, 5th ed. Pearson, 2016
- [26] R. C. Johnson and R. D. Riess, *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2015.
- [27] P. Lancaster and M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices: With Applications*, 2nd ed. Academic Press, 1985.
- [28] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [29] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, 4th ed. Brooks Cole, 2006.
- [30] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2012.
- [31] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 4th ed. Johns Hopkins University Press, 2013.
- [32] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, 2nd ed. Springer, 2003.
- [33] R. Penrose, "A generalized inverse for matrices," in Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 51, 1955, pp. 406-413.
- [34] C. C. Paige and M. A. Saunders, "Towards a generalized inverse for linear systems," SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 12, no. 4, pp. 617-624, 1975.
- [35] R. E. Cline, "Representations for the generalized inverse of a matrix," Mathematics Magazine, vol. 38, no. 5, pp. 270-276, 1965.

- [36] G. Strang, **Linear Algebra and Its Applications**, 4th ed., Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole, 2006.
- [37] G. H. Golub and C. F. Van Loan, **Matrix Computations**, 3rd ed., Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [38] A. Papoulis and S. U. Pillai, **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**, 4th ed., New York: McGraw-Hill, 2002.
- [39] R. Penrose, "A generalized inverse for matrices," in **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, vol. 51, 1955, pp. 406-413.
- [40] G. H. Golub and C. F. Van Loan, **Matrix Computations**, 3rd ed., Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [41] S. Haykin, **Adaptive Filter Theory**, 5th ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2013.
- [42] K. R. Rao and J. J. Hwang, **Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding**, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [43] G. H. Golub and C. F. Van Loan, **Matrix Computations**, 3rd ed Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [44] L. S. Rajakaruna, T. K. Wijayakulasooriya, and S. Jayasooriya, "Singular value decomposition based ECG signal denoising," in **2017 IEEE International Conference on Industrial and Information Systems (ICIIS)**, Peradeniya, Sri Lanka, 2017, pp. 1-6.