Université de M'sila
Faculté des Mathématiques et Informatiques

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Licence
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquées et Discrète

Par: Benabderrahmane Imane

Sujet:

Etude de l'équation de diffusion d'ordre n

Dirigé par :Mr.Benhamidouche Nourdine

Promotion: 2012/2013

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette année universitaire.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Benhamidouche, qui, en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers les membre de jury qui ont eu la gentillesse de lire et corriger ce travail.

J'exprime ma gratitude à la personne qui m'a orienté d'être ici , au moment où j'étais disparu, il a pris ma main et il m'a dit que voilà ma direction, merci mon père et « rabbi yarhmek ».

Je n'oublie pas ma mère et ma famille pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Résumé

Nous nous intéressons ici à étudier l'équation de diffusion d'ordre n, dans le premier chapitre nous donnons un aperçu sur l'équation de diffusion d'ordre 2, il s'agit de "l'équation de la chaleur", Ensuite dans le deuxième chapitre notre étude est basée sur ce quand on appelle "l'équation d'Airy" ou bien l'équation de diffusion d'ordre 3, finalement nous essayons de généraliser les résultats pour l'ordre n en spécifiant l'étude par la méthode d'auto-similarité.

Mots clés :

Equation de la chaleur, condition initiale, problème de Cauchy, équation d'Airy, transformée de Fourier, auto-similarité, condition de similarité. .

Symboles et Notation

$\forall$	Pour tout
$\in$	Appartient à
$\Longrightarrow$	Implique que
$\Longleftrightarrow$	Si et seulement si
$\rightarrow$	Tend vers
$*$	La convolution
$\hat{u}$	La transformée de Fourier de u
$C^{\infty}(\mathbb{R})$	L'ensembles des fonctions infiniment continuement dérivables sur $\mathbb{R}$
$H^{m}(\mathbb{R})$	$H^{m}(\mathbb{R}) = \left\{u \in L^{2}(\mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} \left\|\hat{u}(\xi)\xi^{\alpha}\right\|^{2} d\xi < \infty,\ \forall \left\|\alpha\right\| \leq m\right\}$
$L^{1}(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont le module est intégrable
$L^{2}(\mathbb{R})$	l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont de carré intégrable au sens de l'intégrale de Lebesgue
$L^{\infty}(\mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont l'infini puissance est intégrable.
$S(\mathbb{R})$	La classe des fonctions de Schwartz i.e. $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et verifie pour tout $k, n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{k} \frac{\partial^{n} f}{\partial x^{n}} = 0$
$\left\|f\right\|_{L^{1}}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|f(s)\right\| ds$
$\left\|f\right\|_{L^{\infty}}$	$\sup_{s \in \mathbb{R}} \left\|f(s)\right\|$
$\dot{c}(t)$	La dérivée de c par rapport à t
$\Gamma(z)$	Pour tout nombre complexe z tel que $Re(z) > 0$, $\Gamma(z) = \int_{0}^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

Table des matières

Introduction **2**

1 L'équation de diffusion d'ordre $n = 2$ (L'équation de la chaleur) **3**

1.1 Solution fondamentale et théorie des distributions 3

1.1.1 La solution fondamentale de l'équation 4

1.1.2 Théorie des distributions 4

1.2 Problème de valeur initiale sur $\mathbb{R}$ 6

1.3 Principe du maximum 10

1.4 Méthode de conservation d'énergie 13

2 L'équation de diffusion d'ordre $n = 3$ (Equation d'Airy) **15**

2.1 La fonction d'Airy 15

2.2 Quelques propriétés de la fonction d'Airy 18

2.2.1 Propriétés élémentaires de la fonction d'Airy 18

2.2.2 Représentation de l'intégrale 19

2.2.3 La convergence 20

2.3 Problème de Cauchy pour l'équation d'Airy 21

2.3.1 Equation d'Airy 21

2.4 La solution analytique de l'équation 22

2.4.1 La solution pour $kt = \frac{1}{3}$ 23

2.4.2 La solution de l'équation dans le cas général 24

3 L'équation de diffusion d'ordre n 26

3.1 Un résultat général d'éxistence et d'unicité 26

3.2 Solutions auto-similaires pour l'équation de diffusion d'ordre n 28

3.3 La méthode d'auto-similarité 28

3.3.1 L'auto similarité classique 28

3.3.2 L'auto-similarité générale 32

3.4 Application de l'auto-similarité classique pour $n = 2$ et $n = 3$ 36

3.4.1 La solution autosimilaire pour l'équation de la chaleur 36

3.4.2 La solution autosimilaire pour l'équation d'Airy 37

Conclusion 39

Bibliographie 41

Introduction

Aujourd'hui les équations aux dérivées partielles représentent l'un des outils les plus puissants de mathématique modélisant des problèmes en physique, en mécanique du solide et des fluides, en biologie, en chimie, en économie, en finance...etc. Elle fait partie du quotidien de l'ingénieur.

Nous avons l'habitude de classer les équations aux dérivées partielles en trois grandes classes fondamentales d'équations : les équations elliptiques qui servent typiquement à décrire des phénomènes d'équilibre en physique, pour les problèmes stationnaires, les équations hyperboliques qui permettent de décrire les phénomènes de propagation, pour les problèmes d'évolution et les équations paraboliques qui permettent de décrire des phénomènes de diffusion. C'est cette dernière classe d'équations qui fera l'objet de ce mémoire.

Les phénomènes de diffusion décrits par les équations paraboliques touchent plusieurs domaines de la pratique, l'équation de la chaleur est l'exemple de diffusion le plus connu. Nous allons dans ce travail étudier l'équation de diffusion d'ordre n qui représente le phénomène de diffusion linéaire.

Ce mémoire contient trois chapitres.

Le premier chapitre a pour but de rappeler et de démontrer un certain nombre de résultats relatifs à l'équation de diffusion d'ordre 2 c'est à dire l'équation de la chaleur. Nous donnons des définitions et des théorèmes liés à l'existence, l'unicité et les propriétés de la solution fondamentale du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur en illustrant par un exemple.

On traite également dans ce chapitre le principe du maximum et la méthode de conservation d'énergie pour le problème de la chaleur avec conditions aux bords.

Dans le deuxième chapitre nous étudions l'équation de diffusion de troisième ordre qui est connue sous le nom d'équation d'Airy qui est liée à plusieurs applications physiques. On commence par donner des définitions et des propriétés de la fonction d'Airy qui sont essentielles pour la suite, en utilisant la transformée de Fourier nous allons calculer la solution de cette équation.

Finalement dans le dernier chapitre, nous essayons de généraliser les résultats précédents. En premier lieu, on donne un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy de l'équation de diffusion d'ordre n.

Puis ce problème de Cauchy est résolu par la méthode d'autosimilarité qui prend la grande partie de ce chapitre, avec ses deux formes classiques et généralisée. Enfin, on donne des exemples pour l'application de l'autosimilarité classique à l'équation de diffusion d'ordres 2 et 3.

Chapitre 1

L'équation de diffusion d'ordre $n = 2$ (L'équation de la chaleur)

Ce premier chapitre donne une idée générale sur l'équation de la chaleur. La première section est sur la solution fondamentale de l'équation, la section 1.2 est consacrée à la solution fondamentale et la théorie des distributions, ensuite une étude est faite sur le problème à valeur initiale sur $\mathbb{R}$. Finalement, le principe du maximum et la méthode de conservation d'énergie sont abordés pour le problème de condition aux limites et initiales.

1.1 Solution fondamentale et théorie des distributions

Définition 1.1.1 *L'équation de la chaleur en une dimension est donnée par l'équation différentielle partielle suivante :*

$$\frac{du}{dt} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Afin de résoudre l'équation de la chaleur pour de nombreuses solutions ou même juste une seule solution, nous devons imposer certaines conditions.

Nous voulons donc résoudre le problème de Cauchy[(1)] :

[(1)] Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, il a 800 parutions et sept ouvrages. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} & = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) & = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

1.1.1 La solution fondamentale de l'équation

Définition 1.1.2 *[08] La fonction θ définie pour $t > 0$ par l'expression suivante:*

$\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt.}}$, *s'appelle la solution fondamentale de* $\frac{du}{dt} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Théorème 1.1.1 *[08]*

1. $\theta(x,t) > 0, \forall t > 0$, $\lim_{t\to 0^+} \theta(x,t) = 0\ \forall x \neq 0$ *et* $\lim_{t\to 0^+} \theta(0,t) = +\infty$.
2. $\theta(x,t)$ *est solution de (1.1)* $\forall t > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x,t)dx = 1 \qquad \forall t > 0.$
4. $\lim_{t\to 0^+} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \theta(x,t)dx = 1 \qquad \forall \alpha > 0.$

Preuve. La propriété 1 est évidente, La propriété 2 s'établit très facilement. On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = a\sqrt{2\pi}\ \forall a > 0$, ce qui démontre la propriété 3.$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \theta(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-a}{\sqrt{2kt}}}^{\frac{a}{\sqrt{2kt}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$, et comme $\frac{a}{\sqrt{2kt}} \to 0$ le résultat est démontré.

La solution au problème de valeur initiale $\varphi(x)$ s'obtient par convolution de $\varphi(x)$ avec $\theta(x,t)$ pour tout t. C'est la raison du vocable "**solution fondamentale**". Nous allons indiquer plus précisément ce dont il s'agit. ■

1.1.2 Théorie des distributions

Les conditions 1, 3 et 4 du théorème précédant expriment que les fonctions $\theta(x,t)$ convergent lorsque t tend vers 0 au sens des distributions vers la masse de Dirac $\delta(x)$[(2)].

[(2)]La distribution de Dirac où masse de Dirac, aussi appelée par abus de langage fonction δ de Dirac, introduite par Paul Dirac, peut être informellement considérée comme une fonction δ qui prend une « valeur » infinie en 0, et la valeur zéro partout ailleurs, et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

Rappelons que $\delta(x)$ n'est pas une fonction, que c'est une distribution qui fait correspondre à toute fonction g sa valeur $g(0)$ en 0. La convergence citée signifie que $\forall g$ nulle hors d'un segment borné et indéfiniment dérivable $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x,t)g(x)dx$ a pour limite $g(0)$. On démontre que cela résulte des conditions1, 3 et 4 expriment notamment que la surface sous le graphe de $\theta(x,t)$ reste égale à 1 bien qu'en tout point $x \neq 0$ $\lim_{t\to 0} \theta(x,t) = 0$; ce qui correspond à l'évolution ci-dessous des graphes pour $\theta(x,t_1)$, $\theta(x,t_2)$, $\theta(x,t_3)$ avec $t_3 > t_2 > t_3 > 0$.

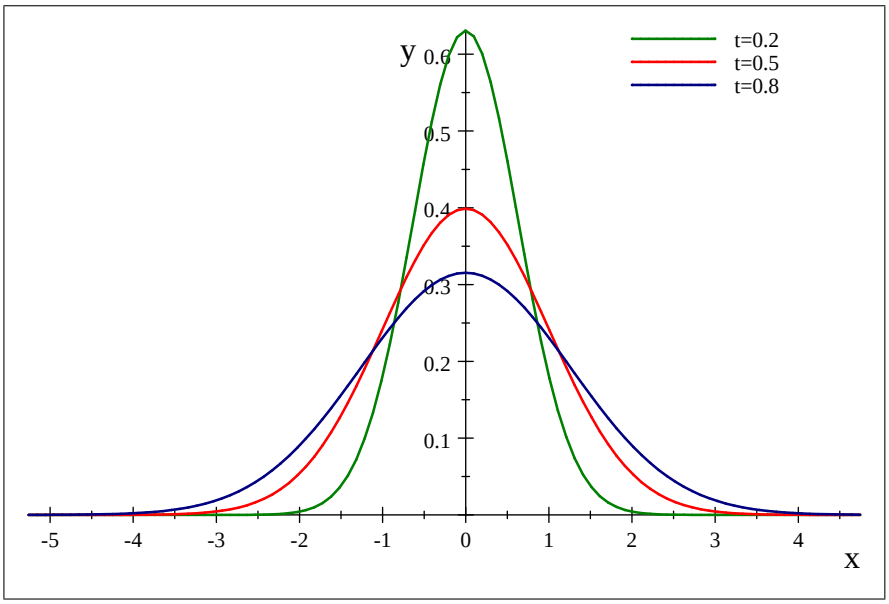

Figure 1.1

On dit souvent que $\delta(x)$ est la représentation idéale d'une impulsion unité : elle est de durée nulle mais son intégrale est égale à un.

Le théorème 1.1.1 exprime que "$\theta(x,t)$ *est la solution de* $\frac{du}{dt} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *dont la valeur initiale est la masse de Dirac*" .

Soit f une fonction localement sommable et $u(x,t) = \theta(x,t) * f(x)$ convolée de θ et de f pour t fixé: au moins au sens des distributions, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) * f(x)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) * f(x)$ de sorte que $u(x,t)$ est solution de $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ et que $\lim_{t\to 0} = f(x)$.

Remarque 1.1.1 *Ce qui précède se généralise aux équations* $\frac{\partial u}{\partial t} - Au = 0$ *pour des opérateurs* A *correspondant à une équation elliptique*[3] *dans des espaces plus généraux.*

[3] Une EDPelliptique linéaire se met sous la forme suivante : $a(x,y)u_{xx}(x,y) + b(x,y)u_{yy}(x,y) + c(x,y)u_x(x,y) + d(x,y)u_y(x,y) + e(x,y) = f(x,y)$,avec$a(x,y)b(x,y) > 0$

1.2 Problème de valeur initiale sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.2.1 *[08] Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $|f(y)| \leq Ae^{ay}$,*

1.
$$u(x,t) = \theta(x,t) * f(x) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} f(y)dy \tag{1.2}$$

Est une fonction C^∞ qui est solution de $\frac{du}{dt} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour $t > 0$.

2. $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$.

3. $|u(x,t)| \leq Ae^{ax+a^2kt}$; *u est la seule solution de $\frac{du}{dt} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dont la valeur initiale est $f(x)$ et pour laquelle il existe B et b vérifiant $|u(x,t)| \leq Be^{bx}$ $\forall t \leq T$.*

4. *Si $f \equiv 1$ alors $u \equiv 1$, si $0 \leq f(y) \leq M$ alors $0 \leq u(x,t) \leq M$.*

5. *Si f_1, f_2 vérifient $|f_i(y)| \leq A_i e^{a_i y}$ pour $i = 1, 2$, si u_1 et u_2 sont les solutions correspondantes alors:*

$\forall x, t$ $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \varepsilon$ *dès que* $|f_1(x) - f_2(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x$.

C'est à dire que ***le problème est bien posé*** *en ce sens q'une "petite" perturbation de la valeur initiale n'entraine q'une "petite" perturbation de la solution (il s'agit d'une perturbation uniformément petite en x).*

Preuve. 1. En posant $y - x = s.2\sqrt{kt}$ pour $t \neq 0$ on trouve que: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} |f(y)|\, dy = 2\sqrt{Kt}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \left|f(2s\sqrt{Kt} + x)\right| ds$ et comme $\left|f(2s\sqrt{kt} + x)\right| \leq Ae^{ax+2as\sqrt{kt}}$ l'intégrale est finie et u existe et est continue pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. De façon analogue on vérifie qu'on peut dériver sous le signe d'intégration et que:

$$\frac{du}{dt}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{d\theta}{dt}(x-y,t) - k\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x-y,t)]f(y)dy = 0.$$

2. La relation 3 du théorème 1.1.1 permet d'affirmer que:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t, y-x)f(x)dy \text{ donc } u(x,t) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t, y-x)[f(x) - f(y)]dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}[f(2s\sqrt{Kt} + x) - f(x)]ds$$

Soit $s.2\sqrt{kt} < \eta$ de sorte que $[f(2s\sqrt{kt}+x) - f(x)] \leq \frac{\varepsilon}{2}$ alors:

$$|u(x,t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\eta}{2\sqrt{Kt}}}^{\frac{\eta}{2\sqrt{Kt}}} e^{-s^2} ds + \frac{f(x)}{\sqrt{\pi}} \int_{|s|>\frac{\eta}{2\sqrt{Kt}}} e^{-s^2} ds + \int_{|s|>\frac{\eta}{2\sqrt{Kt}}} e^{-s^2} f(\frac{2s\sqrt{Kt}+x}{\sqrt{\pi}}) ds$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$ la première intégrale est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$, la seconde a pour limite 0 si t tend vers 0. Dans la troisième intégrale la fonction à intégrer est majorée par $\frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2+ax+2as\sqrt{kt}}$, cette fonction de s étant sommable la troisième intégrale a aussi pour limite 0 et t tend vers 0.

3.

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} A f(2sa\sqrt{kt} + ax) ds \\ &= \tfrac{A}{\sqrt{\pi}} \exp(ax + a^2 kt) \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-a\sqrt{kt})^2} ds \\ &= A \exp(ax + a^2 kt). \end{aligned}$$

Nous admettrons le résultat d'unicité.

4. Nous avons démontré que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t,x) dx = 1$ et si $0 \leq f(y) \leq M$ alors

$$0 \leq u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t,y) f(x-y) dy \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t,y) dy = M$$

5. Soit $f_0 = f_2 - f_1$, $u_2 - u_1$ est la solution de valeur initiale f_0 donc si $|f_2(y) - f_1(y)| \leq \varepsilon$ $\forall y$ alors $|u_2(x,t) - u_1(x,t)| \leq \varepsilon$: u est "**stable**" relativement à la valeur initiale et le **problème est bien posé**.

■

Définition 1.2.1 *[05] On appelle fonction d'erreur et on note* erf, *et fonction d'erreur complémentaire et on note* erf c *les fonctions définies par:*

$$\operatorname{erf}(t) = \int_0^t e^{-s^2} ds, \qquad \operatorname{erf} c(t) = \int_t^{+\infty} e^{-s^2} ds$$

On sait que $\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *donc* $\operatorname{erf}(t) + \operatorname{erf} c(t) = 1$ *et* $\lim_{t\to\infty} \operatorname{erf}(t) = 1$ *et* t $\lim_{t\to\infty} \operatorname{erf} c(t) = 0$; *on notera que* $\operatorname{erf} c(t)$ *tend vers zéro extrêmement vite lorsque* t *croit puisque* $\operatorname{erf} c(t) \leq \frac{1}{t\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$.

En effet:

$$\begin{aligned}\int_t^T e^{-s^2}ds &= \tfrac{1}{2}\int_t^T \tfrac{1}{s}(d(-e^{-s^2}))ds \\ &= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{t}e^{-t^2} - \tfrac{1}{T}e^{-T^2}] - \tfrac{1}{2}\int_t^T \tfrac{1}{s^2}e^{-s^2}ds \text{ et } T \to \infty\end{aligned}$$

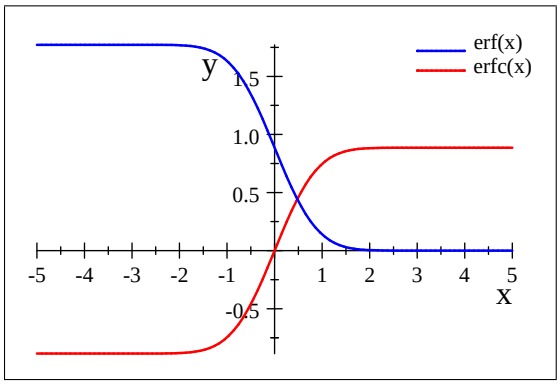

Figure 1.2 (les fonctios d'erreurs)

Exemple 1.2.1 *[06]*

Nous résolvons le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

C'est un problème de Cauchy pour l'équation de diffusion d'ordre 2, avec une condition initiale continue par morceaux,

On a:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\varphi(y)dy \tag{1.3}$$

La substitution de φ dans (1.3) donne:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^{+\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}e^{-y}dy \iff u(x,t) = \tfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{4kt}}e^{y-x}dy \\ &= \tfrac{e^{-x}}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{x} e^{-(\frac{y^2}{4kt}-y)}dy \end{aligned}$$

Ecrivons $(\frac{y^2}{4kt} - y)$ de la forme $(Ay - B)^2 = A^2y^2 - 2ABy + B^2$,d'où

$$A = \frac{1}{\sqrt{4kt}} \text{ et } B = \sqrt{kt}$$

Alors on aura:

$$u(x,t) = \frac{e^{kt-x}}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(\frac{y}{\sqrt{4kt}} - \sqrt{kt})^2} dy$$

Posons $s = (\frac{y}{\sqrt{4kt}} - \sqrt{kt}) \iff \sqrt{4kt}ds = dy$,

$$u(x,t) = \frac{e^{kt-x}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-2kt}{\sqrt{4kt}}} e^{-s^2} ds$$

D'où

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{e^{kt-x}}{\sqrt{\pi}}[\int_{-\infty}^{0} e^{-s^2} ds + \int_{0}^{\frac{x-2kt}{\sqrt{4kt}}} e^{-s^2} ds] \\ &= \frac{e^{kt-x}}{\sqrt{\pi}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\frac{x-2kt}{\sqrt{4kt}})] \end{aligned}$$

Alors la solution de ce problème là est donnée par

$$\boxed{u(x,t) = \frac{e^{kt-x}}{2}[1 + \operatorname{erf}(\frac{x-2kt}{\sqrt{4kt}})]}$$

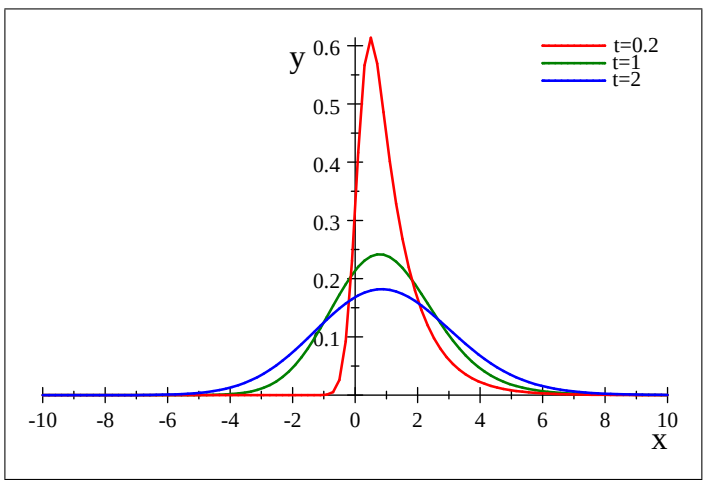

Figure 1.3(solution de l'exemple pour $k = 1$)

Le graphe de la solution de l'exemple 1.2.1 est tracé dans la figure 1.3 (pour $k = 1$). La distribution initiale de la température a été une fonction continue par morceaux, cependant, il est immédiatement complètement lissé. Après un temps arbitrairement petit, la solution atteint sa valeur maximale à $x = 1$, pour toute valeur de t.

1.3 Principe du maximum

Soit maintenant les problèmes sur toute la droite réelle et considérons le flux de chaleur dans une barre finie de longueur L, dont les extrémités sont maintenues à l'instant t par des températures $g(t)$ et $h(t)$, respectivement, tandis que la distribution initiale de température au temps $t = 0$ est donné par une fonction continue $\varphi(x)$. Nous avons donc un problème aux limites de valeur initiale:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in (0,l), t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = g(t) \\ u(L,t) = h(t) \end{cases} \tag{1.4}$$

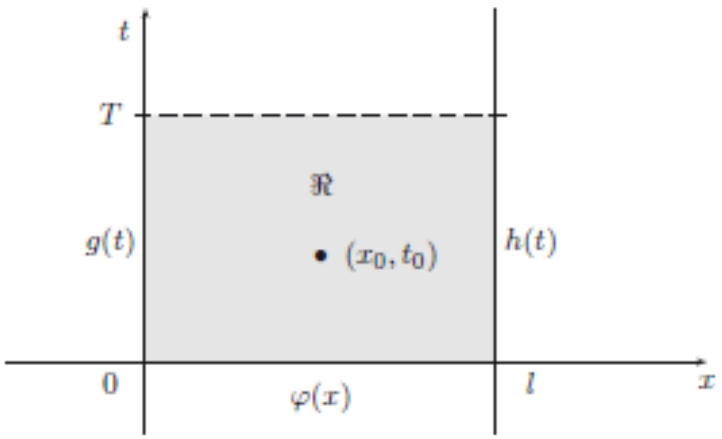

Figure 1.4(cylindre spatio-temporel R) [5]

Théorème 1.3.1 *[05, pg, 145] Soit $u = u(x,t)$ une solution classique du problème (1.4), alors u atteint ses valeurs extrêmes (minimum et maximum) sur le fond ou la frontière du cylindre spatio-temporel R.*

Effectivement, une plus forte affirmation est vraie. Il dit que les valeurs de la fonction u à l'intérieur du cylindre et sur le dessus sont strictement inférieure (ou supérieure) à la valeur maximale (ou un minimum, respectivement) sur le reste de la frontière du cylindre spatio-temporel R (à moins que la fonction $u(x,t)$ est constante).

Preuve. [05, pg, 146]

La preuve sera faite pour la valeur maximale et dans le cas de la valeur minimale, on procède de façon analogue (utilisant le fait que $min\ u = -Max(-u)$).

L'idée de la preuve repose sur le fait que les dérivées partielles premières de la fonction doit être nulle et la dérivée seconde doit être non positif au point maximal.

Notons M la valeur maximale de la fonction $u(x,t)$ sur les côtés $t = 0$, $x = 0$, $x = l$, et posons $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$, avec ε est une constante positive.

Notre but est de montrer que $v(x,t) \leq M + \varepsilon l^2$ pour tout le cylindre($\mathcal{R}$).

La définition de la fonction v implique que l'inégalité $v(x,t) \leq M + \varepsilon l^2$ est satisfaite sur les lignes: $t = 0$, $x = 0$ et $x = l$.

En outre, le soi-disant **"l'inégalité de diffusion"** $v_t(x,t) - kv_{xx}(x,t) < 0$ est satisfaite pour tout $(x,t) \in \mathcal{R}$.

En effet,

$$\begin{aligned} v_t(x,t) - kv_{xx}(x,t) &= u_t(x,t) - k(u(x,t) + \varepsilon x^2)xx \\ &= u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) - 2k\varepsilon \\ &= -2k\varepsilon < 0 \end{aligned}$$

Comme v est une fonction continue et $\mathcal{R}$ est un ensemble fermé borné, le point maximal (x_0, t_0) de la fonction v doit exister sur $\mathcal{R}$. Tout d'abord, supposons que ce point se situe à l'intérieur du cylindre $\mathcal{R}$ ($0 < x_0 < l$, $0 < t_0 < T$).

Maintenant, cependant, $v_t = 0$, $v_{xx} \leq 0$ doivent tenir à (x_0, t_0), ce qui contredit l'inégalité de diffusion. Alors, soit (x_0, t_0) se trouver sur la partie supérieure du cylindre spatio-temporel $\mathcal{R}$, c'est-à-dire: $t_0 = T$, $0 < x_0 < l$. Ainsi $v_x(x_0, t_0) = 0$, $v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$ et $v_t(x_0, t_0) \geq 0$, ce qui contredit à nouveau l'inégalité de diffusion.

Par conséquent, le point maximum de la fonction v doit être réalisée sur le reste du cylindre: sur les lignes de $t = 0$, $x = 0$, $x = l$. Ici, cependant, nous avons l'inégalité $v(x, t) \leq M + \varepsilon l^2$. Ces faits impliquent que la relation $v(x, t) \leq M + \varepsilon l^2$ est valable pour tous $(x, t) \in \mathcal{R}$. Si nous substituons à v, on obtient $u(x, t) \leq M + \varepsilon(l^2 - x^2)$. Comme $\varepsilon > 0$ a été choisis d'une manière totalement arbitraire, il s'ensuit que:

$$u(x, t) \leq M$$

Pour tout $(x, t) \in \mathcal{R}$, ce qui nous voulions démontrer. ■

Corollaire 1.3.1 *[05, pg, 146] (Unicité.) Le premier problème aux limites (1.4) a au plus une solution classique.*

Preuve. Soit $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ deux solutions classiques du problème (1.4). Posons $w = u_1 - u_2$, alors la fonction w satisfait:

$$w_t - kw_{xx} = 0, w(x, 0) = 0, w(0, t) = 0, w(l, t) = 0$$

Selon le principe du maximum, la fonction w atteint son maximum sur les côtés $t = 0$, $x = 0$, $x = l$, où il est, toutefois, égale à zéro. Donc $w(x, t) \leq 0$.

Le même argument pour la valeur minimale des rendements $w(x, t) \geq 0$. Ainsi, nous obtenons $w(x, t) \equiv 0$, et donc $u_1\ (x, t) \equiv u_2\ (x, t)$. ■

Corollaire 1.3.2 *[05, pg, 147] (stabilité uniforme.) Soit u_1, u_2 deux solutions classiques du premier problème aux limites (1.4) correspondant à deux conditions initiales φ_1 et φ_2, puis*

$$\max_{x \in [0,l]} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{x \in [0,l]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

Pour chaque $t > 0$. En particulier, la solution classique de (1.4) est stable par rapport à les petites perturbations de l'état initial.

Cette déclaration affirme qu'un "petit" changement des conditions initiales accuse un "petit" changement de la solution au moment arbitraire.

Preuve. Soit la solution $u_1(x,t)$ correspond à la condition initiale $\varphi_1(x)$, la solution $u_2(x,t)$ correspond à l'état initial $\varphi_2(x)$; les conditions aux limites sont les mêmes dans les deux cas. Encore une fois, notons par $w = u_1 - u_2$ la différence entre les deux solutions.

La fonction w résout le problème:

$$w_t - kw_{xx} = 0, w(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), w(0,t) = 0, w(l,t) = 0$$

Le principe du maximum implique alors:

$$w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq \max_{x\in[0,l]}(\varphi_1 - \varphi_2) \leq \max_{x\in[0,l]} |\varphi_1 - \varphi_2|$$

De même, selon le "principe du minimum" (ie.le principe du maximum appliqué à $-u$)

$$w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \geq \min_{x\in[0,l]}(\varphi_1 - \varphi_2) \geq -\max_{x\in[0,l]} |\varphi_1 - \varphi_2|$$

Par conséquent:

$$\max_{x\in[0,l]} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \max_{x\in[0,l]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

Pour $t > 0$. ■

1.4 Méthode de conservation d'énergie

Nous allons montrer d'une autre façon l'unicité de la solution classique du problème (1.4) et sa stabilité (devenu, cependant, par rapport à une norme plus générale). La technique de la preuve est appelée "la méthode de conservation d'énergie".

Prenons à nouveau deux solutions $u_1\ (x,t)$, $u_2\ (x,t)$ du problème (1.4) et leur différence $w(x,t)$. La fonction w satisfait à l'équation de diffusion homogène avec des homogènes

conditions aux limites $w(0,t) = w(l,t) = 0$. Si l'on multiplie l'équation de diffusion par la fonction w lui-même, nous obtenons:

$$0 = (w_t - w_{xx})w = (\frac{1}{2}w^2)_t + (-kw_x w)_x + kw_x^2.$$

L'intégration sur l'intervalle $0 < x < l$, donne:

$$0 = \int_0^l (\frac{1}{2}w^2(x,t))_t dx - [kw_x(x,t)w(x,t)]_{x=0}^{x=l} + k\int_0^l w_x^2(x,t)dx.$$

Le second terme du côté droit disparaît en raison des conditions aux limites nulles.

Modifiant l'ordre de différenciation du temps et de l'intégration, nous obtenons:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_0^l (\frac{1}{2}w^2(x,t))_t dx = -k\int_0^l w_x^2(x,t)dx \leq 0$$

Mais cela signifie que l'intégrale en fonction du paramètre $t, \int_0^l w^2(x,t)dx$ est décroissant en fonction du temps, et ainsi

$$\int_0^l w^2(x,t)dx \leq \int_0^l w^2(x,0)dx \tag{1.5}$$

Pour $t \geq 0$. Dans le cas où les deux solutions $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ correspondent à la même condition initiale, on obtient

$u(x,0) = 0$, d'où $\int_0^l w^2(x,t)dx = 0$ pour tout $t > 0$.Cela signifie que $w \equiv 0$ et donc $u_1 \equiv u_2$ pour tout $t \geq 0$. D'autres termes, nous obtenons à nouveau l'unicité de la solution du problème aux limites initial (1.4).

Si les solutions $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ correspondent à deux différentes conditions initiales $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, respectivement, alors

$w\ (x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ et la relation (1.5) devient:

$$\int_0^l (u_1(x,t) - u_2(x,t))^2 dx \leq \int_0^l (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))^2 dx$$

Ce qui exprime la stabilité de la solution par rapport à la condition initiale pour la norme de L^2.

Voir [05, pg, 148].

Chapitre 2

L'équation de diffusion d'ordre $n = 3$ (Equation d'Airy)

Ce chapitre est consacré aux définitions générales et aux propriétés des fonctions d'Airy, nous intéressons aussi à la résolution du problème du Cauchy pour cette équation en utilisant la transformée de Fourier.

Pour ce faire nous commençons par donner la définition de la fonction dite "d'Airy".

2.1 La fonction d'Airy

La fonction d'Airy est une des fonctions spéciales en mathématiques, c'est-à-dire une des fonctions remarquables apparaissant fréquemment dans les calculs.

Elle porte le nom de l'astronome britannique **George Biddell Airy**[(4)], qui l'introduisait pour ses calculs d'optiques, notamment lors de l'étude de l'arc-en-ciel.

La fonction d'Airy notée Ai est définie par l'intégrale:

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(\xi x + \frac{1}{3}\xi^3)d\xi, x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

La fonction d'Airy de seconde espèce, notée Bi est donnée par:

[(4)] Sir George Biddell Airy (27 juillet 1801 – 2 janvier 1892) était un mathématicien, astronome, géodésien et physicienbritannique. Il a notamment développé une théorie des arcs-en-ciel. Les fonctions d'Airy, reliées aux fonctions de Bessel, sont des fonctions mathématiques dites « spéciales ».

$$Bi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{(\xi x - \frac{1}{3}\xi^3)} + \sin(\xi x + \frac{1}{3}\xi^3)d\xi$$

Sont des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux:

$$y" - xy = 0$$

En effet : **Utilisant la méthode de Laplace**[5]

Formallement, v doit satisfaire: $z^2 v + v' = 0$, soit $v(z) = e^{\frac{-z^3}{3}}$. Le chemin Γ doit être choisis infini, et tel que z^3 tende vers

$+\infty$ assez vite (par rapport à $|z|$) dans les directions à l'infini de Γ.

Classiquement trois chemins s'offrent:

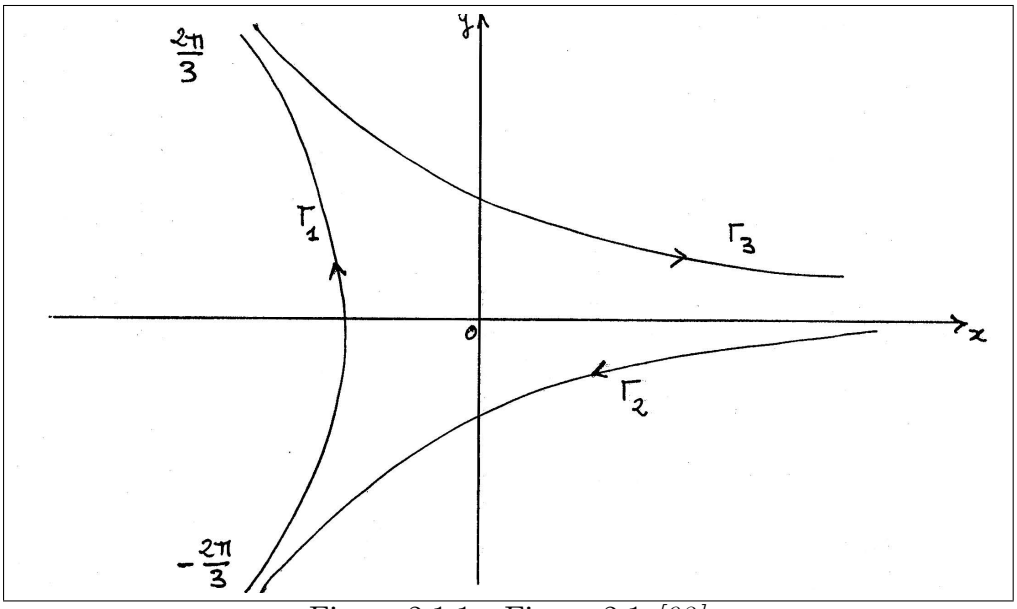

Figure 2.1.1 : Figure 2.1 *[02]*

[5] En mathématiques, la méthode de Laplace, due à Pierre-Simon de Laplace, est une méthode pour l'évaluation numérique d'intégrales de la forme : $\int_a^b e^{Mf(x)}dx$, où est une fonction deux fois dérivable, M est un grand nombre réel et les bornes a et b peuvent éventuellement être infinies.

À l'infini sur ces chemins, $|z|$ tend vers l'infini et $\arg z^3$ est voisin de 0, ce qui assure les conditions de la méthode. On obtient ainsi trois solutions:

$$u_i(x) = \int_{\Gamma_i} e^{xz-\frac{z^3}{3}} dz \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Grâce au théorème de Cauchy et à la décroissance rapide de $e^{xz-\frac{z^3}{3}}$ dans les directions à l'infini sur les Γ_i, on obtient facilement

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

Si les chemins Γ_i se déduisent les uns des autres par les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$, on a de plus

$$u_1(x) = ju_3(jx) = j^2u_2(j^2x), \text{ où } j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

En fin on note

$$A_i(x) = \frac{1}{2i\pi}u_1(x)$$

Et

$$B_i(x) = ij^2Ai(x) - ijAi$$

Voir [06, pg, 11-12].

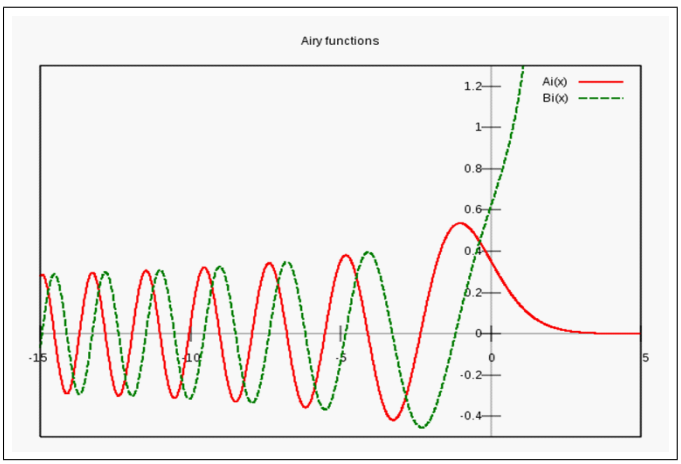

Figure 2.2 (les fonction d'Airy)[12]

2.2 Quelques propriétés de la fonction d'Airy

2.2.1 Propriétés élémentaires de la fonction d'Airy

Des valeurs particulières de la fonction d'Airy

Les valeurs à l'origine de la fonction d'Airy sont données par:

- $A_i(0) = \frac{B_i(0)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})} = 0.355028053887817239$
- $A_i'(0) = \frac{B_i(0)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{1}{3})} = 0.258819403792806798$

  Donc

$$A_i(0)A_i'(0) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{3}}$$

  Plus généralement la dérivée d'ordre n est donnée par:

$$A_i^{(n)}(0) = (-1)^n c_n \sin(\pi(n+1)/3)$$

  Et

$$B_i^{(n)}(0) = c_n[1 + \sin(\pi(4n+1)/6)]$$

  Avec

$$c_n = \frac{1}{\pi}3^{(n-2)/3}\Gamma(\frac{n+1}{3})$$

  Voir [02, pg, 8]

Les relation entre les fonctions d'Airy

- $A_i(xe^{\pm i2\pi/3}) = \frac{e^{\pm i\pi/3}}{2}[A_i(x) \pm B_i(x)]$.
- $A_i'(xe^{\pm i2\pi/3}) = \frac{e^{\pm i\pi/3}}{2}[A_i'(x) \pm B_i'(x)]$.
- $B_i(x) = e^{i\pi/6}A_i(xe^{i2\pi/3}) + e^{-i\pi/6}A_i(xe^{-i2\pi/3})$.
- $B_i'(x) = e^{i5\pi/6}A_i'(xe^{i2\pi/3}) + e^{-i5\pi/6}A_i'(xe^{-i2\pi/3})$

Voir[02, pg, 9].

2.2.2 Représentation de l'intégrale

La définition de la fonction d'Airy est donnée par l'intérgrale (2.1), cette fonction peut être définie aussi par les formules suivantes:

- $Ai(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\xi x - \frac{1}{3}\xi^3} d\xi$.
- $Ai(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi x + \frac{1}{3}\xi^3)} d\xi$.
- $Ai(x) = \frac{x^{1/2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^{3/2}(x^3/3+\xi)} d\xi$, $x > 0$.
- $Ai(x) = \frac{e^{-u}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\xi^2 + i\xi^3/3} d\xi$, $x > 0, u = \frac{2}{3}x^{3/2}$.
- $Ai(x) = \frac{e^{-u}}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-x\xi^2}\cos(\frac{\xi^3}{3}) d\xi$, $x > 0, u = \frac{2}{3}x^{3/2}$.

Plus généralement, on a:

$$Ai(ax) = \frac{e^{-\xi}}{2a\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\frac{\xi^3}{3a^3} + x^4)] d\xi$$

Nous donnons la formule la plus utile suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\frac{t^3}{3} + at^2 + bt)] dt = 2\pi e^{ia(2a^2/3-b)} Ai(b - a^2)$$

On a aussi les expressions suivantes:

$$Ai(x) = \frac{1}{i\pi}\int_{0}^{i\infty} \cosh[(\frac{\xi^3}{3} - x\xi)] d\xi$$

Et pour $x > 0$

$$Ai(-x) = \frac{x^{1/2}}{\pi}\int_{-1}^{+\infty} \cos[x^{2/3}(\frac{\xi^3}{3} + \xi^2 - \frac{2}{3})] d\xi$$

Aussi l'expression:

$$Ai(x) = \frac{e^{-u}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^{1/2}\xi} \cos(\frac{x^{3/2}}{3}) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}, x > 0, u = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

Et

$$\begin{aligned} Ai(x) &= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^3t^3}{3} - \frac{1}{t^3}} \frac{dt}{t^3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^3}{3} - \frac{x^3}{t^3}} dt \end{aligned}$$

Voir [02, pg, 9-10]

2.2.3 La convergence

La fonction d'Airy forme une intégrale semi-convergente cela peut être prouvé par une intégration par parties comme suit:

$$Ai(x) = \int_a^L \cos(\xi x + \frac{1}{3}\xi^3) d\xi$$

On a:

$$(\frac{\sin(\xi x + \xi^3/3)}{x + \xi^2})' = \frac{(x + \xi^2)\cos(\xi x + \xi^3/3) - 2\xi \sin(\xi x + \xi^3/3)}{(x + \xi^2)^2}$$

D'où

$$(\frac{\sin(\xi x + \xi^3/3)}{x + \xi^2})' + \frac{2\xi \sin(\xi x + \xi^3/3)}{(x + \xi^2)^2} = \cos(\xi x + \xi^3/3)$$

Donc

$$\int_a^L \cos(\xi x + \frac{1}{3}\xi^3) d\xi = 2\int_a^L \frac{\xi \sin(\xi x + \xi^3/3)}{(x + \xi^2)^2} d\xi + [\frac{\sin(\xi x + \xi^3/3)}{x + \xi^2}]_a^L$$

Voir [02, pg, 2]

Lemme 2.2.1 *[13] Dans le domaine $x > 1/2$, la fonction d'Airy est positive, concave, et décroît exponentiellement vers 0 .*

$$\begin{aligned} Ai &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{\frac{-1}{4}} e^{\frac{-2}{3}x^{\frac{3}{2}}},\ x \to +\infty \\ Ai &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} |x|^{\frac{-1}{4}} \sin(\frac{-2}{3}|x|^{\frac{2}{3}} + \frac{\pi}{4}),\ x \to -\infty \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 *On voit que l'équation de la chaleur*

$$\frac{du}{dt} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Peut avoir une solution écrite en fonction de Ai comme suit:

$$u(x,t) = e^{\frac{2t^3}{3} - xt} Ai(t^2 - x)$$

Ce résultat est obtenu à partir de la solution générale de l'équation de la chaleur (1.2), en choisissant la condition initiale $\varphi(x) = Ai(x)$, c'est ce qu'on appelle la transformée d'Airy.

2.3 Problème de Cauchy pour l'équation d'Airy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) &= \varphi(x),\ \varphi \in S(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.2}$$

Avant d'aborder des théorèmes plus ou moins abstraits concernant le problème de Cauchy, nous allons tâcher d'obtenir des formules de résolution « explicites » grâce notamment à la transformation de Fourier.

2.3.1 Equation d'Airy

Si u est une solution d'EDP:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Dans notre étude on s'intéresse au type suivant: (pour $a = 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Donc notre **problème** est:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} & = 0 \\ u(x,0) & = \varphi(x) \end{cases} \tag{1.3}$$

2.4 La solution analytique de l'équation

La fonction $\hat{u} = \mathcal{F}u$ (où la transformé de **Fourier**[6] de u) est la solution de l'EDO:

$$\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t}) + \mathcal{F}(k\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}) = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-ix\xi} dx + k\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} e^{-ix\xi} dx = 0$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - ki\xi^3 \hat{u} = 0$$

Calculons formallement:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\hat{u}} = ki\xi^3 \partial t$$

$$\ln \hat{u}(\xi, t) = ik\xi^3 t$$

D'où : $\hat{u}(\xi, t) = ce^{ik\xi^3 t}$

On a d'une part:

$$\hat{u}(\xi, 0) = c$$

D'autre part:

[6] Jean Baptiste Joseph Fourier est un mathématicien et physicien français né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris. Il est connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur.

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,0) &= \int_{\mathbb{R}} u(x,0)e^{-ix\xi}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ix\xi}dx \\ &= \hat{\varphi}(\xi)\end{aligned}$$

Finalement:

$$\boxed{\hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)e^{ik\xi^3 t}}$$

Maintenant on cherche la solution de l'EDP ie $u(x,t)$

On a:

$\hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)e^{ik\xi^3 t}$ ce qui implique que $u(\xi,t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}(\xi)e^{ik\xi^3 t})$

$$\boxed{u(x,t) = \hat{\varphi}(\xi) * \mathcal{F}^{-1}(e^{ik\xi^3 t})}$$

Il y'en fait pas une formule explicite pour calculer la transformé de Fourier inverse de $\xi \longmapsto e^{ik\xi^3 t}$

2.4.1 La solution pour $kt = \frac{1}{3}$

Dans ce cas la transformé de Fourier est donnée par la fonction d'Airy (2.1) *[13, pg, 12]*:

$$\begin{aligned}Ai(x) &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(\xi x + \tfrac{1}{3}\xi^3)d\xi, x \in \mathbb{R} \\ &= \tfrac{1}{2\pi}(\int_0^{+\infty} e^{i(\xi x+\frac{1}{3}\xi^3)} - \int_0^{+\infty} e^{-i(\xi x+\frac{1}{3}\xi^3)})d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-i(\xi x+\frac{1}{3}\xi^3)})d\xi - \int_{-\infty}^{0} e^{-i(-\xi x+\frac{1}{3}(-\xi)^3)})d(-\xi) \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi x+\frac{1}{3}\xi^3)}d\xi\end{aligned}$$

Effectuons un petit changement de variable $\xi = 2\pi\lambda$:

$$Ai(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi x\lambda}.e^{i(2\pi\lambda)^3/3}d\lambda$$

D'ou:

$$Ai(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{i\xi^3/3})$$

Alors pour $kt = 1/3$ la solution de l'équation s'écrit sous la forme:

$$\boxed{u(x,t) = \hat{\varphi}(\xi) * Ai(x)}$$

2.4.2 La solution de l'équation dans le cas général

Soit la fonction:

$$\frac{1}{(3kt)^{1/3}} Ai(\frac{x}{(3kt)^{1/3}}) = \frac{1}{2\pi(3kt)^{1/3}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi x/(3kt)^{1/3} + \frac{1}{3}\xi^3)} d\xi$$

Utilisons le changement de variable suivant:

$$\lambda = \frac{\xi}{2\pi(3tk)^{1/3}}$$

On obtient:

$$Ai(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix2\pi\lambda} . e^{ikt(2\pi\lambda)^3} d\lambda$$

D'ou:

$$\frac{1}{(3kt)^{1/3}} Ai(\frac{x}{(3kt)^{1/3}}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{i(2\pi\lambda)^3 kt})$$

Posant $y = 2\pi\lambda$:

$$\frac{1}{(3kt)^{1/3}} Ai(\frac{x}{(3kt)^{1/3}}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{iy^3 kt})$$

Alors **la forme général de la solution de l'équation d'Airy** s'écrit sous la forme:

$$\boxed{u(x,t) = (\varphi * k_t)(x) \text{ avec } k_t = \frac{1}{(3kt)^{1/3}} Ai(\frac{x}{(3kt)^{1/3}})}$$

Lemme 2.4.1 *[01, pg, 4] On les propriétés suivantes:*

$\|u(.,t)\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow +\infty$ *car:*

$\|u(.,t)\|_{L^\infty} \leq \|k_t\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^1} = \frac{1}{(3kt)^{1/3}} \|Ai\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^1}$

Preuve.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (\varphi * k_t)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-y).k_t(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-y).\frac{1}{(3kt)^{1/3}} Ai(\frac{y}{(3kt)^{1/3}})dy \\ &= \frac{1}{(3kt)^{1/3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-y) Ai(\frac{y}{(3kt)^{1/3}})dy \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |u(x,t)| \leq \frac{1}{(3kt)^{1/3}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x-y)| \left| Ai(\frac{y}{(3kt)^{1/3}}) \right| dy$$

Pour tout $y, t \in \mathbb{R}$ on a:

$$\left| Ai(\frac{y}{(3kt)^{1/3}}) \right| \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} |Ai(s)| = \|Ai\|_{L^\infty}$$

Alors pour chaque $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{1}{(3kt)^{1/3}} \|Ai\|_{L^\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x-y)|\, dy \\ &\leq \frac{1}{(3kt)^{1/3}} \|Ai\|_{L^\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s)|\, ds \\ &\leq \frac{1}{(3kt)^{1/3}} \|\varphi(s)\|_{L^1} \|Ai\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Et on a:

$$|u(x,t)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)| = \|u(.,t)\|_{L^\infty}$$

D'où

$$\|u(.,t)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(3kt)^{1/3}} \|\varphi(s)\|_{L^1} \|Ai\|_{L^\infty}$$

Comme $\frac{1}{(3kt)^{1/3}} \|\varphi(s)\|_{L^1} \|Ai\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$ pour $t \to +\infty$, alors
$\|u(.,t)\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$ quand $t \to +\infty$ ■

Chapitre 3

L'équation de diffusion d'ordre n

Dans ce chapitre nous essayons de généraliser les résultats obtenus dans les derniers chapitres, mais nous nous intéressons ici à la méthode d'autosimilarité pour l'équation de diffusion d'ordre n.

3.1 Un résultat général d'éxistence et d'unicité

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=0}^{n} b_j \frac{\partial^j u}{\partial x^j} &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

C'est une EDP linéaire, ordre 1 en t, ordre n en x, coefficients constants.

On aura après des calcules formelle (Utilisons la transformée de Fourier)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tfrac{\partial u}{\partial t}) + \mathcal{F}(\textstyle\sum_{j=0}^{n} b_j \frac{\partial^j u}{\partial x^j}) &= 0 \\ \tfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \mathcal{F}(b_0 u + b_1 \tfrac{\partial u}{\partial x} + b_2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_3 \tfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + ... + b_n \tfrac{\partial^n u}{\partial x^n}) &= 0 \\ \tfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \mathcal{F}(b_0 u) + \mathcal{F}(b_1 \tfrac{\partial u}{\partial x}) + \mathcal{F}(b_2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \mathcal{F}(b_3 \tfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}) + \mathcal{F}(b_n \tfrac{\partial^n u}{\partial x^n}) &= 0 \\ \tfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} + b_0 \hat{u} - i2\pi\xi b_1 \hat{u} - (2\pi\xi)^2 b_2 \hat{u} + i(2\pi\xi)^3 b_3 \hat{u} + ... + (-i2\pi\xi)^n b_n \hat{u} &= 0 \end{aligned}$$

Et on écrit:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + [\Omega(2\pi\xi) + i\Phi(2\pi\xi)]\hat{u} = 0 \tag{3.2}$$

Avec:

$$\Omega(k) = \sum_{p=0}^{p_0} k^{2p} b_{2p} (-1)^p, \Phi(k) = \sum_{p=0}^{p_1} k^{2p+1} b_{2p+1} (-1)^p$$

D'après (3.2), nous obtenons (faisons le même calcul du deuxième chapitre):

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(b(\xi,t).\hat{\varphi}) = S(t).\varphi$$

Avec $b(\xi,t) = e^{-(\Omega(2\pi\xi)+i\Phi(2\pi\xi))t}$

D'où la solution formelle du problème est comme suit:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-(\Omega(2\pi\xi)+i\Phi(2\pi\xi))t}).\hat{\varphi}) = S(t).\varphi$$

Voir [01, pg, 5-6].

Théorème 3.1.1 *[01, pg, 6] (problème d'évolution bien posé)*

Si $\Omega = 0$ *où si* $\Phi(k) \longrightarrow +\infty$ *quand* $k \longrightarrow \infty$, *alors:*

1. *Pour tout* $t \geq 0$, $S(t) : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ *est une application linéaire continue, avec* $\|S(t)\| = \|b(.,t)\|_\infty \leq Me^{\beta t}$ $(M \geq 1, \beta \in \mathbb{R})$.

2. $S(t).\varphi \longrightarrow \varphi$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$ *quand* $t \longrightarrow 0^+$.

3. *Pour toute* $\varphi \in H^m(\mathbb{R})$, *le problème (3.1) admet une solution unique,*

$[u(t)](x) = u(x,t)$, $u \in C^1(\mathbb{R}^+, L^2) \cap C^0(\mathbb{R}^+, H^m)$, *donné par:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= S(t).\varphi(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-(\Omega(2\pi\xi)+i\Phi(2\pi\xi))t}).\hat{\varphi}) \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(k/2\pi).e^{-\Omega(k)+i(kx-\Phi(k)t)}dk \end{aligned}$$

3.2 Solutions auto-similaires pour l'équation de diffusion d'ordre n

Soit le problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + b_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x) \end{cases} \tag{3.3}$$

3.3 La méthode d'auto-similarité

3.3.1 L'auto similarité classique

La similarité dans les EDPs

Soit $P(x,t,u,u_x,...) = 0$ une EDP alors P admet une solution autosimilaire si et seulement si elle est invariante (d'échelle) sous l'action de dilatation c-à-d si l'en remplace u par $a^\lambda u$, x par $a^s x$ et t par $a^\gamma t$ on aura aussi $P(a^s x, a^\gamma t, a^\lambda u, ...) = 0$.

Si $u(x,t)$ est une solution de $P \Longleftrightarrow a^\lambda u(a^s x, a^\gamma t)$ est aussi une solution de P ce qu'on appelle ***la solution autosimilaire****. Voir [15, pg, 6]*

La règle de dérivation

Soit l'équation:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial t} + b_n \tfrac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \tfrac{\partial u}{\partial t} = -b_n \tfrac{\partial^n u}{\partial x^n} \\ \tfrac{\partial (a^\lambda u)}{\partial (a^\gamma t)} = -b_n \tfrac{\partial^n (a^\lambda u)}{\partial (a^s x)^n} \quad &\Longleftrightarrow \tfrac{a^\lambda}{a^\gamma} \tfrac{\partial u}{\partial t} = -b_n \tfrac{a^\lambda}{a^{ns}} \tfrac{\partial^n u}{\partial x^n} \\ &\Longleftrightarrow a^{\lambda-\gamma} \tfrac{\partial u}{\partial t} = -b_n a^{\lambda - ns} \tfrac{\partial^n u}{\partial x^n} \end{aligned}$$

La condition de similarité (La condition d'invariance d'échelle)

Soit l'équation:

$$a^{\lambda-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} = -b_n a^{\lambda - ns} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

Cette équation est vérifiée si et seulement si:

$$a^{\lambda-\gamma} = a^{\lambda-ns}$$

D'où

$$\lambda - \gamma = \lambda - ns \implies \gamma = ns$$

Ce qu'on appelle **la condition de similarité.**

Description de la méthode

Posons:

$$\begin{aligned} a^{\gamma}t = 1 \quad &\Longrightarrow a^{\gamma} = t^{-1} \\ &\Longrightarrow a = t^{\frac{-1}{\gamma}} \end{aligned}$$

Donc,

$$u(x,t) \longrightarrow t^{\frac{-\lambda}{\gamma}} u(t^{\frac{-s}{\gamma}}x, 1)$$

Et on a:

$$a^{\lambda}u(a^{s}x, 1) = a^{\lambda}F(a^{s}x), \text{ avec } \varphi \text{ s'appele } \textbf{profile}$$

Finalement la solution est écrite sous la forme:

$$u(x,t) \longrightarrow t^{\frac{-\lambda}{\gamma}} F(\frac{x}{t^{\frac{s}{\gamma}}}) = t^{\frac{-\lambda}{\gamma}} F(\eta), \text{ avec } \eta = \frac{x}{t^{\frac{s}{\gamma}}}$$

Ce qu'on appelle **solution autosimilaire classique** $t^{\frac{-\lambda}{\gamma}} F(\frac{x}{t^{\frac{s}{\gamma}}})$

La résolution de l'équation de diffusion par la méthode d'auto-similarité classique

$\frac{\partial u}{\partial t} = -b_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ avec $u \longrightarrow t^{-\omega} F(\frac{x}{t^{\beta}})$ $(\omega = \frac{-\lambda}{\gamma}, \beta = \frac{s}{\gamma})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \omega t^{\omega-1}F(\tfrac{x}{t^\beta}) + t^\omega F'(\tfrac{x}{t^\beta}).\tfrac{-\beta x t^{\beta-1}}{t^{2\beta}} \\ &= \omega t^{\omega-1}F(\eta) - t^{\omega-1}\beta\eta F'(\eta) \\ &= t^{\omega-1}[\omega F(\eta) - \beta\eta F'(\eta)]\end{aligned}$$

Et

$$-b_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = -b_n t^{\omega-n\beta}F^{(n)}(\eta)$$

D'où l'équation sera comme suit:

$$\begin{aligned}t^{\omega-1}[\omega F(\eta) - \beta\eta F'(\eta)] &= -b_n t^{\omega-n\beta}\varphi^{(n)}(\eta) \\ \omega F(\eta) - \beta\eta F'(\eta) &= -b_n t^{1-n\beta}F^{(n)}(\eta)\end{aligned}$$

On suppose formellement que les variables sont indépendantes et on dérive par rapport à t :

$$-b_n(1-n\beta)t^{-n\beta}F^{(n)}(\eta) = 0$$

D'où

$(1-n\beta) = 0 \implies \beta = \frac{1}{n}$ (Ceci peut se conclure à partir de la condition de similarité).

$$\omega F(\eta) - \frac{1}{n}\eta F'(\eta) = -b_n F^{(n)}(\eta)$$

Donnons $\omega = -\frac{1}{n}$ alors l'équation devient:

$$-\frac{1}{n}[F(\eta) + \eta F'(\eta)] = -b_n F^{(n)}(\eta) \tag{3.4}$$

On remarque que $[\eta F(\eta)]' = [F(\eta) + \eta F'(\eta)]$:

$$-\frac{1}{n}[\eta F(\eta)]' = -b_n F^{(n)}(\eta)$$

On obtient finalement:

$$-\frac{1}{n}\eta F(\eta) = -b_n F^{(n-1)}(\eta)$$

D'où

$$\frac{\eta}{nb_n}F(\eta) = F^{(n-1)}(\eta)$$

Maintenant on passe à résoudre l'équation différentielle ordinaire qui est au-dessus:

On voit que nous avons le cas de l'équation différentielle suivante:

$$y^{(n)}(x) = ax^{\beta}y(x)$$

Théorème 3.3.1 *[10] Pour l'équation:*

$$y^{(n)}(x) = ax^{\beta}y(x)$$

Soit $n \geq 2$, $\beta \geq -2$, *et* $(n+\beta)(s+1) \neq 1, 2, ..., n-1$ *pour* $s = 0, 1, 2, ..., n$. *Alors l'équation admet n solutions qui sont représentées par:*

$$y_j(x) = x^{j-1}E_{n,1+\beta/n,(\beta+j-1)/n}(ax^{\beta+n}), j = 1, 2, ..., n \tag{3.5}$$

Avec $E_{n,m,l}$ *est "Mittag-Letter*[7] *Special" fonction définie par:*

$$E_{n,m,l} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$$

$$b_k = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\Gamma(n(ms+l)+1)}{\Gamma(n(ms+l+1)+1)} = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{1}{[n(ms+l)+1]...[n(ms+l)+n]}$$

Où $\Gamma(\xi)$ *est la fonction de gamma,* l *est un nombre choisis arbitrairement, et* $m > 0$.

Si $\beta > 0$, *les solutions (3.4) sont linéairement indépendantes.*

D'après ce théorème là, on a:

$n - 1 \geq 2 \Rightarrow n \geq 3$, $\beta = 1$, $a = \frac{1}{nb_n}$ alors le profile F prend les valeurs qui se suivent:

$$F_j(\eta) = \eta^{j-1}E_{n-1,2/(n-1),(j)/(n-1)}(\frac{\eta^n}{nb_n}), j = 1, 2, ..., n-1$$

[7] Magnus Gustaf (Gösta) Mittag-Leffler (16 Mars 1846 au 7 Juillet 1927) est un mathématicien suédois. Ses contributions mathématiques sont reliées principalement avec la théorie des fonctions.

D'où

$$u_j(x,t) = t^{\frac{-1}{n}}(\frac{x}{t^{\frac{1}{n}}})^{j-1}E_{n-1,2/(n-1),(j)/(n-1)}(\frac{1}{nb_n}(\frac{x}{t^{\frac{1}{n}}})^n), j = 1,2,...,n-1$$

Alors on obtient finalement:

$$\boxed{u_j(x,t) = t^{\frac{-1}{n}}(\frac{x}{t^{\frac{1}{n}}})^{j-1}E_{n-1,2/(n-1),(j)/(n-1)}(\frac{x^n}{nb_n t}), j = 1,2,...,n-1}$$

3.3.2 L'auto-similarité générale

Maintenant on cherche une solution de la forme:

$$u(x,t) = c(t)F(\frac{x}{a(t)}),\ \text{ce qu'on appelle } \textbf{solution autosimilaire générale}$$

Théorème 3.3.2 *[09, pg, 2]* (séparation de variable)

Soit la forme bilinéaire suivante:

$f_1(x).g_1(t) + f_2(x).g_2(t) + ...f_m(x).g_m(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x).g_i(t) = 0$, *alors il existe des constantes* $A_i(i = 2..m)$ *tel que:*

$$\begin{cases} f_1(x) &= \sum_{i=2}^{m} A_i f_i(x) \\ g_k(t) &= -A_k g_1(t),\ k = 2..m \end{cases}$$

Preuve.

$$f_1(x).g_1(t) + f_2(x).g_2(t) + ... + f_m.g_m = 0 \qquad (I)$$

Supposons que la relation est vraie $m = 2$.

$$f_1(x).g_1(t) + f_2(x).g_2(t) = 0$$

Démontrons pour m :

Divisons (I) par $f_m.g_m$:

$$\frac{(I)}{f_m.g_m} \iff \frac{f_1.g_1}{f_m.g_m} + \frac{f_2.g_2}{f_m.g_m} + ... + \frac{f_{m-1}.g_{m-1}}{f_m.g_m} + 1 = 0$$

On dérive par rapport à x :

$$(\frac{f_1}{f_m})'.\frac{g_1}{g_m} + (\frac{f_2}{f_m})' + ... + (\frac{f_{m-1}}{f_m})'.\frac{g_{m-1}}{g_m} = 0, \text{ c'est une forme bilinéaire}$$

Alors:

$$\begin{cases} (\frac{f_1}{f_m})' & = \sum_{i=2}^{m-1} A_i (\frac{f_1}{f_m})' \\ \frac{g_k}{g_m} & = -A_k \frac{g_1}{g_m}, \ (k = 2..(m-1)) \end{cases}$$

Si on intègre toujours par rapport à x, on obtient:

$$\frac{f_1}{f_m} = \sum_{i=2}^{m-1} A_i \frac{f_1}{f_m} + A_m.$$

Multiplions par f_m :

$$\begin{cases} f_1(x) & = \sum_{i=2}^{m} A_i f_i(x) \\ g_k(t) & = -A_k g_1(t), \ k = 2..(m-1) \end{cases}$$

Donc le problème reste sur [$g_k(t) = -A_k g_1(t)$, $k = 2..(m-1)$],

On a:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^{m} A_i f_i(x) && = 0 \\ &\implies f_1(x).g_1(t) + f_2(x).g_2(t) + ... + f_m(x).g_m(t) && = 0 \\ &\implies (\textstyle\sum_{i=2}^{m} A_i f_i(x))g_1 + f_2(x).g_2(t) + ... + f_m(x).g_m(t) && = 0 \\ &\implies (A_1 f_1(x).g_1(t) + A_2 f_2(x).g_1(t) + ... + A_m f_m(x).g_1(t)) \\ &-A_2 f_2(x).g_1(t) - A_3 f_3(x).g_1(t) - ... - A_{m-1} f_{m-1}(x).g_1(t) + f_m(x).g_m(t) && = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies A_m f_m(x).g_1(t) &= -f_m(x).g_m(t) \\ \implies A_m f_m(x).g_1(t) &= -f_m(x).g_m(t). \end{aligned}$$

D'ou le théorème est démontré. ■

Théorème 3.3.3 $\frac{\partial u}{\partial t} = A_x u$ *admet une solution autosimilaire généralisé de la forme:*

$$u(x,t) = c(t)F(\frac{x}{a(t)}) \qquad \text{(S)}$$

Si elle est une forme bilinéaire de la forme (I).

Preuve. Nous remplaçons la solution (S) dans l'EDP, on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c}(t)F(\frac{x}{a(t)}) - \frac{c(t)\dot{a}(t)x}{a^2(t)}F'(\frac{x}{a(t)})$$

Posons $\eta = \frac{x}{a(t)}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c}(t)F(\eta) - \eta\frac{c(t)\dot{a}(t)}{a(t)}F'(\eta)$$

C'est une **forme bilinéaire** car: $\sum_{i=1}^{2} f_i(x).g_i(t) = 0$.

Alors $\frac{\partial u}{\partial t} = A_x u$ est une forme bilinéaire si $A_x u$ est aussi une forme bilinéaire, donc admet une solution de la forme (S). ■

La résolution de l'équation de diffusion par l'auto-similarité généralisée

On a vu au-dessus que $\frac{\partial u}{\partial t}$ est une forme bilinéaire, reste le problème sur l'opérateur $\frac{\partial^n}{\partial x^n}u$ est il une forme bilinéaire ?

$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{c(t)}{a^n(t)}F^{(n)}(\eta)$, il est claire que c'est aussi une forme bilinéaire, d'où notre équation admet une solution de la forme (S).

On a alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0 \iff \dot{c}(t)F(\eta) - \frac{\dot{a}(t)c(t)}{a(t)}\eta F'(\eta) + b_n\frac{c(t)}{a^n(t)}F^{(n)}(\eta) = 0$$

Divisons par $c(t)$:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}F(\eta) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\eta F'(\eta) + \frac{b_n}{a^n(t)}F^{(n)}(\eta) = 0$$

Appliquons le théorème de séparation de variable:

$$-\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}F(\eta) = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\eta F'(\eta) + \frac{b_n}{a^n(t)}F^{(n)}(\eta)$$

D'où:

$$\begin{cases} f_1(\eta) &= -F(\eta) \\ f_2(\eta) &= \eta F'(\eta) \\ f_3(\eta) &= -b_n F^{(n)}(\eta) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} g_1(t) &= \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \\ g_2(t) &= -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\ g_3(t) &= -\frac{1}{a^n(t)} \end{cases}$$

D'après le théorème:

$$\begin{cases} f_1(x) & = \sum_{i=2}^{3} A_i f_i(x) \\ g_k & = -A_k g_1 \quad k = 1, 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -F(\eta) = A_2 \eta F'(\eta) - A_3 b_n F^{(n)}(\eta) \\ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = -A_2 \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \\ \frac{1}{a^n(t)} = -A_3 \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \end{cases}$$

Nous allons maintenant calculer les constants $c(t)$ et $a(t)$:

$$\begin{cases} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = A_2 \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} .....(1) \\ \frac{1}{a^n(t)} = A_3 \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} .....(2) \end{cases}$$

D'après (1):

$$\ln(a(t)) = A_2 \ln(c(t)) \iff a(t) = c(t)^{A_2}$$

Substituons dans (2)

$\frac{1}{A_3} = c(t)^{nA_2 - 1}.\dot{c}(t) \iff \frac{t}{A_3} + r = \frac{1}{nA_2} c^{nA_2}$. (Après l'intégration par rapport à t pour le premier terme et par rapport à c pour le second , posons $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}$)

Alors:

$$c(t) = (\frac{nA_2 t}{A_3} + r)^{\frac{1}{nA_2}} \text{ alors } a(t) = (\frac{nA_2 t}{A_3} + r)^{\frac{1}{n}}$$

Remarque 3.3.1 *Si $A_2 = A_3 = 1$, on aura l'équation (3.4) obtenu par l'auto-similarité classique, d'où admettent des solutions de la forme (3.5).*

3.4 Application de l'auto-similarité classique pour $n = 2$ et $n = 3$

3.4.1 La solution autosimilaire pour l'équation de la chaleur

La condition de similarité

La condition de similarité pour l'équation de la chaleur est donnée par:

$$\gamma = 2s$$

L'équation de la méthode

L'équation de la méthode est donnée par:

$$\omega F(\eta) - \frac{1}{2}\eta F'(\eta) = kF''(\eta)$$

1. Pour $\omega = -\frac{1}{2}$ l'équation devient:

$$-\frac{1}{2}[F(\eta) + \eta F'(\eta)] = kF''(\eta)$$

D'où

$$-\frac{1}{2k}(\eta F(\eta))' = F''(\eta)$$

Alors la forme de l'équation sera:

$$-\frac{1}{2k}\eta = \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \iff -\frac{1}{4k}\eta^2 + c = \ln(F)$$

Finalement le profile F sera défini par l'expression:

$$F(\eta) = Ce^{-\frac{1}{4k}\eta^2 + c}$$

D'où la solution de l'équation de la chaleur suivant la méthode d'auto-similarité est comme suit:

$$\boxed{\boxed{u(x,t) = \frac{C}{\sqrt{t}} e^{\frac{-x^2}{4kt}+c}}}$$

Pour $C = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}}$ et $c = 0$ on obtient la solution fondamentale $\theta(x,t)$du chapitre 1.

3.4.2 La solution autosimilaire pour l'équation d'Airy

La condition de similarité

$$\gamma = 3s$$

L'équation de la méthode

L'équation de la méthode est donnée par:

$$\omega F(\eta) - \frac{1}{3}\eta F'(\eta) = -kF^{(3)}(\eta)$$

Trouvons la solution Pour $\omega = -\frac{1}{3}$ l'équation devient comme suit:

$$\frac{1}{3k}\eta F(\eta) = F''(\eta) \tag{3.6}$$

On va maintenant résoudre cette EDO:

Lemme 3.4.1 *[10] Soit l'équation:*

$$y''(x) - (ax+b)y = 0, \qquad a \neq 0 \tag{3.7}$$

La substitution $\xi = a^{-2/3}(ax+b)$, *nous obtient l'équation d'Airy (ordinaire):*

$$y''_{\xi\xi} - \xi y = 0$$

Alors la solution de (3.6) est écrite comme:

$$y = C_1 Ai(\xi) + C_2 Bi(\xi)$$

Appliquons le lemme à l'équation (3.5), $a = \frac{1}{3k}$, $b = 0$ d'où $\xi = \frac{1}{(3k)^{1/3}}\eta$, Alors le profile sera donné par:

$$F(\eta) = C_1 Ai(\frac{1}{(3k)^{1/3}}\eta) + C_2 Bi(\frac{1}{(3k)^{1/3}}\eta)$$

Alors la solution de l'équation d'Airy en utilisant l'auto-similarité est:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{t^{1/3}}[C_1 Ai(\frac{x}{(3kt)^{1/3}}) + C_2 Bi(\frac{x}{(3kt)^{1/3}})]}$$

Conclusion

Nous avons abordé dans ce mémoire les équations aux dérivées partielles qui décrivent le phénomène de diffusion représentées par l'équation de diffusion d'ordre n. Nous avons détaillé les résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution pour différents ordre, L'ordre 2 est présenté par l'équation de la chaleur que nous avons détaillée. L'ordre 3 est présenté par l'équation d'Airy qui est très intéressante dans la pratique, et nous avons calculé explicitement sa solution et étudié son comportement. Enfin l'équation d'ordre n a été étudié dans sa globalité en analysant mathématiquement la solution et finalement donner des solutions particulière de forme auto-similaire.

Bibliographie

[01] Guillaume James,*Airy_ EDP_ equivalentes*,(2011).

[02] Olivier Vallee-Manuel Soares, *Airy Functions and Applications in Physics*, world scientific publishing company, (2004).

[03] El Maati Ouhabaz, *Analasys of Heat Equations on Domains*, Princeton university press, (2005).

[04] Alexander.A.Samarskii-Victor.A.Galaktionov-Sergie.P.Kurdyumov-Alexander.P.Mikhailov . *Blow Up In Quasilinear Parabolic Equations*, Walter de Gruyter, (1995).

[05] Pavel Drabek-Gabriela Holubove, *Element of Partial Differential Equations*,Walter de Gruyter, (2007).

[06] Ian-N.Sneddon, *Element of Partial Differential Equations*, International series in in pure and applied mathematic.

[07] Georges KOEPFLER, *Équations aux dérivée partielles : Approfondissement (cours)*, Université Paris descarte, UFR de mathématique et informatique, (2009-2010).

[08] S.ALINHAC, *Equation Differentielles: Etude Asympotique; Applications aux Equations aux Dérivée Partielles*, Publication mathématique d'ORSAY ,(1979-1980).

[09] A.D.Polyanin-A.I.Zhurov, Eq World, (2004).

[10] Andrei D. Polyanin-Valentin F. Zaitsev, *Handbook of Exact Sqlutions for Ordinary Differential Equations*,CHAPMAN & HALL/CRC (2002).

[11] MARGUERITE GISCLON, *L'équation de la chaleur(cours)*, Ecole Normale Supérieure de Lyon.

[12] G. B. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*, A wiley-interscience publication,(1973).

[13] SYLVIE BENZONI, *Master 2.EDP dispersive(cours)*. Université Claude Bernard Lyon 1, (2009).

[14] P.Y.LAGRE .*Résolution de l'équation de la chaleur instationnaire (Cours).*(Mars 2010)

[15] G.U.BLIMAN-J.D.COLE, *Similarity Methods for Differential Equations*. Springer-Verlag Newyork Heidelberg Berlin, (1974).

[16] D.V.WIDDER, *The heat equation*, Academic press, (1975).