



N° d'ordre :/2016

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté des Sciences

Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

BEN ABDERRAZAK Houria

THEME

Intrication quantique avec Hamiltonien non Hermitien

Soutenu le : 04/06/2016

Devant le jury composé de :

Y. Sabri	MAB Univ. de M'sila	Président
K. Bouferrache	MAB Univ. de M'sila	Rapporteur
N.Baaji	MCA Univ. de M'sila	Examineur

Promotion Juin 2016

Remerciements

Grand merci à Dieu de nous avoir donné la volonté, la santé, le courage pour accomplir ce travail.

*Je remercie tout particulièrement mon directeur de la recherche **Mr. K. Bouferrache** pour son aide, sa compréhension, ses orientation et surtout pour la qualité de son encadrement.*

Je remercie aussi les membres de jury d'avoir accepté ce modeste travail. Ma gratitude est également destinée aux enseignants du département de physique de l'université de M'sila.

J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes professeurs depuis le primaire jusqu'à l'université.

Je remercie ainsi, ma mère et mon père, mes frères et sœurs. En fin, je vous remercie beaucoup pour tous ceux qui m'ont aidé à accomplir ce travail de loin ou de près.

Dédicace

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi **mon père « B. Mohamed »**.

A la lumière des mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, **mon mère** que j'adore.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à tous mes frères « **Zouhir, Djaloul et Toufik, Boulâmes** » et tous mes sœurs « **Massaouda, Fouzia et Nassira** ».

Je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour conseils, aides, et encouragements.

Je dédie ce travail à mes grands-parents, toutes mes tantes et oncles, et les oncles et les tantes maternelles.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagné durant mon chemin d'études supérieurs, mes aimables amis, collègues d'étude, et frères de cœur, à toi « **Farida, Aicha, Amani, Assia, Fatiha, Mouna, Rima, Fatima, Khadija, Hafida, Kenza, Sourya, Hanane, Souhila** ».

Flouria

Liste des figures.....	i
-Introduction générale.....	1

Chapitre I :

Quelques notions sur la PT symétrie

1.1 Introduction.....	3
1.2 Propriétés des Hamiltonien PT-symétriques.....	3
1.2.1 Réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien PT symétrique.....	4
1.2.2 Fonctions propres et espace de Hilbert.....	5
1.3 Nouvelle symétrie pour des Hamiltonien <i>PT</i> symétriques.....	6
1.4 Application sur la PT- symétrie dans un système 2x2.....	8

Chapitre II :

Intrication quantique

2.1 Introduction.....	22
2.2 Définition d'un qubit.....	22
2.3 Intrication<<Entanglement>>.....	23
2.4 Paradoxe EPR.....	24
2.5 L'état de Bell.....	24
2.6 Inégalité de Bell.....	25
2.7 État pur et état mixte.....	25
2.7.1 État pur	25
2.7.2 État mixte.....	26
2.8 Décomposition de Schmidt.....	26

Chapitre III :

Intrication quantique avec Hamiltonien non Hermitien

3.1 Introduction.....	28
3.2 PT - symétrique bit quantique	28
3.3 L'intrication en théorie non hermitienne	29
<i>-Conclusion</i>	36
<i>-Bibliographie</i>	37

Liste des figures

Liste des figures :

FIG (1.1) la sphère de Bloch.....	23
-----------------------------------	----

Introduction Générale

Introduction Général

Le Hamiltonian H spécifie les niveaux d'énergie et l'évolution de temps d'une théorie quantique. Un axiome standard de mécanique quantique exige qu' H être Hermitien parce que l'Hermiticité garantit que le spectre d'énergie est réel et que l'évolution de temps est unitaire, c'est-à-dire que les normes des fonctions propres (probabilités) sont conservées.

En 1998, Bender et ses collaborateurs [1] ont présenté une alternative, où la condition de l'hermiticité de l'Hamiltonien pour avoir un spectre réel n'est pas exigée, et est remplacé par la symétrie de réflexion d'espace-temps (PT-symétrie) sans violer aucun des axiomes physiques de la mécanique quantique.

Bender et ses collaborateurs [2, 3] montrent qu'un Hamiltonien invariant par réflexion de l'espace et par renversement du temps possède un spectre réel si la PT-symétrie n'est pas brisée. C'est une extension de la mécanique quantique ordinaire. L'invariance des Hamiltoniens non hermitiens.

Par définition, un Hamiltonien non hermitien H est dit PT-symétrique s'il satisfait la relation $H=(PT) H(PT)$, où P et T sont respectivement les opérateurs de parité et d'inversion du temps. Cela si H a une symétrie intacte, alors il a une autre symétrie représentée par un opérateur linéaire C . En termes de C , On peut construire un produit scalaire indépendant de temps avec une norme positive-définie, ce produit scalaire est dénommé « CPT-produit scalaire ».

L'intrication quantique est un phénomène fondamental de la mécanique quantique mis en évidence par Einstein et Schrödinger dans les années 30. Deux systèmes physiques, comme deux particules, se retrouvent alors dans un état quantique dans lequel ils ne forment plus qu'un seul système dans un certain sens subtil. Toute mesure sur l'un des systèmes affecte l'autre, et ce quelle que soit la distance les séparant. Avant l'intrication, deux systèmes physiques sans interactions sont dans des états quantiques indépendants mais après l'intrication ces deux états sont en quelque sorte « intriqué » et il n'est plus possible de décrire ces deux systèmes de façon indépendante.

Dans ce mémoire, on va présenter Premièrement la nouvelle théorie quantique PT – symétrique, est de remplacer l'Hermiticité par la symétrie de réflexion d'espace-temps (symétrie PT) sans violer aucun des axiomes physiques de la mécanique quantique.

Introduction Générale

Le deuxième chapitre représente l'intrication, et on va découvrir premièrement des définitions un qubit et définition de l'intrication et expérience de pensée (dite « EPR »), ensuite nous passerons pour définir les états pur et mixte et quelques propriétés de l'intrication.

Dans le troisième chapitre nous allons introduire la notion d'intrication pour les systèmes quantiques qui sont encore régis par des Hamiltoniens non-Hermitiens « PT-symétrie ». De plus, nous allons montrer comment créer une intrication entre deux qubits PT à l'aide d'un Hamiltonien non-hermitien et discuter de la capacité d'intrication d'une telle interaction Hamiltonienne qui est non-Hermitienne dans la nature.

Chapitre 1 :

Quelques notions sur la PT symétrie

1.1 Introduction :

La dynamique d'un système est décrite si les valeurs propres représentant le spectre énergétique sont réelles.

Pour cette raison, il faut que l'opérateur hamiltonien défini dans un espace de Hilbert, soit hermitien. En 1998, Bender et ses collaborateurs [1] proposèrent pour la première fois une famille d'Hamiltoniens stationnaires à une dimension :

$$H = p^2 + x^2(ix)^\nu \quad (1.1)$$

Et montrèrent que toutes ses valeurs propres sont réelles pour $\nu \geq 0$. Pour les valeurs négatives de $\nu < 0$, les calculs numériques montrent que le spectre est complexe.

Ce résultat a incité les chercheurs physiciens et mathématiciens à étudier profondément des Hamiltonien pour bien comprendre l'origine de la réalité du spectre. Le secret réside dans l'invariance de symétrie par rapport aux opérateurs simultanés de la parité P et du renversement du temps T . Cette double opération est appelée alors PT -symétrie.

Un peu plus tard, il s'est avéré que la condition d'invariance d'un Hamiltonien non hermitien par rapport à la réflexion de l'espace-temps n'est pas suffisante pour la réalité de son spectre. En effet, les valeurs propres réelles correspondent aux fonctions propres qui sont elles aussi invariantes par Cette double réflexion de l'espace-temps, PT -symétriques. Par contre, il correspond aux fonctions propres non PT -symétriques des valeurs propres complexes. et il la PT -symétrique est une condition nécessaire pour la réalité de spectre d'Hamiltonien non Hermitien.

1.2 Propriétés des Hamiltonien PT -symétriques :

Un Hamiltonien H est dit PT -symétrique s'il satisfait la relation [1, 4, 5, 6,7]

$$H = H^{PT} \quad (1.2)$$

Où

$$H^{PT} = (PT)H(PT) \quad (1.3)$$

Ainsi, si un Hamiltonien H est PT -symétrique, il commute avec l'opérateur PT

$$[H, PT] = 0 \quad (1.4)$$

Où P est un opérateur appelé de parité (ou réflexion d'espace) et T est l'opérateur d'inversion du temps, leurs actions sur les opérateurs position \hat{x} et impulsion \hat{p} . Sont données respectivement comme :

$$P \hat{x} P = -\hat{x} \quad , \quad P \hat{p} P = -\hat{p} \quad (1.5)$$

$$T \hat{x} T = \hat{x} \quad , \quad T \hat{p} T = -\hat{p} \quad , \quad T i T = -i \quad (1.6)$$

Notons que l'effet de l'opérateur linéaire P change les signes des opérateurs position \hat{x} et impulsion \hat{p} , tandis que l'opérateur anti-linéaire T n'affecte que le signe l'opérateur impulsion \hat{p} , en changeant le signe du nombre complexe imaginaire pur i . En outre, puisque P et T sont des opérateurs de réflexion, leurs carrés donnent l'opérateur unité :

$$P^2 = T^2 = I \quad (1.7)$$

Et aussi

$$[P, T] = 0 \quad (1.8)$$

Si toutes les fonctions propres de l'Hamiltonien PT -symétrique H sont simultanément des fonctions propres de l'opérateur PT , on dit que la PT -symétrie est non-brisée. Elle est dite brisée, s'il existe des fonctions propres de l'Hamiltonien PT -symétrique qui ne sont pas des fonctions propres de l'opérateur PT .

1.2.1 Réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien PT symétrique :

La réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien PT -symétrique est une conséquence du non-brisure de la symétrie PT , qui signifie que les fonctions propres de H sont simultanément fonctions propres de PT . En fait, même si H et PT commutent, on ne peut pas affirmer qu'ils possèdent les mêmes fonctions propres, comme c'est le cas en mécanique quantique.

Ainsi, pour construire une théorie à partir des Hamiltonien PT -symétriques, on exige de plus que la symétrie ne soit pas brisée. Il faut noter cependant que cette condition n'est pas évidente car il n'existe aucun moyen pour affirmer a priori que pour un tel Hamiltonien PT -symétrique, la symétrie est brisée ou non. Il faut tout d'abord déterminer ses fonctions propres Pour en tirer une conclusion.

Avec cette condition supplémentaire, on peut démontrer la réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien PT symétrique. En effet, soit donc $\{\Phi_n(x)\}$, pour $n=1,2,\dots$, l'ensemble des fonctions propres communes à H , on a

$$H\Phi_n(x) = E_n\Phi_n(x) \quad (1.9)$$

H et PT commutent, nous pouvons écrire : $PTH = HPT$

En multipliant les deux cotés du membre de droite de cette équation par PT, nous obtenons

$$PTHPT = H \quad (1.10)$$

Parce que $(PT)^2 = I$.

En appliquant l'opérateur PT aux deux membres de l'équation (1.9), il vient que :

$$PTHPT\Phi_n = PTE_nPT\Phi_n \quad (1.11)$$

Nous en déduisons alors que

$$TE_nT = E_n^*$$

Où nous avons utilisé le fait que $P^2 = 1$.

Nous pouvons écrire

$$H\Phi_n = E_n\Phi_n = PTHPT\Phi_n = E_n^*\Phi_n \quad (1.12)$$

Et en déduire

$$E_n = E_n^* \quad (1.13)$$

Et par conséquent la valeur propre E_n est réelle.

1.2.2 Fonctions propres et espace de Hilbert :

La question qui se pose maintenant est de savoir si les Hamiltoniens possédant une PT -symétrie non brisée peuvent décrire la dynamique de systèmes physiques réels. Autrement dit, il faut savoir si les fonctions propres de tel Hamiltonien peuvent engendrer des espaces de Hilbert munis de produits scalaires conduisant à des normes positives. En plus, il faut aussi garantir que l'évolution des états propres dans le temps demeure unitaire. Bien entendu, ces deux exigences sont satisfaites dans la théorie quantique usuelle avec des Hamiltoniens hermitiens. La première permet d'interpréter la norme d'un état comme une probabilité, qui doit être définie positive, alors que la deuxième condition garantit justement l'indépendance de cette probabilité par rapport au temps. Les fonctions propres engendrent

donc un espace vectoriel de Hilbert. Le produit scalaire de deux fonctions quelconques $\Psi(x)$ et $\varphi(x)$, dans le nouveau espace de Hilbert, a été définie comme

$$\begin{aligned} (\psi, \varphi)_{PT} &= \int_c dx [PT\psi(x)] \varphi(x) \\ &= \int_c dx \psi^*(-x)\varphi(x) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Où c est un certain contour défini dans le plan complexe qui peut être choisi sur l'axe réel.

L'avantage de cette définition du produit scalaire est que, comme en mécanique quantique ordinaire, la norme de toute fonction d'onde est une quantité indépendante de sa phase globale et de plus elle est conservée dans le temps. Cependant, cette définition contient un inconvénient majeur qui réside dans le fait que les normes de certains états propres d'Hamiltonien PT -symétriques sont négatives.

Les fonctions propres d'un Hamiltonien PT -symétrique vérifient les deux relations suivantes [2,8]

$$(\psi_n, \psi_m) = (-1)^n \delta_{nm} \quad (1.15)$$

$$\sum_n (-1)^n \psi_n(x)\psi_n(y) = \delta(x - y) \quad (1.16)$$

Qui ressemblent aux relations d'orthonormalisation et de fermeture.

Ces deux relations présentent des anomalies par rapport à ce qui est admis en mécanique quantique, usuelle. En effet, il découle que les normes de certains état sont négatives et par conséquent ces derniers ne peuvent pas être interprétés comme des probabilités. Par ailleurs, l'espace engendré par les fonctions propres, qui ne sont guère un espace de Hilbert usuel, ne peut pas être considéré comme un espace complet. Dans la représentation de Dirac, on peut écrire les relations (1.15) et (1.16)

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = (-1)^n \delta_{nm} \quad (1.17)$$

Et

$$\sum_n (-1)^n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = I \quad (1.18)$$

1.3 Nouvelle symétrie pour des Hamiltonien PT symétriques :

L'inconsistance des relations (1.17) et (1.18) a même poussé certains auteurs à renoncer pendant un certain temps [9, 10] à l'idée de construire une théorie quantique pour ce type d'Hamiltonien non hermitiens. Cependant, plus tard il a été montré que tous les Hamiltonien

Chapitre 1 : Quelques notions sur la PT symétrie

PT-symétriques dont la symétrie n'est pas brisée possèdent une autre symétrie cachée, engendrée par un nouveau opérateur dénoté C . Autrement dit, si un Hamiltonien H est PT symétrique et si cette symétrie n'est pas brisée il existe un opérateur non trivial C , appelé opérateur de conjugaison de charge.

L'opérateur C est une observable qui représente la mesure de la signature de la norme PT des états propre, par exemple l'opérateur linéaire C est représenté dans l'espace des coordonnées par la somme des fonctions propres de l'Hamiltonien :

$$C(x, y) = \sum_n \psi_n(x)\psi_n(y) \quad (1.19)$$

Nous pouvons vérifier que le carré de C est égal à l'unité :

$$\int dx C(x, y)C(y, z) = \delta(x - z) \quad (1.20)$$

C commute avec l'Hamiltonien H et l'opérateur PT .

$$[H, C] = [C, PT] = 0 \quad (1.21)$$

Par conséquent :

$$C^2 = 1$$

Ainsi les valeurs propres de C sont ± 1 . L'action de C sur les fonctions propres de H est donnée par :

$$C\psi_n(x) = (-1)^n \psi_n(x) \quad (1.22)$$

Nous pouvons également construire l'opérateur de parité P en termes des fonctions propres de H . L'opérateur linéaire P est représenté dans l'espace des coordonnées par [11] :

$$P(x, y) = \delta(x + y) = \sum_n (-1)^n \psi_n(x)\psi_n(-y) \quad (1.23)$$

Comme l'opérateur C , le carré de l'opérateur de la parité est également unité, $P^2 = 1$ et $C^2 = 1$, mais P et C ne sont pas identiques. En effet, l'opérateur de parité P est réel, tandis que C est complexe (somme des produits des fonctions complexes). En outre, ces deux opérateurs ne commutent pas; spécifiquement, dans la représentation de position

$$(CP)(x, y) = \sum_n \psi_n(x)\psi_n(-y) \quad (1.24)$$

Et

$$(PC)(x, y) = \sum_n \psi_n(-x)\psi_n(y) \quad (1.25)$$

Donc il est clair que

$$(CP) = (PC)^* \quad (1.26)$$

D'où C commute avec l'opérateur PT, qui signifie que l'opérateur linéaire CPT résout le problème des normes négatives.

Le CPT produit scalaire est défini par [12]:

$$\langle \varphi | \psi \rangle_{CPT} = \int dx [CPT\varphi(x)] \psi(x) \quad (1.27)$$

Où

$$CPT\psi(x) = \int dy CPT(x, y) \psi(-y)^* \quad (1.28)$$

Ce CPT-produit scalaire est défini positif, et les fonctions propres de H sont orthonormées

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle_{CPT} = \int dx [CPT\psi_m(x)] \psi_n(x) = \delta_{nm} \quad (1.29)$$

1.4 Application sur la PT- symétrie dans un système 2x2 :

On considère la matrice de l'Hamiltonien 2 x 2 :

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

➤ Calcul les éléments matriciels de l'opérateur C

On pose :

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a

$$C^2 = I$$

Alors

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ cb + d^2 = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ca + dc = 0 \end{cases}$$

Donc

Chapitre 1 : Quelques notions sur la PT symétrie

$$ab + bd = 0 \Rightarrow b(a + d) = 0$$

On a : $b \neq 0$ et $a+d=0$ alors $a = -d$

Nous avons aussi d'autre part, on à C commute avec PT :

$$[C, PT] = 0 \Rightarrow CPT - PTC = 0$$

$$CPT = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & c \end{pmatrix}$$

$$PTC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & -a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^* & -a^* \\ a^* & b^* \end{pmatrix}$$

$$[C, PT] = 0 \Rightarrow \begin{cases} b - c^* = 0 \\ a + a^* = 0 \\ -a - a^* = 0 \\ c - b^* = 0 \end{cases}$$

On peut écrire la valeur de a sous la forme suivant :

$$a = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Donc

$$a^* = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

On a

$$a + a^* = 0 \Rightarrow 2 \cos \varphi = 0$$

Alors

$$a = k(i \sin \varphi)$$

Et

$$d = k(-i \sin \varphi)$$

La même chose pour c et b :

$$c - b^* = 0 \Rightarrow c = b^*$$

On a

$$b = ke^{ix} \Rightarrow c = ke^{-ix}$$

Avec K est constant

Donc

$$C = k \begin{pmatrix} i \sin \varphi & e^{ix} \\ e^{-ix} & -i \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Maintenant on va détermine la valeur de la constant k :

On utilise la relation $C^2 = 1$ alors :

$$\begin{pmatrix} k(i \sin \varphi) & ke^{ix} \\ ke^{-ix} & k(-i \sin \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k(i \sin \varphi) & ke^{ix} \\ ke^{-ix} & k(-i \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k^2(\sin \varphi)^2 + k^2 = 1 \dots\dots\dots (1) \\ ik^2 \sin \varphi e^{ix} - ik^2 \sin \varphi e^{ix} = 0 \dots\dots\dots (2) \\ ik^2 \sin \varphi e^{-ix} - ik^2 \sin \varphi e^{-ix} = 0 \dots\dots\dots (3) \\ k^2 - k^2(\sin \varphi)^2 = 1 \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

A partir de les relations (1) et (4) on a :

$$k^2(-(\sin \varphi)^2 + 1) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Finalement

$$C = \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} i \sin \varphi & e^{ix} \\ e^{-ix} & -i \sin \varphi \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

➤ Détermine la forme matricielle de l'Hamiltonien H :

La matrice de H sous la forme suivant

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On à H commute avec l'opérateur PT :

$$[H, PT] = 0 \Rightarrow HPT - PTH = 0$$

Alors

$$\text{HPT} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

Et

$$\text{PTH} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^* & d^* \\ a^* & b^* \end{pmatrix}$$

$$\text{HPT} - \text{PTH} = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = a^* \\ c = b^* \end{cases}$$

Donc

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}$$

Nous avons aussi d'autre part, on à C commute avec l'Hamiltonien H :

$$[C, H] = 0 \Rightarrow CH - HC = 0$$

Alors

$$\begin{aligned} CH &= \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} i \sin \varphi & e^{ix} \\ e^{-ix} & -i \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} ia \sin \varphi + b^* e^{ix} & ib \sin \varphi + a^* e^{ix} \\ ae^{-ix} - ib^* \sin \varphi & be^{-ix} - ia^* \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} HC &= \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \sin \varphi & e^{ix} \\ e^{-ix} & -i \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} ia \sin \varphi + be^{-ix} & ae^{ix} - ib \sin \varphi \\ ib^* \sin \varphi + a^* e^{-ix} & b^* e^{ix} - ia^* \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$CH - HC = 0 \Rightarrow \begin{cases} be^{-ix} = b^* e^{ix} \dots \dots \dots (1) \\ (a^* - a)e^{ix} + 2ib \sin \varphi = 0 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

De l'équation (2) on a :

$$b = \frac{-(a^* - a)}{2i \sin \varphi} e^{ix}$$

On pose : $a = ke^{i\theta}$

Donc

$$\Rightarrow b = \frac{-k(e^{-i\theta} - e^{i\theta})}{2i \sin \varphi} e^{ix} = \frac{k \sin \theta}{\sin \varphi} e^{ix}$$

Alors

$$H = \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} k e^{i\theta} & \frac{k \sin \theta}{\sin \varphi} e^{ix} \\ \frac{k \sin \theta}{\sin \varphi} e^{-ix} & k e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\frac{k}{\cos \varphi} = r$$

Et

$$\frac{r}{s} \sin \theta = \sin \varphi$$

On a

$$s = r \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}$$

Finalement, l'Hamiltonien (1.30) écrire sous la forme :

$$H = \begin{pmatrix} r e^{i\theta} & s e^{ix} \\ s e^{-ix} & r e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Où les quatre paramètres r, s, θ et x sont réels.

L'Hamiltonien H vérifiez deux relations :

$$H \Rightarrow \begin{cases} [H, PT] = 0 \\ [C, H] = 0 \end{cases}$$

L'opérateur de parité donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Et T effectue une conjugaison complexe.

- Calcul $[H, PT]$:

On a

$$[H, PT] = HPT - PTH = 0$$

$$HPT = \begin{pmatrix} re^{i\theta} & se^{ix} \\ se^{-ix} & re^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} se^{ix} & re^{i\theta} \\ re^{-i\theta} & se^{-ix} \end{pmatrix}$$

Et

$$PTH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} re^{-i\theta} & se^{-ix} \\ se^{ix} & re^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} se^{ix} & re^{i\theta} \\ re^{-i\theta} & se^{-ix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow HPT - PTH = \begin{pmatrix} se^{ix} & re^{i\theta} \\ re^{-i\theta} & se^{-ix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} se^{ix} & re^{i\theta} \\ re^{-i\theta} & se^{-ix} \end{pmatrix} = 0$$

Alors

$$[H, PT] = 0 \tag{1.34}$$

- Calcul $[C, H]$:

On a

$$[C, H] = CH - HC = 0$$

$$CH = \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} i \sin \varphi & e^{ix} \\ e^{-ix} & -i \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} re^{i\theta} & se^{ix} \\ se^{-ix} & re^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} ir \sin \varphi e^{i\theta} + s & is \sin \varphi e^{ix} + re^{i(x-\theta)} \\ re^{i(\theta-x)} - is \sin \varphi e^{-ix} & s - ir \sin \varphi e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

Et

$$HC = \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} re^{i\theta} & se^{ix} \\ se^{-ix} & re^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \sin \varphi & e^{ix} \\ e^{-ix} & -i \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} ir \sin \varphi e^{i\theta} + s & re^{i(\theta+x)} - is \sin \varphi e^{ix} \\ is \sin \varphi e^{-ix} + re^{-i(\theta+x)} & s - ir \sin \varphi e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

On a

$$CH - HC = \frac{1}{\cos \varphi} \begin{cases} ir \sin \varphi e^{i\theta} + s - ir \sin \varphi e^{i\theta} - s = 0 \\ s - ir \sin \varphi e^{-i\theta} - s + ir \sin \varphi e^{-i\theta} = 0 \end{cases}$$

Et

$$\left\{ \begin{aligned} is \sin \varphi e^{ix} + r e^{i(x-\theta)} - r e^{i(\theta+x)} + is \sin \varphi e^{ix} &= 2is \sin \varphi + r e^{ix} (e^{-i\theta} - e^{i\theta}) \\ &= 2is \sin \varphi e^{ix} - 2ir \sin \theta e^{i\theta} \\ &= 2ir \sin \theta e^{ix} - 2ir \sin \theta e^{ix} \\ &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} r e^{i(\theta-x)} - is \sin \varphi e^{-ix} - is \sin \varphi e^{-ix} - r e^{-i(\theta+x)} \\ &= -2is \sin \varphi e^{-ix} + r e^{-ix} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= -2is \sin \varphi e^{-ix} + 2ir \sin \theta e^{-ix} \\ &= -2ir \sin \theta e^{-ix} + 2ir \sin \theta e^{-ix} \\ &= 0 \end{aligned} \right.$$

Alors

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$$

Et

$$\sin \varphi = \frac{r}{s} \sin \theta$$

Donc

$$\Rightarrow CH - HC = \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Alors

$$[C, H] = 0 \tag{1.35}$$

➤ calcule les valeurs propres de H :

On a

$$\det(H - \lambda I) = 0$$

Et

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H - \lambda I &= \begin{pmatrix} re^{i\theta} & se^{ix} \\ se^{-ix} & re^{-i\theta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} re^{i\theta} - \lambda & se^{ix} \\ se^{-ix} & re^{-i\theta} - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda I) &= 0 \\ \Rightarrow (re^{i\theta} - \lambda)(re^{-i\theta} - \lambda) - s^2 &= 0 \\ r^2 - \lambda re^{i\theta} - \lambda re^{-i\theta} + \lambda^2 - s^2 &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + (r^2 - s^2) &= 0 \\ \lambda^2 - (2r \cos \theta)\lambda + (r^2 - s^2) &= 0 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Avec

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{delta} &= (-2r \cos \theta)^2 - 4(r^2 - s^2) \\ &= 4r^2 \cos^2 \theta - 4r^2 + 4s^2 \\ &= 4r^2(\cos^2 \theta - 1) + 4s^2 \\ &= -4r^2 \sin^2 \theta + 4s^2 \\ \text{delta} \geq 0 &\Rightarrow -4r^2 \sin^2 \theta + 4s^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Alors

$$s^2 \geq r^2 \sin^2 \theta \Rightarrow s \geq r \sin \theta$$

IL ya deux régions paramétrique pour l'Hamiltonien (1.32)

Chapitre 1 : Quelques notions sur la PT symétrie

Quand $s^2 < r^2 \sin^2 \theta$, les valeurs propres d'énergie forment une paire de complexe conjugué. Ceci est la région de PT-symétrie brisée.

D'autre part, si $s^2 \geq r^2 \sin^2 \theta$, les valeurs propres :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pm} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = r \cos \theta \pm \frac{\sqrt{-4r^2 \sin^2 \theta + 4s^2}}{2} \\ &= r \cos \theta \pm s \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.37)$$

Sont réels. Ceci est la région de PT-symétrie non brisée, où nous posons $\sin \varphi = (s/r) \sin \theta$. IL est facile de vérifier que : $(\varepsilon_{\pm}, \varepsilon_{\pm}) = \pm 1$ et que $(\varepsilon_{\pm}, \varepsilon_{\mp}) = 0$.

Par conséquent, en ce qui concerne le produit scalaire PT , le résultant d'espace vectoriel engendré par les états propres de l'énergie a une métrique de signature (+,-).

Utilisation de l'opérateur C , nous construisons la nouvelle structure de produit scalaire

$$\langle u|v \rangle = (PTu) \cdot v \quad (1.38)$$

Montrons explicitement que la norme CPT de tout vecteur est positive. Nous choisissons le vecteur arbitraire :

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Où a et b sont des nombres complexes. Nous voyons alors que :

$$T\psi = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}$$

Que

$$PT\psi = \begin{pmatrix} b^* \\ a^* \end{pmatrix}$$

Et cela

$$CPT = \frac{1}{\cos \varphi} \begin{pmatrix} a^* e^{ix} + ib^* \sin \varphi \\ b^* e^{-ix} - ia^* \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= (CPT\psi) \cdot \psi \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} [aa^* e^{ix} + bb^* e^{-ix} + i(b^*a - ba^*) \sin \varphi] \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons

$$a = x + iy \quad \text{Et} \quad b = u + iv$$

Où x, y, u et v sont réels.

Donc :

$$\langle \psi | \psi \rangle = \frac{1}{\cos \varphi} [(x^2 + y^2)e^{ix} + 2xv \sin \varphi + (u^2 + v^2)e^{-ix} - 2yu \sin \varphi] \quad (1.39)$$

➤ Calcul les fonctions propres de l'Hamiltonien H :

1-pour ε_- :

On a

$$H\psi = \varepsilon_- \psi \Rightarrow H\psi_1 = (r \cos \theta - s \sin \varphi)\psi_1$$

Et on a

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} re^{i\theta} & se^{ix} \\ se^{-ix} & re^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (r \cos \theta - s \sin \varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} re^{i\theta} x_1 + se^{ix} y_1 = (r \cos \theta - s \cos \varphi) x_1 \dots \dots (1) \\ se^{-ix} x_1 + re^{-i\theta} y_1 = (r \cos \theta - s \cos \varphi) y_1 \dots \dots (2) \end{cases}$$

De(1) :

$$\begin{aligned} se^{ix} y_1 &= (r \cos \theta - s \cos \varphi - re^{i\theta}) x_1 \\ &= (r \cos \theta - s \cos \varphi - r \cos \theta - ir \sin \theta) x_1 \end{aligned}$$

$$= (-s \cos \varphi - ir \sin \theta)x_1$$

Donc

$$y_1 = \left(-\cos \varphi - i \frac{r}{s} \sin \theta\right) e^{-ix} x_1$$

$$= (-\cos \varphi - i \sin \varphi) e^{-ix} x_1$$

$$= -e^{i(\varphi-x)} x_1$$

$$\Rightarrow \psi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ (-e^{i(\varphi-x)})x_1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & (-e^{-i(\varphi-x)})x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ (-e^{i(\varphi-x)})x_1 \end{pmatrix} = 1$$

Donc

$$x_1^2 + x_1^2 = 1$$

Alors

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Et

$$y_1 = \frac{-e^{i(\varphi-x)}}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-e^{i(\varphi-x)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

On a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{-i(\varphi-x)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-e^{i(\varphi-x)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Alors

$$\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = 1$$

$$x_1 = y_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-e^{i(\varphi-x)}}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow -e^{i(\varphi-x)} = 1$$

Donc

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$PT\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \psi_1$$

2- pour ε_+ :

On a

$$H\psi_2 = \varepsilon_+\psi_2 \Rightarrow H\psi_2 = (r \cos \theta + s \cos \varphi)\psi_2$$

Avec

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r e^{i\theta} & s e^{ix} \\ s e^{-ix} & r e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (r \cos \theta + s \cos \varphi) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r e^{i\theta} x_2 + s e^{ix} y_2 = (r \cos \theta + s \cos \varphi) x_2 \dots \dots \dots (1) \\ s e^{-ix} x_2 + r e^{-i\theta} y_2 = (r \cos \theta + s \cos \varphi) y_2 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

De(1) :

$$s e^{ix} y_2 = (r \cos \theta + s \cos \varphi - r e^{i\theta}) x_2$$

$$= (\cos \varphi - i \frac{r}{s} \sin \theta) x_2$$

Donc

$$y_2 = (\cos \theta - i \sin \varphi) e^{-ix} x_2$$

$$= e^{-i(\varphi+x)} x_2$$

$$\Rightarrow \psi_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ e^{-i(\varphi+x)} x_2 \end{pmatrix}$$

On a

$$\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 1$$

$$\Rightarrow (x_2 \quad e^{i(\varphi+x)} x_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ e^{-i(\varphi+x)} x_2 \end{pmatrix} = 1$$

Donc

$$x_2^2 + x_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_2^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Et

$$y_2 = e^{-i(\varphi+x)} x_2$$

$$= \frac{e^{-i(\varphi+x)}}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i(\varphi+x)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

On a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{e^{i(\varphi+x)}}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i(\varphi+x)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Alors

$$\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 1$$

$$x_2 = y_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-i(\varphi+x)}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow e^{-i(\varphi+x)} = 1$$

Alors

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\text{PT}\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \psi_2$$

Alors la PT-symétrie non brisée est vérifiée ou :

$$\text{PT}\psi = \psi$$

Chapitre 02 :

Intrication quantique

2.1 Introduction :

L'intrication quantique est un phénomène fondamental de la mécanique quantique mis en évidence par Einstein et Schrödinger dans les années 30. Deux systèmes physiques, comme deux particules, se retrouvent alors dans un état quantique dans lequel ils ne forment plus qu'un seul système dans un certain sens subtil.

Toute mesure sur l'un des systèmes affecte l'autre, et ce quelle que soit la distance les séparant. Avant l'intrication, deux systèmes physiques sans interactions sont dans des états quantiques indépendants mais après l'intrication ces deux états sont en quelque sorte « intriqué » et il n'est plus possible de décrire ces deux systèmes de façon indépendante.

2.2 Définition d'un qubit :

Le bit quantique, ou simplement qubit (quantum bit) est l'unité fondamentale de l'information quantique. Un qubit est un système quantique résidant dans un espace de Hilbert à deux dimensions. Un bit quantique peut donc prendre deux valeurs notées $|0\rangle$ et $|1\rangle$, un qubit peut exister dans une superposition d'état, peut décrire sous la forme suivante :

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.1)$$

Où α et β sont des nombres complexes. L'état $|\Psi\rangle$ est un vecteur appartenant à un espace vectoriel complexe à deux dimensions. Les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, forment quant à eux une base orthonormée dans l'espace vectoriel complexe.

Lorsque nous effectuons une mesure sur l'état du qubit $|\Psi\rangle$, nous obtenons $|0\rangle$ avec une probabilité $|\alpha|^2$, ou bien $|1\rangle$ avec une probabilité $|\beta|^2$. Comme la somme des probabilités est égale à 1, nous obtenons

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.2)$$

Nous pouvons écrire les variables α et β sous la forme suivante :

$$\alpha = |\alpha| \text{ et } \beta = e^{i\varphi} |\beta| \quad (2.3)$$

Utilisation de changement du variable

$$|\alpha| = \cos \theta, |\beta| = e^{i\varphi} \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (2.4)$$

Et nous pouvons réécrire l'équation (2.1) comme suit :

$$|\Psi\rangle = \cos \theta |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \theta |1\rangle \quad (2.5)$$

Le qubit peut alors être représenté géométriquement par une sphère, appelée sphère de Bloch, où l'état $|\Psi\rangle$ du qubit correspond à un point à la surface de la sphère, comme indiqué sur la figure (1.1).

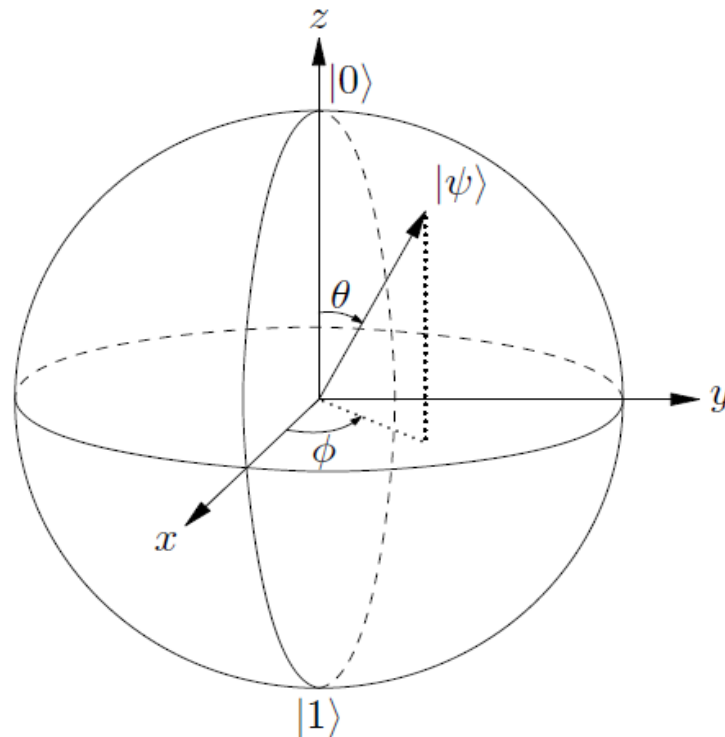


FIG (1.1) : la sphère de Bloch

2.3 Intrication << entanglement >> :

L'intrication quantique (en anglais, quantum entanglement) est un phénomène fondamental de la physique quantique. C'est une propriété spécifique de la physique quantique qui n'existe pas en mécanique classique. Le concept de l'intrication quantique remonte à l'année 1935 par Erwin Schrödinger [13] Elle se manifeste, en général, par le fait que lorsque plusieurs particules ont été préparées ensemble, ou ont interagi pendant un certain intervalle de temps, qui peut être très court, elles restent fortement corrélées même si elles sont séparées par une très grande distance. Cela signifie que si nous mesurons une certaine propriété physique d'une des particules les autres particules vont instantanément « hériter » de la propriété physique correspondante (la propriété corrélée), même si elles se trouvent à l'autre bout de l'univers.

2.4 Paradoxe EPR :

Pour mettre à l'épreuve les principes de la physique quantique, Albert Einstein, Boris Podolsky et Nathan Rosen proposent en 1935[14] une expérience de pensée (dite « EPR »). L'argument est le suivant : les lois de la mécanique quantique permettent la formation de paires de particules « intriquées », ayant interagi dans le passé puis s'étant éloignées l'une de l'autre, et pour lesquelles la mesure des propriétés de l'une permet de connaître instantanément les propriétés de l'autre, quelle que soit la distance qui les sépare. Ce paradoxe (1935) met en évidence la non-localité de la physique quantique, impliquée par les états intriqués. Le principe du paradoxe est de mesurer simultanément deux grandeurs s'excluant, telles que la position et la vitesse, ce qui serait en violation avec les inégalités d'Heisenberg, et qui donnerait plus d'information que ce que la mécanique quantique prétend décrire, pour prouver que cette théorie est incomplète.

Einstein propose ensuite d'améliorer la mécanique quantique en introduisant une théorie utilisant des variables cachées locales.

Un célèbre état intriqué qui a été largement utilisé dans la théorie de l'information quantique est l'Einstein, Podolsky et Rosen (EPR) [14] Etat $|\Psi\rangle$ qui est donnée par:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) \quad (2.6)$$

2.5 L'état de Bell :

Les états de Bell sont des états à deux qubits intriqués, ils forment une base orthonormée dans l'espace de Hilbert à quatre dimensions et s'écrivent comme suit [15] :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ |\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\ |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Ces états sont appelés aussi « les paires EPR » ou les états de Bell. Grâce à une transformation unitaire locale sur l'une des sous-systèmes, on peut transformer un état en l'autre, définie comme étant la quantité d'intrication contenue dans un état de Bell [16,17].

2.6 Inégalité de Bell :

En mécanique quantique, les inégalités de Bell [18] (du nom de leur auteur : John Stewart Bell) sont les relations que doivent respecter les mesures sur des états intriqués dans l'hypothèse d'une théorie déterministe locale à variables cachées.

Une analogie est possible pour présenter et expliquer les idées qui sous-tendent les inégalités de Bell. Le but est de trouver des relations, des inégalités, que doivent mathématiquement respecter les corrélations entre des paramètres mesurés sur deux particules, qui ont été en interaction, puis séparées et ne pouvant communiquer l'une avec l'autre. Dans ce cas, ces corrélations doivent être déterminées par des variables fixées lors de l'interaction, puis véhiculées avec les particules (ce que l'on appelle des variables cachées).

2.7 État pur et état mixte :

2.7.1 État pur :

Dans le cas où le système global $\{S_1 + S_2\}$ peut être décrit par un vecteur d'état, son état est un vecteur de l'espace de Hilbert $H_1 \otimes H_2$. Certains états peuvent s'écrire sous la forme d'un produit tensoriel entre un état de S_1 et un état de S_2 :

$$|\Psi_{1+2}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \quad (2.7)$$

Ces états sont appelés états séparables ou factorisables. Le système S_1 est dans un état quantique clairement identifié $|\psi_1\rangle$, qui n'est pas altéré par les mesures effectuées sur S_2 . Un état intriqué est par définition un état non séparable, qui s'écrit en général sous la forme :

$$|\Psi_{1+2}\rangle = a|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle + b|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \quad (2.8)$$

C'est donc une superposition d'états d'un système biparti. Pour illustrer la différence entre états séparables et intriqués, supposons par exemple que : $\{|+\rangle_1, |-\rangle_1\}$ forme une base de l'espace H_1 , et $\{|+\rangle_2, |-\rangle_2\}$ une base de l'espace H_2 . l'état :

$$|\psi_{sép}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |-\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1) \otimes |-\rangle_2 \quad (2.9)$$

Est un état séparable, puisqu'il peut être factorisé comme indiqué ci-dessus, tandis que l'état :

$$|\psi_{int}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2) \quad (2.10)$$

Est un état intriqué.

2.7.2 État mixte :

Expérimentalement, il n'est pas possible de préparer un état quantique bien déterminé, on décrit l'état du système par une matrice densité, qui pondère chaque état pur par la probabilité de produire cet état :

$$\rho = \sum_{\psi} P_{\psi} |\psi\rangle \langle \psi| \quad (2.11)$$

On peut donc donner quelle est la définition d'un état séparable décrit par une matrice densité. Un premier choix serait de définir les états séparables comme étant ceux qui s'écrivent :

$$\rho^{(1+2)} = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)} \quad (2.12)$$

Ces états sont effectivement séparables, car il n'y a aucune corrélation entre les mesures faites sur S_1 et celles faites sur S_2 , mais la définition peut être étendue, et l'écriture la plus générale pour la matrice densité d'un état séparable est :

$$\rho_{sep}^{(1+2)} = \sum_i P_i \rho_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)} \quad (2.13)$$

Où P_i est une loi de probabilité ($P_i > 0$ et $\sum P_i = 1$).

Dans le formalisme de la matrice densité, un état intriqué est simplement défini comme un état qui n'est pas séparable. Dans le cas général, même lorsque l'on connaît la matrice densité d'un système, il est difficile de dire si l'état obtenu est intriqué ou séparable.

2.8 Décomposition de Schmidt :

La plupart des caractéristiques importantes de l'entropie d'intrication découlent de la propriété mathématique suivante, appelée décomposition de Schmidt. Tout état pur peut s'écrire comme :

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} \sqrt{\lambda_{\alpha}} |\psi_{\alpha 1}\rangle \otimes |\psi_{\alpha 2}\rangle \quad (2.14)$$

Les $|\psi_{\alpha 1}\rangle$ et $|\psi_{\alpha 2}\rangle$ sont des vecteurs mutuellement orthogonaux dans H_1 et H_2 respectivement. Les λ_{α} peuvent être choisies réelles non-négatives, et sont appelées valeurs propres de Schmidt. Elles sont aussi normalisées :

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 = 1 \quad (2.15)$$

Ce résultat est très utile. Comme un avant-goût de son pouvoir, envisager la conséquence suivante : laisser $|\psi\rangle$ être à l'état pur d'un système composite 1 et 2. Ensuite, par la décomposition Schmidt :

$$\rho^1 = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\psi_{\alpha 1}\rangle \langle \psi_{\alpha 1}| \quad (2.16)$$

Et

$$\rho^2 = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\psi_{\alpha 2}\rangle\langle\psi_{\alpha 2}| \quad (2.17)$$

De sorte que valeurs propres de ρ^1 et ρ^2 sont identiques, à savoir λ_{α} pour les deux opérateurs de densité. De nombreuses propriétés importantes des systèmes quantiques sont complètement déterminées par les valeurs propres de l'opérateur de densité réduite du système, donc à l'état pur d'un système composite de telles propriétés sont les mêmes pour les deux systèmes.

L'existence de la décomposition Schmidt pour les États bipartites garantit que les matrices de densité réduite ont le même spectre, bien que les vecteurs propres peuvent être différents. On peut dire que si nous avons un état intriqué de trois ou plus particules alors il n'existe pas une décomposition Schmidt. Le nécessaire et des conditions suffisantes pour l'existence de décomposition Schmidt [19]. Si A est un opérateur hermitien linéaire agissant sur H_1 et si B est un opérateur hermitien linéaire agissant sur H_2 , les valeurs moyennes de ces locaux sont observables donné par :

$${}_{12}\langle\psi|A\otimes I|\psi\rangle_{12} = \text{tr}_1(\rho^1 A) \quad (2.18)$$

Et

$${}_{12}\langle\psi|I\otimes B|\psi\rangle_{12} = \text{tr}_2(\rho^2 B) \quad (2.19)$$

Ceci suggère que les valeurs moyennes des observables locales sont complètement déterminées par (réduits) matrices locales de densité.

Pour tout état biparti pur, on peut quantifier à quel point l'intrication est là dans un état donné. L'entropie de l'une quelconque de la matrice de densité réduite est une très bonne mesure de l'intrication pour tout état biparti $|\psi\rangle$ [20]. Elle est donnée par :

$$E(\psi) = -\text{tr}_1(\rho^1 \log \rho^1) = -\text{tr}_2(\rho^2 \log \rho^2) = -\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \log \lambda_{\alpha} \quad (2.20)$$

Cette mesure de l'intrication vérifie les propriétés suivantes:

- $E(\psi) = 0$ ssi $|\psi\rangle$ est séparable (non intriqué).
- $E(\psi)$ est invariant par des transformations unitaires locales.

Chapitre 3 :

Intrication quantique avec Hamiltonien non Hermitien

3.1 Introduction :

L'intrication est l'une des principales caractéristiques du monde quantique qui n'a pas d'homologue classique. Cela découle du fait du principe de superposition linéaire et la structure du produit tensoriel de l'espace de Hilbert lorsque nous traitons avec des systèmes multi particulaires. Nous allons introduire la notion d'intrication pour les systèmes quantiques qui sont encore régis par des Hamiltoniens non-Hermitiens « PT-symétrie » [21]. De plus, nous allons montrer comment créer une intrication entre deux qubit PT à l'aide Hamiltonien non-hermitien et discuter l'intrication d'une telle interaction Hamiltonien qui sont non-Hermitienne dans la nature.

3.2 PT - symétrie bit quantique :

En mécanique quantique standard, nous disons que tout système à deux états est un bit quantique ou un qubit. Toute superposition arbitraire de deux états orthogonaux peut représenter un qubit. Dans la même veine, PT-symétrie mécanique quantique si nous stockons les informations dans un système à deux états, alors nous l'appelons un bit quantique –PT symétrie ou en court qubit PT.

En théorie quantique non-Hermitienne un système à deux état général sera décrit par un Hamiltonien 2×2 qui respecte la symétrie CPT. Ce Hamiltonien est donné par (1.32).

Ce Hamiltonien est invariant par CPT. Deux fonction propre distinctes de cette Hamiltonien sont donnés par (1.40) et (1.41).

On pose :

$$\psi_1 = \psi_+ \text{ et } \psi_2 = \psi_- \quad (3.1)$$

En ce qui concerne le produit scalaire CPT nous avons $\langle \psi_{\pm} | \psi_{\pm} \rangle_{CPT} = 1$ et $\langle \psi_{\pm} | \psi_{\mp} \rangle_{CPT} = 0$

Le produit scalaire CPT pour deux états d'un qubit de PT est :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = [(CPT)|\psi\rangle] \cdot \varphi \quad (3.2)$$

L'opérateur C est donné par (1.31).

Depuis les fonctions propres de la hamiltonien non-hermitien H couvrent deux dimensions de l'espace de Hilbert, on peut coder un bit d'information dans ces états orthogonale. Un état arbitraire peut être représenté comme la superposition de ceux-ci états orthogonaux :

$$\Psi = \alpha|\psi_+\rangle + \beta|\psi_-\rangle = \alpha|0_{CPT}\rangle + \beta|1_{CPT}\rangle \quad (3.3)$$

Ainsi, toute superposition arbitraire de deux états orthogonaux de PT Hamiltonien invariant sera appelé le qubit PT.

3.3 L'intrication en théorie non hermitienne :

Intrication est l'une des caractéristiques les plus importantes du monde quantique. Alors que nous avons plus d'un qubit alors l'état du composite système peut être trouvé dans un état intriqué qui n'a pas analogique classique. Maintenant en théorie quantique PT -symétrique nous aurons une fonction similaire à chaque fois que nous avons plus d'un qubit PT. Dans cette section, nous introduisons ces notions de base. Supposons que nous ayons deux systèmes quantiques avec des hamiltonien non-hermitien H_1 et H_2 où :

$$H_1 = \begin{pmatrix} re^{i\theta} & se^{ix} \\ se^{-ix} & re^{-i\theta} \end{pmatrix} \text{ et } H_2 = \begin{pmatrix} r'e^{i\theta'} & s'e^{ix'} \\ s'e^{-ix'} & r'e^{-i\theta'} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Soit $\{|\psi_{\pm}\rangle\} \in H_1$ et $\{|\psi'_{\pm}\rangle\} \in H_2$ sont les fonctions propres du hamiltonien H_1 et H_2 ,

respectivement. Maintenant, l'état du système combiné dans $H_1 \otimes H_2$ qui est recouvert par [22] :

$$\Rightarrow \begin{cases} |\psi_+\rangle \otimes |\psi'_+\rangle \\ |\psi_+\rangle \otimes |\psi'_-\rangle \\ |\psi_-\rangle \otimes |\psi'_+\rangle \\ |\psi_-\rangle \otimes |\psi'_-\rangle \end{cases} \quad (3.5)$$

Si l'état combiné ne peut pas être écrit comme $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle|\phi\rangle$, alors il est intriqué.

Un état général de deux qubit de PT peut être étendu en utilisant la base commune dans $H_1 \otimes H_2$ comme :

$$\begin{cases} |\Psi_{\pm}\rangle = \alpha|\psi_+\rangle + \beta|\psi_-\rangle \\ |\Psi'_{\pm}\rangle = \alpha'|\psi'_+\rangle + \beta'|\psi'_-\rangle \end{cases} \quad (3.6)$$

$$|\Psi\rangle = |\psi_{\pm}\rangle \otimes |\psi'_{\pm}\rangle = a|\psi_+\rangle \otimes |\psi'_+\rangle + b|\psi_+\rangle \otimes |\psi'_-\rangle + c|\psi_-\rangle \otimes |\psi'_+\rangle + d|\psi_-\rangle \otimes |\psi'_-\rangle \quad (3.7)$$

Où

$$\begin{cases} a = \alpha\alpha' \\ b = \alpha\beta' \\ c = \beta\alpha' \\ d = \beta\beta' \end{cases} \quad (3.8)$$

Pour des valeurs générales des amplitudes complexes a , b , c et d c'est un état intriqué. Cependant, si un $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, puis $|\Psi\rangle$ est pas intriqué. Maintenant, nous pouvons quantifier le contenu de l'intrication dans $|\Psi\rangle$. Il est donné par l'entropie de l'état réduit de n'importe lequel du sous-système [22].

$$E(\Psi) = -\lambda_+ \log \lambda_+ - \lambda_- \log \lambda_- \quad (3.9)$$

Où

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{X}) \quad (3.10)$$

Et

$$X = 1 - 4[(|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2) - |(ac^* + bd^*)|^2] \quad (3.11)$$

Pour

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow E(\Psi)=0 \quad (3.12)$$

Maintenant, le produit scalaire CPT sur les espaces de Hilbert H_1 et H_2 peut être utilisé pour définir le produit scalaire sur $H_1 \otimes H_2$. Pour n'importe quels deux vecteurs arbitraires $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in H_1 \otimes H_2$, nous définissons le produit scalaire entre eux comme :

$$\langle \Psi | \phi \rangle_{CPT} = [(CPT) \otimes (CPT) | \Psi \rangle] \cdot | \phi \rangle \quad (3.13)$$

Utilisant ce produit scalaire, nous pouvons calculer les des grandeurs physiques appropriées pour le système composite à l'étude.

On peut généraliser la notion d'intrication pour plus de deux qubits PT.

Chapitre 3 : Intrication quantique avec Hamiltonien non Hermitien

Un état général de deux systèmes quantiques - PT symétrique peuvent être écrits comme (notez que pour des systèmes quantiques non-hermitiennes aussi nous pouvons écrire un théorème décomposition de Schmidt) :

$$|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\psi_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle \quad (3.14)$$

Maintenant, les états réduits de la PT-symétrique des particules 1 et 2 seront différentes si nous calculons les traces partielles dans la théorie quantique habituelle et dans la théorie quantique non-hermitienne. Parce que les produits scalaires dans la théorie quantique PT - symétrique et ordinaire sont différents, les traces partielles seront également différentes. Par exemple, la diminution matrice de densité pour la particule 1 calculée dans la théorie quantique non-hermitienne sera :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| |tr_2(|\phi_i\rangle \langle \phi_j|)| \\ &= \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| [(CPT)|\phi_j\rangle] \cdot |\phi_i\rangle \\ &= \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mais si nous calculons la matrice de densité réduite de particule 1 dans la théorie quantique habituelle, on aura :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| |tr_2(|\phi_i\rangle \langle \phi_j|)| \\ &= \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \langle \phi_j | \phi_i \rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ceci n'est plus en forme diagonale parce que $\langle \phi_j | \phi_i \rangle \neq \delta_{ij}$ dans le sens habituel. De même façon, On peut vérifier que la matrice de densité réduite de particule 2 soit différente dans deux théories. La densité pour la particule 2 dans la théorie non-Hermitienne sera :

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\phi_i\rangle \langle \phi_j| |tr_1(|\psi_i\rangle \langle \psi_j|)| \\ &= \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\phi_i\rangle \langle \phi_j| [(CPT)|\psi_j\rangle] \cdot |\psi_i\rangle \\ &= \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \end{aligned} \quad (3.17)$$

Mais dans la théorie quantique habituelle, on aura :

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\phi_i\rangle\langle\phi_j| |tr_1(|\psi_i\rangle\langle\psi_j|)| \\ &= \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\phi_i\rangle\langle\phi_j| (\langle\psi_j|\psi_i\rangle)\end{aligned}\quad (3.18)$$

En conséquence, le contenu l'intrication d'un état bipartite dépend du produit scalaire étant utilisé pour calculer les traces partielles.

En d'autres termes, $E(\Psi) = S(\rho_i)(i = 1, 2, \dots)$ (où $S(\rho)$ est l'entropie von Neumann) Dans la théorie quantique habituelle n'est pas égale. À $E(\Psi) = S(\rho_i)(i = 1, 2, \dots)$ dans la théorie quantique non hermitienne.

Pour illustrer l'idée ci-dessus, on peut définir un état singulet pour deux qubits PT comme :

$$|\Psi_{CPT}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle|\psi_-\rangle - |\psi_-\rangle|\psi_+\rangle) \quad (3.19)$$

Où

$$\begin{aligned}|\psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i(\varphi-x)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle + -e^{i(\varphi-x)}|1\rangle]\end{aligned}\quad (3.20)$$

Et

$$\begin{aligned}|\psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i(\varphi+x)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle + e^{-i(\varphi+x)}|1\rangle]\end{aligned}\quad (3.21)$$

On remplacé (3.20) et (3.21) dans (3.19) :

Donc

$$|\Psi_{CPT}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} (e^{-i(\varphi+x)} + e^{i(\varphi-x)}) |0\rangle|1\rangle - (e^{i(\varphi-x)} + e^{-i(\varphi+x)}) |1\rangle|0\rangle \right] \quad (3.22)$$

On pose :

$$k = \frac{1}{2}(e^{-i(\varphi+x)} + e^{i(\varphi-x)}) \quad (3.23)$$

On a

$$|\Psi_{CPT}^-\rangle = \frac{k}{\sqrt{2}}[|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle] \quad (3.24)$$

Dans la théorie quantique PT -symétrique, le contenu de l'intrication des $|\Psi_{CPT}^-\rangle$ est donné par $E(\Psi_{CPT}^-)=1$. Notez que ce n'est pas le spin singulet habituel $|\Psi^-\rangle$. En effet, la contenu d'intrication $|\Psi^-\rangle$ en théorie quantique non-hermitienne sera différent. Ceci est un aspect intéressant ici. L'état singulet dans la théorie quantique ordinaire a intriquées égal à un, alors que dans la théorie quantique PT -symétrique il sera inférieur à un. De même, un état de singulet dans la théorie quantique PT -symétrique aura intriquées égal à un alors que dans la théorie ordinaire, il sera moins d'un. C'est en raison de la nature différente des produits scalaires dans les théories ordinaires et les théories quantiques non hermitiennes. Pour voir clairement, considérons l'état intriqué du spin singulet dans la théorie quantique ordinaire. Si nous voulons connaître le contenu de l'intrication dans la théorie quantique PT -symétrique alors nous devons calculer l'entropie de Von Neumann de la matrice de densité réduite dans la théorie PT -symétrique. La matrice de densité réduite pour la particule 1 dans la théorie quantique non-hermitienne est donnée par :

$$\rho_1 = tr_2(|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|) \quad (3.25)$$

$$= tr_2 \left[\frac{1}{2} (k(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle)) (k'(\langle 0|\langle 1| - \langle 1|\langle 0|)) \right]$$

$$= tr_2 \left[\frac{kk'}{2} (|0\rangle|1\rangle\langle 0|\langle 1| - |0\rangle|1\rangle\langle 1|\langle 0| - |1\rangle|0\rangle\langle 0|\langle 1| + |1\rangle|0\rangle\langle 1|\langle 0|) \right]$$

$$= \frac{1}{2} [|0\rangle\langle 0|\langle 1|1\rangle_{CPT} - |0\rangle\langle 1|\langle 0|1\rangle_{CPT} - |1\rangle\langle 0|\langle 1|0\rangle_{CPT} + |1\rangle\langle 1|\langle 0|0\rangle_{CPT}] \quad (3.26)$$

Chapitre 3 : Intrication quantique avec Hamiltonien non Hermitien

Lorsque les produits scalaire CPT sont donnés par :

$$\begin{cases} \langle 0|0 \rangle_{CPT} = \langle 1|1 \rangle_{CPT} = \frac{1}{\cos \alpha} \\ \langle 0|1 \rangle_{CPT} = i \tan \alpha \\ \langle 1|0 \rangle_{CPT} = -i \tan \alpha \end{cases} \quad (3.27)$$

En utilisant ceci, la matrice de densité réduite à particules 1 est donnée par :

$$\rho_1 = \text{tr}_2(|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|) = \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \begin{pmatrix} 1 + \sin^2 \alpha & -2i \sin \alpha \\ 2i \sin \alpha & 1 + \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

A noter que ρ_1 est non normalisé. En général, les matrices de densité réduite qui viennent sur différentes définitions de produit scalaire ne sont pas normalisées automatiquement. C'est parce qu'un état normalisé dans le sens du produit scalaire habituel est pas normalisée dans le sens du produit scalaire CPT. Mais, nous pouvons définir une matrice de densité normalisée :

$$\tilde{\rho}_1 = \rho_1 / \text{tr} \rho_1 \quad (3.29)$$

Donc

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2i \sin \alpha \\ 2i \sin \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Les valeurs propre de la matrice de densité est :

$$\det(\tilde{\rho} - \lambda I) = 0$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{\rho} - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2i \sin \alpha \\ 2i \sin \alpha & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\tilde{\rho} - \lambda I) = \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda + \left(\frac{1}{4} - \sin^2 \alpha \right)$$

Ainsi

$$\text{delta} = \sin^2 \alpha$$

Donc

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm 2 \sin \alpha) \quad (3.31)$$

Maintenant, le contenu d'intrication du singulet habituel dans la théorie quantique PT – symétrique est donnée par :

$$E(\Psi^-) = -\lambda_1 \log \lambda_1 - \lambda_2 \log \lambda_2 \quad (3.32)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 2 \sin \alpha) \log \frac{1}{2}(1 + 2 \sin \alpha) - \frac{1}{2}(1 - 2 \sin \alpha) \log \frac{1}{2}(1 - 2 \sin \alpha) \neq 1 \quad (3.33)$$

Cela montre que si un état intriqué en théorie ordinaire a une unité d'intrication, en théorie quantique non-hermitienne il aura moins d'une unité de l'intrication.

Ceci est l'effet de la non-herméticité sur l'intrication quantique. Dans la limite hermitienne ($\alpha = 0$), $E(\Psi^-) = 1$. De même, on peut vérifier que l'état intriqué au maximum $|\Psi_{CPT}^- \rangle$ de la théorie quantique non-hermitienne aura moins d'une unité d'intrication dans la théorie quantique ordinaire.

Conclusion

Conclusion

Dans ce mémoire, on expose les quelques notions de la théorie quantique PT – symétrique, et explique aussi l'intrication quantique.

Par ailleurs et dans le but nous avons introduit la notion d'intrication pour les systèmes quantiques décrit par des Hamiltoniens non-Hermitiennes. Nous avons introduit la notion de PT qubit dans la théorie quantique non-hermitienne. États de qubit qui sont orthogonaux en théorie quantique ordinaire devenu non-orthogonal dans la théorie quantique PT -symétrique et vice versa.

Plus intéressant, la propriété d'intrication d'états quantiques aussi changé si nous allons d'une théorie à l'autre. Nous avons montré que l'état maximum intriqué qui entropie Von Neumann égale à l'unité dans la théorie ordinaire aura moins d'entropie dans la théorie quantique PT -symétrique et vice versa.

Bibliographie :

- [1]. C.M. Bender and S. Boettcher, Real spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry, *phys. Rev. Lett.* 80, 5243 (1998).
- [2]. C.M. Bender and S. Boettcher, and V.M. Savage, Solution of Schwinger-Dyson Equations for PT-Symmetric Quantum Field Theory *Phys. Review D* 62, 85001 (2000).
- [3]. C.M. Bender and Q.Wang, Comment on a Recent Paper by Mezincescu *J. Phys. A* 34, 3325 (2001).
- [4] C. M. Bender and S. Boettcher, and V. M. Savage, Conjecture on the interlacing of zeros In complex Sturm. Liouville problems, *J. Math. Phys. (N.Y)* 41, 6381 (2000).
- [5] M. Znojil, Solvable simulation of a double-well problem in Script PT-symmetric quantum mechanics, *J.Phys.A36*, 7639(2003).
- [6] C. M. Bender, The complex pendulum, *Physics Reports* 315,27(1999).
- [7] C. M. Bender, S. Boettcher and Peter N. Meisinger, *J. Math.Phys* 40, 2201(1999).
- [8] C. M. Bender and S. Boettcher, *Phys. Rev. Lett.* 80, 5243 (1998) ; M. Znojil, *J.Phys.A36*, 7639 (2003).
- [9] A. Mostaphazadeh, *J. Phys. A*39 (2006) 10171-10188.
- [10] A. Mostaphazadeh, *Pramana-J. Phys.* 73, 269-277 (2009).
- [11]C.M .Bender. C. Brody, H. F. Jones, Complex Extension of Quantum Mechanics, *Phys. Rev. Lett.* 89, 270401 (2002).
- [12] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, Erratum : Complex Extension of Quantum Mechanics, *Phys.Rev.Lett.*92, 119902 (2002).
- [13] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger. *Phys. Rev.Lett.* 49(1982).
- [14] A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen, Can quantum-mechanical desription of physical reality be considered complete ? , *Physical Review*, vol.47, no.10, p.777, 1935.
- [15] J, S. Bell. *Physics* 1 (1964)
- [16]S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- [17]J .F. Clauser, M .A . Horne, A. Shimony et R.A. Holt, Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories, *Physical Revien Letters*, vol. 23, no. 15, pp. 880-884,1969.
- [18] J.S.Bell, on the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, *Physics*, vol 1.3:195-200, 1964.
- [19] A K Pati, *Phys. Lett.* A278, 118 (2000).
- [20] S Popescu and D Rohrlich, *Phys. Rev.* A56, R3319 (1997).

Bibliographie

[21] A Mostafazadeh, Czech. J. Phys. 54, 1125 (2004).

[22] Arun K Pati, Pramana – J. Phys., Vol. 73, No. 3, pp 485-498 ,September 2009.

Abstract :

We have introduced the notion of entanglement for quantum systems described by non-Hermitian Hamiltonians. We have introduced the notion of PT qubit in the non-Hermitian quantum theory States of qubit which are orthogonal in ordinary quantum theory become non-orthogonal in PT -symmetric quantum theory and vice versa. We show that a maximally entangled state that has von Neumann entropy equal to unity in the ordinary theory will have less entropy in PT -symmetric quantum theory and vice versa.

ملخص:

في هذا العمل قدمنا فكرة التشابك لأنظمة الكم وصفها الهاملتون غير الهرميتي. وقدمنا مفهوم « Qubit PT » في نظرية الكم غير الهرميتية حيث حالة qubit تكون متعامدة في نظرية الكم العادية تصبح غير متعامدة في "تناظر PT" والعكس بالعكس. وجدنا أن التشابك في حالته الأعظمية ينتج أنثروبي فون نيومان يساوي 1 في نظرية الكم العادية وأقل من الواحد في تناظر PT والعكس بالعكس.

Résumé :

Dans ce travail, nous avons introduit la notion d'intrication pour les systèmes quantiques décrit par des Hamiltoniens non-Hermitiennes. Nous avons aussi introduit la notion de PT qubit dans la théorie quantique non-hermitienne où l'état de qubit qui sont orthogonaux en théorie quantique ordinaire devenu non-orthogonal dans la théorie quantique PT -symétrique et vice versa. Nous montre que l'état maximum intriqué qui entropie Von Neumann égale à l'unité dans la théorie ordinaire, aura moins d'entropie dans la théorie quantique PT -symétrique et vice versa.