REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1985

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'SILA

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Thème

Sur les équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire.

Présentée par :

M^{lle} GHERABI Izdihar

Devant le jury composé de :

Mr. ARIOUA Yacine	M.C.A.,	Université de M'sila	**Président**.
Mr. SAADI Abderachid	M.C.A.,	Université d eM'sila	**Encadreur.**
Mr. MIHOUBI Farid	M.A.A.,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2019/2020.

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire Dr Saadi Abderachid pour ses multiples conseils et pour son aide, son soutien, et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche.

Je remercie également les membres du jury : Dr Yacina Arioua, et Mr Mihoubi Farid pour leur évaluation de ce mémoire.

Je remercie également les profs de maths chacun en leur nom.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon père et ma mère .

Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé et m'a aide de près ou de loin à la réalisation de cette mémoire.

Dédicace

A mon chère père et a ma chère mère

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer le degré d'amour et d'affection que j'éprouve pour vous.

Vous avez su m'inculquer le sens de la responsabilité et la confiance en soi, vos conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite.

Je vous dois ce que je suis aujourd'hui'hui, ce que je serai demain et je ferai toujours mon mieux pour rester votre fierté.

Que dieu tout le puissant vous accorde santé, bonheur et vous protège de tout ma.

Je présente également ce travail à mes frères et sœurs merci beaucoup et tout mon amour et mes amis.

Gherabi Izdihar

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Table des matières

Notation

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$L^1(I)$: ensemble des fonctions Lebesgue intégrable sur $I \subset \mathbb{R}$.

$\Gamma(.)$: la fonction Gamma.

$B(p,q)$:la fonction de Beta

$E_\alpha(.)$:la fonction de Mittag-Leffler

$I_{a^+}^\alpha f$: intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

$D_{a^+}^\alpha f$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville dordre $\alpha > 0$.

${}^cD_a^\alpha f$: dérivée fractionnaire au sens de Caputo dordre .

$W_n(.)$: Wronskien ordinaire.

$W_\alpha(.)$: $\alpha-$ Wronskien (fractionnaire).

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires (EDF) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médicine, l'électrochimie,la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel elle a encouragé de nombreux chercheurs à les étudier sont considérées comme une application ingénieuse du calcul fractionnaire.

Les concepts présentés dans ce mémoire ont été largement utilisés au cours des 30 dernières années le lien entre ces modèles statistiques, et certaines équations différentielles fractionnaires impliquant les opérateurs intégraux et dérivés fractionnaires (Riemann-Liouville- Caputo) n'a été formellement établie qu'au cours des 15 dernières années.

Nous pourrions nous demander quelles sont propriétés utiles de ces opérateurs de calculs fractionnaires qui aident à la modélisation et tant de prcessus anormaux ? du point de vue des chercheurs et du résultat expérimental connu la plupart des processus associés avec les systèmes complexes ont des dynamiques non locales impliquant une mémoire longue dans le temps et les opérateurs de dérivés intégraux et fractionnaires présentent certaines de ces caractéristiques suivantes : peut-etre est-ce l'une des raisons pour lequelles ces opérateurs de calcul fractionnaire perdre de certains propriétés utiles du dérivé ordinaire.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre nous présentons quelques définitions des fonctions spéciales utiles tout au long de notre mémoire telle que : la fonction gamma , la fonction béta, la fonction de Mittag-Leffter avec quelques propriétés intéressantes, on donne aussi les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires aus sens de Riemann-Liouville et Caputo et les liens entre ces dérivées avec quelques propriétés complémentaires.

Dans le deuxième chapitre nous étudions les équations différentielles linéairs de second ordre avec cas homogène et non homogène méthode de variation des constantes et cas ou l'on connait seulement de l'équation homogène associée, et ensuit nous présentons les équations scalaires d'ordre quelconque avec d'une équatin homogène et méthode de variation des constantes et quelques propriétés et théories.

Enfin, dans le dernier chapitre nous introduisons une nouvelle méthode directe pour résoudre le cas homogène et non homogène avec des coefficients constantes, utilisation de la fonction $\alpha-$exponentail et de certaines fonctions fractionnaires y compris quelques exemples illustratifs.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1. on appelle fonction Gamma la fonction définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, (z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0).$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Exemple 1.1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

Proposition 1.1. la fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :

Pour tout $z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0, n \in \mathbb{N}$

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)\sqrt{\pi}}{4^n n}$.
4. On peut également définir $\Gamma(z)$ à l'aide de la limite : $\Gamma(z) = \lim \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$
5. $\int_0^1 (1-t)^{\beta-1} t^{\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Démonstration. .

1. Représentant $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et integrons par parties :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\
&= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

■

1.2 Fonction Beta

Définition 1.2. La fonction de Bete est un type d'intégrale d'Euler définie par

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \ (p,q \in \mathbb{C}, Re(p) > 0, Re(q) > 0$$

pour tout $p, q \in \mathbb{C}$, avec $Re(p) > 0, Re(q) > 0$, on a

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

1.3 Intégrale de Riemann-Liouville

Définition 1.3. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par

$$\forall t \in [a,b]\,;\, (I_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx$$

de meme manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f , par

$$\forall t \in [a,b]\,;\, (I_{b-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} f(x)dx$$

Proposition 1.2. pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ on a

1. $(I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}$
2. $(I_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1})(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}$

Démonstration. .

1. $(I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta-1}dx$, posont $x - a = s(t-a)$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 ((t-a) - s(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-1}(t-a)ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1+\beta-1+1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) \ , \qquad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

2. Même idée, le chengement de variable est $b - x = s(b-t)$.

■

Théorème 1.1. si $f \in L^1([a,b])$,alors $I^\alpha_{a^+} f$ existe pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $I^\alpha_{a^+} f \in L^1([a,b])$

Proposition 1.3. soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$,et $f \in L^1([a,b])$, alors :

1. $(I^\alpha_{a^+} I^\beta_{a^+} f)(t) = (I^\beta_{a^+} I^\alpha_{a^+} f)(t) = (I^{\alpha+\beta}_{a^+} f)(t)$
2. $(I^\alpha_{b-} I^\beta_{b-} f)(t) = (I^\beta_{b-} I^\alpha_{b-} f)(t)) = (I^{\alpha+\beta}_{b-} f)(t)$

Démonstration. .

$$(I^\alpha_{a^+} I^\beta_{a^+} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\beta-1} f(s)ds)dx$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^x (t-x)^{\alpha-1}(x-s)^{\beta-1} f(s)dsdx$$

chengement de l'ordre d'intégration

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)\int_s^t (t-x)^{\alpha-1}(x-s)^{\beta-1}dxds \qquad \left| \begin{array}{c} u = \frac{x-s}{t-s},\ du = \frac{dx}{t-s} \\ x = (t-s)u + s,\ u : 0 \to 1 \end{array} \right|$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}duds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)duds \qquad \left|B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right|$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds$$
$$= (I^{\alpha+\beta}_{a^+} f)(t).$$

■

Lemme 1.1. soit $\alpha > 0$, $f \in L^1([0,b])$, $b > 0$.

Alors la transformée de laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

$$(I^\alpha_{0^+} f)(s) = s^{-\alpha}(f)(s)$$

Démonstration. on écrire l'ntégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $I^\alpha_{0^+} f$ comme convolution de deux fonctions $g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$ et $f(t)$, c-à-d :

$$(I^\alpha_{0^+} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx$$

$$= (\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}) * f(t)$$
$$= g(t) * f(t) \qquad \blacksquare$$

Alors $\quad (I_{0^+}^{\alpha} f)(s) = (g \times f)(s)$
$$= (g)(s) \times (f)(s)$$
$$= s^{-\alpha}(f)(s)$$

1.4 Dérivées de Riemann-Liouville

il existe de nombreuses définitions de dérivés fractionnaire et dans cette partie nous allons afficher les définitions de dérivés fractionnaire appartenant à Riemann-Liouvile.

Définition 1.4. siot $\alpha > 0$,et $n = [\alpha] + 1$.

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par

$$\forall t \in [a, b]\,, D_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à driote d'ordre α de f est définie par

$$\forall t \in [a, b]\,, D_{b^-}^{\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (x-t)^{n-\alpha-1} f(x) dx$$

Remarque 1.1. .

1. pour $\alpha = 0, n = 1$.
   on a $D_{a^+}^{0} f(t) = \frac{d}{dt}(I_{a^+}^{1} f) = f(t)$
2. Toutes ces dérivées coincident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$
   — $D_{a^+}^{n} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$
   — $D_{b^-}^{n} f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t)$

Proposition 1.4. Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a

1. $(D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}$
2. $(D_{b^-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}$

1.5 Dérivées fractionnaires de Caputo

Définition 1.5. La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction $f(t)$ donnée sur l'intervalle $[a;b]$ est définie par la relation suivante :

$$\forall t \in [a,b], \quad {}^cD_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)dx$$

avec $n = [\alpha] + 1$; où $[\alpha]$désigne la partie entière de α.

Définition 1.6. Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$ La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :

$$\forall t \in [a,b], \quad {}^cD_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)dx$$

Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$ La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par :

$$\forall t \in [a,b], \quad {}^cD_{b^-}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)dx$$

Proposition 1.5. pour $\alpha > 0, \beta > 0$, on a :

1. $({}^cD_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$
2. $({}^cD_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$

1.6 Fonction de Mittag-Leffler

dans cette section , nous présentons les définition et quelques proprerties de Mittag-Leffler

Définition 1.7. la fonction de Mittag-Leffler est définie par

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha > 0.$$

et la fonction de Mittag-Leffer généralisée est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha, \beta > 0$$

Lemme 1.2. quand $\beta = 1$, $E_{\alpha,\beta}$ cioncides avec la fonction Mittag-Leffler

$E_{\alpha,1}(x) = E_{\alpha}(x)$, $\alpha > 0$

Exemple 1.2. .

1. $E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$
2. $E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$
3. $E_2(x) = E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{2k!} = \cosh \sqrt{x}$
4. $E_{2,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
5. $E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x)$

Théorème 1.2. pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$(\frac{d}{dx})^n E_n(\lambda x^n) = \lambda E_n(\lambda x^n)$

$(\frac{d}{dx})^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda x^n) = \lambda x^{\beta-n-1} E_n(\lambda x^n)$

Proposition 1.6. pour $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\right](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - \lambda}$, $s > 0$, $|\lambda s^{\alpha}| < 1$

CHAPITRE 2

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

Définition 2.1. Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation de la forme

$$A(x)y'' + B(x)y' + c(x)y = D(x) \tag{2.1}$$

ou A, B, C, D sont des fonctions scalaires (numériques) définies sur un intervelle de $\mathbb{R}$ et ou y désigne une fonction scalaire inconnue.

Nous supposerons ici que les fonctions A, B, C, D sont continues ;et nous placerons sur un intervalle **J** de $\mathbb{R}$ sur lequel A ne s'annule pas.L'équation (2.1) est alors équivalente a une équation de la forme :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)) \tag{2.2}$$

les fonctions a, b, c étant continues sur **J** *.L'introduction de L'inconnue auxiliaire* $z = y'$ nous ramène au système normal :

$$y' = z \qquad z' = -b(x)y - a(x)z + c(x) \tag{2.3}$$

Théorème 2.1. *soient* a, b, c *trois fonctions scalaires continues sur un intervalle* j *de* $\mathbb{R}$*; pour tout* $x_0 \in I$ *et tout couple* (y_0, y_0') *de scalaires donnés, il existe une solution unique de l'équation différentielle* (2.2) *satisfaisant a*

$$y(x_0) = y_0 \text{ et } y_0'(x_0) = y_0'$$

2.1 Cas d'une équation homogène

Si l'équation donnée (2.1) est homogène (si $D = 0$) on a $c = 0$ dans (2.2) et (2.3) ; et ces équations s'écrivent respectivement :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{2.4}$$

$$y' = z \ ; \qquad z' = -b(x)y - a(x)z \tag{2.5}$$

pour que deux solution (y_1, z_1) et (y_2, z_2) de (2.5) forment un *système fondamental*, il faut et il suffit que, pour une valeur x_0 de la variable on ait :

$$y_1(x_0)z_2(x_0) - y_2(x_0)z_1(x_0) \neq 0$$

c'est-a-dire

$$y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) \neq 0$$

la solution générale de (2.5) est alors de la forme

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2. \qquad z = \lambda_1 z_{1+} \lambda_2 z_2$$

avec λ_1 , $\lambda_2 = Ctes$

Nous sommes ainsi amenés a poser la définition suivante :

Définition 2.2. On dit que deux solutions y_1 ,y_2 de (2.4) sont **linéairement indépendantes,** sur l''intervalle **J** , *ou qu'elles forment un* **système fondamental** *s'il n'exist pas de constantes* λ_1 ,λ_2 , non toutes deux nulles , vérifiant :

$$(\forall x \in J) \qquad \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$$

L'étude qui précède nous permet alors d'énoncer :

Théorème 2.2. pour que deux solutions y_1 ,y_2 de (2.4) *forment un* **système fondamental de solutions ,** il faut et il suffit que pour un poit x_0 de l'intervalle J *, on ait :*

$$y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) \neq 0$$

pour tout $x \in$ **J ,** *on a alors*

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$$

et les solutions de (2.4) sont les fonctions de la forme :

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 = Ctes$$

Remarque 2.1. Si on pose

$$W_n(x) = \; y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

on a, aprés simplification :

$$W_n^{'}(x) = \; y_1(x)y_2^{''}(x) - y_2(x)y_1^{''}(x);$$

d'ou , puisque

$$y_i''(x) = -a(x)y_i' - b(x)y_i \;\; (i = 1, 2);$$

$$W_n^{'}(x) = -a(x)y_1(x)y_2'(x) - a(x)y_2(x)y_1^{'}(x) = -a(x)W_n(x)$$

En désignant par A une primitive de a, on a donc :

$$W_n(x)\exp\left[A(x)\right] = Cte;$$

cela montre directement que la fonction W_n ne peut s'annuler en un point sans ètre partout nulle

2.2 Cas ou on connait une solution non nulle

Supposant connue une solution y_1 de(2.4) , nous allons voir que l'intégration de (2.4) se ramène a des quadratures sur tout intervalle ne contenant pas de zéro de y_1.

Supposons, en effet , que l'on ait $y_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbf{J}$; *et cherchons les conditions que doit vérifier une fonction z* pour que la fonction $y = y_1 z$ soit solution de (2.4). On obtient :

$$y_1^{''}z + 2y_1'z^{'} + y_1 z^{''} + a(x)(y_1'z + y_1 z^{'}) + b(x)y_1 z = 0$$

soit, aprés simplification (en tenant compte de la relation

$$y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1 = 0):$$

$$y_1 z^{''} + \left[2y_1' + a(x)y_1\right] z^{'} = 0 \tag{2.6}$$

posons $u = z^{'}$ nous sommes ramenés a l'équation linéaire homogène du premier ordre

$$u^{'} + \left[2\frac{y_1^{'}(x)}{y_1(x)} + a(x)\right] u = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{u^{'}}{u} = -2\frac{y_1^{'}}{y_1} + a$$

d'ou , par intégration :

$$\log|u(x)| = -2\log|y_1(x)| + \int a(x)dx$$

soit

$$u(x) = \lambda\frac{e^{\alpha(x)}}{y_1^2(x)}, \qquad avec \quad \lambda = Cte$$

,

En désignant par α une primitve fixée de A. Pour avoir les solutions z de (2.6) il suffit donc de connaitre une primitive φ de la fonction α / y_1^2 ; on a alors :

$$z = \lambda\varphi + \mu \quad \text{avec} \quad \mu = Cte;$$

d'ou la solution générale de (2.4) sous la forme :

$$y = (\lambda\varphi + \mu)y_1 \text{ ,} \qquad \text{avec} \qquad \lambda, \mu = Ctes$$

Nous retrouvons le fait que la solution générale de (4) dépend linéairement de deux constantes arbitraires.

Exemple 2.1. L'équation

$$(x+1)y'' - y' - xy = 0 \;\; (x \in \mathbb{R}) \tag{2.8}$$

admet pour solution particulière la fonction $x \to e^x$.posant $y = ze^x$ on est ramené a l''équation :

$$(x+1)(z^{''} + 2z^{'} + z) - (z^{'} + z) - xz = 0$$

soit , aprés simplification :

$$(x+1)z^{''} + (2x+1)z^{'} = 0$$

En intégrant , on obtient :

$$\log\left|z^{'}\right| = -\int \frac{2x+1}{x+1}dx = -2x + \log|x+1| + Cte.$$

soit

$$z^{'}(x) = \lambda(x+1)e^{-2x}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = Cte$$

et

$$z(x) = -\mu(\frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{x}{2}e^{-2x}) + \mu \quad \text{avec} \quad \mu = Cte$$

La solution générale de (8) est donc

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2(2x+3)e^{-x}, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 = Ctes$$

2.3 Equation non homogène Méthode de variation des constantes

Considérons maintenant l'équation non homogène (2.2), et supposons connu un système fondamental de solutions (y_1, y_2) de l'équation homogène associée

On sais que l'introduction de l'inconnue auxiliaire $z = y'$ nous ramène au système du premier ordre (2.3)

et le système homogène associé a (2.2) admet $(y_1, y_1^{'})$ et $(y_2, y_2^{'})$ pour système fondamental de solutions.

la méthode de variation des constantes consiste a chercher la solution de (2.3) sous la forme

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2. \quad z = \lambda_1 z_{1+} \lambda_2 z_2$$

En d'autres termes, on cherche la solution (2.2) sous la forme la forme

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

les fonctions λ_1 , λ_2 étant dérivables et assujetties a vérifier la relation :

$$y' = \lambda_1 y_1^{'} + \lambda_2 y_2^{'} \tag{2.9}$$

par dérivation , on obtient :

$$y^{''} = \lambda_1 y_1^{''} + \lambda_2 y_2^{''} + \lambda_1^{'} y_1^{'} + \lambda_2^{'} y_2^{'};$$

et l'équation (2) sera vérifiée si on a :

$$\textbf{??}\lambda_1^{'} y_1^{'} + \lambda_2^{'} y_2^{'} = c(x) \tag{2.10}$$

En dérivant la relation (2.9) et en comparant le résultat obtenu a (**??**) on obtient

$$\lambda_1^{'} y_1 + \lambda_2^{'} y_2 = 0$$

Ce systeme admet une solution unique (λ_1', λ_2') en revient a une systeme

$$\begin{aligned} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 &= 0 \\ \lambda_1' y_1^{'} + \lambda_2' y_2^{'} &= c(x) \end{aligned}$$

1. Soit a intégrer l'équation non homogène

$$(x+1)y'' - y' - xy = c(x), \tag{2.11}$$

ou c désigne une fonction continue donnée sur un intervalle ne contenant pas le point $x = -1$. Nous pouvons utiliser le fait que l'équation homogène assciée admet le système fondamental de solutions :

$$y_1 = e^x, \qquad y_2 = (2x+3)e^{-x}.$$

Nous cherchons donc a déterminer deux fonctions dérivables λ_1 , λ_2 vérifiant

$$e^x \lambda_1^{'} + (2x+3)e^{-x}\lambda_2^{'} = 0$$

et telles que la fonction $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ vérifie (2.11) , ce qui donne la relation

$$(x+1)\left[e^x \lambda_1^{'} - (2x+1)e^{-x}\lambda_2^{'} \right] = c(x)$$

on obtient

$$\lambda_1^{'}(x) = e^{-x}\frac{2x+3}{4(x+1)^2}c(x); \qquad \lambda_2^{'}(x) = -e^x\frac{c(x)}{4(x+1)^2}.$$

2. Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$x^2 y'' + xy' - y = 2x. \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2.12}$$

On vérifie que l'équation homogène associée admet les solutions linéairement indépendantes $y_1 = x,\ \ y_2 = \dfrac{1}{x}$ .Nous cherchons donc les solutions de (2.12) sous la forme

$$y = \lambda x + \frac{\mu}{x}, \tag{2.13}$$

les fonctions λ, μ satisfaisant a $\lambda^{'} x + \dfrac{\mu^{'}}{x} = 0.$

En écrivant que y est solution de (2.12) on obtient la condition :

$$\lambda^{'} x^2 - \mu^{'} = 2x, \quad \text{d'ou :} \quad \lambda' = \frac{1}{x}, \quad \mu^{'} = -x.$$

La solution générale de (2.12) est donc :

$$y(x) = x \log|x| - \frac{x}{2} + \alpha x + \frac{\beta}{x}, \quad \text{avec } \alpha, \beta = Ctes.$$

2.4 Cas ou l'on connait seulement une solution de l'équation homogène associée

Considérons toujours l'équation non hmogène(2.2), et supposons connue une solution partout non nulle $y_1$de l'équation homogène associée, donc vérifiant :

$$y_1^{''} + a y_1^{'} + b y_1 = 0.$$

Le chengement d'inconnue $y = y_1 z$ nous conduit directement a l'équation différentielle

$$y_1(x) z^{''} + [2 y_1'(x) + a(x) y_1(x)]\, z^{'} = c(x); \tag{2.14}$$

Posons $z^{'} = u$, on obtient l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y_1(x) u' + [2 y_1'(x) + a(x) y_1(x)]\, u = c(x) \tag{2.15}$$

L'inégration de (2.2) se ramène ainsi a trois quadratures : deux pour l'intégration de (2.15) et une pour déterminer z connaissant u .

La méthode qui consisterait a intégrer d'abord l'équation homogène associée, puis a appliquer la méthode de «variation des constantes» conduirait au meme nombre de quadratures (et mème , en fait , aux mèmes calculs) ;

mais la présentation en serai plus longue.

Exemple 2.2. Cherchons a intégrer l'équation différentielle (2.11)

$$(x+1) y'' - y' - xy = c(x),$$

ou c désigne une fonction continue donnée , sachant seulement que l'équation homogène associée admet $y = e^x$ pour solution particulière.

Posant $y = ze^x$, on obtient l'équation différentielle :

$$\textbf{??}(x+1)e^x z'' + (2x+1)e^x z' = c(x) \tag{2.16}$$

on en déduit

$$z'(x) = \alpha(x)e^{-2x}(x+1), \qquad \text{avec} \qquad \alpha(x) = \int \frac{e^x c(x)}{(x+1)^2} dx.$$

2.5 Equations scalaires d'ordre quelconque

Soit $A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + ... + A_n(x)y = B(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre n , ou les $A_i(i = 0, 1, ..., n)$ et B sont des fonctions scalaires données (numériques ou vectorielles) continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$, et ou y est une fonction scalaire inconnue.

Nous placerons toujours sur un intervalle **j** sur *lequel la fonction* A_0 ne s'annule pas. Aprés division par A_0, nous sommes ramenés a une équation de la forme

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = b(x). \tag{2.17}$$

l'introduction des $n-1$ inconnues auxiliaires $y_k = y^{(k)}(k = 1, 2....., n-1)$ nous ramène au système différentiel linéaire du premier ordre .

$$y' = y_1,\ y_1' = y_2,\ \cdots,\ y_{n-2}' = y_{n-1},\ y_{n-1}' = -a_1(x)y_{n-1} - a_2(x)y_{n-2} - .... - a_n(x)y + b(x). \tag{2.18}$$

Théorème 2.3. Soit $(a_1, a_2, ...a_n, b)$ un système de $n+1$ fonctions scalaires continues sur un intervalle **j** de $\mathbb{R}$; alors, quel que soient le point $x_0 \in$ **j** , et les n scalaires donnés $y_0, y_1', ..., y_0^{(n+1)}$, l' équation différentielle (2.17) admet une solution unique y vérifiant :

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

En d'autres termes, on peut se donner arbitrairement la valeur de y et de ses $n-1$ premières dérivées en un point donné x_0 de **j** .

Cas d'une équation homogène

Plaçons-nous maintenant dans le cas ou $b = 0$, et considérons l'équation homogène d'ordre n :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0. \tag{2.19}$$

l'intégration de cette équation se ramène a celle du système homogène :

$$y' = y_1,\ y_1' = y_2,\ \cdots,\ y_{n-2}' = y_{n-1},\ y_{n-1}' = -a_1(x)y_{n-1} - a_2(x)y_{n-2} - .... - a_n(x)y. \quad (2.20)$$

A chaque solution y de (2.19) nous associerons la solution $Y = (y, y', ..., y^{(n-1)})$ de (2.20) .

On voit alors que l'indépenndance linéaire de p solutions $Y_\alpha = (y_\alpha, y_\alpha', ..., y_\alpha^{(n-1)})$ de (2.20) $(\alpha = 1, 2, ..., p)$ équivaut a l'indépendance linéaire des p fonctions scalaires $y_1, y_2, ..., p$.

Nous sommes ainsi amenés a poser les définitions suivantes :

Définition 2.3. On dit que p solutions $y_1, y_2, ..., p$ de (2.19) sont linéairement indépendantes s'il n'existe pas de scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_p$, non tous nuls, vérifiant

$$(\forall x \in X) \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha y_\alpha(x) = 0.$$

Pour $p = n$,un système de n solutions linéairement indépendantes de (2.19) est appelé un système fondamental de solutions .

Théorème 2.4. si $(y_1, y_2, ..., y_n)$ est un système fondamental de solutions les solutions de (2.19) sont les fonctions

$$y = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha$$

ou $\lambda_1, ..., \lambda_n$ désignent des constantes scalaires arbitraires

Théorème 2.5. Pour que p solutions $y_\alpha$de (2.19) soient linéairement indépendantes , il faut et il suffit que , pour une valeur $x \in$ **j** la matrice

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_p(x) \\ y_1'(x) & ...... & ... & y_p'(x) \\ .... & ...... & ... & .... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ...... & ... & y_p^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

soit de rang p; et il en est alors de mème pour tout $x \in$ **j** .

En particulier , pour que n solutions $y_1, y_2, ..., y_n$ de (2.19) forment un système fondamental il faut et il suffit qu'il existe un poit x_0 de j tel que la fonction

$$w_n(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

vévvrifie $w_n(x_0) \neq 0$*; et on a alors* $w_n(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in j$.

La fonction $w_n : x \rightarrow w_n(x)$ définie par (2.21) est appelée **wronskien** du système $(y_1, y_2, ..., y_n)$.

L'éxistence de systèmes fondamentaux de solutions résulte des théorèmes généraux. En particulier, le théorème...... entraine l'existence de n solutions $y_1, y_2, ..., y_n$ telles que la matrice

$$\left[y_\alpha^{(k)}(x_0)\right] \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., n-1)$$

Soit une matrice arbitrairement donnée ; et il suffit que le déterminant de cette matrice soit non nul pour que les solutions $y_\alpha (1 \leqslant \alpha \leqslant n)$ forment un système fondamental.

Remarque 2.2. Si w_n désigne le Wronskien de n solutions $y_1, y_2, ..., y_n$ de (2.19) , on a , par la règle de dérivation des déterminants :

$$w_n^{'}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

d'ou, en tenant compte du fait que les y_α vérifient (3), et en simplifiant :

$$w_n'(x) = -a_1(x) w_n(x).$$

On a donc

$$w_n(x) = C \exp\left[\int -a_1(x)dx\right] \qquad \text{avec} \qquad C = Cte;$$

on retrouve le fait que la fonction w_n ne peut s'annuler en un point que si elle est partout nulle

Méthode de variation des constantes

Revenons a l'équation différentielle non homogène (2.17), et appliquons la méthode générale de variation des constantes au système différentiel du premier ordre(2.18). Supposant connu un système fondamenta $(y_1, y_2, ..., y_n)$ de solutions de l'équation homogène (2.19) , cette méthode revient a chercher n fonctions scalaires dérivables $\lambda_1, ..., \lambda_n$ telles que le système

$$Y = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha,\ \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha', ...,\ \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha^{(n-1)}\right)$$

soit une solution du système différentiel (2.18) .

En d'autres termes , la fonction $y = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha$ doit vérifier (1) et les fonction λ_α doivent vérifier les $n-1$ relations :

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha^{(k)}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha^{(k+1)} \qquad (k = 0, 1, 2, ...n-2). \tag{2.22}$$

Etudions directement le problème ainsi posé.

On voit immédiatement que les $n-1$ relation (2.22) équivalent aux $n-1$ relations

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda'_\alpha y_\alpha^{(k)} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, ...n-2). \tag{2.23}$$

D'autre part , en raisonnant par récurrence sur l'entier k , on en déduit que , pour $k = 1, 2, ...n-1$,la fonction $y = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha$ admet une dérivée d'ordre k donnée par :

$$y^{(k)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha^{(k)}.$$

Pour $k = n-1$, on a donc :

$$y^{(n-1)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha^{(n-1)}.$$

On en déduit que la fonction $y = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha$ admet une dérivée d'ordre n égale a :

$$y^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda'_\alpha y_\alpha^{(n-1)} + \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha^{(n)}.$$

Pour que y soit solution de (2.17) il est donc nécessaire et suffisant que les fonctions $\lambda_\alpha$vérifient

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda'_\alpha y_\alpha^{(n-1)} + \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha^{(n)} + \sum_{\alpha=1}^{n} a_k \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha^{(k)} = b$$

Soit , aprés simplifications (puisque les y_α sont des solutions de l'équation homogène (2.19)) :

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda'_\alpha y_\alpha^{(n-1)} = b.$$

Nous pouvons donc énoncer :

Si on connait un système fondamental (y_α) *de solutions de l'équation homogène* (2.19) *, les solutions de l'équation non homogène* (2.18) *sont les fonctions de la forme*

$$y = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha y_\alpha,$$

ou $\lambda_1, ..., \lambda_n$*désignent des fonctions scalaires dont les dérivées sont déterminées par les* n *relations*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda'_\alpha y_\alpha^{(k)} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, ...n-2). \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda'_\alpha y_\alpha^{(n-1)} = b \tag{2.24}$$

Par hypothèse, le Wronskien

$w_n = dét \left[y_n^{(k)} \right] \qquad (n = 1, 2, ..., n, \quad k = 0, 1, ..., n-1)$

des fonctions y_n ne s'annule pas . Les relations (2.24) constituent donc, pour chaque valeur de x, un système de Cramer aux inconnues $\lambda'_n(x)$. Les valeurs a des constantes additives prés , par intégration .

Ces résultats généralisent ceux qui ont été donnés pour $n = 2$.

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

CHAPITRE 3

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

3.1 Théorie générale des équations différentielles fractionnaires linéaires

dans cette section nous étudions les solutions a une équation différentielle fractionnelle linéaire séquentielle homogène

$$L_{2\alpha}(y) = \left[D_{a_+}^{2\alpha} + a(x)D_{a^+}^{\alpha} + b(x)D_{a^+}^{0}\right](y) = y^{(2\alpha)} + a(x)y^{(\alpha)} + b(x)y = 0 \tag{3.1}$$

lorsque $\{a(x), b(x)\}$sont fonction réelle continue dans $[a, b]$ et

$$\left[D_{a_+}^{2\alpha}\right](y) = y^{(2\alpha)}$$

est le dérivé fractionnelle sequentiel de Riemann Liouville

Définition 3.1. comme d'habitude un ensemble fondamentale de solutions a l'équation (3.1) dans un certain intervalle $V \subset [a, b]$ est un ensemble de 2 fonctions linéairement indépendantes en V qui sont des solutions a (3.1)

Définition 3.2. $\alpha-$Wronskian des 2 fonctions $\{u_1(x), u_2(x)\}$ qui admettent des dérivés fractionnaires itérés jusqu'a l'ordre $(n-1)$ dans un certain intervalle $v \subset [a, b]$.

se réfère au déterminant suivant

$$\left|W_{\alpha(u_1,u_2)}(x)\right| = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1^{(\alpha)}(x) & u_2^{(\alpha)}(x) \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

pour simplifier la notation , réprésenté par $|W_\alpha(x)| = |W_\alpha(u_1(x), u_2(x))|$. nous allons utiliser $W_\alpha(x)$ pour la matrice Wronskian correspondante .

Théorème 3.1. Soit $\{u_1(x), u_2(x)\}$ etre une famille de fonctionnaires sequentielles jusqu'a lordre α dans $[a,b]$ et de telle sorte que , si $j = 1,2$ et $k = 0,1,2$

$$\lim_{x \to a+} \left[(x-a)^{1-\alpha} u_j^{(k\alpha)}(x) \right] < \infty \tag{3.3}$$

si les fonctions $\{(x-a)^{1-\alpha} u_j(x)\}_{j=1}^{2}$ dépendent linéairement de $[a,b]$. il s' ensuit que pour tous $x \in [a,b]$

$$(x-a)^{2-2\alpha} |W_\alpha(x)| = 0 \tag{3.4}$$

nous pouvons compléter le résultat. ci-dessus comme dans le cas ordinaire avec le théorème suivant

Théorème 3.2. soit $\{u_1(x), u_2(x)\}$ etre une solution famille de fonctions a l'equation $(1) dans$ $[a,b]$ qui satisfait

$$\lim_{x \to a+} \left[(x-a)^{1-\alpha} u_j(x) \right] < \infty \qquad (j = 1,2)$$

puis les fonctions

$$\left\{ (x-a)^{1-\alpha} u_j(x) \right\}_{j=1}^{2}$$

dépendent linéairement de $[a,b]$ si et seulement si ,il existe un $x_0 \in [a,b]$ telle que

$$\left[(x-a)^{2-2\alpha} |W_\alpha(x)| \right]_{x=x_0} = 0 \tag{3.5}$$

du théorème ci-dessus nous pouvons toujours trouver , d'une maniére similaire au cas ordinaire,un ensemble fondamentale de solutions pour l'équation (1) dans un certain intervalle $v \subset [a,b]$. généralement , la solutin générale à une équation différentielle fractionnaire linéaire non homogène :

$$L_{2\alpha}(y) = f(x) \tag{3.6}$$

sera donné comme dans la proposition suivante :

Proposition 3.1. si $y_p(x)$ est une solution particulière a (6) et $y_h(x)$ est une solution générale à l'équation homogène correspondante :

$$L_{2\alpha}(y) = 0 \tag{3.7}$$

c'est-à-dire

$$y_h(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \tag{3.8}$$

avec $\{c_1, c_2\}$ des constantes réelles arbitraires et $\{u_1(x), u_2(x)\}$ un ensemble fondamental de (3.7) . puis une solution générale à l'équation non homogène (3.6) est :

$$y_g(x) = y_p(x) + y_h(x) \tag{3.9}$$

Une théorie générale , similaire à ce qui précède , peut etre établi pour le dérivé fractionnaire Caputo $D^\alpha = cD^\alpha_{a^+}$, qui a été introduit par Caputdqo dans 1969. voir , par exemple

$$(cD^\alpha_{a^+} f)(x) = (I^{2-\alpha}_{a^+} D^2 f)(x) \quad (x > a \text{ et } 2 = -[-\alpha] \tag{3.10}$$

De plus , il est courant de considérer la définition, plus le dérivé fractionnaire Caputo :

$$(cD^\alpha_{a^+} f)(x) = D^\alpha_{a^+} \left[f(x) - \sum_{j=0}^{1} f^{(j)}(a+) \frac{(x-a)^j}{j!} \right]. \tag{3.11}$$

qui montre le lien étroit entre le Caputo et les dérivés Riemann Liouville.

3.2 Equation différentielles fractionnaires séquentielles linéaires coefficients constantes

Dans cette section , nous présentons une méthode directe pour obtenir la solution générale explicite à un équation différentielle fractionnaire séquentielle linéaire avec des coefficients constants , telle que :

$$L_{2\alpha}(y) = \left[D^{2\alpha}_{a^+} + a(x) D^\alpha_{a^+} + b(x) D^0_{a^+} \right](y) = f(x) \tag{3.12}$$

lorsque a et $\{a_1, a_2\}$ sont des constantes réelles et $D^{k\alpha}_{a^+}$ est le dérivé fractionnaire séquentielle Riemann Liouville

Plusieurs approches ont été élaborées pour obtenir des solutions explicites à certains de ces types d'équations la méthode laplace a été discutée par certains auteurs ; mais cette approche n'est applicable que si $a = 0$. avec la restriction $a = 0$, il n'est pas possible d'envisager des problèmes de type cauchy pour l'équation (3.12) avec conditions à $x = 0$.d'autre part la méthode directe est trés pratique pour étudier et résoudre les problèmes de valeurs limites associés à l'équation (3.12) qui ne peut etre résolu par la méthode du la place .en fin , nous introduirons une fonction Green fractionnaire pour obtenir une solution particulière explicite à l'équation non homogène (3.12)

$$L_{2\alpha}(y) = \left[D_{a_+}^{2\alpha} + a(x)D_{a^+}^{\alpha} + b(x)D_{a^+}^{0}\right](y) = 0 \tag{3.13}$$

Comme dans le cas ordinaire , si nous essayans de trouver des solutions (3.13) de ce type $y(x) = e_{\alpha}^{\lambda(x-a)}$. il s'ensuit que :

$$L_{2\alpha}(e_{\alpha}^{\lambda(x-a)}) = P_2(\lambda)e_{\alpha}^{\lambda(x-a)} \tag{3.14}$$

lorsque

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + a(x)\lambda + b(x)\lambda \tag{3.15}$$

est reporté à comme le polynome caractéristique associé à l'équation (3.12) dans ce qui suit ,il sera supposé $\lambda \in \mathbb{C}$.

Par l'utilisation des accessoires de la fonction $\alpha -$ exposante .Nous obtenons le résultat suivant /

Lemme 3.1.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L_{2\alpha}(e_{\alpha}^{\lambda(x-a)}) = L_{2\alpha}(\frac{\partial}{\partial \lambda} e_{\alpha}^{\lambda(x-a)}) \tag{3.16}$$

et

$$\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} e_{\alpha}^{\lambda(x-a)} = (x-a)^{l\alpha} \varepsilon_{\alpha.l}^{\lambda(x-a)} \tag{3.17}$$

ainsi nous pouvons connecter la solution du polynôme caractéristique avec des solutions de (3.13) , comme dans le cas habituel.

Théorème 3.3. Soit $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ toutes les racines réelles différentes du polynome caractéristique (3.15) ordres dont les de multiplicite sont $\{\mu_j\}_{j=1}^{k}$, respectivement. Soit $\{e_j, \bar{e}\}_{j=1}^{p}$ $(e_j = b_j + ic_j)$ etre ous distincts des solutions conjuguées complexes de multiplicite $\{\sigma_j\}_{j=1}^{p}$, respectivement , de (3.15) puis l'union ensemble des ensembles

$$\cup_{m=1}^{k} \left\{(x-a)^{l\alpha} \varepsilon_{\alpha,l}^{\lambda_m(x-a)}\right\}_{l=1}^{\mu_m - 1} \tag{3.18}$$

$$\cup_{m=1}^{p} \left\{\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{c_m^{2j}}{(2j)!} (x-a)^{(2j+l)\alpha} \varepsilon_{\alpha,l+2j}^{b_m(x-a)}\right\}_{l=1}^{\sigma_m - 1} \tag{3.19}$$

et

$$\cup_{m=1}^{p}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\frac{c_{m}^{2j+1}}{(2j+1)!}(x-a)^{(2j+l+1)\alpha}\varepsilon_{\alpha,l+2j+1}^{b_m(x-a)}\right\}_{l=1}^{\sigma_m-1} \tag{3.20}$$

détermine un système fondamental de solutions à l'équation différentielle fractionnaire (3.13) .

Notes que seulement pour le cas ou $a=0$ peut des méthodes opérationnelles telles que la transformation laplace etre appliquée pour résoudre le problème des coefficients constants.

Exemple 3.1. considérons l'équation :

$$c+\lambda^2 y=0 \tag{3.21}$$

son équation caractéristique est $P_2(x)=x^2+\lambda^2=(x-\lambda i)(x-\lambda i)$ et donc l'ensemble fondamental de solutions à (3.21) est :

$$\left\{\cos_{\alpha}\left[\lambda(x-a)\right],\sin_{\alpha}\left[\lambda(x-a)\right]\right\},$$

lorsque

$$\cos_{\alpha}\left[\lambda(x-a)\right]=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\lambda^{(2j+1)}\frac{(x-a)^{(j+l)2\alpha-1}}{\Gamma\left[(j+l)2\alpha\right]} \tag{3.22}$$

et

$$\sin_{\alpha}\left[\lambda(x-a)\right]=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\lambda^{2j}\frac{(x-a)^{(2j+l)\alpha-1}}{\Gamma\left[(2j+l)\alpha\right]} \tag{3.23}$$

Ces nouvelles fonctions $\cos_{\alpha}(x)$ et $\sin_{\alpha}(x)$ sont une généralisation de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

maintenant nous savons commet obtenir la solution générale à l'équation (3.13) homogène .Alors , conformément à la proposition 4 , obtenir la solution générale explicite pour (3.12) nous avons seulement besoin d'un solution particulière pour (3.12).

Tout d'abord nous obtiendrons la solution générale à l'équation plus simple :

$$y^{(\alpha)}-\lambda y=f(x) \tag{3.24}$$

lorsque $y^{(\alpha)}=D_{a_+}^{\alpha}y$.

Proposition 3.2. soit $f\in L_1(a,b)\cap C\left[(a,b)\right]$ .Alors l'équation (3.24) admet :

$$y_g=ce_{\alpha}^{\lambda(x-a)}+y_p \tag{3.25}$$

comme solution générale dans laquelle

$$y_p = e_\alpha^{\lambda x} *^a f(x). \tag{3.26}$$

est une solution particulière à (24) avec $*^a$étant la convolution suivante :

$$g(x) *^a f(x) = \int_a^x g(x-t)f(t)dt \tag{3.27}$$

En plus , $y_p(a+) = 0$. si $f(x) \in C([a,b])$ est $(I_{a^+}^{1-\alpha} y_p)(a+) = 0.$ si $f(x) \in C_{1-\alpha}([a,b])$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $y_p(x)$ est une solution à (3.24) pour ceci . si nous appliquons propriété (3.5) et que :

$$\lim_{x \to a^+} (I_{a^+}^{1-\alpha} e_\alpha^{\lambda(t-a)})(x) = 1.$$

alors

$$\begin{aligned}
(D_{a+}^\alpha y_p)(x) &= D_{a+}^\alpha \int_a^x e_\alpha^{\lambda(t-a)} f(t)dt \\
&= \int_a^x \left\{ D_{a+}^\alpha e_\alpha^{\lambda(x-a)} \right\}(t) f(x_t+a)dt \lim_{t \to a^+} (I_{a^+}^{1-\alpha} e_\alpha^{\lambda(x-a)})(t) \\
&= \lambda \int_a^x e_\alpha^{\lambda(\zeta-a)} f(\zeta)d\zeta + f(x) \\
&= \lambda y_p + f(x).
\end{aligned}$$

qui conclut la preuve . ■

Théorème 3.4. une solution particulière l'équation (3.12) est donnée par :

$$y_p = G_\alpha(x) *^a f(x) \tag{3.28}$$

lorsque $G_\alpha(x)$ est :

$$G_\alpha(x) = \prod_{j=1}^k *^a \left(\prod_{j=1}^{\sigma_j} *^a e_\alpha^{\lambda_j(x-a)} \right) \tag{3.29}$$

ou $\{\lambda\}_{j=1}^k$sont les racines complexes k distinctes du polynome caractéristique (3.15) avec multiplicité $\{\sigma_j\}_{j=1}^k$, respectivement. En plus , $y_p(a+) = 0$ si $f(x) \in C([a,b])$ et $(I_{a^+}^{1-\alpha} y_p)(a+) = 0$ si $f(x) \in C_{1-\alpha}([a,b])$. en outre ($I_{a^+}^{1-\alpha} G_\alpha)(a+) = 0$

Démonstration. Il suffit d'appliquer successivement le résultat de la proposition (5) en gradant à l'esprit la faible singularité présentée par la fonction $e_\alpha^{\lambda x}$. ■

Remarque 3.1. De puis fonction $G_\alpha(x-\zeta)$ joue le role de la fonction Green associée a une équation non homogène (12) , analogue au cas habituel , cette fonction sera appellée la fonction de Riemann Liouville Green .

Remarque 3.2. Des résultats analogues peuvent etre obtenus si l'on considére le dérivé Caputo fractionnaire (10) ou (11) ou lieu du dérivé fractionnaire Riemann Liouville en utilisant la fonction Mittag Leffler :

$$E_\alpha(\lambda(x-a)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha k+1)} \qquad (\alpha > 0) \tag{3.30}$$

au lieu de la fonction $\alpha-$ exponentielle $e_\alpha^{\lambda(x-a)}$.

Exemple 3.2. considérons l'équation :

$${}^C D_{a+}^{2\alpha} y + \lambda^2 y = 0 \tag{3.31}$$

son polynôme caractéristique correspondant est $P_2(x) = x^2 + \lambda^2$ et donc l'ensemble fondamental de la solution à (31) est :

$$\{\cos_\alpha^* [\lambda(x-a)], \sin_\alpha^* [\lambda(x-a)]\} \tag{3.32}$$

lorsque

$$\cos_\alpha^* [\lambda(x-a)] = Re\{E_\alpha(\lambda(x-a)^\alpha)\} \tag{3.33}$$

et

$$\sin_\alpha^* [\lambda(x-a)] = Im\{E_\alpha(\lambda(x-a)^\alpha)\} \tag{3.34}$$

Nous soulignons ici que les fonctions $\sin_\alpha^*(x)$ et $\cos_\alpha^*(x)$ sont une nouvelle généralisation habuelles $cos(x)$ et $sin(x)$ fonctions,lequel,comme les fonctions $\cos_\alpha$ et $\sin_\alpha$ pourraient jouer un role fondament ,par exemple, dans le développement d'une théorie de Fourier fractionnaire ou de fonctions fractales de type Weierstrass , qui sont des solutions aux équations différentielles fractionnelles élémentaire.

En plus , les résultats présentés précédemment peuvent etre appliqués aux équations différentielles linéaires non séquentielles de Riemann Liouville il est facile de prouver ce qui suit :

Corollaire 1. Soit $f \in C_{1-\alpha}([a,b])$ et $a_0.a_1 \in \mathbb{R}$. Alors l'quation :

$$D_{a_+}^{2\alpha} y + a_1 D_{a_+}^{\alpha} y + a_0 y = f(x) \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{3.35}$$

a la solution générale :

$$y(x) = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) + z_p(x) - \frac{C}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \tag{3.36}$$

lorsque $z_i(i = 1,2)$ est un système fondamental de solutions à l'équation fractionnelle séquentielle homogène :

$$D_{a_+}^{2\alpha} z + a_1 D_{a_+}^{\alpha} z + a_0 z = 0 \tag{3.37}$$

et

$$z_p(x) = z_1(x) *^a z_2(x) *^a \left[f(x) + a_0 C(x-a)^{\alpha-1}\right] \tag{3.38}$$

est une solution particulière à l'équation non homogène

$$D_{a_+}^{2\alpha} z + a_1 D_{a_+}^{\alpha} z + a_0 z = f(x) + a_0 C(x-a)^{\alpha-1} \tag{3.39}$$

lorsque C, C_1et C_2 sont des constantes réelles telles que C_1+ $C_2 = C$ si les racines de l'équation caractéristique de (37) sont différents, ou $C_1 = C$. s'ils ne sont pas .

Exemple 3.3. soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f \in C_{1-\alpha}([a,b])$.Une solution générale à l'quation :

$$D_{a_+}^{2\alpha} y + 2D_{a_+}^{\alpha} y + y = f(x) \qquad (x > a) \tag{3.40}$$

est

$$y_g(x) = Ce_{\alpha}^{(x-a)} + C_2 \varepsilon_{\alpha.l}^{(x-a)} + u(x) - \frac{C}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \tag{3.41}$$

C_2 et C étant deux constantes réelles arbitraires, et :

$$u(x) = e_{\alpha}^{(x-a)} *^a \varepsilon_{\alpha.l}^{(x-a)} *^a \left[f(x) + \frac{C}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}\right] \tag{3.42}$$

Exemple 3.4. l'équation de différence ordinaire :

$$x'(t) - a^2 x(t) = 0 \tag{3.43}$$

Selon la relation donnée $D^n y(t) = (D_{a_+}^{p\alpha} y)(t).(t > a)$. peut etre transformé en équation différentielle fractionnaire linéaire séquentielle :

$$(D_0^{2\alpha}x)(t) - a^2x(t) = 0 \qquad (\alpha = 1/2) \tag{3.44}$$

dont la solution générale est :

$$x(t) = C_1 e_\alpha^{at} + C_2 e_\alpha^{-at} \tag{3.45}$$

Toute solution à (3.43) est inclus dans la famille de solution à (3.45) parce que $x(0) < \infty$ et $C_2 = -C_1$. Alors

$$x(t) = C_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[1 - (-1)^j\right] a^j t^{j\alpha+\alpha-1}}{\Gamma\left[(j+1)\alpha\right]} \tag{3.46}$$

qui est la solution générale bien connue à (3.43) .

Toute fois , $x(t) = e_\alpha^{at}$ existe une solution à (3.44) mais ce n'est pas une solution pour (3.43).

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté un extension de l'étude de quelques notions des équations différentielles ordinaires vers la version fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo.

Notons que cette étude est basée sur l'article de Bonilla, Rivero, Trujillo [1], et les livres classiques des équations différentielles ordinaires.

On estime que cette étude peut être généralisés a un autre sens de calcul fractionnaire, par exemple Katugambola.

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Bibliographie

[1] **B. Bonilla, M. Rivero, J. J. Trujillo :** Linear differential equations of fractional order. *Advances in Fractional Calculus, Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, Springer,* **(2007)**, pp. 77-91.

[2] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo :** Theory and applications of fractional differential equations. *Elsevier, London,* **(2006)**.

[3] **K. S. Miller, B. Ross :** An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *Wiley- interscience publication, New York,* **(1993)**.

[4] **I. Podlubny :** Fractional differential equations. *Academic press, New York,* **(1999)**.

[5] **M. Riveroa, L. Rodriguez-Germa, J.J. Trujillo :** Linear fractional differential equations with variable coefficients. *Applied Mathematics Letters, Elsevier,* **(2008)**, vol. 21, pp.892-897.

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وإيجاد حلول للمعادلات التفاضلية الخطية كسرية الرتب، وذلك من خلال دراسة واستعمال المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية. سنتطرق في البداية الى الحساب التفاضلي الكسري حيث سنعرض مختلف التعريفات المستعملة في الحساب الكسري، بعد ذلك نقوم بدراسة المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية التي سنستخدمها كنموذج نعالج به مسألة حل المعادلات التفاضلية الخطية كسرية الرتب.

Résumé

Le but de ce mémoire est l'étude des équations diff érentielles linéaires d'ordre fractionnaire, ceci est par l'étude et l'utilisation des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Nous allons d'abord examiner le calcule fractionnaire en présentant les déférents définitions utilisées dans le calcul fractionnaire, nous étudierons ensuite les équations différentielles linéaires du second ordre. On utilise ces techniques dans les équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire.

Abstract

The aim of this memory is the study of linear differential equations of fractional order, this is through the study and use of ordinary linear differential equations of the second order. We will first examine the fractional calculus by presenting the different definitions used in the fractional calculus, we will then study the second order linear differential equations. We use these techniques in fractional linear differential equations.