



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Analyse fonctionnelle

Par

**SAOUDI Mounir**

Sujet

# **Les espaces vectoriels topologiques localement convexes**

Date de soutenance : 03/06/2017

**Devant le jury :**

Mr. Abdelmoumen TIAIBA	MCA. Univ de M'sila	Président
Mr. Khalil SAADI	MCA. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. Maatougui BELAALA	MAA. Univ de M'sila	Examineur
Mr. Abdelaziz BELAADA	MAA. Univ de M'sila	Examineur

**Promotion : 2016 / 2017**

# *Remerciements*

Mes premiers remerciements vont à mon encadreur, SAADI Khalil, enseignant à la Faculté des Mathématiques et informatiques de l'université de Msila d'avoir accepté de diriger mon mémoire. Il m'a guidé durant celui-ci et m'a apporté le soutien nécessaire. De part ses qualités pédagogiques, ses précieux conseils, ses stimulants encouragements et sa disponibilité.

Je remercie Monsieur TIAIBA Abdelmoumen, enseignant à l'université de Msila de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Messieurs BELAALA Maatougui et BELAADA Abdelaziz enseignants à l'université de Msila d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Merci

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Les espaces vectoriels normés</b>	<b>4</b>
1.1 Espace vectoriel . . . . .	4
1.2 Représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert . . . . .	8
1.3 Notions métriques . . . . .	9
1.4 Applications linéaires bornées . . . . .	10
1.4.1 Image et noyau d'une application linéaire . . . . .	11
1.5 Espace de Banach réflexif . . . . .	12
1.6 Quelques théorèmes principaux . . . . .	13
<b>2 Les semi-normes</b>	<b>16</b>
2.1 Les semi-normes . . . . .	16
2.2 Topologie définie par une famille de semi-normes . . . . .	19
2.3 Espace métrique défini par une suite de semi-normes . . . . .	22
2.3.1 Espace localement compacts . . . . .	23
<b>3 Les espaces vectoriels localement convexes</b>	<b>25</b>
3.1 Espace vectoriel topologique . . . . .	25
3.2 Espace vectoriel topologiquement localement convexe . . . . .	27
3.3 Application linéaire continue sur un evtlc . . . . .	29
3.4 Principaux types d'espace localement convexes . . . . .	31
3.4.1 Espaces tonnelés . . . . .	31

3.4.2	Espace de Montel . . . . .	32
3.4.3	Espace de Fréchet . . . . .	32
3.4.4	Espace de Banach . . . . .	32
3.4.5	Espace de Hilbert . . . . .	33
3.5	Diagramme des divers types d'e.v.t localement convexe . . . . .	33
<b>Bibliographie</b>		<b>34</b>

# Notation

$\ \cdot\ $	:	Norme.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	Produit scalaire.
$\mathcal{B}(E, F)$	:	L'espace des opérateurs linéaires continues de $E$ dans $F$ .
$E^*$	:	Dual (topologique) de $E$ .
$\tau_d$	:	la topologie associée à la distance : $\tau_d = \{ \forall x \in O, \exists r > 0; B(x, r) \subset O \}$ .
$(E, d)$	:	espace métrique.
$(E, \ \cdot\ )$	:	espace vectoriel normé.
$B_E$	:	La boule d'unité fermée de $E$ : $B_E = \{x \in E, \ x\  \leq 1\}$ .
$\mathcal{V}(x)$	:	l'ensemble des voisinages de $x$ .
$H$	:	Espace de Hilbert.
$\mathbb{N}$	:	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$	:	Famille de semi-normes.
$T : E \hookrightarrow F$	:	$T$ est isométrie.
$L_p$	:	Espaces de Lebesgue.
$\ell_p$	:	Espaces de suites
evt	:	Espace vectoriel topologique
$(E, \tau)$	:	Espace vectoriel topologique
evtlc	:	Espace vectoriel topologique localement convexe.

# Introduction

Le présent **mémoire de Master option analyse fonctionnelle** s'inscrit essentiellement dans le cadre de l'étude des espaces vectoriels localement convexe. Il s'articule autour de trois chapitres.

## Chapitre 1: Les espaces Vectoriels normés

Nous allons rappeler quelques définitions et propriétés dont nous aurons besoin dans le reste de ce mémoire. On commence par les espaces vectoriels, puis les espaces de Banach et enfin de Hilbert. Des exemples sur les trois espaces sont donnés. On présente aussi le théorème de représentation de Reisz qui joue un rôle important dans la représentation d'une forme linéaire définie sur un Hilbert. On termine ce chapitre par donner quelques théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle.

## Chapitre 2: Les semi normes

Les semi-normes définies sur un espace vectoriel jouent un rôle important . Quand un espace vectoriel manque d'une norme on peut se contenter par une suite de semi-normes, cette dernière peut engendrer une topologie et une métrique. Dans ce chapitre on verra la définition d'une semi norme ainsi que ses propriétés essentielles. Des résultats sur la topologie engendrée et l'espace métrique correspondant sont bien détaillés dans ce chapitre.

## Chapitre 3: Les espaces Vectoriels localement convexes

Il existe des exemples importants d'espaces vectoriels pour lesquels la notion naturelle de convergence n'est pas engendrée par une norme. C'est le cas, par exemple, de l'espace des fonctions continues ou holomorphes dans un ouvert. Pour traiter ces cas, il est commode

d'introduire la notion d'un espace (vectoriel) topologique localement convexe. Ce chapitre est consacré à l'étude de ce type d'espaces.

# Chapitre 1

## Les espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques définitions et propriétés dont nous aurons besoin dans le reste de ce mémoire. On commence par les espaces vectoriels, puis les espaces de Banach et enfin de Hilbert. Des exemples sur les trois espaces sont donnés. On présente aussi le théorème de représentation de Reisz qui joue un rôle important dans la représentation d'une forme linéaire définie sur un Hilbert. On termine ce chapitre par donner quelques théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle. Les références principalement utilisées sont [1],[3].

### 1.1 Espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs  $x, y$  pour en former troisième  $x + y$  (ou  $x - y$ ) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur  $x$  par un scalaire  $\lambda$  pour obtenir un vecteur  $\lambda x$ .

**Définition 1.1.1 (espace vectoriel)** *Soit  $E$  un ensemble muni de deux lois de composition, l'une interne et notée additivement*

$$\begin{aligned} (+) : E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

*l'autre externe et notée multiplicativement*

$$\begin{aligned} (.) : \mathbb{R} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, y) &\mapsto \lambda y \end{aligned}$$

On dit que  $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  si

1.  $(E, +)$  est un groupe commutatif.

- $\forall x, y \in E : x + y = y + x$  (commutatif).
- $\exists e \in E, \forall x \in E : x + e = x$  (élément neutre).
- $\forall x \in E, \exists y \in E : x + y = y + x = e$  (élément symétrique).
- $\forall x, y, z \in E : (x + y) + z = x + (y + z)$  (associative).

2. Pour  $x, y \in E$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
- $1_{\mathbb{R}} \cdot x = x$

**Remarque 1.1.1** Soit  $E$  un espace vectoriel et soit  $F \subset E$ . L'ensemble  $F$  est appelé un *sous espace vectoriel* si

1.  $0_E \in F$ .
2.  $x + y \in F$  pour tout  $x, y \in F$ .
3.  $\lambda \cdot x \in F$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in F$ .

Pour qu'un espace vectoriel  $E$  soit un espace très riche, on devrait le munir d'une norme. Cette norme permet de définir une topologie sur cet espace vectoriel et par conséquent beaucoup de propriétés et résultats auront lieu à l'aide de cette norme.

**Définition 1.1.2 (Norme)** Soit  $E$  un espace vectoriel. On appelle *norme* une application  $\|\cdot\|$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  qui vérifie

$$\|x\| = 0 \iff x = 0 \text{ (Séparation).}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (Homogénéité).}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E \text{ (Inégalité triangulaire).}$$

**Exemple 1.1.1**  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé

1.  $E = \mathbb{R}$  avec la norme usuelle  $|x|$  (Valeur absolue).

2.  $E = \mathbb{R}^n$ . Si  $x$  est dans  $E$ , on pose  $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$a. \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$b. \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

$$c. \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

**Définition 1.1.3 (Distance)** On appelle distance (ou métrique) sur un ensemble  $E$  tout application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui satisfait les propriétés suivantes

1.  $\forall x, y \in E; d(x, y) = 0 \iff x = y$  (Séparation).

2.  $\forall x, y \in E; d(x, y) = d(y, x)$  (Symétrie).

3.  $\forall x, y, z \in E; d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Inégalité triangulaire).

**Définition 1.1.4** Un espace métrique est un couple  $(E, d)$  où l'ensemble  $E$  est muni de la distance  $d$ .

**Exemple 1.1.2**

1. L'ensemble  $\mathbb{R}$  muni de la distance usuelle  $d(x, y) = |x - y|$  est un espace métrique.

2. Sur l'espace  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les compisantes. Soient  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . On définit trois distances

$$a. d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

$$b. d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \text{ (distance euclidienne).}$$

$$c. d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

**Remarque 1.1.2** *Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace métrique dont la distance  $d$  est définie par*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

*Alors, les distances définies dans l'exemple ci-dessus sont toutes déduites des normes classiques  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ .*

**Définition 1.1.5** *Soient  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  deux normes sur un espace vectoriel  $E$  sont équivalentes si*

$$\exists \alpha, \beta \in ]0, +\infty[ \forall x \in E : \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

**Remarque 1.1.3** *La même définition peut être adopter pour les distances équivalentes.*

**Exemple 1.1.3** *Les trois normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes.*

**Proposition 1.1.1** *Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$  deux normes sur  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. Les deux normes sont équivalentes.
2. Les distances associées aux normes sont équivalentes.

**Définition 1.1.6 (Suite de Cauchy)** *On dit qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'un espace métrique  $(E, d)$  est une suite de Cauchy si elle vérifie*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall m, n \geq n_0 : d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

**Définition 1.1.7 (Espace complet)** *Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On dit que  $E$  est complet si toute suite de Cauchy converge dans  $E$ .*

1.  $(\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{R}^n, d_2)$  sont complets.
2.  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  n'est pas complet.

**Définition 1.1.8 (Espace de Banach)** *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de la norme.*

Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}$  et  $p \in [1, +\infty[$ . On définit l'ensemble  $\ell_p$  par

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Si  $p = \infty$ , on définit  $\ell_\infty$  par

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

Les opérations algébriques dans ces ensembles sont définies par

1. Pour tout  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x' = (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$ , on a  $x + x' = (x_n + x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$ , on a  $\lambda x = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Théorème 1.1.1** *Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace  $\ell_p$  est un Banach.*

## 1.2 Représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert

**Définition 1.2.1** *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.*

**Définition 1.2.2** *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la distance issue du produit scalaire.*

**Théorème 1.2.1** *L'espace  $\ell_2$  est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$$

Soit  $H$  un espace de Hilbert. Pour tout vecteur  $y$  de  $H$ , la forme linéaire qui à  $x$  associe  $\langle y, x \rangle$  est continue sur  $H$  (sa norme est égale à celle de  $y$ , d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Le théorème de Riesz annonce la réciproque: toute forme linéaire continue sur  $H$  s'obtient de cette façon.

**Théorème 1.2.2** (*Représentation de Riesz*) *Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $u$  une forme linéaire sur  $H$ . Alors, il existe un élément unique  $a \in H$  tel que*

$$\forall x \in H : u(x) = \langle a, x \rangle$$

**Théorème 1.2.3 (Caractérisation d'un espace de Hilbert)** *Soit  $H$  un espace de Banach quelconque, on définit l'identité du parallélogramme par*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (1.2.1)$$

*qui signifie que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales. Le théorème dû à Jordan-Von-Neumann en 1935 donne une caractérisation en utilisant cette dernière identité.*

**Théorème 1.2.4** *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si et seulement si sa norme vérifie l'égalité (1.2.1).*

## 1.3 Notions métriques

**Définition 1.3.1 (Boule, sphère)**  *$(E, \|\cdot\|)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $a$  un élément de  $E$ , et  $r > 0$ . On appelle*

1. **Boule ouverte** de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| < r\}.$$

2. **Boule fermée** de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}.$$

3. **Sphère** de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$S(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| = r\}.$$

**Définition 1.3.2** *Un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est convexe si pour toute paire de points  $x, y \in E$ , le segment de droite  $[x, y] \subset E$ .*

**Proposition 1.3.1** *Une boule (ouverte ou fermée) d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé est convexe.*

**Proposition 1.3.2** *Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.*

1. Toute boule ouverte est un ouvert de  $E$ .
2. Toute boule fermée est un fermé de  $E$ .
3. Toute sphère est un fermé de  $E$ .

**Définition 1.3.3 (Topologie d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé)** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Un sous ensemble  $O \subset E$  est un ouvert si

- pour tout  $x \in O, \exists r > 0 : B(x, r) \subset O$ . On appelle **topologie forte de  $E$**  la famille des ouverts de  $E$  défini de la même manière.

## 1.4 Applications linéaires bornées

Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés.

**Définition 1.4.1** Soit  $T : E \rightarrow F$  une application. Elle est linéaire si

- i)  $\forall x, y \in E : T(x + y) = T(x) + T(y)$ .
- ii)  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : T(\lambda x) = \lambda T(x)$ .

On note  $L(E, F)$  l'espace des applications linéaires.

**Définition 1.4.2 (Application linéaire bornée)** Une application linéaire  $T : E \rightarrow F$  est dite continue (bornée) s'il existe  $C > 0$  tel que

$$\forall x \in E : \|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

On note  $\mathcal{B}(E, F)$  l'espace des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . On munit l'espace  $\mathcal{B}(E, F)$  de la norme de l'opérateur suivante

$$\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|$$

Où  $B_E$  est la boule unité fermée de  $E$ .

**Théorème 1.4.1** Soit  $T \in \mathcal{B}(E, F)$  les nombres suivantes sont équivalentes

- $a = \sup_{x \in E} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$ .
- $b = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$ .
- $c = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$ .
- $d = \inf\{C > 0, \|T(x)\| \leq C\|x\|, \forall x \in E\}$ .

**Lemme 1.4.1** *Toute application linéaire continue définie sur des espaces normés est Lipschitzienne. C'est à dire, il existe  $C > 0$  tel que*

$$\forall x, y \in E : \|T(x) - T(y)\| \leq C \|x - y\|$$

**Exemple 1.4.1** *Si on munit  $C([0, 1]; \mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ , alors la forme linéaire  $T \rightarrow T(0)$  n'est pas continue.*

**Dual topologique.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note  $E^*$ , l'espace de Banach des formes linéaires continues sur  $E$ , i.e.,

$$E^* = \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$$

Dans ce cas

$$\|T\|_{E^*} = \sup_{x \in B_E} |T(x)|$$

**Théorème 1.4.2** *pour tout  $x \in E$ , il existe  $T \in E^*$  tel que  $\|T\| = 1$  et  $T(x) = \|x\|$*

### 1.4.1 Image et noyau d'une application linéaire

**Définition 1.4.3** *Soit  $T$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$*

1. *On appelle image de  $T$  l'ensemble*

$$\text{Im}(T) = T(E) = \{T(x), x \in E\} \subset F.$$

2. *On appelle noyau de  $T$  l'ensemble*

$$\text{Ker}(T) = N(T) = T^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, T(x) = 0_F\}.$$

**Proposition 1.4.1** Soit  $T \subset \mathcal{B}(E, F)$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $\exists M > 0$  tq  $\|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E$ .
2.  $T$  est continue sur  $E$ .
3.  $T$  est continue en  $0_E$ .
4.  $T$  borné sur la boule  $\overline{B}(0_E, 1)$ .
5.  $T$  est borné sur  $S(0_E, 1)$ .

**Théorème 1.4.3** Si  $F$  est un espace Banach, alors  $\mathcal{B}(E, F)$  est un espace de Banach.

**Proposition 1.4.2** Si  $(E; \|\cdot\|_E), (F; \|\cdot\|_F)$  sont deux espaces vectoriels normés, tel que  $E$  est de dimension finie, et  $F$  de dimension quelconque, alors toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue.

## 1.5 Espace de Banach réflexif

**Définition 1.5.1** Si l'application linéaire  $T : E \rightarrow F$  est bijective continue on dit que  $T$  est une *isomorphisme*, on note  $F \simeq E$ .

**Définition 1.5.2** On dit que  $T$  est isométrie si  $T : E \rightarrow F$  vérifie

$$\|T(x)\|_F = \|x\|_E, \forall x \in E.$$

On écrit  $T : E \hookrightarrow F$ .

**Remarque 1.5.1** Si  $T$  est isomorphisme isométrie, on dit que  $E$  s'identifie à  $F$ , et  $F = E$ .

Soit  $X$  un espace de Banach. Le dual du dual  $X^*$  de  $X$ , noté  $X^{**}$ , s'appelle le bidual de  $X$ . Pour tout  $x \in X$  notons

$$\mathbf{J}_X(x) : X^* \rightarrow \mathbb{R}$$

la forme linéaire sur  $X^*$  définie par

$$\forall x^* \in X^* : \langle \mathbf{J}_X(x), x^* \rangle = x^*(x)$$

Pour tout  $x^* \in X^*$ , on a

$$|\langle \mathbf{J}_X(x), x^* \rangle| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|,$$

ce qu'il montre que  $\mathbf{J}_X(x)$  est bien dans  $X^{**}$ . L'application  $\mathbf{J}_X : X \rightarrow X^{**}$  est isométrique. Elle s'appelle l'isométrie canonique. L'application  $\mathbf{J}_X$  est toujours injective. En général, elle n'est pas surjective.

**Définition 1.5.3 (Espace réflexif)** *Un espace de Banach  $X$  est dit réflexif si l'application canonique*

$$\mathbf{J}_X : X \rightarrow X^{**},$$

*est bijective. Autrement dit,  $X$  s'identifie isométriquement à  $X^{**}$ . Ca nous permettra d'associer à chaque élément  $x^{**}$  de  $X^{**}$  un unique vecteur  $x$  de  $X$  tel que*

$$\forall x^* \in X^* : x^{**}(x^*) = x^*(x).$$

*Si  $X$  est réflexif, alors il s'identifie à son bidual. La réciproque n'est pas vraie comme le montre James où il a donné un exemple d'un espace non réflexif  $X$  pour lequel il existe une isométrie surjective de  $X$  dans  $X^{**}$ . Pour cette raison, il est indispensable d'utiliser l'application  $\mathbf{J}$  dans la définition précédente.*

**Exemple 1.5.1** *1) Pour tout  $1 < p < \infty$ , l'espace  $L_p$  est réflexif. Il en est de même pour les petit  $\ell_p$  avec  $1 < p < \infty$ . Par contre, les espaces  $L_1, L_\infty, c_0, \ell_1, \ell_\infty$  ne sont pas réflexifs.*

*2) Tout espace de dimension fini est réflexif.*

*3) Tout espace de Hilbert est réflexif.*

**Proposition 1.5.1** *1) Si  $X$  est réflexif et si  $Y$  est isomorphe à  $X$ , alors  $Y$  est réflexif.*

*2) Si  $X$  est réflexif, alors  $X^*$  est réflexif.*

*3) Tout sous espace fermé  $Y$  de  $X$  est réflexif.*

## 1.6 Quelques théorèmes principaux

**Théorème 1.6.1 (Banach Stenhaus 1919)** *Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et soit  $T_i : E \rightarrow F$  des application linéaires continues ( $i \in I$  ensemble d'indices quelconques) tel*

que

$$C_x = \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F < \infty \quad \forall x \in E.$$

Alors

$$C = \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_{\mathcal{B}(E,F)} < \infty.$$

En d'autres termes il existe un nombre positif  $C > 0$  tel que

$$\|T_i(x)\| \leq C \quad \forall x \in B_E.$$

On encore

$$\|T_i(x)\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in E, i \in I.$$

**Définition 1.6.1** Soient deux espaces topologiques  $E$  et  $F$ , on dit qu'une application  $T : E \rightarrow F$  est ouverte si pour tout ouvert  $U$  de  $E$ , l'image  $T(U)$  est ouverte dans  $F$ .

**Théorème 1.6.2 (Des application ouvertes)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire continue surjective Alors

$$\exists C > 0 \text{ tq } B_F(0, C) \subseteq T(B_E(0, 1)) \quad (1.6.1)$$

En particulier  $T$  est une application ouverte

$$T \text{ surjective} \Leftrightarrow (1.6.1) \Leftrightarrow T \text{ est ouvert.}$$

**Théorème 1.6.3 (des isomorphismes de Banach)** Si  $T$  est une application continue et bijective d'un espace de Banach  $E$  vers un espace de Banach  $F$ , Alors  $T^{-1}$  est continue et  $T$  donc un isomorphisme.

**Théorème 1.6.4 (Graphe fermé de Banach)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,  $T$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ , et  $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$ . Alors:

$$T \in \mathcal{B}(E, F) \text{ si et seulement si } \Gamma \text{ est fermé.}$$

**Théorème 1.6.5** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes de  $E$  sont équivalentes.

**Proposition 1.6.1** *Les espaces vectoriels normés de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  sont des espaces de Banach.*

**Proposition 1.6.2** *Soit  $E$  un espace vectoriel, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1.  *$E$  est de dimension finie.*
2. *Toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.*
3. *Quelle que soit la norme choisie sur  $E$  toute forme linéaire définie sur  $(E, \|\cdot\|)$  est continue.*
4. *Quelle que soit la norme choisie sur  $E$ , les compacts de  $(E, \|\cdot\|)$  sont les fermés bornés.*

# Chapitre 2

## Les semi-normes

Les semi-normes définies sur un espace vectoriel jouent un rôle important. Quand un espace vectoriel manque d'une norme on peut se contenter par une suite de semi-normes, cette dernière peut engendrer une topologie et une métrique. Dans ce chapitre, on verra la définition d'une semi-norme ainsi que ses propriétés essentielles. Des résultats sur la topologie engendrée et l'espace métrique correspondant sont bien détaillés dans ce chapitre. Les références principalement utilisées sont [8],[10]et[13]

### 2.1 Les semi-normes

**Définition 2.1.1** Soit  $E$  un espace vectoriel. On appelle **semi-norme** sur  $E$  une application  $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , telle que

1.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : p(\lambda x) = |\lambda|.p(x)$
2.  $\forall x, y \in E : p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

**Exemple 2.1.1** Dans un espace normé, toute norme est une semi-norme. L'inverse n'est pas vrai.

**Exemple 2.1.2** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soit  $E^*$  le dual topologique de  $E$ . Pour tout  $x^* \in E^*$  l'application suivante est bien une semi-norme

$$\begin{aligned} p : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto |\langle x^*, x \rangle| = |x^*(x)| \end{aligned}$$

**Exemple 2.1.3** De même, soit  $x \in E$ , l'application suivante est semi-norme sur  $E^*$

$$\begin{aligned} p : E^* &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x^* &\mapsto |\langle x, x^* \rangle| = |x^*(x)| \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.1** Soit  $p$  une semi-norme sur  $E$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées

1.  $p(0) = 0$
2. Pour tout  $x \in E$ , on a  $p(x) \geq 0$
3. Pour tout  $x, y$  dans  $E$ , on a

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$$

**Preuve.** 1. Pour tout  $x$  dans  $E$ , on a  $p(0) = p(0.x) = 0.p(x) = 0$

2. On a

$$0 = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$$

Alors

$$p(x) \geq 0$$

3. Cette inégalité se déduit de

$$\begin{cases} p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y) \\ p(y) = p(y - x + x) \leq p(y - x) + p(x) \end{cases}$$

Ces dernières sont équivalentes à

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y).$$

■

**Théorème 2.1.1 (Hahn Banach form analytique)** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $p$  une semi-norme sur  $E$ ,  $G$  un sous espace vectoriel de  $E$  et  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire telle que

$$\forall x \in G : |\varphi(x)| \leq p(x)$$

Alors; il existe une forme linéaire  $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{R}$  prolongement  $\varphi$  et tel que

$$\forall x \in E : |\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ \uparrow & \nearrow_{\tilde{\varphi}} & \\ E & & \end{array}$$

**Théorème 2.1.2** *Le noyau  $p^{-1}(\{0\})$  de la semi-norme  $p$  est un sous espace vectoriel.*

**Preuve.** L'ensemble  $p^{-1}(\{x \in E : p(x) = 0\})$  est non vide car il contient 0. Soient  $x, y \in p^{-1}(\{0\})$  alors

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) = 0 + 0$$

donc,  $p(x + y) = 0$ . C'est à dire  $x + y \in p^{-1}(\{0\})$ . Soient maintenant  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nous avons

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = 0$$

par conséquent  $\lambda x \in p^{-1}(\{0\})$ . Ce qu'il termine la preuve. ■

**Proposition 2.1.2** *Toute semi-norme de noyau réduit à  $\{0\}$  est une norme sur  $E$ .*

**Preuve.** On vérifie que

$$p(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

En effet, si  $p(x) = 0$ , alors  $x \in p^{-1}(\{0\})$ , donc  $x = 0$ . ■

**Définition 2.1.2** *Soit  $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$  une famille de semi-normes. On dit que  $\mathcal{P}$  sépare les points de  $E$  si*

$$\forall p \in \mathcal{P} : p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

**Définition 2.1.3 (Semi-normes et suites convergentes)** *Soit  $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$  une famille de semi-normes qui sépare les points de  $E$ . On dit qu'une suite  $(x_n)$  de  $E$  converge vers  $x$  au sens de  $\mathcal{P}$ , on note  $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ , si*

$$\forall p \in \mathcal{P} : p(x_n - x) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

**Définition 2.1.4 (Semi-normes et boules ouvertes)** Soit  $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$  une famille de semi-normes qui sépare les points de  $E$ . Pour tout  $x \in E, r > 0$  et  $J \subset I$  fini, on définit la boule ouverte (élémentaire)

$$B_J(x, r) = \{y \in E : p_j(y - x) < r, \forall j \in J\}.$$

On note  $B_J(0, r)$  les boules centrées en 0 et on remarque que  $B_J(x, r) = x + B_J(0, r)$

## 2.2 Topologie définie par une famille de semi-normes

Rappelons qu'un couple  $(E, \tau)$  est dit espace topologique si les sous ensembles de  $\tau$ , appelés **ouverts**, vérifient

1. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
2. Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.
3.  $E$  et  $\emptyset$  sont ouverts.

**Définition 2.2.1** Soit  $A$  une partie de l'espace topologique  $E$ . On dit qu'une partie  $V$  de  $E$  est un **voisinage** de  $A$  s'il existe un ouvert  $O$  tel que

$$A \subset O \subset V$$

Dans le cas où  $A = \{x\}$ , on dit que  $v$  est un voisinage de  $x$ , et on notera que  $\mathcal{V}(x)$  l'ensemble des voisinages de  $x$ .

**Définition 2.2.2** On dit que  $E$  est un **espace topologique séparé** si pour tous  $x, y \in E, x \neq y$ , il existe  $V \in \mathcal{V}(x), W \in \mathcal{V}(y)$  tel que

$$V \cap W = \emptyset$$

**Définition 2.2.3** Soit  $x \in E$ , on dit que  $x$  est **adhérent** à  $A$  si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x); V \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points à  $A$  sont appelés l'**adhérence** de  $A$ .

**Définition 2.2.4** On dit que  $E$  est **un espace topologique séparable** si  $E$  contient un ensemble dénombrable partout dense dans  $E$ .

**Proposition 2.2.1** Un espace métrique est séparé.

**Définition 2.2.5** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$  une famille de semi-normes définies sur  $E$ . On appellera  **$\mathcal{P}$ -boule** de  $E$  centrée en  $a \in E$  tout ensemble de la forme

$$W(a, p_1, \dots, p_k, r_1, \dots, r_k) := \{x \in E : \forall j \leq k, p_j(x - a) < r_j\}$$

ou les  $p_j$  appartiennent à  $\mathcal{P}$ , et les  $r_j$  sont strictement positifs.

**Théorème 2.2.1** Si  $\mathcal{P}$  est une famille de semi-normes définies sur  $E$ , alors il existe une unique topologie sur  $E$  (qu'on appellera  $\mathcal{P}$ -topologie) pour tout  $a \in E$ , les  $\mathcal{P}$ -boules de centre  $a$  forment une base de voisinage de  $a$ .

Pour cette topologie, la fonction

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

est continue de  $E \times E$  dans  $E$ , et la fonction

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

continue de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  (on dira que c'est une topologie d'espace vectoriel).

**Théorème 2.2.2** Si  $\mathcal{P}$  est une famille de semi-normes définies sur  $E$ . La  $\mathcal{P}$ -topologie est séparée si et seulement si, pour tout  $x \neq 0$  de  $E$ , il existe une  $p \in \mathcal{P}$  tel que  $p(x) > 0$ .

**Preuve.** Si la  $\mathcal{P}$ -topologie est séparée et si  $x \neq 0$  dans  $E$ , il existe une  $\mathcal{P}$ -boule  $W(0, p_1, \dots, p_k, r_1, \dots, r_k)$  de centre 0 ne contenant pas  $x$ , alors il existe un  $j \leq k$  tel que  $p_j(x) \geq r_j > 0$ .

Inversement, soit  $x \neq y$ , d'après l'hypothèse il existe  $p \in \mathcal{P}$  tel que

$$p(x - y) = r > 0,$$

les  $\mathcal{P}$ -boules  $W_1 = W(x, p, r/2)$  et  $W_2 = W(y, p, r/2)$  sont des voisinages disjoints de  $x$  et  $y$ , en effet, si on avait  $z \in W_1 \cap W_2$ , on aurait

$$r = p(x - y) \leq p(x - z) + p(y - z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

■

**Théorème 2.2.3** *Si  $\mathcal{P}$  est une famille de semi-normes définies sur  $E$ , chacun des fonctions  $p \in \mathcal{P}$  est continue pour la  $\mathcal{P}$ -topologie, et toute  $\mathcal{P}$ -boule est un ensemble convexe ouvert.*

**Preuve.** On a en effet, pour  $p \in \mathcal{P}$  :

$$\begin{aligned} p(x+h) &\leq p(x) + p(h) \\ p(x) &\leq p(x+h) + p(-h) = p(x+h) + p(h) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |p(x+h) - p(x)| &\leq p(h) \\ |p(x+h) - p(x)| &\leq \epsilon \end{aligned}$$

dés que  $x+h \in W(x, p, \epsilon)$ .

Soit  $p \in \mathcal{P}$ . Puisque  $p$  est continue, l'ensemble  $\{x : p(x-a) < r\}$  est ouvert. Donc toute  $\mathcal{P}$ -boule, intersection finie d'ouverts, est ouverte. Enfin, si  $p \in \mathcal{P}$  telle que  $p(x-a) < r$  et  $p(y-a) < r$ . Soit  $0 \leq t \leq 1$ , on a

$$\begin{aligned} p((tx + (1-t)y) - a) &= p(t(x-a) + (1-t)(y-a)) \\ &\leq t.p(x-a) + (1-t)p(y-a) \\ &< t.r + (1-t)r = r \end{aligned}$$

Il en résulte que l'ensemble  $\{x : p(x-a) < r\}$  est convexe, alors toute  $\mathcal{P}$ -boule, intersection de convexe est convexe. ■

**Théorème 2.2.4** *Si  $\mathcal{P}$  une famille de semi-normes sur  $E$ , et  $q$  une semi-norme sur  $E$ . Alors il y a équivalence entre*

1.  $q$  continue pour la  $\mathcal{P}$ -topologie.
2. Il existe un nombre fini  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$  d'éléments de  $\mathcal{P}$  et un nombre  $M$  tel que

$$q(x) \leq M \sup_{j \leq k} p_j(x)$$

pour tout  $x \in E$ .

3.  $q$  est borné sur un voisinage de 0.

**Corollaire 2.2.1** Soit  $P$  une famille de semi-normes sur  $E$ ,  $Q$  une famille de semi-normes sur  $F$  et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors  $f$  est continue de  $E$  muni de la  $P$ -topologie dans  $F$  muni de la  $Q$ -topologie si et seulement si  $q \circ f$  est une semi-norme continue sur  $E$  pour tout  $q \in Q$ .

**Corollaire 2.2.2** Si  $\mathcal{P}$  une famille de semi-normes sur  $E$ , et  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme linéaire, alors  $f$  est continue pour la  $\mathcal{P}$ -topologie si et seulement s'il existe un nombre fini  $(p_1, \dots, p_k)$  d'éléments de  $\mathcal{P}$  et un nombre positif  $M$  tel que, pour tout  $x \in E$ , on ait

$$|f(x)| \leq M \sup_{j \leq k} p_j(x)$$

## 2.3 Espace métrique défini par une suite de semi-normes

Le résultat de ce paragraphe est intéressant. Il annonce qu'une famille de semi-normes définies sur l'espace vectoriel  $E$  peut engendrer une distance sur l'espace vectoriel  $E$ . Et par conséquent, les deux topologies sont coïncides.

**Théorème 2.3.1** Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une suite  $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de semi-normes qui sépare les points de  $E$ . Alors l'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \min(p_i(x - y), 1) \end{aligned}$$

définit une distance invariante par translation ( $d(x + z, y + z) = d(x, y), \forall x, y, z \in E$ ).

**Preuve.** Soient  $x, y, z \in E$ .

·  $d(x, y) = 0$ , alors

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \min(p_i(x - y), 1) = 0,$$

donc pour tout  $i \in \mathbb{N}$  on a

$$\min(p_i(x - y), 1) = 0 = 0,$$

c'est à dire  $p_i(x - y) = 0$ , comme la famille  $P$  est séparée on a  $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ .

- Il est clair que  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- Pour l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \min(p_i(x - y), 1) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \min(p_i(x - y + z - z), 1) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \min(p_i((x - z) - (y - z)), 1) \\
 &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \min(p_i(x - z), 1) + \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \min(p_i(y - z), 1) \\
 &\leq d(x, z) + d(y, z).
 \end{aligned}$$

pour la distance invariante il est clair que  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ . ■

**Corollaire 2.3.1** *La topologie  $\tau_d$  induite par  $d$  est équivalente à la topologie  $\tau$  définie par la famille de semi-normes  $\mathcal{P}$ .*

### 2.3.1 Espace localement compacts

Soit  $E$  un espace topologique et  $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille d'ouverts de  $E$

**Définition 2.3.1** *On dit que  $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est un recouvrement ouvert de  $E$  si  $E = \cup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ , i.e.,*

$$\forall x \in E, \exists \lambda_0 \in \Lambda : x \in \Omega_{\lambda_0}$$

Supposons maintenant que  $E$  est un espace topologique séparé.

**Définition 2.3.2 (Borel-Lebesgue)** *On dit que  $E$  est un **espace compact** si et seulement si pour tout recouvrement ouvert de  $E$ , on peut extraire un recouvrement fini.*

**Définition 2.3.3** *On dit que  $E$  est **localement compact** si tout point de  $E$  possède au moins un voisinage compact.*

**Théorème 2.3.2 (Riesz)** *Un espace normé est localement compact si et seulement s'il est de dimension fini.*

**Exemple 2.3.1**  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  est localement compact.

**Proposition 2.3.1** *Si  $E$  est un espace compact, il est **séparable**.*

**Théorème 2.3.3** *Si  $P$  est une famille dénombrable de semi-normes sur  $E$ , la  $P$ -topologie peut être définie par une distance  $d$  invariante par translation, c'est-à-dire vérifiant pour tout  $x, y$  et  $z$  de  $E$*

$$d(x + z, y + z) = d(x, y),$$

*pour laquelle les boules sont convexes. Inversement, si  $P$  une famille de semi-normes et si la  $P$ -topologie est métrisable, il existe une suite croissante  $(p_k)$  de semi-normes pour laquelle la  $P$ -topologie coïncide avec la topologie définie par la famille des  $(p_k)$ .*

**Théorème 2.3.4** *Si  $P$  est une famille de semi-normes sur  $E$  est localement compact pour la  $P$ -topologie si et seulement s'il est séparé et de dimension finie.*

**Définition 2.3.4** *On appelle **espace de Fréchet** un espace vectoriel  $E$  muni d'une suite  $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de semi-normes qui sépare les points et tel que, pour la distance  $d$  définie au Théorème précédent l'espace métrique  $(E, d)$  est complet.*

**Théorème 2.3.5 (De l'application ouverte pour les espaces de Fréchet)** *Si  $P$  une famille de semi-normes sur  $E$  est localement compact pour la  $P$ -topologie si et seulement s'il est séparé et de dimension finie.*

**Théorème 2.3.6** *Soient  $E, F$  deux espaces de Fréchet et  $u$  une application linéaire continue de  $E$  dans  $F$ . Si  $u(E)$  n'est pas maigre dans  $F$ , l'application  $u$  est surjective et ouverte.*

**Théorème 2.3.7** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Fréchet et  $u$  une application linéaire continue de  $E$  dans  $F$ . Si la graphe de  $u$  est fermée dans  $E \times F$ , alors  $u$  est continue.*

# Chapitre 3

## Les espaces vectoriels localement convexes

Il existe des exemples importants d'espaces vectoriels pour lesquels la notion naturelle de convergence n'est pas engendrée par une norme. C'est le cas, par exemple, de l'espace des fonctions continues ou holomorphes dans un ouvert. Pour traiter ces cas, il est commode d'introduire la notion d'un espace (vectoriel) topologique localement convexe. Ce chapitre est consacré à l'étude de ce type d'espaces. Les références principalement utilisées sont [2],[9]

### 3.1 Espace vectoriel topologique

On considère maintenant le cas où  $E$  est un espace vectoriel. Pour simplifier les notations, on considère le cas réel; tous les résultats restent vrais dans le cas complexe. Soit  $\tau$  une topologie sur  $E$  vérifiant les deux propriétés suivantes

- tout singleton  $\{x\}$  est un fermé de  $E$ .
- les opérations d'addition et multiplication par un scalaire sont des applications continues.

Dans ce cas, on appelle  $(E, \tau)$  un espace vectoriel topologique (EVT). Un sous ensemble  $A \subset E$  est dit borné si pour tout voisinage  $V$  de zéro il existe  $s > 0$  tel que  $A \subset tV$  pour tout  $t \geq s$ . Un sous ensemble  $A \subset E$  est dit convexe si pour tous  $x, y \in A$  le segment

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

appartient à  $A$ .

**Exemple 3.1.1** *Un espace vectoriel normé est un cas particulier d'espace vectoriel topologique.*

**Définition 3.1.1 (Base de voisinage)** *Soit  $E$  un espace vectoriel topologique. On appelle **voisinage de 0** une partie contenant un ouvert contenant 0. On dit qu'une famille  $\mathbf{B}$  est une base de voisinage ou base de voisinage en 0 si c'est une famille de voisinage de 0 tel que pour tout ouvert  $O$  contenant 0 on peut trouver  $B \in \mathbf{B}$  avec  $B \subset O$ .*

**Exemple 3.1.2** *Dans espace vectoriel normé, les boules de rayon  $\frac{1}{n}$  centrées en 0, constituent une base de voisinage de 0.*

**Proposition 3.1.1 (Jauge de Minkowski)** *Soit  $E$  un espace vectoriel topologique, et  $C$  un voisinage convexe symétrique de 0. Alors l'application  $p$  définie par*

$$p(x) = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\}$$

*est une semi-norme continue sur  $E$ . En outre*

$$x \in C \Rightarrow p(x) \leq 1$$

$$p(x) < 1 \Rightarrow x \in C$$

**Preuve.** Montrons d'abord que  $p$  est à valeur dans  $\mathbb{R}_+$ , i.e., pour tout  $x \in E$  il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda x \in C$ . C'est une conséquence immédiate de la continuité en 0 de l'application  $\lambda \mapsto \lambda x$ . Il est clair que  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$  pour  $\lambda \geq 0$ , et comme  $C$  est symétrique on a  $p(-x) = p(x)$ . Pour prouver que  $p$  est une semi-norme, on utilise la relation

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t} \frac{x}{t} + \frac{s}{s+t} \frac{y}{s}$$

qui implique, par convexité de  $B$ , que

$$\frac{x}{t}, \frac{y}{s} \in C \implies \frac{x+y}{s+t} \in C$$

On en déduit facilement que  $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ . Soient  $\epsilon > 0$  et  $x \in E$ , l'ensemble  $x + \epsilon B$  est alors un voisinage de  $x$ . Si  $y \in x + \epsilon B$ , on a

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x-y) = \epsilon p\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)$$

mais  $(x - y)/\epsilon \in B$ , cette dernière quantité est donc majorée par  $\epsilon$ . On en déduit que  $p$  est continue. Il est clair que  $x \in C \Rightarrow p(x) \leq 1$ . Soit maintenant  $x$  tel que  $p(x) < 1$ , alors il existe  $\lambda > 1$  tel que  $\lambda x \in C$ , et par convexité  $x \in C$ . ■

**Théorème 3.1.1** *Soit  $E$  un evt,  $K \subset E$  un compact et  $F \subset E$  un fermé tels que  $K \cap F = \emptyset$ . Alors il existe un voisinage de zéro  $V$  tel que*

$$(K + v) \cap (F + V) = \emptyset$$

*ce résultat implique immédiatement le corollaire suivant.*

**Corollaire 3.1.1** *Soit  $E$  un evt. Alors*

- *$E$  est un espace de Hausdorff (espace séparé).*
- *Tout élément d'une base locale  $B$  contient l'adhérence d'une autre élément de  $B$ .*

**Définition 3.1.2**  *$E$  espace topologique,  $B \subset E$  est dite **borné** si  $\forall U$  voisinage de 0,  $\exists \lambda > 0 : B \subset \lambda U$ .*

## 3.2 Espace vectoriel topologiquement localement convexe

**Définition 3.2.1** *Soit  $(E, \tau)$  un evt. On dit que*

1.  *$E$  est localement convexe s'il existe une base locale dont les éléments sont convexes.*
2.  *$E$  est localement borné si le point zéro possède un voisinage borné.*
3.  *$E$  est métrisable si sa topologie  $\tau$  est engendrée par une métrique  $d$  sur  $E$ .*
4.  *$E$  est un  $F$ -espace si sa topologie est engendrée par une métrique invariante  $d$  par rapport à laquelle  $E$  est complet.*
5.  *$E$  est un espace de Fréchet si  $E$  est un  $F$ -espace localement convexe.*

6.  $E$  est localement convexe séparé un espace vectoriel  $E$  muni d'une topologie  $\tau \subset P(E)$  tel que

- $\tau$  est compatible avec la structure d'e.v.
- $\tau$  localement convexe, i.e., admet une base de voisinage convexe.
- $\tau$  est séparée.

**Remarque 3.2.1** On note  $E^*$  la dual topologique d'un evtlc  $E$ , c'est à dire l'ensemble des fonctions linéaires continues de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 3.2.1** Soit  $E$  un evtlc. Alors  $E^*$  sépare les points de  $E$ , i.e., pour tout  $x \neq y \in E$ , il existe  $x^* \in E^*$  linéaire continue tel que  $x^*(x) \neq x^*(y)$ .

**Preuve.** On peut supposer  $x = 0$  et  $y \neq 0$ . Par définition de la topologie d'evtlc, il existe  $V$  un voisinage ouvert de 0 convexe tel que  $y \notin V$ . Par le premier théorème de séparation, il existe  $x^* \in E^*$  tel que

$$x^*(x) < 1 = x^*(y)$$

pour tout  $x \in V$ . On avait construit  $x^*$  tel que  $x^*(z) \leq pT(z)$  pour tout  $z \in E$ . Il reste donc à vérifier que  $x^* \in E^*$ . On va montrer que  $x^*$  est continue en montrant que pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\{x \in E : x^*(x) < c\}$  et  $\{x \in E : x^*(x) > c\}$  sont ouverts. Soit  $z$  tel que  $x^*(z) < c$ . On veut montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $z$  tel que  $x^*(w) < c$  pour tout  $w \in V$ . On va chercher ce voisinage sous la forme  $V = z + rT$  avec  $r > 0$  bien choisi. Pour tout  $y \in T$

$$x^*(z + ry) = x^*(z) + rx^*(y) \leq x^*(z) + rpT(y) < x^*(z) + r$$

pour  $r = c - x^*(z) > 0$ , on a  $x^*(z + ry) < c$  pour tout  $y \in T$ . On a donc  $z + rT \subset \{x^* < c\}$ . Il reste à traiter  $\{x^* > c\}$  et on se ramène au cas d'avant quitte à supposer  $T = -T$  (suffit de considérer  $T \cap -T$ ). ■

**Définition 3.2.2 (Topologie d'evtlc)** La topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe associée à la famille de semi normes  $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$  sur  $E$  est celle dont les ouverts sont les  $U \subset E$  tels que,  $\forall x \in E, \exists J$  fini inclus dans  $I, \exists r > 0$  tel que  $B_J(x, r) \subset U$ , où l'on a défini

$$B_J(x, r) = \{y \in E, p_i(x - y) < r \forall i \in J\}.$$

**Lemme 3.2.1** Soit  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe de topologie  $\blacksquare$  définie par une famille  $\mathcal{P}$  de semi-normes, et soit  $q$  une semi-norme sur  $E$ , alors  $q$  est continue si et seulement s'il existe  $C \geq 0, k \in \mathbb{N}^*$ , et  $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$  tel que

$$q \leq C \sup_{i=1, \dots, k} p_i$$

**Preuve.** Si  $q$  est continue, il existe un voisinage de 0 sur lequel  $q \leq 1$ , il existe donc aussi une  $\mathcal{P}$ -boule sur laquelle  $q \leq 1$ , l'inégalité cherchée s'obtient alors facilement par homogénéité. Réciproquement, supposons qu'il existe  $C \geq 0, k \in \mathbb{N}^*$  et  $p_1, \dots, p_k$  dans  $\mathcal{P}$  tel que

$$q \leq C \sup_{i=1, \dots, k} p_i$$

Soit  $x \in E$  et  $\epsilon > 0$ , alors on a  $|q(x) - q(y)| \leq q(x - y) \leq \epsilon$  pour tout  $y$  dans la  $\mathcal{P}$ -boule

$$\{y \in E, p_i(x - y) < (1 + c)^{-1}\epsilon : i = 1, \dots, k\}$$

ce qui montre la continuité de  $q$ .  $\blacksquare$

**Théorème 3.2.2** Soit  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe séparé dont la topologie est associée à la famille dénombrable séparante de semi-normes  $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Alors, la distance

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf(p_n(y - x), 1)$$

est invariante par translation et métrise la topologie de  $E$ .

### 3.3 Application linéaire continue sur un evtlc

**Proposition 3.3.1** Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels topologiques localement convexe de topologies respectivement associées aux familles de semi-normes  $\mathcal{P}$  et  $Q$ ,  $T : E \rightarrow F$  linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $T$  est continue.
2.  $T$  est continue en 0.
3.  $\forall q \in Q, \exists C, \exists k, p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$  tels que

$$q \circ T \leq C \max_{i=1, \dots, k} p_i \text{ sur } E$$

**Définition 3.3.1** Soient  $E$  un evtlc et  $E^*$  son dual. On appelle topologie forte sur  $E^*$ , la topologie définie par la famille de semi-normes

$$q_B(x^*) := \sup_{x \in B} |x^*(x)|, B \subset E \text{ borné.}$$

On appelle topologie \*-faible sur  $E^*$  et l'on note  $\sigma(E^*, E)$ , la topologie définie par la famille de semi-normes

$$q_x(x^*) = |x^*(x)| : \forall x^* \in E^*, x \in E.$$

**Définition 3.3.2** Soit  $E$  et  $F$  deux evtlc et soit  $T$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $T$  est bornée si et seulement si  $T$  envoie les parties bornées de  $E$  dans des parties bornées de  $F$ .

On rappelle que si  $E$  et  $F$  deux evtlc de topologies associées aux familles de semi-normes  $\mathcal{P}$  et  $Q$  et  $T$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ ,  $T$  est séquentiellement continue revient à dire qu'elle est séquentiellement continue en 0 qui s'exprime par

$$\text{si } p(x_n) \rightarrow 0, \forall p \in \mathcal{P}, \text{ alors } q(T(x_n)) \rightarrow 0, \forall q \in Q$$

On a alors

**Lemme 3.3.1** Soient  $E$  et  $F$  deux evtlc de topologie associée aux familles de semi-normes  $\mathcal{P}$  et  $Q$  et  $T$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , on a les implications

$$T \text{ continue} \Rightarrow T \text{ séquentiellement continue} \Rightarrow T \text{ bornée.}$$

**Preuve.** Seule la dernière implication est démontrée. Supposons que  $T$  est séquentiellement continue et supposons par l'absurde que  $T$  ne soit pas bornée :  $\exists B$  bornée de  $E$  tel que  $T(B)$  n'est pas borné. Ceci implique qu'il existe une semi-norme  $q$  continue sur  $F$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $x_n \in B$  vérifiant

$$q(T(x_n)) > n$$

Comme  $B$  est borné,  $y_n = n^{-\frac{1}{2}} x_n$  tend vers 0 dans  $E$ , avec la continuité séquentielle de  $T$ , ceci implique que  $q(T(y_n))$  tend vers 0 ce qui est contredit par  $q(T(y_n)) \geq n^{\frac{1}{2}}$ . ■

En général, les implications précédentes sont strictes. Il existe des exemples de formes linéaires séquentiellement continues et non continues. Dans  $L^2(0, 1)$ , il est assez facile de voir que la suite

$$f_n : t \rightarrow f_n(t) := \sin(2n\pi t)$$

converge faiblement mais pas fortement vers 0, ce qui montre que l'application identité n'est pas séquentiellement continue de  $L^2$  muni de la topologie faible dans  $L^2$  muni de sa topologie forte (celle de la norme) et pourtant elle est bornée (utiliser Banach-Steinhaus). Il existe donc des applications linéaires bornées et non séquentiellement continues. Dans le cas où  $E$  est métrisable toutefois, la bornitude est équivalente à la continuité (on laisse au lecteur le soin de prouver cette assertion). L'important théorème de Banach-Steinhaus (aussi souvent appelé Principle of Uniform Boundedness) permet de déduire pour les opérateurs linéaires des estimations uniformes à partir d'estimations ponctuelles:

**Théorème 3.3.1 (Théorème de Banach-Steinhaus ou Principle of Uniform Boundedness)**

Soit  $E$  un espace de Fréchet (de topologie associée à la famille de semi-normes  $\mathcal{P}$ ),  $F$  un evtlc (de topologie associée à la famille de semi-normes  $Q$ ) et  $(T_i)_{i \in I}$  une famille d'applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$  tel que

$$\forall q \in Q, \forall x \in E, \sup_{i \in I} q(T(x_i)) < +\infty$$

alors pour tout  $q \in Q$ , Il existe  $C \geq 0, J \in \mathbb{N}^*$  et  $p_1, \dots, p_J \in \mathcal{P}^J$  tels que

$$\forall i \in I, \forall x \in E, q(T(x_i)) \leq C \sup_{j=1, \dots, J} p_j(x).$$

## 3.4 Principaux types d'espace localement convexes

### 3.4.1 Espaces tonnelés

**Définition 3.4.1** Une partie  $F$  de l'espace vectoriel  $E$  est dite équilibrée si  $\lambda x$  appartient à  $F$  pour tout  $x$  de  $F$  et tout  $\lambda$  tel que  $|\lambda| \leq 1$ .

**Définition 3.4.2** Un ensemble  $F$  est dit absorbant si

$$\forall x \in E, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq \alpha \Rightarrow \lambda x \in F$$

1. Dans un espace localement convexe  $E$ , on appelle **tonneau** tout ensemble convexe, absorbant, fermé et équilibré.
2. Les espaces tonnelés sont des espaces vectoriels topologiques où tout ensemble tonnelé-ou tonneau - de l'espace est un voisinage de 0.
3. Un espace réflexif est tonnelé.

### 3.4.2 Espace de Montel

1. On appelle **espace de Montel** tout espace localement convexe séparé tonnelé, et dans lequel tout ensemble borné est relativement compact.
2. Un espace normé qui est un espace de Montel est de dimension finie.
3. Tout espace de Montel est réflexif.
4. La dual fort d'un espace de Montel est un espace de Montel.

### 3.4.3 Espace de Fréchet

1. On appelle **espace de Fréchet** tout espace localement convexe métrisable et complet.
2. Puisqu'un espace de Fréchet métrisable et complet, on peut appliquer le théorème de graphe fermé.
3. Un espace de Fréchet est Tonnelé.

### 3.4.4 Espace de Banach

1. On appelle **espace de Banach** tout espace normé et complet.
2. Tout espace de Banach est un espace de Fréchet.

### 3.4.5 Espace de Hilbert

1. Tout espace vectoriel  $E$  muni d'une forme hermitienne positive, est appelé espace préhilbertien. La forme  $\langle x, y \rangle$  est dite produit scalaire des éléments  $x$  et  $y$ , on pose  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ ,  $\|x\|$  est une semi norme qui fait de  $E$  un espace localement convexe.
2. Un espace préhilbertien séparé et complet est appelé espace Hilbertien ou espace **Hilbert**.
3. Tout espace séparé de dimension fini est Hilbert.
4. Tout espace Hilbert est Banach.

## 3.5 Diagramme des divers types d'e.v.t localement convexe

$$\text{Espace séparé de dim fini}(**) \implies \begin{cases} \text{Hilbert} \implies \begin{cases} \text{Banach} \implies \text{Fréchet} \\ \text{Réflixif} \end{cases} \\ \text{Montel} \implies \text{Réflixif} \end{cases}$$

$$(**) \dots \begin{cases} \text{Fréchet} \\ \text{Réflixif} \end{cases} \implies \text{Tonnelé} \implies \text{Localement convexe}$$

# Bibliographie

- [1] D. ACHOUR. *Cours d'analyse fonctionnelle master 1*, Université de M'sila. (2016).
- [2] N. BOURBAKI. *Sur certains espaces vectoriels topologiques*. Annales de l'Institut Fourier. (1950).
- [3] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo (1987).
- [4] G. CARLIER *ANALYSE FONCTIONNELLE*, ENS, (2009), 7-30.
- [5] A. MOUSSA. *Espaces localement convexes et topologies faibles*, Université Pierre et Marie Curie, (2014).
- [6] F. POUPAUD. *Analyse fonctionnelle pour la Licence*, Université de Nice
- [7] V. RIVOIRARD *Semi-norme et introduction aux evtlcs*, CEREMADE (2007).
- [8] F. ROUSSET. *Cours d'analyse fonctionnelle*, ENS Rennes.
- [9] J. SAINT RAYMOND *Cours d'Analyse Réelle*, Université Pierre et Marie Curie (2014), 73-80.
- [10] J. SAINT RAYMOND. *Semi-normes, Equipe d'Analyse*, Université Paris 6.
- [11] L. SCHWARTZ. *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann. (1970).
- [12] P. THÉO. *Analyse fonctionnelle*, ENS Ker Lann 71-73.
- [13] C. VILLANI. *Analyse II*, Ecole normale supérieure de Lyon (2003-2004) 8-14.

## Résumé

Dans l'espace des fonctions continues ou holomorphes dans un ouvert, la convergence n'est pas engendrée par une norme, pour traiter ces cas on va étudier dans ce mémoire un espace vectoriel qui peut être défini à l'aide d'une famille de semi-normes qu'on appelle espace vectoriel localement convexe. On met les points sur quelques propriétés et résultats concernant cet espace.

**Mots Clés :** Espace vectoriel, semi-norme, famille de semi-norme, espace topologique localement convexe.

## Abstract

In the space of continuous or holomorphic function in an open, convergence is not generated by a norm, to treat these cases we will study in this thesis a vector space that can be defined with using a family of Semi-norms that we call the locally convex vector space. We put the points on some properties and result concert this space.

**Keywords:** Vector space, semi-norm, semi-norm family, locally convex vector space.

## ملخص

في فضاء الدوال المستمرة او المعرفة بقيم مركبة من مجموعة الأعداد المركبة، التقارب ليس مولد بواسطة تنظيم لهذا فضاء دراسة فضاء شعاعي الذي من الممكن تعريفه بعائلة من نصف تنظيم فنسميه فضاء شعاعي محذب محلياً. سنتطرق لبعض المفاهيم والخواص المتعلقة بهذا الفضاء.

**الكلمات المفتاحية:** فضاء شعاعي، نصف تنظيم، عائلة نصف التنظيم، فضاء شعاعي محذب محلياً.