RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

N^o d'ordre :.....

Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat en sciences

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et numérique

Par :

ABDELKEBIR Saad

Thème

Étude de quelques problèmes d'évolution pour des équations aux dérivées fractionnaires

Soutenue le 03/02/2022 devant le jury composé de :

GASSMI Abdelkader	Professeur	Université de M'sila	Président
NOUIRI Brahim	M.C.A	Université de M'sila	Rapporteur
MERZOUGUI Abdelkrim	Professeur	Université de M'sila	Examinateur
BENSERIDI Hamid	Professeur	Université de Sétif 1	Examinateur
DILMI Mourad	Professeur	Université de Sétif 1	Examinateur
NOUIOUA Farid	M.C.A	ENS de Bou-Saâda	Examinateur

Année universitaire : 2021/2022

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier **Allah** le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour mener à terme ma formation et pourvoir réaliser ce travail de recherche.

En premier lieu, je tiens à remercier mon encadreur de thèse, Dr. **Nouiri Brahim**, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Ensuite, j'adresse mes remerciements au Professeur **Gassmi Abdelkader**, président du jury.

Je remercie également le professeur **Merzougui Abdelkrim**, examinateur.

J'adresse par la même occasion mes remerciements à le Professeur **Benseridi Abdelhamid**, examinateur, de l'Université de Sétif 1. Je ne saurais terminer ces remerciements sans un mot de gratitude à le Professeur **Dilmi Mourad**, examinateur, de l'université de Sétif 1. De plus, mes remerciements s'adressent aussi à Dr. **Nouioua Farid**, examinateur, de l'Ens Bou-Saada.

A tous ceux dont le soutien nous a été utile et nécessaire, De peur d'en avoir oublier, je souhaite remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse ainsi qu'à la réussite de ce parcours universitaire.

A. Saad

Dédicaces

Je dédie cette thèse :

Ma Mère

Ma Femme

Mes enfants :

Ceym

Ilyas

Yamane

Résumé

Dans cette thèse, nous avons considéré deux problèmes d'évolution gouvernés par d'équation télégraphique fractionnaire en espace et en temps avec coefficients variable ou constants et une condition aux limites de Robin. Les dérivées fractionnaires sont décrites au sens conformable. Nous avons utilisé la méthode de Fourier et les propriétés de la dérivée conformable pour calculer la solution analytique dans le cas où les coefficients de l'équation télégraphique sont constants. Ensuite, nous avons proposé un algorithme basé sur les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce et la méthode de Newmark pour résoudre ce problème d'évolution avec condition aux limites de Dirichlet. D'autre part, nous avons généralisé notre travail avec une nouvelle méthode basée sur les polynômes de Legendre et la méthode α-généralisée pour calculer la solution numérique de notre problème d'évolution où les coefficients sont variables et la condition aux limites de Robin. Plusieurs exemples sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de chaque méthode proposée.

Mots-Clés : Calcul fractionnaire confromable, Condition aux limites de Robin, Équation télégraphique, Méthode de Fourier, Méthode de Newmark, Méthode α-généralisée, Polynômes de Legendre, Polynômes de Tchebychev.

In this thesis, we considered two evolution problems governed by fractional telegraphic equation in space and time with variable or constant coefficients and a Robin boundary condition. Fractional derivatives are described in the conformable sense. We used the Fourier method and the properties of the conformable derivative to calculate the analytical solution in the case where the coefficients of the telegraph equation are constant. Then, we proposed an algorithm based on Chebyshev polynomials of the fourth kind and Newmark's method to solve the evolution problem with Dirichlet boundary condition. On the other hand, we have generalized our work with a new method based on Legendre polynomials and the α-generalized method to calculate the numerical solution of the evolution problem where the coefficients are variable and the Robin boundary condition. Several examples are presented to confirm the reliability and effectiveness of each proposed method.

Keywords : Confromable fractional calculus, Fourier method, Newmark method, Legendre polynomials, Robin boundary condition, Telegraph equation, Tchebychev polynomials, α-generalized method.

Table des matières

Notations **viii**

Introduction générale **9**

1 Préliminaires **12**
1.1 Quelques notions sur le calcul fractionnaire conformable 12
1.2 La transformée de Laplace fractionnaire conformable 15
1.3 Polynômes de Tchebychev 19
1.4 Polynômes de Legendre 21
1.5 Modélisation mathématique d'équation télégraphique 25

2 Résolution analytique d'équation télégraphique fractionnaire avec coefficients constants 29
2.1 Problème de Cauchy 29
2.2 Problème de Sturm-Liouville conformable 30
2.3 Équation télégraphique conformable en espace et en temps 35

3 Résolution numérique d'équation télégraphique fractionnaire avec coefficients constants 43
3.1 Polynômes de Tchebychev décalés de quatrième espèce 43
3.2 Évaluation de la dérivée fractionnaire conformable 45
3.3 Analyse de convergence 46
3.4 Méthode de collocation de Tchebychev 47
3.5 Méthode de Newmark 49
3.6 Applications numériques 52

4 Résolution numérique d'équation télégraphique fractionnaire avec coefficients variables **59**
4.1 Polynômes de Legendre décalés du première espèce 59
4.2 Évaluation de la dérivée fractionnaire conformable 61
4.3 Analyse de convergence 62
4.4 Méthode de collocation de Legendre 67
4.5 Méthode α-généralisée 69
4.6 Éxemples numériques 72

Conclusion générale **83**

Bibliographie **86**

Liste des tableaux

3.1 Erreurs L_2 et L_∞ et le temps CPU avec $\Delta t = 0,001$, $h = 0,01$ et $\alpha = 1$. 53
3.2 Erreurs L_2 et L_∞ pour différentes valeurs de T et α avec $\Delta t = 0,0001$, $h = 0,01$. . 53
3.3 Erreurs L_2, L_∞ et RMS avec $\Delta t = 0,0001$, $h = 0,01$ et $\beta = 2$. 55
3.4 Erreurs L_2 et L_∞ pour différentes valeurs de T et α avec $\Delta t = 0.0001$ et $h = 0.01$. 57

4.1 Erreurs L_2 et L_∞ avec $\tau = 0,001$, $h = 0,01$ et $\alpha = 1$. 73
4.2 Erreurs L_2 et L_∞ avec $\tau = 0,0001$, $h = 0,01$ et $T = 2$. 74
4.3 erreurs L_2 et L_∞ avec $\tau = 0.0001$, $h = 0.01$ et $\beta = 2$. 75
4.4 Erreur L_∞ pour $T = 1, 2, 3, 4, 5$ avec $\tau = 0,0005$, $h = 0,01$ et $\alpha = 1$. 77
4.5 Erreurs L_2 et L_∞ pour différentes valeurs de T et α avec $\Delta t = 0,0005$, $h = 0,01$. . 78
4.6 Erreur L_∞ pour $T = 1, 2, 3, 4, 5$ avec $\tau = 0,0001$, $h = 0,01$ et $\alpha = 1$. 80
4.7 Erreurs L_2 et L_∞ pour différentes valeurs de T et α avec $\Delta t = 0,0001$, $h = 0,01$. . 80

Table des figures

1.1 Les polynômes de Tchebychev $W_n(x)$ aux différentes valeurs de n. 19
1.2 Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ aux différentes valeurs de n. 22
1.3 Fil télégraphique avec fuite. 26

2.1 Graphes de deux fonction $x \mapsto \tan(\sqrt{x})$ et $x \mapsto -\sqrt{x}$. 40
2.2 Graphes de deux fonction $x \mapsto \tan(\sqrt{x})$ et $x \mapsto 1/\sqrt{x}$. 42

3.1 Comparaison entre solutions numériques et exactes pour différentes valeurs T et α avec $h = 0,01$, $\Delta t = 0,001$. 54
3.2 Graphes spatiaux-temporels pour solutions exactes et numériques pour $T = 4$ et $\alpha = 1$. 54
3.3 Comparaison entre solutions numériques et exactes pour différentes valeurs de T et β avec $h = 0,01$, $\Delta t = 0,001$. 56
3.4 Graphes de solution numérique pour $T = 1$ et $T = 2$ avec $\beta = 2$. 56
3.5 Comparaison entre solutions numériques et exactes pour différentes valeurs de T et α avec $h = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$. 57
3.6 Graphes de la solution numérique et l'erreur absolue pour $T = 1$ et $\alpha = 1$. 58

4.1 Solutions exactes et numériques pour $\alpha = 1$ et $T = 1, 2, 3, 4, 5$. 73
4.2 Solutions exactes et numériques pour $T = 2$ et $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$. 74
4.3 Solutions exactes et numériques pour $\beta = 2$ et $T = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$. 76
4.4 Solutions exactes et numériques pour $T = 1$ et $\beta = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$. 76
4.5 Graphe de la solution numérique pour $T = 4$ et $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$. 78
4.6 Graphe de la solution numérique pour $T = 4$ et $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$. 79
4.7 Graphes des solutions exactes et numériques pour différentes valeurs de T et α avec $h = 0.01$ et $\tau = 0.0001$. 81

Notations

$\ddot{V}(t)$: La dérivée seconde de $V(t)$ par rapport à t 48

$\dot{V}(t)$: La dérivée première de $V(t)$ par rapport à t 48

$\dot{X}(t)$: La dérivée première de $X(t)$ par rapport à t 68

$\dot{X}(t)$: La dérivée seconde de $X(t)$ par rapport à t 68

$\mathcal{D}_a^{(\alpha)}$: L'opérateur de la dérivée fractionnaire conformable à gauche d'ordre α 12

$\mathcal{D}_b^{(\alpha)}$: L'opérateur de la dérivée fractionnaire conformable à droite d'ordre α 12

$\mathcal{I}_a^{\alpha}$: L'opérateur de l'intégrale fractionnaire conformable à gauche d'ordre α 13

$\mathcal{I}_b^{\alpha}$: L'opérateur de l'intégrale fractionnaire conformable à droite d'ordre α 13

$\mathcal{L}$: La transformée de Laplace classique 16

$\mathcal{L}_\alpha$: La transformée de Laplace fractionnaire conformable d'ordre α 15

L_2 : L'erreur L_2 52

L_∞ : L'erreur L_∞ 52

N_t : Le nombre des nœuds de l'intervalle de temps $[0, T]$ 69

N_x : Le nombre des nœuds de l'intervalle de l'espace $[0, 1]$ 69

$P_n^*(x)$: Le polynôme de Legendre décalé de première espèce 60

$P_n(x)$: Le polynôme de Legendre de première espèce 22

RMS : L'erreur quadratique moyenne 52

$W_n^*(x)$: Le polynôme de Tchebychev décalé de première espèce 43

$W_n(x)$: Le polynôme de Tchebychev de quatrième espèce 19

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, le calcul fractionnaire a pris une importance considérable parmi les chercheurs. En fait, les opérateurs d'intégrales et de dérivées d'ordres fractionnaires sont utilisés pour effectuer des simulations plus précises pour divers évènements. Certaines applications du calcul fractionnaire comprennent le contrôle optimal, les milieux poreux, la chimie, la biologie, l'électrochimie, la viscoélasticité, l'électricité, l'électromagnétisme, la propagation des ondes, les systèmes ferroviaires électriques, lignes de télécommunication, analyse des problèmes de réaction cinétique, économie, finance, [11, 13, 16, 27]. Actuellement, les opérateurs fractionnaires sont devenus des instruments puissants pour développer des modèles plus précis que les modèles classiques. Différents types d'opérateurs fractionnaires sont décrits au sens local et non local.

Parmi les opérateurs non locaux, sont les dérivées au sens de Riemann-Liouville et de Caputo, [13,16,27]. Les problèmes qui contiennent la dérivée de Riemann-Liouville nécessitent des conditions initiales incluant la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à $t = 0$, dont la signification physique n'est pas évidente, alors que dans le type de Caputo, les conditions initiales sont similaires à la conditions initiales des équations différentielles ordinaires, qui contiennent des dérivées d'ordre entier des fonctions à $t = 0$, [16, 20]. Ces dérivées non locaux ne satisfont pas à toutes les propriétés du dérivée d'ordre entier. D'autre part, l'une des dérivées fractionnaires locaux est la dérivée fractionnaire conformable et introduite par Khalil et al. [26]. Cette dérivée fractionnaire satisfait toutes les propriétés de la dérivée d'ordre entier.

Dans cette thèse, on s'intéresse aux équations télégraphiques fractionnaires suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^{(\alpha)}\left(\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u\left(x,t\right)\right)+2a\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u\left(x,t\right)+b^2u\left(x,t\right)=\omega\mathcal{D}_x^{(\beta)}\left(\mathcal{D}_x^{(\beta)}u\left(x,t\right)\right) \\ +f\left(x,t\right),\ \left(x,t\right)\in\Omega_T,\ 0<\alpha\leq 1,\ 0<\beta\leq 1, \end{aligned} \tag{1}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^{(1+\alpha)}u\left(x,t\right)+2a\left(x,t\right)\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u\left(x,t\right)+b^2\left(x,t\right)u\left(x,t\right)=\omega\left(x,t\right)\mathcal{D}_x^{(\beta)}u\left(x,t\right) \\ +f\left(x,t\right),\ \left(x,t\right)\in\Omega_T,\ 0<\alpha\leq 1,\ 1<\beta\leq 2, \end{aligned} \tag{2}$$

où $\Omega_T := \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T\}$ avec $T > 0$ donné, $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}$ et $\mathcal{D}_x^{(\beta)}$ représentent les dérivées

fractionnaires conformables à gauche d'ordre α et β par rapport à t et x, respectivement. $f(x,t)$ est le terme source et a, b, ω sont des constantes dans l'équation (1) et sont des variables dans l'équation (2) telles que $a > b \geq 0$ et $\omega > 0$.

Pour $\alpha = \beta = 1$, l'équation (1) est l'équation télégraphique classique introduite par Oliver Heaviside en 1888, voir [22]. Cette équation est une équation hyperbolique linéaire du second ordre qui modélise plusieurs problèmes pertinents dans de nombreux domaines différents tels que l'analyse du signal [25], la propagation des ondes [40], la théorie de la marche aléatoire [6].

On considère les conditions initiales suivantes :

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3}$$

et les conditions aux limites de Robin :

$$\begin{cases} \mu_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} u(0,t) + \lambda_1 u(0,t) = g(t), \ \mu_1\lambda_1 \leq 0 \text{ et } \ |\mu_1| + |\lambda_1| > 0, \\ \mu_2 D_x^{(\beta)} u(1,t) + \lambda_2 u(1,t) = h(t), \ \mu_2\lambda_2 \geq 0 \text{ et } |\mu_2| + |\lambda_2| > 0. \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

où φ, ψ, g, h sont des fonctions données.

Des cas particuliers des problèmes d'évolution (1), (3)-(4) et (2)-(4) ont été étudiés précédemment et résumés comme suit :

- ☞ Lorsque $\alpha = \beta = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1$, plusieurs méthodes numériques considérés pour résoudre le problème d'évolution (1), (3)-(4) telles que fonctions de base radiale des splines [14], méthode de Tchebychev [38], méthode de Galerkin multi-ondelettes de Legendre [41], méthode de perturbation d'homotopie [31], méthode collocation spectrale de Tchebychev [24], méthode de quadrature différentielle [36], méthode de collocation B-spline [39], méthode des ondelettes de Haar [8], fonctions de Bessel [42].
- ☞ Lorsque $\beta = \alpha + 1 = 2$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1$, le problème d'évolution (2)-(4) a été étudié par différentes méthodes comme le schéma de Crank-Nicolson et les ondelettes de Haar [35], méthode semi-analytique [28] et la méthode de collocation de Jacobi décalée [21].
- ☞ Lorsque a, b, ω sont des constantes dans (2), $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1$ et les dérivées fractionnaires en temps et en espace sont au sens de Caputo, de nombreux auteurs ont contribué au développement de résultats analytiques et numériques du problème (2)-(4) telles que les transformations de Laplace, de Fourier et la technique d'inversion des transformations [23], méthode de la double transformation de Laplace [15], méthode de collocation B-spline cubique [30], nouvelles B-splines trigonométriques cubiques [19], une approche sans maillage de la méthode de collocation [7], méthode des matrices d'opérations polynomiales de Bernstein [18].

À ma connaissance, le cas $0 < \alpha, \beta < 1$ dans l'équation (1) et $1 < \beta = \alpha + 1 < 2$ dans l'équation

(2) et les conditions aux limites de Robin (4) sont considérés pour la première fois dans cette thèse. Notre objectif dans cette thèse est de proposer des méthodes pour résoudre analytiquement et numériquement les deux problèmes d'évolution (1),(3)-(4) et (2)-(4).

Cette thèse se décompose en quatre chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires concernant le calcul fractionnaire conformable, polynômes de Tchebychev, polynômes de Legendre et la modélisation mathématique de l'équation télégraphique linéaire en dimension un.

Dans le deuxième chapitre, nous avons utilisé la méthode de Fourier et les propriétés de la dérivée conformable pour calculer la solution analytique sous forme d'une série de fonctions du problème d'évolution (1), (3)-(4). Nous avons présenté plusieurs exemples pour confirmer la technique utilisée. Pour le cas $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1$ dans les conditions aux limites de Robin (4), le problème d'évolution (1), (3)-(4) est un objet d'un article intitulé "*Analytical solution for the conformable fractional telegraph equation by Fourier method*" publié dans un journal international "Proceedings of International Mathematical Sciences", voir [2].

Le troisième chapitre est un projet d'un article intitulé "*An efficient algorithm for solving the conformable time-space fractional telegraph equations*" publié dans une revue renommée internationale "Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. (MJPAA)", voir [3]. Nous avons proposé un algorithme efficace pour résoudre numériquement le problème d'évolution (2)-(4) avec les coefficients a, b et w sont des constants. Cet algorithme est basé sur les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce et la méthode de Newmark. Trois exemples numériques sont présentés pour confirmer l'efficacité et la fiabilité de cet algorithme.

Dans le dernier chapitre, nous avons généralisé le travail du chapitre 3 avec une nouvelle méthode pour la résolution numérique du problème d'évolution (2)-(4) avec $\alpha = 1$ pour la condition initiale (3) et $\beta = 1$ pour la condition aux limites de Robin (4). Cette méthode est basée sur les polynômes de Legendre et la méthode α-généralisée. Avec cinq exemples numériques, nous avons présenté une étude comparative entre cette méthode, la méthode numérique donné dans le chapitre 3 et quelque méthodes numériques disponibles dans la littérature. Cette méthode donne une excellente approximation avec un petit nombre de points de collocation.

On termine cette thèse par une conclusion générale et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires concernant le calcul fractionnaire conformable, la transformée de Laplace fractionnaire conformable, polynômes de Tchebychev, polynômes de Legendre et la modélisation mathématique de l'équation télégraphique linéaire en dimension un.

1.1 Quelques notions sur le calcul fractionnaire conformable

Dans cette section, nous commençons par rappeler quelques concepts sur le calcul fractionnaire conformable.

Définition 1.1. (Les dérivées fractionnaires conformables à gauche et à droite, [1])

1. Soient $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $\alpha \in]0, 1]$. Alors, la dérivée fractionnaire conformable à gauche d'ordre α est définie par :

$$\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t + \varepsilon (t-a)^{1-\alpha}\right) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{1.1}$$

   Si $\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(t)$ existe sur $]a, +\infty[$, alors $\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(a) = \lim_{t \to a^+} \mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(t)$. Lorsque $a = 0$, nous écrivons $\mathcal{D}^{(\alpha)}$, qui est la définition originale introduit par Khalil et al. [26], et on dit que f est α-différentiable chaque fois que $\mathcal{D}^{(\alpha)}$ existe.

2. Soient $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $\alpha \in]0, 1]$. Alors, la dérivée fractionnaire conformable à droite d'ordre α est définie par :

$$\mathcal{D}_b^{(\alpha)}(f)(t) := -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t + \varepsilon (b-t)^{1-\alpha}\right) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{1.2}$$

   Si $\mathcal{D}_b^{(\alpha)}(f)(t)$ existe sur $]-\infty, b[$, alors $\mathcal{D}_b^{(\alpha)}(f)(b) = \lim_{t \to b^-} \mathcal{D}_b^{(\alpha)}(f)(t)$.

Propriétés 1.1. ([1, 26]) Pour $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$, nous avons les propriétés

suivantes :

$$\text{Si } f \text{ est } \alpha\text{-différentiable, alors } f \text{ est continue.} \tag{1.3}$$

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}(af+bg) = a\mathcal{D}^{(\alpha)}(f) + b\mathcal{D}^{(\alpha)}(g),\ a,b \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}t^k = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n)}t^{k-\alpha} & \text{Si } k \in \mathbb{N} \text{ et } k > \alpha, \\ 0 & \text{Si } k \in \mathbb{N} \text{ et } k < \alpha, \end{cases}, \tag{1.5}$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma d'Euler et $n < \alpha \leq n+1$.

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}(C) = 0 \text{ où } C \text{ est une constante.} \tag{1.6}$$

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}(fg) = f\mathcal{D}^{(\alpha)}(g) + g\mathcal{D}^{(\alpha)}(f). \tag{1.7}$$

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathcal{D}^{(\alpha)}(f) - f\mathcal{D}^{(\alpha)}(g)}{g^2} \text{ avec } g \neq 0. \tag{1.8}$$

Si f est n fois différentiable sur $[a,+\infty[$ alors on a :

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}(f)(t) = (t-a)^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t),\ n < \alpha \leq n+1. \tag{1.9}$$

Soit $h(t) = (f \circ g)(t)$ telle que f et g sont des fonctions α-différentiables, alors

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}(h)(t) = \mathcal{D}^{(\alpha)}(f)(g(t)) \cdot \mathcal{D}^{(\alpha)}(g)(t) \cdot g^{\alpha-1}(t). \tag{1.10}$$

Définition 1.2. (Les intégrales fractionnaires conformables gauche et droite, [1])

1. Soient $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $\alpha \in]0,1]$. Alors, l'intégrale fractionnaire comfomable à gauche d'ordre α est définie par :

$$\mathcal{I}_a^{\alpha}(f)(t) := \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x)\,dx. \tag{1.11}$$

2. Soient $f :]-\infty,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $\alpha \in]0,1]$. Alors, l'intégrale fractionnaire comfomable à droite d'ordre α est définie par :

$$\mathcal{I}_b^{\alpha}(f)(t) := \int_t^b (b-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx. \tag{1.12}$$

Lemme 1.1 ([1]). *Soient $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $\alpha \in]0,1]$. Pour tout $t > a$, nous avons :*

1. *Si f est continue, alors $\mathcal{D}_a^{(\alpha)}\mathcal{I}_a^{\alpha}(f)(t) = f(t)$.*
2. *Si f est différentiable, alors $\mathcal{I}_a^{\alpha}\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(t) = f(t) - f(a)$.*

Démonstration. 1. f est continue, alors $\mathcal{I}_a^{\alpha}(f)(t)$ est différentiable. Donc, en appliquant (1.9)

sur $\mathcal{I}_a^\alpha (f)(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a^{(\alpha)}\mathcal{I}_a^\alpha (f)(t) = (t-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\mathcal{I}_a^\alpha (f)(t) &= (t-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x)\,dx \\ &= (t-a)^{1-\alpha}(t-a)^{\alpha-1} f(t) \\ &= f(t).\end{aligned}$$

2. f est différentiable et avec (1.9), on a $\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t)$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a^\alpha \mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(t) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1}\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(x)\,dx &= \int_a^t (x-a)^{\alpha-1}(x-a)^{1-\alpha} f'(x)\,dx \\ &= \int_a^t f'(x)\,dx \\ &= f(t) - f(a).\end{aligned}$$

□

Théorème 1.1 (Intégration par parties, [1]). *Soient $\alpha \in]0,1]$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données telle que fg est une fonction différentiable. Alors, nous avons :*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(g)(x)(x-a)^{\alpha-1}\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \\ - \int_a^b g(x)\,\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(x)(x-a)^{\alpha-1}\,dx.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Démonstration. En utilisant (1.11) et (1.7), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a^\alpha \mathcal{D}_a^{(\alpha)}(fg)(b) &= \int_a^b (x-a)^{\alpha-1}\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(fg)(x)\,dx \\ &= \int_a^b (x-a)^{\alpha-1}\left[f(x)\,\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(g)(x) + g(x)\,\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(x)\right]dx \\ &= \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x)\,\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(g)(x)\,dx + \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} g(x)\,\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(x)\,dx\end{aligned} \tag{1.14}$$

fg est différentiable et avec Lemme 1.1, nous avons :

$$\mathcal{I}_a^\alpha \mathcal{D}_a^{(\alpha)}(fg)(b) = f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{1.15}$$

De (1.14) et (1.15), on trouve (1.13). □

1.2 La transformée de Laplace fractionnaire conformable

Dans cette section, nous présentons la définition de la transformé de Laplace fractionnaire conformable et certaines des ses propriétés.

Définition 1.3 (La transformée de Laplace fractionnaire conformable, [1]). Soient $\alpha \in \,]\,0,1\,]$ et $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. Alors, la transformée de Laplace fractionnaire conformable d'ordre α est définie par :

$$\mathcal{L}_\alpha \{f(t)\} = \mathcal{F}_\alpha(s) := \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} f(t)\, e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt = \lim_{\tau\to+\infty} \int_0^{\tau} t^{\alpha-1} f(t)\, e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt. \tag{1.16}$$

Si $\alpha = 1$, alors (1.16) est la définition classique de la transformée de Laplace.

Théorème 1.2 ([1]). *Soient $\alpha \in \,]\,0,1\,]$ et $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. Alors,*

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{\mathcal{D}^{(\alpha)}(f)(t)\right\} = s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0). \tag{1.17}$$

Démonstration. Avec (1.9), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\alpha \left\{\mathcal{D}^{(\alpha)}(f)(t)\right\} &= \lim_{\tau\to+\infty} \int_0^{\tau} t^{\alpha-1}\mathcal{D}^{(\alpha)}(f)(t)\, e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\
&= \lim_{\tau\to+\infty} \int_0^{\tau} t^{\alpha-1}t^{1-\alpha} f'(t)\, e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\
&= \lim_{\tau\to+\infty} \int_0^{\tau} f'(t)\, e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt,
\end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\alpha \left\{\mathcal{D}^{(\alpha)}(f)(t)\right\} &= \lim_{\tau\to+\infty} \left[f(t)\, e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right]_0^{\tau} + \lim_{\tau\to+\infty} \int_0^{\tau} st^{\alpha-1} f(t)\, e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\
&= -f(0) + s\lim_{\tau\to+\infty} \int_0^{\tau} t^{\alpha-1} f(t)\, e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\
&= s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0), \quad s > 0.
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.2 ([1]). *Soient $\alpha \in \,]\,0,1\,]$ et $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s) = \mathcal{F}_\alpha(s)$ existe. Alors, nous avons :*

$$\mathcal{F}_\alpha(s) = \mathcal{L}\left\{f\left((\alpha t)^{1/\alpha}\right)\right\}(s), \tag{1.18}$$

où $\mathcal{L}$ est la transformée de Laplace classique telle que

$$\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(s\right)=\mathcal{F}\left(s\right):=\int_{0}^{+\infty}f\left(t\right)e^{-st}dt.$$

Démonstration. Avec le changement de variable $x=\frac{t^{\alpha}}{\alpha}$, on obtient :

$$\mathcal{F}_{\alpha}\left(s\right)=\lim_{\tau\to+\infty}\int_{0}^{\tau}t^{\alpha-1}f\left(t\right)e^{-s\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}dt=\lim_{\tau\to+\infty}\int_{0}^{\tau}f\left(\left(\alpha x\right)^{1/\alpha}\right)e^{-sx}dx=\mathcal{L}\left\{f\left(\left(\alpha x\right)^{1/\alpha}\right)\right\}\left(s\right).$$

□

Exemple 1.1. En utilisant (1.18), nous obtenons :

1. $\mathcal{L}_{\alpha}\left\{\sin\left(\omega\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)\right\}\left(s\right)=\mathcal{L}\left\{\sin\left(\omega\frac{\left(\left(\alpha t\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha}}{\alpha}\right)\right\}=\mathcal{L}\left\{\sin\left(\omega t\right)\right\}=\frac{\omega}{s^{2}+\omega^{2}}$, $s>0$.
2. $\mathcal{L}_{\alpha}\left\{\cos\left(\omega\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)\right\}\left(s\right)=\mathcal{L}\left\{\cos\left(\omega\frac{\left(\left(\alpha t\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha}}{\alpha}\right)\right\}=\mathcal{L}\left\{\cos\left(\omega t\right)\right\}=\frac{s}{s^{2}+\omega^{2}}$, $s>0$.

Définition 1.4 (Ordre exponentiel fractionnaire conformable, [5])**.** Soit $\alpha\in\left]\,0,1\,\right]$. Une fonction f est dite d'ordre exponentiel fractionnaire conformable μ, s'il existe des constantes $M>0$ et $t_{0}\geq0$ telle que

$$\left|f\left(t\right)\right|\leq Me^{\mu\frac{t^{\alpha}}{\alpha}},\ t\geq t_{0}.$$

Théorème 1.3 (Existence de la transformée de Laplace fractionnaire conformable, [5])**.** *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty\,[$, et d'ordre exponentiel fractionnaire μ, alors la transformée de Laplace fractionnaire conformable $\mathcal{F}_{\alpha}\left(s\right)$ de f existe pour tout $s>\mu$.*

Démonstration. f est d'ordre exponentiel fractionnaire conformable μ, alors il existe des constantes $M>0$ et $t_{0}\geq0$ telle que

$$\left|f\left(t\right)\right|\leq Me^{\mu\frac{t^{\alpha}}{\alpha}},\ t\geq t_{0}.$$

De plus, f est continu par morceaux et d'après (1.16) nous avons :

$$I=\int_{0}^{+\infty}t^{\alpha-1}f\left(t\right)e^{-s\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}dt=I_{1}+I_{2},$$

où $I_{1}=\int_{0}^{t_{0}}t^{\alpha-1}f\left(t\right)e^{-s\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}dt$ et $I_{2}=\int_{t_{0}}^{+\infty}t^{\alpha-1}f\left(t\right)e^{-s\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}dt$.

Pour $t \in [0, t_0]$, f est continu par morceaux. Soit $B = \max_{0 \leq t \leq t_0} |f(t)|$, alors

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{t_0} t^{\alpha-1} f(t) e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \right| &\leq \int_0^{t_0} \left| t^{\alpha-1} f(t) e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} \right| dt \\ &\leq B \int_0^{t_0} t^{\alpha-1} e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ &\leq B \left(\frac{1 - e^{-s\frac{t_0^\alpha}{\alpha}}}{s} \right),\end{aligned}$$

d'où, l'intégrale I_1 existe.

Pour $t \in [t_0, +\infty[$, nous avons :

$$\begin{aligned}\left| \lim_{\tau \to +\infty} \int_{t_0}^{\tau} t^{\alpha-1} f(t) e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \right| &\leq \lim_{\tau \to +\infty} \int_{t_0}^{\tau} t^{\alpha-1} |f(t)| e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ &\leq M \lim_{\tau \to +\infty} \int_0^{\tau} t^{\alpha-1} e^{-(s-\mu)\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt.\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $x = (s-\mu)\frac{t^\alpha}{\alpha}$, on obtient :

$$\left| \lim_{\tau \to +\infty} \int_{t_0}^{\tau} t^{\alpha-1} f(t) e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \right| \leq \frac{M}{s-\mu},$$

d'où, l'intégrale I_2 est convergente pour $s > \mu$. Par conséquent, la transformée de Laplace fractionnaire conformable existe pour $s > \mu$. □

Propriétés 1.2.

1. La transformée de Laplace fractionnaire conformable est un opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}_\alpha \{\mu f(t) + \lambda g(t)\}(s) = \mu \mathcal{L}_\alpha \{f(t)\} + \lambda \mathcal{L}_\alpha \{g(t)\}, \tag{1.19}$$

où μ et λ sont des constantes réels.

2. Nous avons :

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ f(t) e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}} \right\}(s) = \mathcal{L} \left\{ f\left((\alpha t)^{1/\alpha} \right) \right\} \Big|_{s=s+k}, \quad s > -k. \tag{1.20}$$

3. Soient $\alpha \in]0, 1]$ et $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions. La transformée de Laplace fractionnaire conformable de la produit de convolution de f et g est donnée par :

$$\mathcal{L}_\alpha \{(f * g)(t)\} = \mathcal{F}_\alpha(s) \mathcal{G}_\alpha(s), \tag{1.21}$$

où $(f * g)(t) = \int_0^t f\left((t^\alpha - \tau^\alpha)^{1/\alpha} \right) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}$.

Démonstration. 1. Trivial par 1.16.

2. En utilisant Lemme 1.2, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\left\{f(t)\,e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{f\left((\alpha t)^{1/\alpha}\right)e^{-k\frac{\left((\alpha t)^{1/\alpha}\right)^\alpha}{\alpha}}\right\}(s)\\ &= \mathcal{L}\left\{f\left((\alpha t)^{1/\alpha}\right)e^{-kt}\right\}(s)\\ &= \mathcal{L}\left\{f\left((\alpha t)^{1/\alpha}\right)\right\}(s)\Big|_{s=s+k},\ s>-k.\end{aligned}$$

Par exemple :

$$\mathcal{L}_\alpha\left\{\cos\left(\omega\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\cos(\omega t)\right\}|_{s=s+k} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=s+k} = \frac{s+k}{(s+k)^2+\omega^2},$$

et

$$\mathcal{L}_\alpha\left\{\sin\left(\omega\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\sin(\omega t)\right\}|_{s=s+k} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=s+k} = \frac{\omega}{(s+k)^2+\omega^2}.$$

3. D'après Lemme 1.2 et la définition de convolution, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\left\{(f*g)(t)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{(f*g)\left((\alpha t)^{1/\alpha}\right)\right\}(s)\\ &= \int_0^{+\infty}(f*g)\left((\alpha t)^{1/\alpha}\right)e^{-st}dt\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f\left((\alpha(t-x))^{1/\alpha}\right)g\left((\alpha x)^{1/\alpha}\right)dx\right)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\mathcal{L}_\alpha\left\{(f*g)(t)\right\}(s) = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} f\left((\alpha(t-x))^{1/\alpha}\right)g\left((\alpha x)^{1/\alpha}\right)e^{-st}dtdx.$$

On pose $y = t - x$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\left\{(f*g)(t)\right\}(s) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f\left((\alpha y)^{1/\alpha}\right)g\left((\alpha x)^{1/\alpha}\right)e^{-s(x+y)}dydx\\ &= \left(\int_0^{+\infty} f\left((\alpha y)^{1/\alpha}\right)e^{-sy}dy\right)\left(\int_0^{+\infty} g\left((\alpha x)^{1/\alpha}\right)e^{-sx}dx\right)\\ &= \mathcal{L}\left\{f\left((\alpha y)^{1/\alpha}\right)\right\}(s)\cdot\mathcal{L}\left\{g\left((\alpha x)^{1/\alpha}\right)\right\}(s)\\ &= \mathcal{L}_\alpha\left\{f(t)\right\}(s)\cdot\mathcal{L}_\alpha\left\{g(t)\right\}(s)\\ &= \mathcal{F}_\alpha(s)\,\mathcal{G}_\alpha(s).\end{aligned}$$

□

1.3 Polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev sont largement utilisés dans l'analyse numérique, l'approximation des moindres carrés, l'approximation polynomiale, l'intégration numérique et les méthodes spectrales pour les équations aux dérivées partielles. Il existe quatre type des polynômes de Tchebychev. Dans cette thèse, on considère les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce qui sont des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante, [29] :

$$\left(1-x^2\right) y''(x) - (2x+1)\, y'(x) + n(n+1)\, y(x) = 0.$$

Les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce notés par $W_n(x)$.

Définition 1.5 ([29]). Le polynôme de Tchebychev du quatrième espèce $W_n(x)$ est un polynôme de degré n en x défini par :

$$W_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \tag{1.22}$$

où $x = \cos\theta$ et $\theta \in [0, \pi]$.

Figure 1.1 présente les graphes des premiers polynômes de Tchebychev $W_n(x)$.

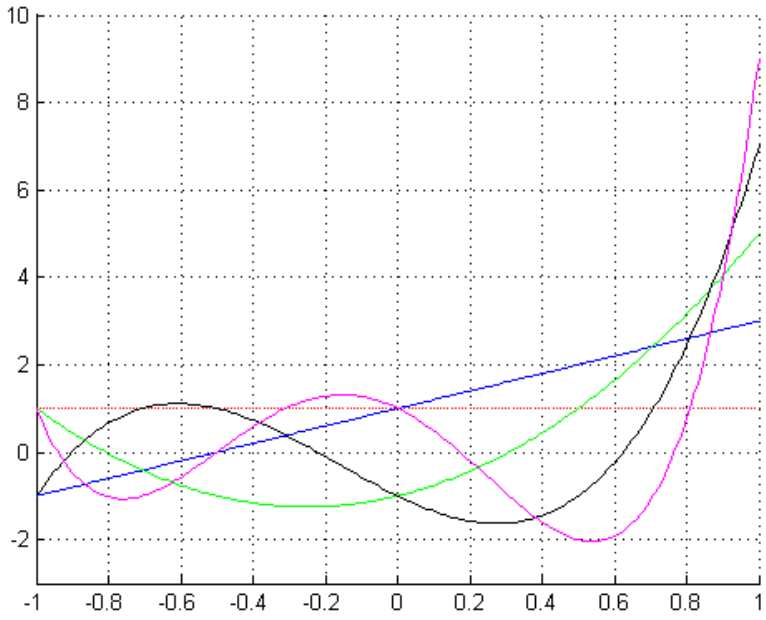


FIGURE 1.1 – Les polynômes de Tchebychev $W_n(x)$ aux différentes valeurs de n.

Proposition 1.1 ([29]). *Les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce $W_n(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[-1,1]$ par rapport la fonction poids $w(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ c'est à dire*

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}W_n(x)\,W_m(x)\,dx=\begin{cases}\pi & si\ \ n=m,\\ 0 & si\ \ n\neq m.\end{cases}$$

Démonstration. Soient $n,m\in\mathbb{N}$ et $x=\cos(\theta)$. Nous avons :

1. Si $n\neq m$, alors,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}W_n(x)\,W_m(x)\,dx&=2\int_0^{\pi}\sin(n+1/2)\,\theta\sin(m+1/2)\,\theta d\theta\\&=\int_0^{\pi}\left[\cos(n-m)\,\theta-\cos(n+m)\,\theta\right]d\theta\\&=\left[\frac{\sin(n-m)\,\theta}{n-m}-\frac{\sin(n+m)\,\theta}{n+m}\right]_0^{\pi}\\&=0.\end{aligned}$$

2. Si $n=m$, alors,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}W_n^2(x)\,dx&=2\int_0^{\pi}\sin^2(n+1/2)\,\theta d\theta\\&=\int_0^{\pi}\left[1-\cos(2n+1)\,\theta\right]d\theta\\&=\left[\theta-\frac{\sin(2n+1)\,\theta}{2n+1}\right]_0^{\pi}\\&=\pi.\end{aligned}$$

□

Proposition 1.2 ([29]). *Les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce $W_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases}W_0(x)=1,\\ W_1(x)=2x+1,\\ W_n(x)=2xW_{n-1}(x)-W_{n-2}(x),\ \forall n\geq 2.\end{cases}\tag{1.23}$$

Démonstration. Soit $x\in[-1,1]$ et $x=\cos(\theta)$. Nous avons :

$$\sin(n+1/2)\,\theta+\sin(n-2+1/2)\,\theta=2\cos(\theta)\sin(n-1+1/2)\,\theta.$$

En divisant par $\sin(\theta/2)$, on obtient :

$$\frac{\sin(n+1/2)\,\theta}{\sin(\theta/2)} + \frac{\sin(n-2+1/2)\,\theta}{\sin(\theta/2)} = 2\cos(\theta)\,\frac{\sin(n-1+1/2)\,\theta}{\sin(\theta/2)},$$

d'où le résultat (1.23). □

Proposition 1.3 ([29]). *Les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce sont de cas particulier des polynômes de Jacobi c'est à dire*

$$W_n(x) = \frac{2^{2n}}{C_n^{2n}} P_n^{(1/2,-1/2)}(x) = 2^n n! P_n^{(1/2,-1/2)}(x).$$

Alors, la forme explicite des polynômes de Tchebychev du quatrième espèce est donnée par :

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{n-k}\Gamma(2n-k+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(2n-2k+1)}(x+1)^{n-k},$$

où $\Gamma(\cdot)$ *est la fonction Gamma d'Euler.*

Proposition 1.4 ([29]). *Les zéros de* $W_n(x)$ *sont de la forme :*

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1/2}\right),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Démonstration. D'après (1.22), les zéros pour x dans $[-1,1]$ de $W_n(x)$ doivent correspondre à les zéros pour θ dans $[0,\pi]$ de $\sin(n+1/2)\,\theta$, i.e.

$$(n+1/2)\,\theta = k\pi,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

donc, $\theta = \frac{k\pi}{n+1/2}$ c'est à dire $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1/2}\right)$. □

1.4 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre, appelés aussi fonctions de Legendre, sont des polynômes orthogonaux et sont un cas particulier des fonctions ultra-sphériques et des polynômes de Jacobi. Ils se posent dans de nombreux problèmes en particulier dans ceux impliquant des coordonnées sphériques. Dans les coordonnées sphériques, les polynômes de Legendre remplissent une fonction majeure, puisque la dépendance angulaire est mieux gérée par les harmoniques sphériques définies en termes de polynômes de Legendre. Il existe deux type de polynômes de Legendre.

Dans cette thèse, on considère le premier type de polynômes de Legendre qui est une solution de l'équation différentielle suivante, voir [17] :

$$\left(1-x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)\, y(x) = 0. \tag{1.24}$$

Les polynômes de Legendre du première espèce sont notés par $P_n(x)$.

Définition 1.6 (Les polynômes de Legendre $P_n(x)$, [17])**.** Le polynôme de Legendre du première espèce est un polynôme de degré n en x défini par la formule de Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right], \tag{1.25}$$

où x est un variable réel ou complexe.

Figure 1.2 présente les graphes des premiers polynômes de Legendre $P_n(x)$.

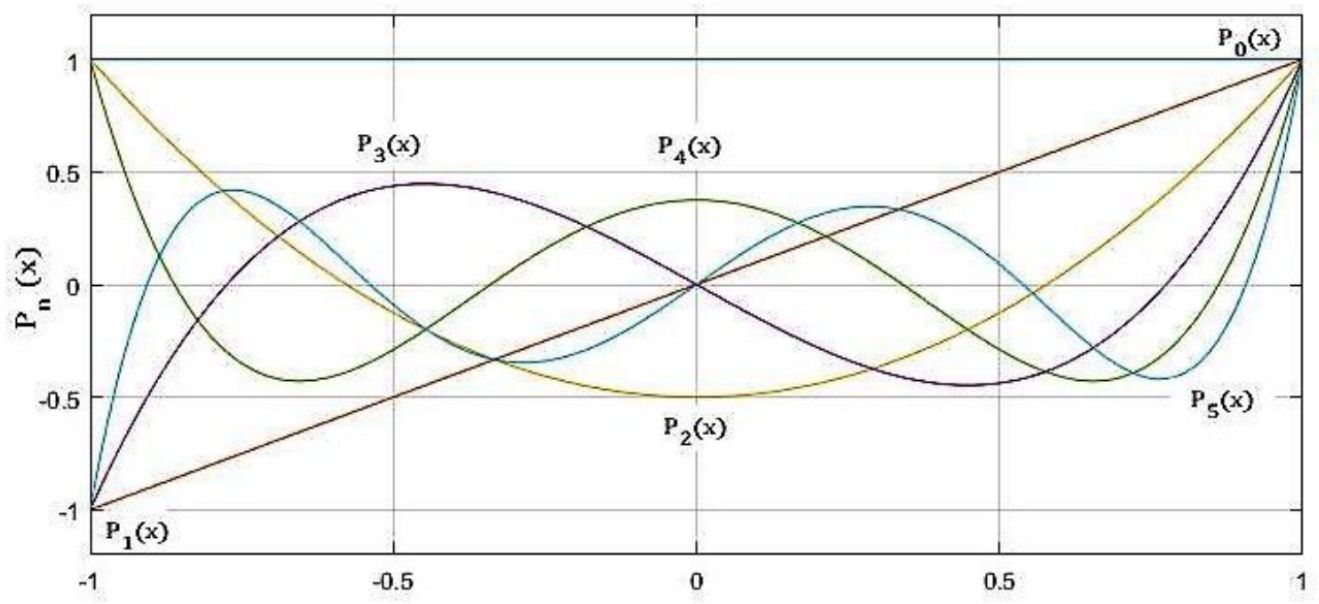


FIGURE 1.2 – Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ aux différentes valeurs de n.

Proposition 1.5 ([17])**.** *La forme analytique du polynôme de Legendre de la première espèce est donnée par :*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.26}$$

où $\left[\frac{n}{2}\right]$ *est la partie entière de* $n/2$.

Démonstration. En utilisant la loi binomiale de Newton et la formule de Rodrigues (1.25) , on

obtient :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n! x^{2n-2k}}{k!(n-k)!}\right] \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\frac{d^n x^{2n-2k}}{dx^n} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}, \end{aligned}$$

Puisque $2n-2k$ dans la combinaison doit être supérieur ou égal à n, donc $0 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$. □

Définition 1.7 ([17]). La fonction génératrice du polynôme de Legendre $P_n(x)$ est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \tag{1.27}$$

Proposition 1.6 ([17]). *Les polynômes de Legendre de première espèce $P_n(x)$ satisfont la formule de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x \\ P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.28}$$

Démonstration. En dérivant par rapport à t la fonction génératrice (1.27), on obtient :

$$n\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}P_n(x) = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)\sqrt{1-2xt+t^2}}.$$

En multipliant les deux côtés par $1-2xt+t^2$ et d'après (1.27), nous obtenons :

$$n\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}P_n(x) = \frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (x-t)\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n(x).$$

Soit chaque t élevé à la puissance n :

$$(n+1)\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_{n+1}(x) - 2nx\sum_{n=1}^{+\infty} t^n P_n(x) + (n-1)\sum_{n=2}^{+\infty} t^n P_{n-1}(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} t^n P_{n-1}(x).$$

En égalant le coefficient de t^n, nous obtenons la formule de récurrence (1.28) □

Lemme 1.3 ([17]). *Les polynômes de Legendre du première espèce forment un ensemble orthogonal sur*

l'intervalle $[-1,1]$ *c'est à dire*

$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & si\ \ n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1} & si\ \ n = m. \end{cases} \tag{1.29}$$

Démonstration. 1. Pour $n \neq m$, P_n et P_m sont des solutions de l'équation de Legendre (1.24), alors

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right) P_n'(x)\right] + n(n+1) P_n(x) = 0, \tag{1.30}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right) P_m'(x)\right] + m(m+1) P_m(x) = 0. \tag{1.31}$$

En multipliant (1.30) par $P_m(x)$ et (1.31) par $P_n(x)$ et avec la différence, on obtient :

$$\begin{aligned} &P_m(x)\left(\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right) P_n'(x)\right] + n(n+1) P_n(x)\right) \\ -&P_n(x)\left(\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right) P_m'(x)\right] + m(m+1) P_m(x)\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.32}$$

En intégrant l'équation (1.32) par rapport à x entre -1 et 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_m(x)\left(\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right) P_n'(x)\right]\right) dx - \int_{-1}^{1} P_n(x)\left(\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right) P_m'(x)\right]\right) dx \\ + \left[n(n+1) - m(m+1)\right] \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0. \end{aligned}$$

La preuve est faite en utilisant l'intégration par parties.

2. Pour $n = m$ et en utilisant la fonction génératrice (1.27), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, \tag{1.33}$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} t^m P_m(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \tag{1.34}$$

En multipliant (1.33) par (1.34), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} t^{n+m} P_n(x)\, P_m(x) = \frac{1}{1-2xt+t^2}.$$

En intégrant les deux côtés par rapport à x de -1 à 1, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} t^{n+m}\left(\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx\right)=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2xt+t^2}.$$

Puisque $\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0$ pour $n\neq m$, donc on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\left(\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx\right)&=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2xt+t^2}\\&=-\frac{1}{2t}\left[\ln\left(1-2xt+t^2\right)\right]_{-1}^{1}\\&=\frac{1}{t}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right]\\&=\frac{1}{t}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n}.\end{aligned}$$

En égalant les coefficients de t^{2n}, on trouve :

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1},$$

et la preuve est terminée.

□

1.5 Modélisation mathématique d'équation télégraphique

Afin de pouvoir modéliser les équations télégraphiques, il est nécessaire de comprendre les principes de base de l'électricité.

Définition 1.8. (Loi d'Ohm, [12, Ch.3]) La loi d'Ohm décrite la relation entre la tension, le courant et la résistance dans un circuit électrique.

Définition 1.9. (Première loi de Kirchhoff, [12, Ch.3]) La première loi de Kirchhoff stipule que le courant circulant dans une jonction, dans un circuit ou un nœud, doit être égal au courant sortant de la jonction ou du nœud.

Définition 1.10. (Deuxième loi de Kirchhoff, [12, Ch.3]) La deuxième loi de Kirchhoff stipule que, pour tout chemin en boucle fermée autour d'un circuit, la somme des gains de tension et des chutes de tension est égale à zéro. Cela implique qu'aucune énergie ne peut être perdue ou gagnée par le circuit, donc le changement de tension total doit être nul.

On considère un morceau infiniment petit de fil de câble télégraphique comme un circuit électrique illustré dans Figure 1.3. D'autre part, on suppose que le câble est imparfaitement isolé de sorte qu'il existe une fuite d'une capacité et de courant à la terre.

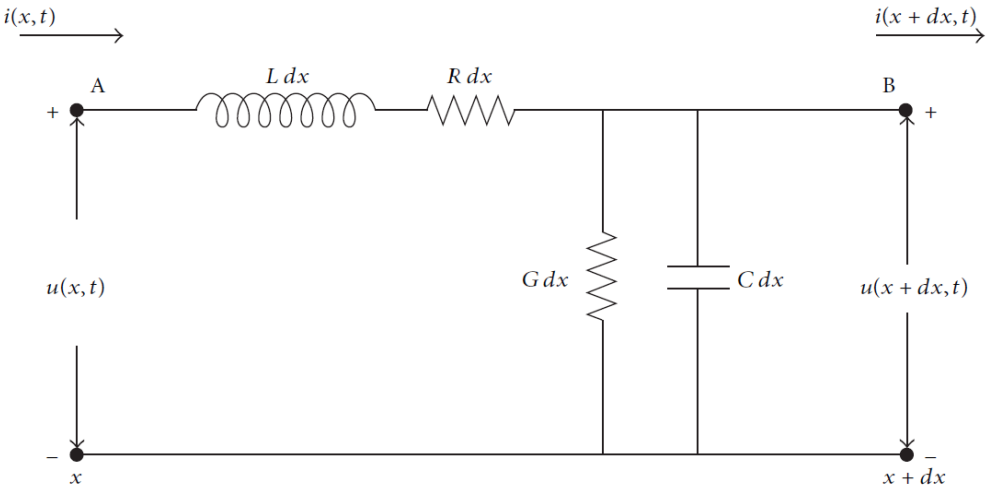


FIGURE 1.3 – Fil télégraphique avec fuite.

Soient

$$\begin{aligned} x &= \text{est la distance de l'extrémité d'envoi du câble,} \\ u\,(x,t) &= \text{est la tension en tout point et à tout moment,} \\ i\,(x,t) &= \text{Courant en tout point et à tout moment,} \\ R &= \text{désigne la résistance du câble,} \\ L &= \text{désigne l'inductance du câble,} \\ G &= \text{désigne la conductance à la terre,} \\ C &= \text{désigne la capacité à la terre.} \end{aligned}$$

Ensuite, par la loi d'Ohm, la tension aux bornes de la résistance est donnée par :

$$V = iR. \tag{1.35}$$

De plus, la chute de tension aux bornes de l'inducteur est donnée par :

$$u = L\frac{di}{dt}. \tag{1.36}$$

La chute de tension aux bornes du condensateur est donnée par :

$$u = \frac{1}{C}\int idt. \tag{1.37}$$

La tension à la borne B est égale à la tension à la borne A moins la chute de tension le long de l'élément AB. D'après (1.35)-(1.37), nous avons :

$$u\left(x+dx,t\right)-u\left(x,t\right)=-\left(Rdx\right)i-\left(Ldx\right)\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{1.38}$$

En devisant (1.38) par dx et faisant $dx\to 0$, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-Ri-L\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{1.39}$$

De même, le courant à la borne B est égal au courant à la borne A moins le courant de fuite à la terre, donc on a :

$$i\left(x+dx,t\right)-i\left(x,t\right)=-\left(Gdx\right)u-i_{C}dx. \tag{1.40}$$

Le courant traversant le condensateur est donné par :

$$i_{C}=C\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1.41}$$

En devisant (1.40) par dx et faisant $dx\to 0$, on obtient :

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-Gu-C\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1.42}$$

En dérivant (1.39) par rapport à x et (1.42) par rapport à t, obtient :

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=-R\frac{\partial i}{\partial x}-L\frac{\partial^{2}i}{\partial x\partial t}, \tag{1.43}$$

et

$$\frac{\partial^{2}i}{\partial t\partial x}=-G\frac{\partial u}{\partial t}-C\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}. \tag{1.44}$$

En remplaçant (1.44) dans (1.43), on obtient :

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=-R\frac{\partial i}{\partial x}+LG\frac{\partial u}{\partial t}+LC\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}. \tag{1.45}$$

En remplaçant (1.42) dans (1.45), on obtient :

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=LC\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}+\left(RC+GL\right)\frac{\partial u}{\partial t}+GRu. \tag{1.46}$$

En dérivant (1.39) par rapport à t et (1.42) par rapport à x, puis en éliminant les dérivées de u,

on obtient :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + GRi. \tag{1.47}$$

Remarque 1.1. On peut reformuler les deux équations (1.46) et (1.47) comme suit :

$$u_{tt}(x,t) + 2au_t(x,t) + b^2 u(x,t) = \omega u_{xx}(x,t) \tag{1.48}$$

et

$$i_{tt}(x,t) + 2ai_t(x,t) + b^2 i(x,t) = \omega i_{xx}(x,t), \tag{1.49}$$

où $2a = \frac{R}{L} + \frac{G}{C}$, $b^2 = \frac{GR}{LC}$ et $\omega = \frac{1}{LC}$. Les deux équations (1.48) et (1.49) sont connues sous le nom d'équation télégraphique.

CHAPITRE 2

RÉSOLUTION ANALYTIQUE D'ÉQUATION TÉLÉGRAPHIQUE FRACTIONNAIRE AVEC COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode de Fourier et les propriétés de calcul fractionnaire conformable pour déterminer la solution analytique du problème d'évolution (1), (3)-(4) sous forme d'une série de fonctions. Quatre exemples sont présentés pour valider la méthode utilisée. Pour le cas $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1$ dans les conditions aux limites de Robin (4), le problème d'évolution (1), (3)-(4) est un objet d'un article intitulé "*Analytical solution for the conformable fractional telegraph equation by Fourier method*" publié dans un journal international "Proceedings of International Mathematical Sciences", voir [2].

2.1 Problème de Cauchy

Dans cette section, nous introduisons le théorème principal, qui est utilisé dans ce chapitre.

Théorème 2.1. *([2]) Soient $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et $\eta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ tels que $\eta < \gamma$. Pour tout $0 < \alpha \leq 1$, le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(\alpha)} \left(\mathcal{D}_t^{(\alpha)} y(t) \right) + 2\eta \mathcal{D}_t^{(\alpha)} y(t) + \gamma^2 y(t) = g(t), \\ y(0) = y_0, \ \mathcal{D}_t^{(\alpha)} y(0) = y_1, \end{cases} \tag{2.1}$$

admet une solution unique donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) = y_0 e^{-\eta \frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos\left(\sqrt{\gamma^2 - \eta^2} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) + \frac{y_0 \eta + y_1}{\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}} e^{-\eta \frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma^2 - \eta^2} \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \\ + \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}} \int_0^t g\left((t^\alpha - \tau^\alpha)^{1/\alpha} \right) e^{-\eta \frac{\tau^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\gamma^2 - \eta^2} \frac{\tau^\alpha}{\alpha} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Démonstration. D'après (1.16) et (1.17), nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\{y(t)\} = \mathcal{Y}_\alpha(s),\ \mathcal{L}_\alpha\{g(t)\} = \mathcal{G}_\alpha(s),\\ \mathcal{L}_\alpha\{\mathcal{D}_t^\alpha y(t)\} = s\mathcal{Y}_\alpha(s) - y_0,\\ \mathcal{L}_\alpha\left\{\mathcal{D}_t^{(\alpha)}\left(\mathcal{D}_t^{(\alpha)} y(t)\right)\right\} = s^2\mathcal{Y}_\alpha(s) - sy_0 - y_1.\end{aligned}$$

En utilisant (1.16) et (2.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_\alpha(s) &= \frac{y_0(s+\eta)}{s^2+2\eta s+\gamma^2} + \frac{y_0\eta + y_1}{s^2+2\eta s+\gamma^2} + \frac{\mathcal{G}_\alpha(s)}{s^2+2\eta s+\gamma^2}\\ &= \frac{y_0(s+\eta)}{(s+\eta)^2+\gamma^2-\eta^2} + \frac{y_0\eta + y_1}{(s+\eta)^2+\gamma^2-\eta^2} + \frac{\mathcal{G}_\alpha(s)}{(s+\eta)^2+\gamma^2-\eta^2}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Avec la transformée de Laplace fractionnaire inverse et (1.20), on obtient :

$$\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{y_0(s+\eta)}{(s+\eta)^2+\gamma^2-\eta^2}\right\}(t) = y_0 e^{-\eta\frac{t^\alpha}{\alpha}}\cos\left(\sqrt{\gamma^2-\eta^2}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right), \tag{2.4}$$

$$\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{y_0\eta + y_1}{(s+\eta)^2+\gamma^2-\eta^2}\right\}(t) = \frac{y_0\eta + y_1}{\sqrt{\gamma^2-\eta^2}} e^{-\eta\frac{t^\alpha}{\alpha}}\sin\left(\sqrt{\gamma^2-\eta^2}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \tag{2.5}$$

et de (1.20) et (1.21) , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{\mathcal{G}_\alpha(s)}{(s+\eta)^2+\gamma^2-\eta^2}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2-\eta^2}}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\{\mathcal{G}_\alpha(s)\}(t) * \mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\gamma^2-\eta^2}}{(s+\eta)^2+\gamma^2-\eta^2}\right\}(t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2-\eta^2}}\int_0^t g\left((t^\alpha-\tau^\alpha)^{1/\alpha}\right) e^{-\eta\frac{\tau^\alpha}{\alpha}}\sin\left(\sqrt{\gamma^2-\eta^2}\frac{\tau^\alpha}{\alpha}\right)\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Par conséquent, de (2.4), (2.5) et (2.6) nous obtenons (2.2). □

2.2 Problème de Sturm-Liouville conformable

Dans cette section, nous discutons du problème aux limites qui consiste à l'équation différentielle conformable suivante :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)}\left(\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi(x)\right) + \lambda\Phi(x) = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < \beta \leq 1, \tag{2.7}$$

et la condition aux limites de Robin avec dérivée conformable

$$\begin{cases} \mu_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi(0) + \lambda_1 \Phi(0) = 0, \ \mu_1 \lambda_1 \leq 0, \ |\mu_1| + |\lambda_1| > 0, \\ \mu_2 \mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi(1) + \lambda_2 \Phi(1) = 0, \ \mu_2 \lambda_2 \geq 0, \ |\mu_2| + |\lambda_2| > 0. \end{cases}, \ 0 < \beta \leq 1. \tag{2.8}$$

Le problème (2.7)-(2.8) est appelé problème de Sturm-Liouville conformable. Si $\beta = 1$, problème (2.7)-(2.8) a été étudié dans [4, Chap.19]. Dans cette section, nous généralisons ce problème à l'ordre fractionnaire conformable. Il est clair que $\Phi(x) = 0$ est une solution triviale de (2.7)-(2.8).

La résolution du problème (2.7)-(2.8) signifie de trouver des valeurs de λ_n, $n \in \mathbb{N}$ appelées valeurs propres et les solutions non triviales correspondantes $\Phi_n(x)$ appelées fonctions propres.

Théorème 2.2. *Les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville conformable* (2.7)-(2.8) *sont simples, c'est-à-dire que si λ est une valeur propre de* (2.7)-(2.8) *et $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ sont les fonctions propres correspondantes, alors $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ sont linéairement dépendants.*

Démonstration. Soient $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ deux solutions du problème(2.7)-(2.8), nous avons :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} \left(\mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi_1 (x) \right) + \lambda \Phi_1(x) = 0, \tag{2.9}$$

et

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} \left(\mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi_2 (x) \right) + \lambda \Phi_2(x) = 0. \tag{2.10}$$

En multipliant (2.9) par Φ_2 et (2.10) par Φ_1 et avec la différence, on obtient :

$$\Phi_2 (x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} \left(\mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi_1 (x) \right) - \Phi_1 (x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} \left(\mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi_2 (x) \right) = 0. \tag{2.11}$$

Avec la propriété (1.7), (2.11) devienne :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} \left[\Phi_2 (x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi_1(x) - \Phi_1 (x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi_2(x) \right] = 0 \tag{2.12}$$

En utilisant (1.6), nous obtenons :

$$\Phi_2(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi_1(x) - \Phi_1(x) \mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi_2(x) = C, \ \ C \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

$\Phi_1 (x)$ et $\Phi_2 (x)$ satisfont les conditions aux limites (2.8), donc on a :

$$\begin{cases} \mu_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi_1(0) + \lambda_1 \Phi_1(0) = 0, \\ \mu_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi_2(0) + \lambda_1 \Phi_2(0) = 0. \end{cases}$$

ce qui implique $\Phi_1(0)\,\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_2(0) - \Phi_2(0)\,\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_1(0) = 0$. D'après (2.13), on obtient :

$$\Phi_2(x)\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_1(x) - \Phi_1(x)\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_2(x) = 0, \ \ \forall x \in [0,1]\,, \tag{2.14}$$

d'où, $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ sont linéairement dépendants. □

Théorème 2.3. *Soient (λ_n) sont les valeurs propres et $(\Phi_n(x))$ sont les fonctions propres correspondantes du problème de Sturm-Liouville conformable* (2.7)-(2.8)*. Alors, la suite de fonctions $(\Phi_n(x))$ est orthogonale sur $[0,1]$ par rapport à la fonction de poids $x \longmapsto x^{\beta-1}$ avec $0 < \beta \leq 1$.*

Démonstration. Soient λ_i et λ_j, $i \neq j$ des valeurs propres, et $\Phi_i(x)$ et $\Phi_j(x)$ les fonctions propres correspondantes du problème (2.7)-(2.8). Nous avons :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)}\left(\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_i(x)\right) + \lambda_i\Phi_i(x) = 0, \tag{2.15}$$

et

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)}\left(\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_j(x)\right) + \lambda_j\Phi_j(x) = 0. \tag{2.16}$$

En multipliant (2.15) par $\Phi_j(x)$, (2.16) par $\Phi_i(x)$ et avec la différence, nous obtenons :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)}\left[\Phi_j(x)\,\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_i(x) - \Phi_i(x)\,\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_j(x)\right] + (\lambda_i - \lambda_j)\,\Phi_i(x)\Phi_j(x) = 0 \tag{2.17}$$

En appliquant l'intégration fractionnaire conformable (1.11) sur (2.17), on obtient :

$$(\lambda_j - \lambda_i)\int_0^1 x^{\beta-1}\Phi_i(x)\Phi_j(x)dx = \Phi_j(x)\,\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_i(x) - \Phi_i(x)\,\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_j(x)\Big|_0^1. \tag{2.18}$$

$\Phi_i(x)$ et $\Phi_j(x)$ satisfont les conditions aux limites de Robin (2.8), donc on a :

$$\begin{cases}\mu_1\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_i(0) + \lambda_1\Phi_i(0) = 0,\\ \mu_1\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_j(0) + \lambda_1\Phi_j(0) = 0,\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\mu_2\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_i(1) + \lambda_2\Phi_i(1) = 0,\\ \mu_2\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_j(1) + \lambda_2\Phi_j(1) = 0,\end{cases}$$

il est nécessaire que

$$\Phi_i(0)\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_j(0) - \Phi_j(0)\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_i(0) = \Phi_i(1)\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_j(1) - \Phi_j(1)\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi_i(1) = 0.$$

Ainsi, l'équation (2.18) se réduit à

$$(\lambda_j - \lambda_i)\int_0^1 x^{\beta-1}\Phi_i(x)\Phi_j(x)dx = 0, \tag{2.19}$$

mais $\lambda_i \neq \lambda_j$, donc $\int_0^1 x^{\beta-1}\Phi_i(x)\Phi_j(x)dx = 0$. □

Théorème 2.4. *Nous avons :*

1. *Toutes les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville conformable* (2.7)-(2.8) *sont strictement positives.*
2. *Les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville conformable* (2.7)-(2.8) *satisfont l'équation algébrique suivante :*

$$\tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\beta}\right) = \frac{(\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1)\sqrt{\lambda}}{\mu_1\mu_2\lambda + \lambda_1\lambda_2}. \tag{2.20}$$

3. *Le problème de Sturm-Liouville conformable* (2.7)-(2.8) *admet une suite des valeurs propres* (λ_n) *strictement croissante telle que*

$$\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Démonstration. Nous avons :

1. Soient λ une valeur propre et $\Phi(x) \neq 0$ est une fonction propre associé du problème (2.7)-(2.8). Nous avons :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)}\left(\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi(x)\right) + \lambda\Phi(x) = 0. \tag{2.21}$$

En multipliant (2.21) par $\Phi(x)$ et en utilisant l'intégration par parties (1.13), on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^1 x^{\beta-1}\Phi^2(x)dx &= -\int_0^1 x^{\beta-1}\mathcal{D}_x^{\beta}\left(\mathcal{D}_x^{\beta}\Phi(x)\right)\Phi(x)dx \\ &= -\Phi(x)\mathcal{D}_x^{\beta}\Phi(x)\big|_0^1 + \int_0^1 x^{\beta-1}\left[\mathcal{D}_x^{\beta}\Phi(x)\right]^2 dx \\ &= \Phi(0)\mathcal{D}_x^{\beta}\Phi(0) - \Phi(1)\mathcal{D}_x^{\beta}\Phi(1) + \int_0^1 x^{\beta-1}\left[\mathcal{D}_x^{\beta}\Phi(x)\right]^2 dx.\end{aligned}$$

$\Phi(x)$ satisfait les conditions aux limites (2.8), donc on a :

$$\lambda = \frac{-\frac{\lambda_1}{\mu_1}\Phi^2(0) + \frac{\lambda_2}{\mu_2}\Phi^2(1) + \int_0^1 x^{\beta-1}\left[\mathcal{D}_x^{\beta}\Phi(x)\right]^2 dx}{\int_0^1 x^{\beta-1}\Phi^2(x)dx} > 0.$$

2. En appliquant Théorème 1.2 sur l'équation (2.7) et avec Exemple 1.1, on obtient :

$$\Phi(x) = \Phi(0)\cos\left(\sqrt{\lambda}\frac{x^{\beta}}{\beta}\right) + \frac{\mathcal{D}_x^{(\beta)}\Phi(0)}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}\frac{x^{\beta}}{\beta}\right). \tag{2.22}$$

En utilisant (2.22) et (2.8), nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mu_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi(0) + \lambda_1 \Phi(0) = 0, \\ \left[\mu_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}/\beta\right) + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(\sqrt{\lambda}/\beta\right)\right] \mathcal{D}_x^{(\beta)} \Phi(0) \\ + \left[\lambda_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}/\beta\right) - \mu_2 \sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}/\beta\right)\right] \Phi(0) = 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

La fonction propre $\Phi(x) \neq 0$ est équivalent le déterminant du système linéaire (2.23) est nul, c'est à dire

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \lambda_1 \\ \mu_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}/\beta\right) + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda}} \sin\left(\sqrt{\lambda}/\beta\right) & \lambda_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}/\beta\right) - \mu_2 \sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda}/\beta\right) \end{vmatrix} = 0, \tag{2.24}$$

avec simplification de (2.24), on obtient (2.20).

3. Soit la fonction κ définie par :

$$\kappa(\lambda) = \tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\beta}\right) - \frac{(\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1)\sqrt{\lambda}}{\mu_1\mu_2\lambda + \lambda_1\lambda_2}.$$

☞ La fonction κ est dérivable sur $]\,0, +\infty\,[$ et sa dérivée donnée par :

$$\kappa'(\lambda) = \frac{1 + \tan^2\left(\sqrt{\lambda}/\beta\right)}{2\beta\sqrt{\lambda}} + \frac{(\mu_2\lambda_2\lambda_1^2 - \mu_1\lambda_1\lambda_2^2)\left(1 - \frac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2}\lambda\right)}{2\sqrt{\lambda}\,(\mu_1\mu_2\lambda + \lambda_1\lambda_2)^2} > 0,$$

d'où, κ est strictement croissante sur $]\,0, +\infty\,[$.

☞ On montre la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! \lambda_n \in \left]\,\frac{(2n+1)^2\pi^2\beta^2}{4}, \frac{(2n+3)^2\pi^2\beta^2}{4}\,\right[\text{ telle que } \kappa(\lambda_n) = 0.$$

Nous avons :

$$\kappa(\lambda) \xrightarrow[\lambda \overset{>}{\to} 0 \frac{(2n+1)^2\pi^2\beta^2}{4}]{} -\infty \text{ et } \kappa(\lambda) \xrightarrow[\lambda \overset{<}{\to} 0 \frac{(2n+3)^2\pi^2\beta^2}{4}]{} +\infty.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la croissance de la fonction κ il existe unique $\lambda_n \in \left]\,\frac{(2n+1)^2\pi^2\beta^2}{4}, \frac{(2n+3)^2\pi^2\beta^2}{4}\,\right[$ telle que $\kappa(\lambda_n) = 0$.

D'autre part, nous avons :

– $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n > 0$,

– $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_{n+1} - \lambda_n > 0$.

Donc, $\lambda_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

□

2.3 Équation télégraphique conformable en espace et en temps

Dans cette section, on résoudre analytiquement le problème d'évolution (1), (3)-(4). La condition de Robin (4) est une généralisation pour les conditions de Dirichlet et de Neumann.

Remarque 2.1. Nous avons :

1. Si : $\mu_1 = \mu_2 = 0$, alors les conditions (4) sont appelées la condition aux limites de Dirichlet.
2. Si : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, alors les conditions aux limites (4) sont appelées la condition aux limites de Neumann.
3. Si : $\lambda_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$ ou $\mu_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$, alors les conditions aux limites (4) sont appelées les conditions aux limites mixtes.
4. Si : $\mu_1 = 0$ ou $\mu_2 = 0$, alors la condition aux limites (4) est appelée condition aux limites de Dirichlet-Robin.
5. Si : $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, alors la condition aux limites (4) est appelée la condition aux limites de Neumann-Robin.

En utilisant la méthode de Fourier (méthode de séparation des variables) où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions continues satisfaisant

$$\begin{cases} \mu_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} \varphi(0) + \lambda_1 \varphi(0) = g(0), \ \mu_1\lambda_1 \leq 0, \ |\mu_1| + |\lambda_1| > 0, \\ \mu_2 \mathcal{D}_x^{(\beta)} \varphi(1) + \lambda_2 \varphi(1) = h(0), \ \mu_2\lambda_2 \geq 0, \ |\mu_2| + |\lambda_2| > 0. \end{cases}, \ 0 < \beta \leq 1,$$

et $g(t)$, $h(t)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Afin de résoudre analytiquement le problème d'évolution (1), (3)-(4), nous transformons d'abord la condition de Robin non homogène (4) en une condition de Robin homogène. Soit

$$u(x,t) = V(x,t) + W(x,t),$$

où $V(x,t)$ est une nouvelle fonction inconnue et $W(x,t)$ est donné par :

$$W(x,t) = \begin{cases} \frac{g(t)}{\lambda_1} + \frac{[\lambda_1 h(t) - \lambda_2 g(t)]}{\beta \lambda_1 \lambda_2} x^\beta, & \text{si } \mu_1 = \mu_2 = 0, \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0. \\ \frac{g(t)x^\beta}{\beta\mu_1} + \frac{[\mu_1 h(t) - \mu_2 g(t)]x^{2\beta}}{2\beta\mu_1\mu_2}, & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \mu_1 < 0, \mu_2 > 0. \\ \frac{(\lambda_2 g(t) - \lambda_1 h(t))x^{2\beta}}{2\beta(\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2)} - \frac{(\lambda_2+\mu_2)g(t) - \mu_1 h(t)}{\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2}, & \text{si } \lambda_1\mu_1 < 0, \lambda_2\mu_2 > 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

dans lequel satisfait les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \mu_1 \mathcal{D}_x^{(\beta)} W(0,t) + \lambda_1 W(0,t) = g(t), \\ \mu_2 \mathcal{D}_x^{(\beta)} W(1,t) + \lambda_2 W(1,t) = h(t), \end{cases} \tag{2.26}$$

et la fonction $V(x,t)$ est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(\alpha)}\left(\mathcal{D}_t^{(\alpha)}V(x,t)\right) + 2a\mathcal{D}_t^{(\alpha)}V(x,t) + b^2V(x,t) = \omega\mathcal{D}_x^{(\beta)}\left(\mathcal{D}_x^{(\beta)}V(x,t)\right) + \tilde{f}(x,t), \\ V(x,0) = \phi_1(x), \;\; \mathcal{D}_t^{(\alpha)}V(x,0) = \psi_1(x), \;\; 0 \leq x \leq 1, \\ \mu_1\mathcal{D}_x^{(\beta)}V(0,t) + \lambda_1 V(0,t) = 0, \\ \mu_2\mathcal{D}_x^{(\beta)}V(1,t) + \lambda_2 V(1,t) = 0, \end{cases} \tag{2.27}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{f}\,(x) &= -\mathcal{D}_t^{(\alpha)}\left(\mathcal{D}_t^{(\alpha)}W\,(x,t)\right) - 2a\mathcal{D}_t^{(\alpha)}W\,(x,t) - b^2W\,(x,t) + f\,(x,t)\,, \\ \varphi_1\,(x) &= \varphi\,(x) - W(x,0), \\ \psi_1\,(x) &= \psi\,(x) - \mathcal{D}_t^{(\alpha)}W\,(x,0)\,, \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous cherchons la solution homogène $V(x,t)$ de (2.27) en supposant que ($\tilde{f}(x,t) = 0$). En utilisant la méthode de séparation des variables, on pose

$$V(x,t) = X(x)Y(t),$$

en substituant dans (2.27), nous obtenons le problème de Sturm-Liouville conformable suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x^{(\beta)}\left(\mathcal{D}_x^{(\beta)}X(x)\right) + \lambda X(x) = 0, \\ \mu_1\mathcal{D}_x^{(\beta)}X(0) + \lambda_1 X(0) = 0, \\ \mu_2\mathcal{D}_x^{(\beta)}X(1) + \lambda_2 X(1) = 0. \end{cases}$$

D'après Théorème 2.3, les fonctions propres $X_n(x)$ sont orthogonales sur $[0,1]$ c'est à dire

$$\langle X_n(x), X_m(x)\rangle = \int_0^1 x^{\beta-1}X_n(x)X_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ R_n & \text{si} \quad n = m. \end{cases} \tag{2.28}$$

Maintenant, nous cherchons une solution $V(x,t)$ du problème non homogène (2.27) sous la forme suivante :

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(t)X_n(x). \tag{2.29}$$

Pour déterminer $B_n(t)$, nous développons $\tilde{f}(x,t)$ comme une série de Fourier par les fonctions

propres $X_n(x)$,

$$\tilde{f}(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\tilde{f}_n(t)X_n(x),\quad \text{avec}\quad \tilde{f}_n(t)=\frac{1}{R_n}\int_0^1 x^{\beta-1}\tilde{f}(x,t)X_n(x)dx. \tag{2.30}$$

En substituant (2.29), (2.30) dans (2.27), on obtient :

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)}\left(\mathcal{D}_t^{(\alpha)}B_n(t)\right)+2a\mathcal{D}_t^{(\alpha)}B_n(t)+(b^2+\lambda_n\omega)B_n(t)=\tilde{f}(t). \tag{2.31}$$

Puisque $V(x,t)$ satisfait les conditions initiales de problème (2.27), nous avons :

$$\begin{cases}\varphi_1(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}B_n(0)X_n(x),\\ \psi_1(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathcal{D}_t^{(\alpha)}B_n(0)X_n(x),\end{cases} \tag{2.32}$$

où

$$\begin{cases}B_n(0)=\frac{1}{R_n}\displaystyle\int_0^1 x^{\beta-1}\varphi_1(x)X_n(x)dx,\ \ n\in\mathbb{N},\\ \mathcal{D}_t^{(\alpha)}B_n(0)=\frac{1}{R_n}\int_0^1 x^{\beta-1}\psi_1(x)X_n(x)dx,\ \ n\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{2.33}$$

D'autre part, nous supposons que

$$0\le\frac{a^2-b^2}{\omega}<\lambda_0, \tag{2.34}$$

où λ_0 est la plus petite valeur propre du problème (2.7)-(2.8).

En utilisant Théorème 2.1 et (2.34), $B_n(t)$ est donné par :

$$\begin{aligned}B_n(t)=&B_n(0)e^{-a\frac{t^\alpha}{\alpha}}\cos\left(\sqrt{b^2-a^2+\omega\lambda_n}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\\&+\frac{aB_n(0)+\mathcal{D}_t^{(\alpha)}B_n(0)}{\sqrt{b^2-a^2+\omega\lambda_n}}e^{-a\frac{t^\alpha}{\alpha}}\sin\left(\sqrt{b^2-a^2+\omega\lambda_n}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\\&+\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2+\omega\lambda_n}}\int_0^t\tilde{f}\left((t^\alpha-\tau^\alpha)^{1/\alpha}\right)e^{-a\frac{\tau^\alpha}{\alpha}}\sin\left(\sqrt{b^2-a^2+\omega\lambda_n}\frac{\tau^\alpha}{\alpha}\right)\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

Donc, la solution analytique du problème d'évolution (1), (3)-(4) est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigg[& B_n(0) e^{-a\frac{t^\alpha}{\alpha}} \cos\left(\sqrt{b^2 - a^2 + \omega\lambda_n}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \\ & + \frac{aB_n(0) + \mathcal{D}_t^{(\alpha)} B_n(0)}{\sqrt{b^2 - a^2 + \omega\lambda_n}} e^{-a\frac{t^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{b^2 - a^2 + \omega\lambda_n}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2 + \omega\lambda_n}} \int_0^t \tilde{f}\left((t^\alpha - \tau^\alpha)^{1/\alpha}\right) e^{-a\frac{\tau^\alpha}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{b^2 - a^2 + \omega\lambda_n}\frac{\tau^\alpha}{\alpha}\right) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} \Bigg] X_n(x) \\ & + W(x,t). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Exemple 2.1. Dans cet exemple, nous considérons les données suivantes :

$$\begin{cases} a = b = \omega = 1,\ \alpha = \frac{1}{2},\ \beta = 1, \quad \text{et} \quad f(x,t) = 0. \\ \varphi(x) = 1,\ \psi(x) = 0, \\ \mu_1 = \mu_2 = 0,\ \ \lambda_1 = -1,\ \ \lambda_2 = 1, \quad \text{et} \quad g(t) = h(t) = 0. \end{cases}$$

Le problème d'évolution (1), (3)-(4) devient :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(1/2)}\left(\mathcal{D}_t^{(1/2)} u(x,t)\right) + 2\mathcal{D}_t^{(1/2)} u(x,t) + u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 1,\ \mathcal{D}_t^{(1/2)} u(x,0) = 0,\ \ 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

D'après (2.20) et (2.22), les valeurs propres et les fonctions propres sont données par :

$$\lambda_n = \pi^2 n^2, \ \text{ et } \ X_n(x) = \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

De (2.28) et (2.33), on obtient :

$$R_n = \frac{1}{2\pi^2 n^2}, \qquad B_n(0) = 2\left(1 - (-1)^n\right), \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_t^{(1/2)} B_n(0) = 0.$$

Grâce (2.35), la solution analytique du problème (2.36) est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4e^{-2\sqrt{t}}}{\pi(2n+1)} \left(\cos(4n+2)\pi\sqrt{t} + \frac{1}{\pi(2n+1)} \sin(4n+2)\pi\sqrt{t}\right) \sin(2n+1)\pi x.$$

Exemple 2.2. Dans cet exemple, nous considérons les données suivantes :

$$\begin{cases} a = b = \omega = 1, \ \ \alpha = \frac{1}{2}, \ \ \beta = 1, \quad \text{et} \quad f(x,t) \equiv 0. \\ \varphi(x) = x, \ \ \psi(x) = 0, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \ \ \mu_1 = -1, \ \ \mu_2 = 1 \quad \text{et} \quad g(t) = h(t) = 0. \end{cases}$$

Le problème d'évolution (1), (3)-(4) devient :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(1/2)} \left(\mathcal{D}_t^{(1/2)} u(x,t) \right) + 2\mathcal{D}_t^{(1/2)} u(x,t) + u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = x, \ \ \mathcal{D}_t^{(1/2)} u(x,0) = 0, \ \ 0 \leq x \leq 1, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Avec (2.20) et (2.22), les valeurs propres et les fonctions propres sont données par :

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 \quad \text{et} \quad X_n(x) = \cos(\pi n x), \quad n \in \mathbb{N}$$

D'après (2.28) et (2.33), on obtient :

$$R_n = \frac{1}{2}, \quad B_n(0) = \frac{2}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right), \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_t^{(1/2)} B_n(0) = 0.$$

De (2.35), la solution du problème (2.37) est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-4e^{-2\sqrt{t}}}{\pi^2 (2n+1)^2} \left[\cos \pi (4n+2) \sqrt{t} + \frac{\sin \pi (4n+2) \sqrt{t}}{\pi (2n+1)} \right] \cos \pi (2n+1) x.$$

Exemple 2.3. Dans cet exemple, nous considérons les données suivantes :

$$\begin{cases} a = b = \omega = 1, \ \ \alpha = \frac{1}{2}, \ \ \beta = 1, \ \ \text{et} \ \ f(x,t) = 0. \\ \varphi(x) = 1, \ \ \psi(x) = 0, \\ \lambda_1 = -1, \mu_1 = 1, \ \ \lambda_2 = 1, \ \ \mu_2 = 0, \ \ \text{et} \ \ g(t) = h(t) = 0. \end{cases}$$

Le problème d'évolution (1), (3)-(4) devient :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(1/2)} \left(\mathcal{D}_t^{(1/2)} u(x,t) \right) + 2\mathcal{D}_t^{(1/2)} u(x,t) + u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 1, \ \ \mathcal{D}_t^{(1/2)} u(x,0) = 0, \ \ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u_x(0,t), \ \ u(1,t) = 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

En utilisant (2.20), nous obtenons les valeurs propres vérifiant l'équation algébrique suivante : :

$$\tan\left(\sqrt{\lambda}\right) = -\sqrt{\lambda}.$$

Figure 2.1 représente les graphes des fonctions $x \mapsto \tan\left(\sqrt{x}\right)$ et $x \mapsto -\sqrt{x}$ avec les points de l'intersection sont les valeurs propres λ_n.

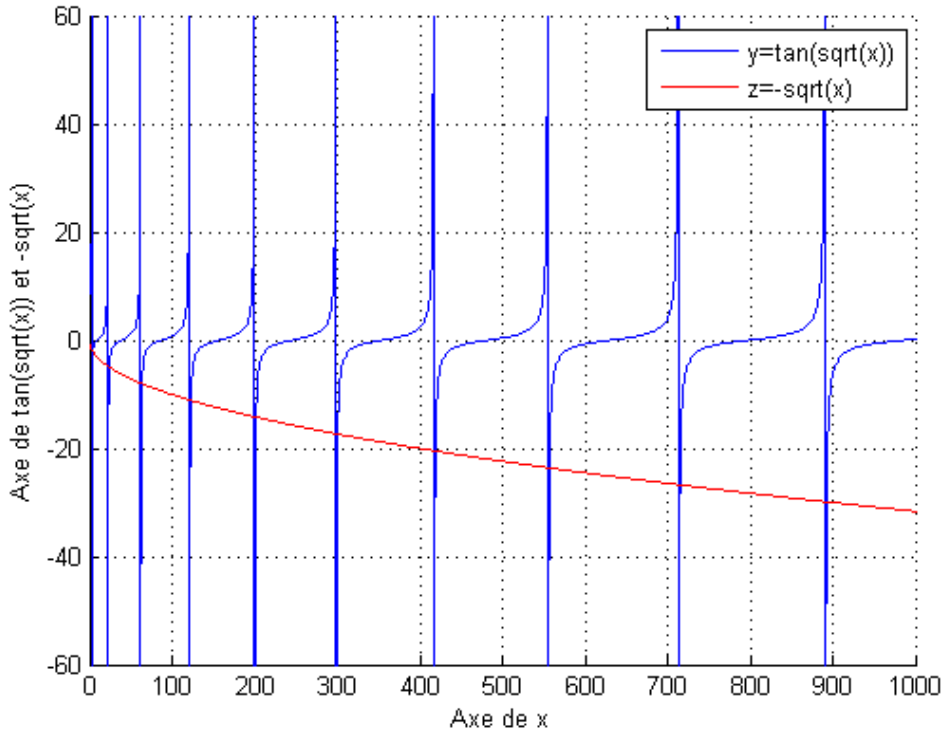


FIGURE 2.1 – Graphes de deux fonction $x \mapsto \tan\left(\sqrt{x}\right)$ et $x \mapsto -\sqrt{x}$.

Avec (2.22), les vecteurs propres sont donnés par :

$$X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

D'après (2.28) et (2.33), on obtient :

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\lambda_n}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{\lambda_n}\right)\sin\left(2\sqrt{\lambda_n}\right) + \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}\right)}{\lambda_n},\\
B_n(0) &= \frac{1}{R_n}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\right)}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\right)}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\right),\\
\mathcal{D}_t^{(1/2)} B_n(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Grâce (2.35), la solution du problème (2.38) est donnée par :

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\left(0\right)e^{-2\sqrt{t}}\left[\cos\left(2\sqrt{\lambda_n}\sqrt{t}\right)+\frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_n}\sqrt{t}\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\right]X_n\left(x\right).$$

Exemple 2.4. Nous considérons les données suivantes :

$$\begin{cases}a=b=\omega=1,\ \ \alpha=\frac{1}{2},\ \ \beta=1,\ \ \text{et}\ \ f(x,t)=0.\\ \varphi(x)=1,\ \ \psi(x)=0,\\ \lambda_1=0,\mu_1=-1,\ \ \lambda_2=1,\ \ \mu_2=1,\ \ \text{et}\ \ g(t)=h(t)=0.\end{cases}$$

Le problème d'évolution (1), (3)-(4) devient :

$$\begin{cases}\mathcal{D}_t^{(1/2)}\left(\mathcal{D}_t^{(1/2)}u(x,t)\right)+2\mathcal{D}_t^{(1/2)}u(x,t)+u(x,t)=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2},\\ u(x,0)=1,\ \ \mathcal{D}_t^{(1/2)}u(x,0)=0,\ \ 0\leq x\leq 1,\\ u_x\left(0,t\right)=0,\ \ u_x\left(1,t\right)+u\left(1,t\right)=0.\end{cases}\tag{2.39}$$

En utilisant (2.20), nous obtenons les valeurs propres vérifiant l'équation algébrique suivante :

$$\tan\left(\sqrt{\lambda}\right)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Figure 2.2 représente les graphes des fonctions $x\mapsto\tan\left(\sqrt{x}\right)$ et $x\mapsto 1/\sqrt{x}$ avec les points de l'intersection sont les valeurs propres λ_n.

Avec (2.22), les vecteurs propres sont donnés par :

$$X_n\left(x\right)=\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right).$$

D'après (2.28) et (2.33), on obtient :

$$R_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_n}\right)}{2\sqrt{\lambda_n}}\right),\ B_n\left(0\right)=\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\right)}{R_n\sqrt{\lambda_n}}\ \text{et}\ \mathcal{D}_t^{(1/2)}B_n(0)=0.$$

Avec (2.35), la solution du problème (2.39) est donnée par :

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\right)e^{-2\sqrt{t}}}{R_n\sqrt{\lambda_n}}\left[\cos\left(2\sqrt{\lambda_n}\sqrt{t}\right)+\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\left(2\sqrt{\lambda_n}\sqrt{t}\right)\right]\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right).$$

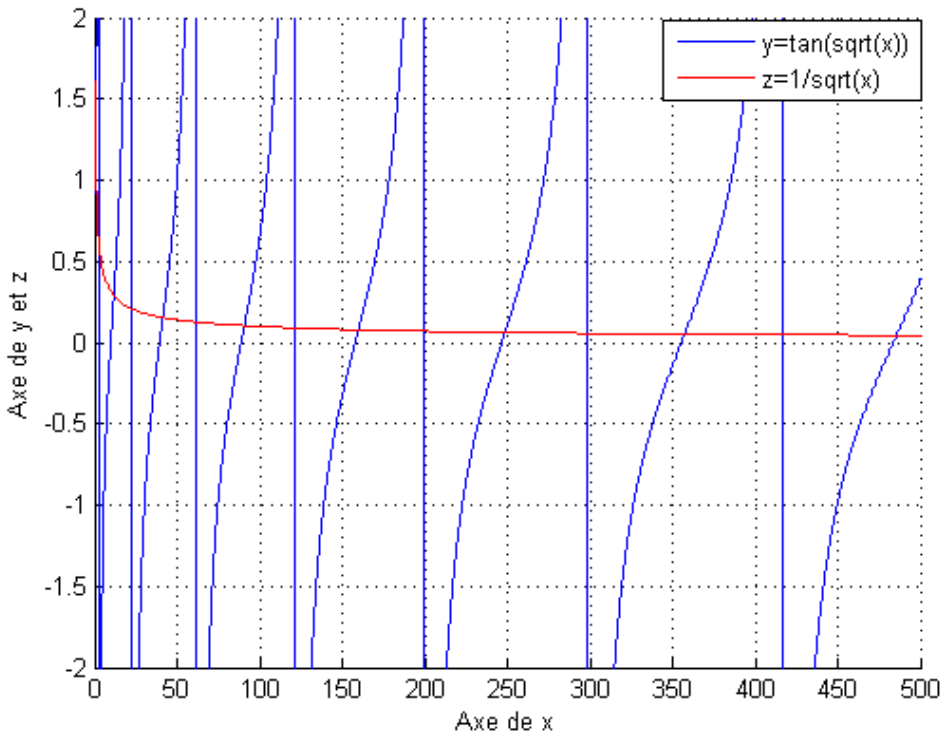


FIGURE 2.2 – Graphes de deux fonction $x \mapsto \tan(\sqrt{x})$ et $x \mapsto 1/\sqrt{x}$.

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'ÉQUATION TÉLÉGRAPHIQUE FRACTIONNAIRE AVEC COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans ce chapitre, nous avons proposé un algorithme efficace pour résoudre le problème d'évolution (2)-(4), où les coefficients de l'équation (2) sont des constants et la condition aux limites de Dirichlet. Cet algorithme est basé sur les polynômes de Tchebychev décalés du quatrième espèce. Le problème d'évolution (2)-(4) est réduit à un système linéaire d'équations différentielles du second ordre et la méthode de Newmark est appliquée pour résoudre ce système. Enfin, trois exemples numériques sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de cet algorithme. Ce chapitre est un projet d'un article intitulé "*An efficient algorithm for solving the conformable time-space fractional telegraph equations*" publié dans une revue renommée internationale "Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. (MJPAA)", voir [3].

3.1 Polynômes de Tchebychev décalés de quatrième espèce

Afin d'utiliser les polynômes dans Section 1.3 sur l'intervalle $[0, 1]$, nous définissons les polynômes de Tchebychev dits décalés du quatrième espèce $W_n^*(x)$ en introduisant le changement de variable suivant :

$$s = 2x - 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}(s + 1).$$

Cela signifie que les polynômes de Tchebychev décalés du quatrième espèce $W_n^*(x)$ de degré n en x sont définis sur $[0, 1]$ par :

$$W_n^*(x) = W_n(s) = W_n(2x - 1). \tag{3.1}$$

Avec (3.1) et Proposition 1.2, les polynômes de Tchebychev décalés du quatrième espèce $W_n^*(x)$ vérifiant la formule de récurrence suivante, [29] :

$$\begin{cases} W_0^*(x) = 1, \\ W_1^*(x) = 4x - 1, \\ W_n^*(x) = 2\,(2x-1)\,W_{n-1}^*(x) - W_{n-2}^*(x) \;\; ; n = 2, 3, ... \end{cases} \tag{3.2}$$

En utilisant (3.1) et Proposition 1.3, nous obtenons la forme explicite des polynômes de Tchebychev décalés du quatrième espèce $W_n^*(x)$ de degré n en x donnée par :

$$W_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, 2^{(2n-2k)} \frac{\Gamma\,(2n-k+1)}{\Gamma\,(k+1)\,\Gamma\,(2n-2k+1)} x^{n-k}, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

où $\Gamma\,(\cdot)$ est la fonction Gamma d'Euler.

D'après (3.1) et Proposition 1.1, les polynômes $W_n^*\,(x)$ sont orthogonaux sur l'intervalle $[0, 1]$ avec le produit scalaire suivant :

$$\langle W_n^*(x), W_m^*(x)\rangle = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} W_n^*\,(x)\, W_m^*\,(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; n \neq m, \\ \pi/2 & \text{si} \;\; n = m, \end{cases} \tag{3.4}$$

où $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ est la fonction poids correspondante à $W_n^*(x)$.

Soit $y\,(x)$ est une fonction carrée intégrable sur $[0, 1]$ qui elle peut être exprimée en termes de polynômes de Tchebychev décalés du quatrième espèce comme suit :

$$y\,(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i W_i^*(x), \tag{3.5}$$

où les coefficients c_i, $i \in \mathbb{N}$ sont donnés par :

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, y\,(x)\, W_i^*\,(x)\, dx. \tag{3.6}$$

En pratique, seuls les premiers $(m+1)$-termes des polynômes de Tchebychev décalés du quatrième espèce sont considérés dans le cas approché. Alors, nous avons :

$$y_m\,(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i W_i^*(x). \tag{3.7}$$

3.2 Évaluation de la dérivée fractionnaire conformable

Dans cette section, nous présentons l'évaluation de la dérivée fractionnaire conformable pour la fonction $y_m(x)$ définie par (3.7). Cette évaluation est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soit $y_m(x)$ une fonction approchée en termes des polynômes de Tchebychev décalés du quatrième espèce définie par* (3.7)*. Pour tout $\beta > 0$, nous avons :*

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} y_m(x) = \sum_{i=n+1}^{m} \sum_{k=0}^{i-n-1} c_i \mathcal{N}_{i,k}^n x^{i-k-\beta}, \; n < \beta \leq n+1, \tag{3.8}$$

où $\mathcal{N}_{i,k}^n$ est donné par :

$$\mathcal{N}_{i,k}^n = (-1)^k \, 2^{2i-2k} \frac{\Gamma(2i-k+1)\,\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(2i-2k+1)\,\Gamma(i-k-n)}. \tag{3.9}$$

Démonstration. En utilisant (3.7) et (1.4), on obtient :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} y_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i \mathcal{D}_x^{(\beta)} W_i^*(x). \tag{3.10}$$

D'après (1.5) et $i-k > n$, nous avons :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} \left(x^{i-k}\right) = \frac{\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(i-k-n)} x^{i-k-\beta}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n < \beta \leq n+1. \tag{3.11}$$

En remplaçant (3.11) dans (3.3), nous obtenons l'égalité suivante pour $n < \beta \leq n+1$.

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} W_i^*(x) = \sum_{k=0}^{i-(n+1)} (-1)^k \, 2^{(2i-2k)} \frac{\Gamma(2i-k+1)\,\Gamma(i-k+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(2i-2k+1)\,\Gamma(i-k-n)} x^{i-k-\beta}. \tag{3.12}$$

De (3.10) et (3.12), on obtient :

$$\mathcal{D}_x^{(\beta)} y_m(x) = \sum_{i=n+1}^{m} \sum_{k=0}^{i-(n+1)} c_i \mathcal{N}_{i,k}^n x^{i-k-\beta}.$$

où $\mathcal{N}_{i,k}^n$ est donné par (3.9). □

Exemple 3.1. Considérons $y(x) = x^2$ avec $m = 2$, $\beta = 1.8$ et $n = 1$. En utilisant (1.5), nous obtenons :

$$\mathcal{D}_x^{(1.8)} x^2 = 2x^{0.2}.$$

Maintenant, en utilisant Théorème 3.1 nous obtenons :

$$\mathcal{D}_x^{(1.8)} x^2 = c_2 \mathcal{N}_{2,0}^1 x^{0.2}.$$

D'après (3.2), (3.4), (3.6) et (3.9), nous avons :

$$c_2 = \frac{1}{16} \text{ et } \mathcal{N}_{2,0}^1 = 32.$$

Donc, $\mathcal{D}_x^{(1.8)} x^2 = 2x^{0.2}$.

3.3 Analyse de convergence

L'objectif principal de cette section est d'étudier l'erreur de troncature et son analyse de convergence.

Théorème 3.2 (Convergence uniforme, [34]). *Soit y est une fonction deux fois différentiable sur $[0,1]$ et la deuxième dérivée est bornée sur $[0,1]$ c'est à dire*

$$\exists M > 0,\ \forall x \in [0,1] : |y''(x)| \leq M.$$

Si $y(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i W_i^*(x)$, alors la suite des sommes partielles (y_m) avec $y_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i W_i^*(x)$ converge uniformément vers $y(x)$ sur $[0,1]$.

Démonstration. En utilisant la changement de variable $2x - 1 = \cos(\theta)$ dans (3.6), nous obtenons :

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y\left(\frac{1+\cos(\theta)}{2}\right) \sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \sin(\theta/2)\, d\theta.$$

Par intégration par parties deux fois, on obtient :

$$c_i = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} y''\left(\frac{1+\cos(\theta)}{2}\right) \delta_i(\theta)\, d\theta,$$

où

$$\delta_i(\theta) = \sin(\theta)\left[\frac{1}{i}\left(\frac{\sin(i-1)\theta}{i-1} - \frac{\sin(i+1)\theta}{i+1}\right) + \frac{1}{i+1}\left(\frac{\sin i\theta}{i} - \frac{\sin(i+2)\theta}{i+2}\right)\right].$$

Nous avons :

$$|c_i| = \left|\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} y''\left(\frac{1+\cos(\theta)}{2}\right) \delta_i(\theta)\, d\theta\right| \leq \frac{M}{4\pi} \int_0^{\pi} |\delta_i(\theta)|\, d\theta = \frac{M(i^2+2i-1)}{i(i^2-1)(i+2)} \overset{\infty}{\approx} \frac{M}{i^2}.$$

D'autre part, on a :

$$|y(x) - y_m(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} |c_i| \, |W_i^*(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} |c_i| \overset{\infty}{\approx} \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{M}{i^2}.$$

Donc, $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$ est la série de Riemann converge, alors le reste de cette série converge vers zéro, donc la suite $(y_m(x))$ est converge uniformément vers $y(x)$ sur $[0,1]$. □

3.4 Méthode de collocation de Tchebychev

Dans cette section, nous appliquons la méthode de collocation de Tchebychev sur le problème (2)-(4) avec les coefficients d'équation (2) sont constants, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1$ dans la condition (4). Notons $u_m(x,t)$ comme approximation de $u(x,t)$ donnée par :

$$u_m(x,t) = \sum_{i=0}^{m} c_i(t) \, W_i^*(x). \tag{3.13}$$

En utilisant (2), (3.13), (1.9) et Théorème 3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} t^{1-\alpha} c_i''(t) \, W_i^*(x) + 2a \sum_{i=0}^{m} t^{1-\alpha} c_i'(t) \, W_i^*(x) + b^2 \sum_{i=0}^{m} c_i(t) \, W_i^*(x) \\ = \omega \sum_{i=2}^{m} \sum_{k=0}^{i-2} c_i(t) \, \mathcal{N}_{i,k}^1 x^{i-k-\beta} + f(x,t). \end{aligned} \tag{3.14}$$

En remplaçant x dans (3.14) par les racines x_p de polynôme $W_{m-1}^*(x)$, définis par :

$$x_p = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{p\pi}{m+1/2}\right)\right), \; p = 1, 2, \ldots, m-1,$$

nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^{m} \left[t^{1-\alpha} c_i''(t) \, W_i^*(x_p) + 2a t^{1-\alpha} c_i'(t) \, W_i^*(x_p) + c_i(t) \, R_i(x_p) \right] = f(x_p, t), \tag{3.15}$$

où

$$\begin{cases} S_0(x_p) = S_1(x_p) = 0, \\ S_i(x_p) = \sum_{k=0}^{i-2} \mathcal{N}_{i,k}^1 x_p^{i-k-\beta},\ i\ = 2,3,...,m, \\ R_i(x_p) = b^2 W_i^*(x_p) - \omega S_i(x_p),\ i = 1,2,\ldots,m. \end{cases} \tag{3.16}$$

En substituant (3.13) dans (4), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i c_i(t) = g(t), \quad \sum_{i=0}^{m} (2i+1) c_i(t) = h(t). \tag{3.17}$$

On introduit les vecteurs $V(t)$ et $F(t)$ définis par :

$$\begin{aligned} V(t) &= (c_0(t), c_1(t), \ldots, c_m(t))^T, \\ F(t) &= (f(x_1,t), f(x_2,t), \ldots, f(x_{m-1},t), g(t), h(t))^T. \end{aligned}$$

En remplaçant (3.13) dans les conditions initiales (3), nous obtenons :

$$V(0) = (c_0(0), c_1(0), \ldots, c_m(0))^T \text{ et } \frac{d}{dt}V(0) = (c_0'(0), c_1'(0), \ldots, c_m'(0))^T.$$

En combinant avec les équations (3.15) et (3.17), nous trouvons la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} M(t)\ddot{V}(t) + C(t)\dot{V}(t) + KV(t) = F(t), \\ V(0) = (c_0(0), c_1(0), \ldots, c_m(0))^T, \\ \dot{V}(0) = (c_0'(0), c_1'(0), \ldots, c_m'(0))^T, \end{cases} \tag{3.18}$$

où $M(t)$ et la matrice de masse donnée par :

$$M(t) = t^{1-\alpha} \begin{pmatrix} W_0^*(x_1) & W_1^*(x_1) & \ldots & W_m^*(x_1) \\ W_0^*(x_2) & W_1^*(x_2) & \ldots & W_m^*(x_2) \\ \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ W_0^*(x_{m-1}) & W_1^*(x_{m-1}) & \ldots & W_m^*(x_{m-1}) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$C(t)$ est la matrice d'amortissement donnée par :

$$C(t) = 2aM(t),$$

et K est la matrice de rigidité donnée par :

$$K = \begin{pmatrix} R_0(x_1) & R_1(x_1) & \dots & R_m(x_1) \\ R_0(x_2) & R_1(x_2) & \dots & R_m(x_2) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ R_0(x_{m-1}) & R_1(x_{m-1}) & \dots & R_m(x_{m-1}) \\ 1 & -1 & \dots & (-1)^m \\ 1 & 3 & \dots & 2m+1 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le système d'équations différentielles du second ordre (3.18), nous utilisons la méthode de Newmark.

3.5 Méthode de Newmark

Soit $T > 0$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, $\Delta t = T/N$ est le pas de la variable t. Nous définissons donc $t_j = j\Delta t$ dans lequel $j = 0, 1, \dots, N$, et nous introduisons les notations suivantes :

$$c_i(t_j) = c_i^j, \quad g(t_j) = g^j, \quad h(t_j) = h^j.$$

$$V^j = \left(c_0^j, c_1^j, \dots, c_m^j\right)^T.$$

$$F^j = \left(f(x_1, t_j), f(x_2, t_j), \dots, f(x_{m-1}, t_j), g^j, h^j\right)^T.$$

En 1959, N.M. Newmark a proposé une méthode, voir [33], qui relie les accélérations, les vitesses et les déplacements des nœuds à l'instance t_{j+1} et t_j comme suit :

$$V^{j+1} = V^j + \Delta t \dot{V}^j + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left[(1-2\theta)\ddot{V}^j + 2\theta\ddot{V}^{j+1}\right], \tag{3.19}$$

$$\dot{V}^{j+1} = \dot{V}^j + \Delta t\left[(1-\gamma)\ddot{V}^j + \gamma\ddot{V}^{j+1}\right], \tag{3.20}$$

où $0 \leq \theta \leq 1/2$ et $0 \leq \gamma \leq 1$. La méthode la plus couramment utilisée est la méthode de l'accélération moyenne pour $\theta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$, voir [9].

On résoudre le système (3.18) à l'instant $t_{j+1} = (j+1)\Delta t$:

$$M^{j+1}\ddot{V}^{j+1} + C^{j+1}\dot{V}^{j+1} + KV^{j+1} = F^{j+1},\ j = 0, 1, \dots, N-1. \tag{3.21}$$

En réarrangeant (3.19) pour obtenir une expression de $\ddot{V}^{j+1}$ telle que

$$\ddot{V}^{j+1} = \frac{V^{j+1} - V^j}{\theta \Delta t^2} - \frac{\dot{V}^j}{\theta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\theta} - 1\right) \ddot{V}^j. \tag{3.22}$$

En remplaçant (3.22) dans (3.20), on obtient :

$$\dot{V}^{j+1} = \frac{\gamma}{\theta \Delta t} \left(V^{j+1} - V^j\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\theta}\right) \dot{V}^j + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\theta}\right) \ddot{V}^j. \tag{3.23}$$

En substituant (3.22) et (3.23) dans (3.21), nous obtenons le système linéaire suivant :

$$A^{j+1} V^{j+1} = B^{j+1}, \tag{3.24}$$

où

$$\begin{aligned} A^{j+1} &= \frac{M^{j+1}}{\theta \left(\Delta t\right)^2} + \frac{\gamma C^{j+1}}{\theta \Delta t} + K, \\ B^{j+1} &= F^{j+1} + M^{j+1} \left[\frac{V^j}{\theta \left(\Delta t\right)^2} + \frac{\dot{V}^j}{\theta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\theta} - 1\right) \ddot{V}^j\right] \\ &\quad + C^{j+1} \left[\frac{\gamma V^j}{\theta \Delta t} - \left(1 - \frac{\gamma}{\theta}\right) \dot{V}^j - \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\theta}\right) \ddot{V}^j\right]. \end{aligned}$$

L'algorithme complet utilisant la méthode de Newmark est le suivant :

Algorithme 1 (Algorithme de Newmark)

1: **Initialisations :**

1. Donner les coefficients a, b et ω.
2. Donner les ordres des dérivées fractionnaires conformables $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < \beta \leq 2$.
3. Donner le terme source $f(x,t)$, les conditions initiales $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.
4. Donner les conditions aux limites de Dirichlet $g(t)$ et $h(t)$.
5. Donner les polynômes de Tchebychev $W_0^*(x), \ldots, W_m^*(x)$.
6. Donner les racines $x_1, \ldots, x_{m-1}$ de polynôme de Tchebychev décalé $W_{m-1}^*(x)$.
7. Donner le pas de temps $\Delta t = T/N_t$ et le pas de l'espace $h = 1/(N_x + 1)$.
8. En fixe $\theta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$ et on donne les paramètres suivants :

$$a_0 = \frac{1}{\theta(\Delta t)^2};\ a_1 = \frac{\gamma}{\theta \Delta t};\ a_2 = \frac{1}{\theta \Delta t};\ a_3 = \frac{1}{2\theta} - 1;$$
$$a_4 = \frac{\gamma}{\theta} - 1;\ a_5 = \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\theta} - 1\right);\ a_6 = \Delta t(1-\gamma);\ a_7 = \gamma \Delta t.$$

9. Calculer la matrice de rigidité K.
10. Calculer V^0, $\dot{V}^0$ et $\ddot{V}^0$.

2: **Pour chaque pas de temps :**

1. Calculer la matrice de masse M^{j+1} et la matrice d'amortissement C^{j+1}.
2. Calculer la matrice $A^{j+1} = a_0 M^{j+1} + a_1 C^{j+1} + K$.
3. Calculer le deuxième membre :

$$B^{j+1} = F^{j+1} + M\left(a_0 V^j + a_2 \dot{V}^j + a_3 \ddot{V}^j\right) + C\left(a_1 V^j + a_4 \dot{V}^j + a_5 \ddot{V}^j\right).$$

4. Résoudre le système linéaire suivant :

$$A^{j+1} V^{j+1} = B^{j+1}.$$

5. Calculer les vecteurs de vitesse et d'accélération :

$$\ddot{V}^{j+1} = a_0\left(V^{j+1} - V^j\right) - a_2 \dot{V}^j - a_3 \ddot{V}^j,$$
$$\dot{V}^{j+1} = \dot{V}^j + a_6 \ddot{V}^j + a_7 \ddot{V}^{j+1}.$$

6. Poser $j = j + 1$ et aller à l'étape 2 :1.

3.6 Applications numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques pour le problème d'évolution (2)-(4) avec les coefficients dans l'équation (2) sont constants, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1$ dans les conditions aux limites de Robin (4). Pour tester l'efficacité de Algorithme 1, plusieurs exemples numériques sont donnés. Soient L_2, L_∞ et RMS les erreurs définis par :

$$L_2 = \|u_e - u_m\|_2 = \sqrt{h \sum_{i=0}^{N} |u_e(x_i,t) - u_m(x_i,t)|^2}.$$

$$L_\infty = \|u_e - u_m\|_\infty = \max_{0\le i\le N} |u_e(x_i,t) - u_m(x_i,t)|.$$

$$RMS = \frac{\sum_{i=0}^{N} |u_e(x_i,t) - u_m(x_i,t)|^2}{N+1}.$$

où u_e est la solution exacte et u_m est la solution numérique.

Nous comparons les solutions numériques obtenues par Algorithme 1 avec des solutions exactes connues et les méthodes numériques disponibles dans la littérature. Tous les calculs numériques ont été effectués par MATLAB R2014b dans le système d'exploitation Windows 10 (64 bits) avec Intel(R) Core(TM) i7-2670QM, un processeur à 2,20 GHz et 8 Go de mémoire.

Exemple 3.2. Dans cet exemple, nous considérons les données suivantes :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2},\ \ b = 1,,\ \ \omega = 1,\ \ \beta = 2,\ T = 1, \\ f(x,t) = \left[(x - x^2)\left[\alpha + \alpha^2 - (1+\alpha)\,t + t^{1+\alpha}\right] + 2t^{1+\alpha}\right] e^{-t}, \\ \varphi(x) = 0,\ \ \psi(x) = 0,\ \ g(t) = h(t) = 0. \end{cases}$$

Pour ces données, le problème d'évolution (2)-(4) est donné par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(1+\alpha)} u(x,t) + \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x,t) + u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t), \\ u(x,0) = \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ 0 < t \le 1. \end{cases} \tag{3.25}$$

On note que la solution exacte de ce problème est $u_e = (x - x^2)\, t^{1+\alpha} e^{-t}$. Si $\alpha = 1$, cet exemple a été étudié dans [30,32] par différentes méthodes numériques. Nous appliquons Algorithme 1 pour $m = 5$ et $u_5(x,t)$ est la solution numérique définie par :

$$u_5(x,t) = \sum_{i=0}^{5} c_i(t)\, W_i^*(x).$$

En utilisant le système linéaire (3.24) pour $m = 5$ et $N_t = 1000$ avec les données initiales,

$$V^0 = \dot{V}^0 = \ddot{V}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

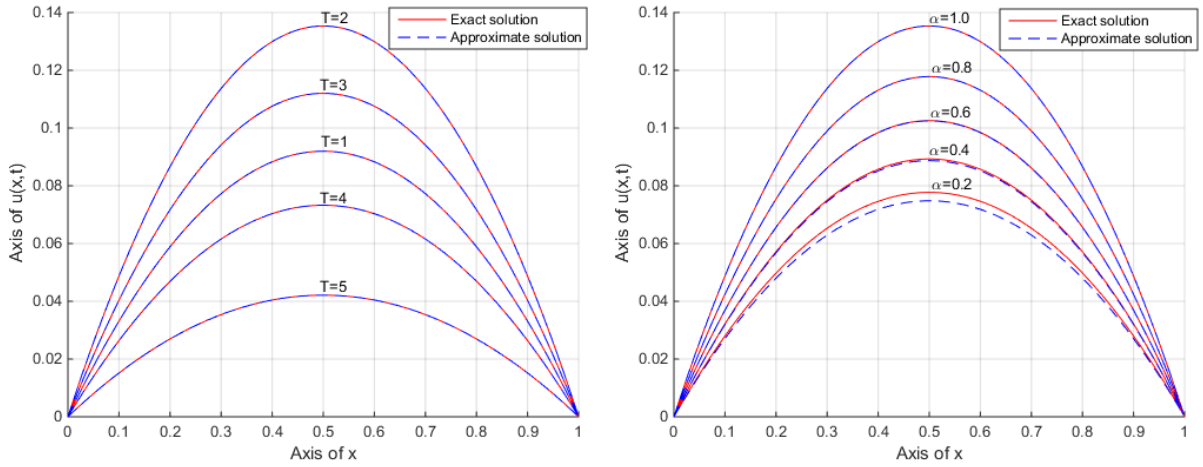
Les erreurs L_2 et L_∞ et le temps CPU en secondes sont indiqués dans Table 3.1. Les résultats numériques sont comparés aux résultats obtenus dans [30,32]. On peut conclure que les solutions numériques obtenues par notre algorithme sont bonnes. Dans Table 3.2, nous présentons les erreurs L_2 et L_∞ aux différentes valeurs de t et pour $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, avec $\Delta t = 0,0001$ et $h = 0,01$. Les graphes des solutions exactes et numériques pour $\alpha = 1$ à $T = 1, 2, 3, 4, 5$ et pour $T = 2$ à $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ sont illustrés dans Figure 3.1 et les graphes 3D des solutions exactes et numériques jusqu'à $T = 5$ sont présentés en Figure 3.2.

TABLE 3.1 – Erreurs L_2 et L_∞ et le temps CPU avec $\Delta t = 0,001$, $h = 0,01$ et $\alpha = 1$.

	Algorithme proposé			CuTBSM, [32]			CuBSM, [30]		
T	L_2	L_∞	CPU	L_2	L_∞	CPU	L_2	L_∞	CPU
1.0	8.15E-07	1.46E-06	0.24	6.31E-05	8.76E-05	0.34	4.55E-05	5.91E-05	0.43
2.0	1.30E-05	1.83E-05	0.45	2.34E-05	3.29E-05	0.57	1.43E-05	1.78E-05	0.77
3.0	1.75E-06	7.12E-06	0.65	4.62E-06	5.90E-06	1.05	6.42E-06	1.43E-05	1.15
4.0	9.09E-06	1.26E-05	0.86	2.19E-05	3.04E-05	1.11	8.92E-06	1.35E-05	1.29
5.0	4.43E-06	6.03E-06	1.07	5.18E-06	6.92E-06	1.26	3.01E-06	5.20E-05	1.46

TABLE 3.2 – Erreurs L_2 et L_∞ pour différentes valeurs de T et α avec $\Delta t = 0,0001$, $h = 0,01$.

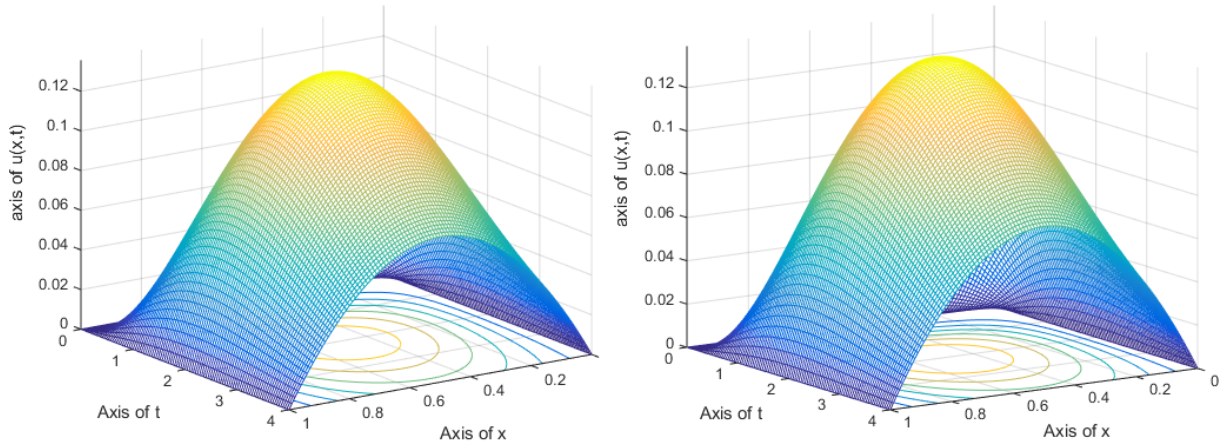
	T=1		T=2		T=3		T=4	
α	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.2	2.51E-03	3.53E-03	2.08E-03	2.93E-03	7.99E-04	1.12E-03	6.14E-04	8.58E-04
0.4	5.27E-04	7.44E-04	4.10E-04	5.77E-04	1.06E-04	1.51E-04	1.63E-04	2.27E-04
0.6	7.65E-05	1.09E-04	6.24E-05	8.91E-05	1.51E-05	2.21E-05	2.82E-05	3.91E-05
0.8	8.11E-06	1.14E-05	6.73E-06	9.72E-06	3.05E-06	4.50E-06	1.69E-06	2.26E-06
1.0	6.95E-08	1.26E-07	1.25E-06	1.75E-06	5.64E-07	8.38E-07	1.03E-06	1.43E-06



(a) Solutions exactes et numériques pour $\alpha = 1$ et $T = 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) Soutions exactes et numériques pour $T = 2$ et $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

FIGURE 3.1 – Comparaison entre solutions numériques et exactes pour différentes valeurs T et α avec $h = 0,01$, $\Delta t = 0,001$.



(a) Solution exacte.

(b) Solution numérique.

FIGURE 3.2 – Graphes spatiaux-temporels pour solutions exactes et numériques pour $T = 4$ et $\alpha = 1$.

Exemple 3.3. On considère l'équation (2) dans le domaine $[0, 1]$ avec $a = 6$, $b = 2$, $w = 1$, $\alpha = 1$ et $f(x,t) = \left[3\cos(t) - 12\sin(t) + (\beta-1)^2 x^{2-\beta}\cos(t)\right]\sin((\beta-1)x)$. Les conditions initiales et aux limites sont données par :

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin((\beta-1)x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \cos(t)\sin(\beta-1), \quad t \ge 0. \end{cases}$$

La solution exacte est $u_e = \cos(t)\sin((\beta-1)x)$. Si $\beta = 2$, cet exemple a été étudié dans [30]

et [32] par différentes méthodes numériques. Nous appliquons Algorithme 1 pour $m = 5$ et nous approchons la solution $u(x,t)$ comme suit :

$$u_5(x,t) = \sum_{i=0}^{5} c_i(t) W_i^*(x).$$

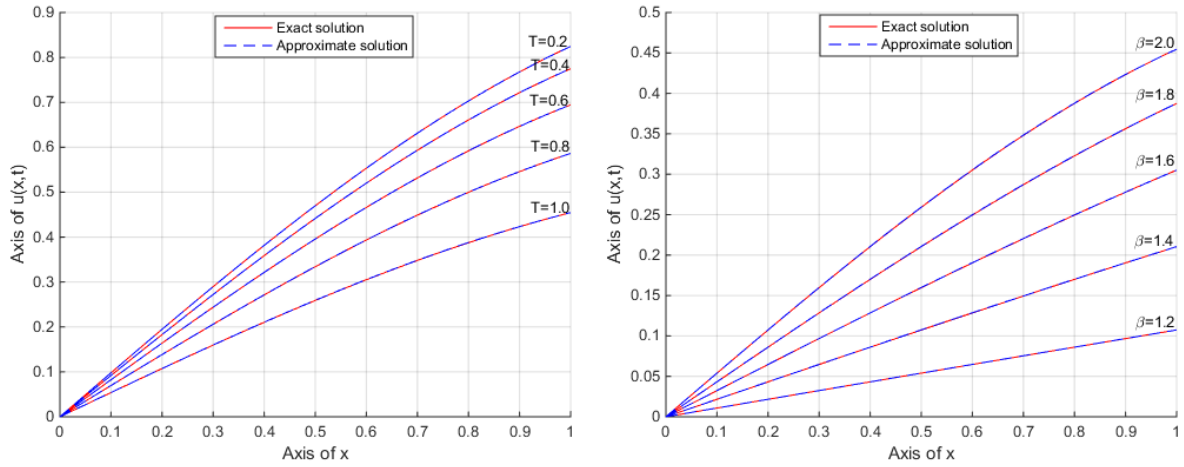
Nous utilisons le système linéaire (3.24) pour $m = 5$ et $N_t = 1000$ avec les données initiales

$$\begin{cases} V_0 = (0.2373, 0.2273, -0.0124, -0.0023, 0.0001, 0)^T, \\ \dot{V}_0 = \ddot{V}_0 = (0,0,0,0,0,0)^T \end{cases}$$

L'efficacité de notre algorithme est mesurée à l'aide de L_2, L_∞ et d'erreur quadratique moyenne RMS avec $\Delta t = 0,0001$, $h = 0,01$ qui sont présentées dans Table 3.3. Les résultats numériques sont comparés aux résultats obtenus dans [30, 32]. On peut conclure que les solutions numériques obtenues par notre algorithme sont bonnes. Dans Figure 3.3, nous présentons la comparaison des solutions numériques et exactes pour différents niveaux de temps avec $\Delta t = 0,001$ et $h = 0,01$. Le graphe 3D de la solution numérique jusqu'à $t = 1$ et $t = 2$ est présenté dans Figure 3.4.

TABLE 3.3 – Erreurs L_2, L_∞ et RMS avec $\Delta t = 0,0001$, $h = 0,01$ et $\beta = 2$.

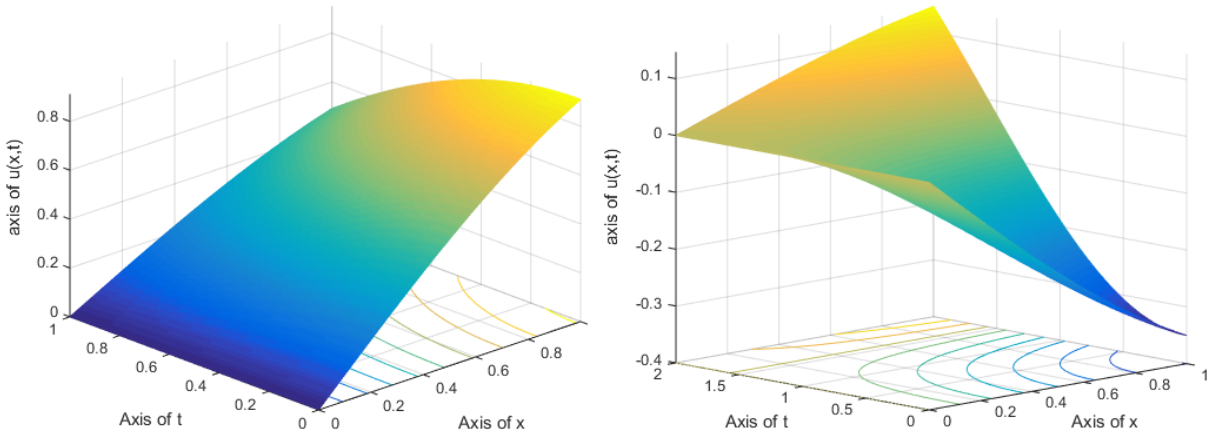
	Algorithme proposé			CuTBSM, [32]			CuBSM, [30]		
T	L_2	L_∞	RMS	L_2	L_∞	RMS	L_2	L_∞	RMS
0.2	5.07E-07	1.03E-06	5.09E-07	2.96E-06	4.63E-06	2.94E-06	2.69E-06	5.24E-06	2.67E-06
0.4	3.48E-07	6.12E-07	3.50E-07	6.77E-06	1.01E-05	6.73E-06	5.61E-06	8.61E-06	5.59E-06
0.6	9.23E-07	1.70E-06	9.28E-07	9.81E-06	1.42E-05	9.76E-06	9.75E-06	1.25E-05	9.70E-06
0.8	1.69E-06	2.69E-06	1.70E-06	1.20E-05	1.71E-05	1.19E-05	1.38E-05	2.03E-05	1.37E-05
1.0	2.01E-06	2.91E-06	2.02E-06	1.34E-05	1.90E-05	1.33E-05	1.73E-05	2.75E-05	1.72E-06



(a) Solutions exactes et numériques pour $\beta = 2$ à $T = 0.2$ au $T = 1.0$.

(b) Solutions exactes et numériques pour $T = 1$ à $\beta = 1.2$ au $\beta = 2$.

FIGURE 3.3 – Comparaison entre solutions numériques et exactes pour différentes valeurs de T et β avec $h = 0,01$, $\Delta t = 0,001$.



(a) Solution numérique à $T = 1$.

(b) Solution numérique à $T = 2$.

FIGURE 3.4 – Graphes de solution numérique pour $T = 1$ et $T = 2$ avec $\beta = 2$.

Exemple 3.4. Nous considérons l'équation (2) avec $a = 10$, $b = 5$, $\omega = 1$ et $\beta = 1 + \alpha$ dans le domaine $0 \leq x \leq 1$, avec les conditions initiales et aux limites,

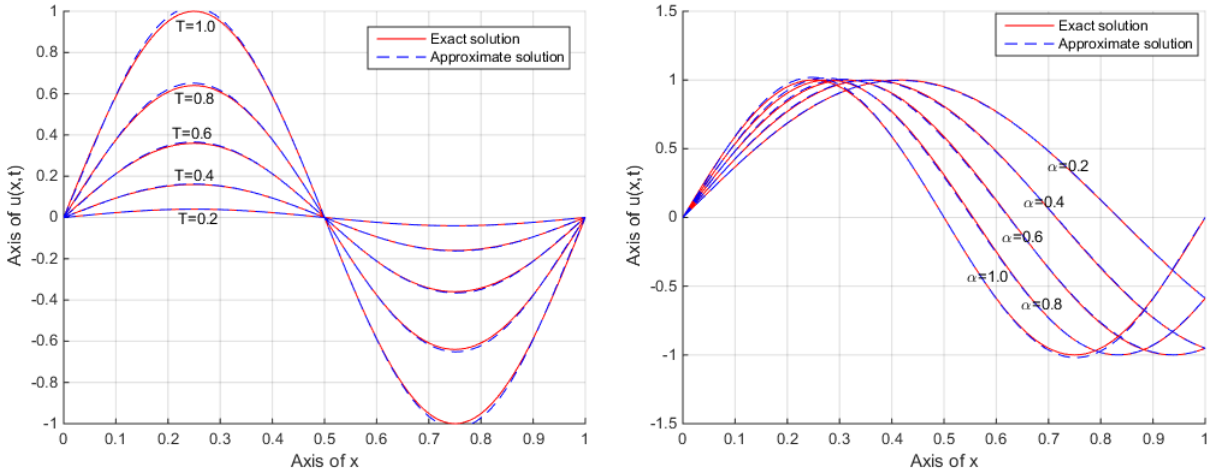
$$u(x,0) = \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x,0) = 0,\ 0 < x < 1,$$
$$u(0,t) = 0,\ \ u(1,t) = t^{1+\alpha} \sin(\pi(1+\alpha)),\ 0 < t \leq T.$$

et $f(x,t) = \left[\alpha(\alpha+1) + 20(\alpha+1)t + 25t^{1+\alpha} + \pi^2(1+\alpha)^2 x^{1-\alpha} t^{1+\alpha}\right] \sin(\pi(1+\alpha)x)$. La solution exacte de cet exemple est $u_e = t^{1+\alpha} \sin(\pi(1+\alpha)x)$.

Les erreurs L_2 et L_∞ aux différentes valeurs de temps T pour $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ avec $\Delta t = 0.001$ et $h = 0.01$ sont rapportés dans Table 3.4. D'après Figure 3.5, il est clair que la solution numérique coïncide avec la solution exacte pour des différentes valeurs de temps T et des valeurs de α avec $\Delta t = 0.001$ et $h = 0.01$. Les graphes spatio-temporels de la solution numérique et de l'erreur absolue sont présentés dans Figure 3.6.

TABLE 3.4 – Erreurs L_2 et L_∞ pour différentes valeurs de T et α avec $\Delta t = 0.0001$ et $h = 0.01$.

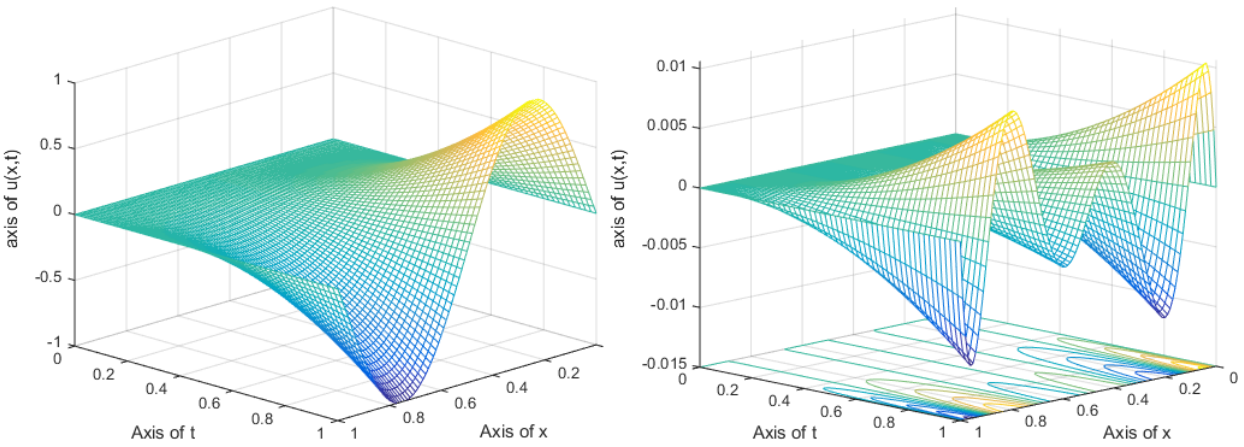
	$T = 0.3$		$T = 0.5$		$T = 0.7$		$T = 1.0$	
α	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.2	5.79E-04	1.22E-03	9.57E-04	1.74E-03	1.43E-03	2.53E-03	2.20E-03	3.84E-03
0.4	8.39E-04	1.59E-03	1.72E-03	3.07E-03	2.77E-03	4.87E-03	4.59E-03	8.02E-03
0.6	1.01E-03	1.76E-03	2.36E-03	4.17E-03	4.10E-03	7.33E-03	7.37E-03	1.33E-02
0.8	9.04E-04	1.93E-03	2.41E-03	5.20E-03	4.61E-03	9.96E-03	9.11E-03	1.97E-02
1.0	7.65E-04	1.42E-03	2.44E-03	4.48E-03	5.29E-03	9.60E-03	1.20E-02	2.15E-02



(a) Solutions exactes et numériques pour $\alpha = 1$ à $T = 0.2$ au $T = 1.0$.

(b) Solutions exactes et numériques pour $T = 1$ à $\alpha = 0.2$ au $\alpha = 1$.

FIGURE 3.5 – Comparaison entre solutions numériques et exactes pour différentes valeurs de T et α avec $h = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$.



(a) Solution numérique. (b) Erreur absolue.

FIGURE 3.6 – Graphes de la solution numérique et l'erreur absolue pour $T = 1$ et $\alpha = 1$.

CHAPITRE 4

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'ÉQUATION TÉLÉGRAPHIQUE FRACTIONNAIRE AVEC COEFFICIENTS VARIABLES

Dans ce chapitre, nous avons généralisé le travail de chapitre 3 par une nouvelle méthode pour la résolution numérique du problème d'évolution (2)-(4). Cette méthode est basée sur les polynômes de Legendre de première espèce et la méthode α-généralisée. Avec cinq exemples numériques, nous avons présenté une étude comparative entre cette méthode et la méthode proposée dans chapitre 3 et d'autres méthodes numériques disponibles dans la littérature. Cette méthode est donne une excellente approximation avec un petit nombre de points de collocation.

4.1 Polynômes de Legendre décalés du première espèce

Pour utiliser les polynômes donnés dans Section 1.4 sur l'intervalle $[0, 1]$, on définit les polynômes de Legendre dits décalés du première espèce en introduisant le changement de variable suivant :

$$z = 2x - 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}(z + 1).$$

Dans ce cas, les polynômes de Legendre décalés de $P_n^*(x)$ d'ordre n en x sont définis sur $[0, 1]$ par :

$$P_n^*(x) = P_n(z) = P_n(2x - 1). \tag{4.1}$$

Avec (4.1) et Proposition 1.6, les polynômes de Legendre décalés du première espèce $P_n^*(x)$ vérifiant la formule de récurrence suivante, voir [17] :

$$\begin{cases} P_0^*(x) = 1, \\ P_1^*(x) = 2x - 1, \\ P_{n+1}^*(x) = \frac{2n+1}{n+1}(2x-1)P_n^*(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}^*(x),\ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{4.2}$$

En utilisant (4.1) et (1.25), nous obtenons la forme explicite des polynômes de Legendre décalés du première espèce $P_n^*(x)$ de degré n en x donnée par :

$$P_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)\left(\Gamma(k+1)\right)^2} x^k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma d'Euler.

On note que

$$\begin{cases} P_n^*(0) = (-1)^n, & \left(P_n^*(0)\right)' = (-1)^{n-1} n(n+1), \\ P_n^*(1) = 1, & \left(P_n^*(1)\right)' = n(n+1). \end{cases} \tag{4.4}$$

D'après (4.1) et Lemme 1.3, les polynômes $P_n^*(x)$ sont orthogonaux sur l'intervalle $[0,1]$ c'est à dire :

$$\left\langle P_i^*(x), P_j^*(x) \right\rangle = \int_0^1 P_i^*(x) P_j^*(x)\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2i+1}, & \text{si} \quad i = j, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{4.5}$$

Soit $\Phi \in L^2(0,1)$ qui elle peut être exprimé en termes de polynômes de Legendre décalés du première espèce telle que

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i P_i^*(x), \tag{4.6}$$

où les coefficients c_i ; $i \in \mathbb{N}$ sont donnés par :

$$c_i = (2i+1) \int_0^1 \Phi(x) P_i^*(x)\, dx. \tag{4.7}$$

En pratique, seuls les premiers polynômes de Legendre décalés $(m+1)$-termes sont considérés.

Alors, nous avons :

$$\Phi_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i P_i^*(x). \tag{4.8}$$

4.2 Évaluation de la dérivée fractionnaire conformable

Dans cette section, nous présentons l'évaluation de la dérivée fractionnaire conformable pour la fonction $\Phi_m(x)$ définie par (4.8). Cette évaluation est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit $\Phi_m(x)$ une fonction approchée en termes de polynômes de Legendre décalés du première espèce définie par* (4.8)*. Pour tout $\xi > 0$, nous avons :*

$$\mathcal{D}_x^{(\xi)}\Phi_m(x) = \sum_{i=n+1}^{m}\sum_{k=n+1}^{i} c_i \mathcal{M}_{i,k}^n x^{k-\xi}, \;\; n < \xi \leq n+1, \tag{4.9}$$

où $\mathcal{M}_{i,k}^n$ est donné par :

$$\mathcal{M}_{i,k}^n = (-1)^{i+k} \frac{\Gamma(i+k+1)}{\Gamma(i-k+1)\,\Gamma(k+1)\Gamma(k-n)} x^{k-\xi}, \tag{4.10}$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma d'Euler.

Démonstration. En utilisant (4.8) et (1.4), on obtient :

$$\mathcal{D}_x^{(\xi)}\Phi_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i \mathcal{D}_x^{(\xi)} P_i^*(x). \tag{4.11}$$

De plus, de (4.3) et (1.5), on a :

$$\mathcal{D}_x^{(\xi)} P_i^*(x) = \sum_{k=n+1}^{i} (-1)^{i+k} \frac{\Gamma(i+k+1)}{\Gamma(i-k+1)\,\Gamma(k+1)\Gamma(k-n)} x^{k-\xi}, \quad n < \xi \leq n+1. \tag{4.12}$$

En substituant (4.12) dans (4.11), on obtient :

$$\mathcal{D}_x^{(\xi)}\Phi_m(x) = \sum_{i=n+1}^{m}\sum_{k=n+1}^{i} (-1)^{i+k} c_i \mathcal{M}_{i,k}^n x^{k-\xi}. \tag{4.13}$$

où $\mathcal{M}_{i,k}^n$ est défini par (4.10). □

Exemple 4.1. Considérons $\Phi(x) = x^3$ avec $m = 3$, $\xi = 2.5$ et $n = 2$. En utilisant (1.5), on obtient :

$$\mathcal{D}_x^{(2.5)} x^3 = 6\sqrt{x}.$$

D'autre part, en utilisant Théorème (4.1) nous obtenons :

$$\mathcal{D}_x^{(2.5)} x^3 = \sum_{i=3}^{3} \sum_{k=3}^{3} c_i \mathcal{M}_{i,k}^2 x^{k-2.5} = c_3 \mathcal{M}_{3,3}^2 x^{0.5}.$$

D'après (4.2), (4.5), (4.7) et (4.10), on obtient :

$$c_3 = \frac{1}{20}, \quad \mathcal{M}_{3,3}^2 = 120.$$

Donc, $\mathcal{D}_x^{(2.5)} x^3 = 6\sqrt{x}$.

4.3 Analyse de convergence

Avant de prouver notre théorème principal sur la convergence, nous avons besoin de trois lemmes suivants :

Lemme 4.1. *Nous avons :*

$$|P_n^*(x)| < \sqrt{\frac{\pi}{8n(x-x^2)}}, \ \ \forall x \in \,]\,0,1\,[\ \textit{et} \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.14}$$

Démonstration. La première intégrale de Laplace pour $P_n(x)$ avec $x \in [-1,1]$, voir [37, page 171], est donnée par :

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[z + \sqrt{(z^2-1)} \cos(\theta) \right]^n d\theta. \tag{4.15}$$

On pose $z = 2x - 1$ dans (4.15), on obtient :

$$\begin{aligned} P_n^*(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[2x - 1 + \sqrt{(4x^2-4x)} \cos(\theta) \right]^n d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[2x - 1 + 2i\sqrt{(x-x^2)} \cos(\theta) \right]^n d\theta. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Pour tout $x \in \,]\,0,1\,[$, nous avons :

$$\begin{aligned} \left| 2x - 1 + 2i\sqrt{(x-x^2)} \cos(\theta) \right| &= \sqrt{(2x-1)^2 + 4(x-x^2)\cos^2(\theta)} \\ &= \sqrt{1 - 4(x-x^2)\sin^2(\theta)} \end{aligned} \tag{4.17}$$

De (4.16) et (4.17), on obtient :

$$\begin{aligned}|P_n^*(x)| &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[1-4(x-x^2)\sin^2(\theta)\right]^{\frac{n}{2}}d\theta\\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-4(x-x^2)\sin^2(\theta)\right]^{\frac{n}{2}}d\theta\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{cases}\forall\theta\in\,]\,0,\pi/2\,[\,,\ \sin(\theta)>\frac{2\theta}{\pi},\\ \forall y>0,\ 1-y<e^{-y}.\end{cases}$$

Alors, on a :

$$1-4(x-x^2)\sin^2(\theta)<1-\frac{16\theta^2(x-x^2)}{\pi^2}<e^{\left(-\frac{16\theta^2(x-x^2)}{\pi^2}\right)},$$

Par conséquent, on obtient :

$$|P_n^*(x)|<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\left(\frac{-8n\theta^2(x-x^2)}{\pi^2}\right)}d\theta<\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{\left(\frac{-8n\theta^2(x-x^2)}{\pi^2}\right)}d\theta.$$

Avec le changement de variable $s=\frac{2\theta}{\pi}\sqrt{2n\,(x-x^2)}$, nous obtenons :

$$|P_n^*(x)|<\frac{2}{\pi}\frac{\pi/2}{\sqrt{2n\,(x-x^2)}}\int_0^{+\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\frac{\pi}{8n\,(x-x^2)}},$$

où $\int_0^{+\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}/2$. □

Lemme 4.2. *Si $\Phi\in L^2(0,1)$ définie par $\Phi(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}c_nP_n^*(x)$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}\int_0^1\Phi(x)P_n^*(x)dx=0. \tag{4.18}$$

Démonstration. Soit la somme partielle donnée par :

$$\Phi_m(x)=\sum_{n=0}^{m}c_nP_n^*(x). \tag{4.19}$$

Soit la quantité positive suivante :

$$\int_0^1 \left[\Phi(x) - \Phi_m(x)\right]^2 dx = \int_0^1 \Phi^2(x)dx - 2\int_0^1 \Phi(x)\Phi_m(x)dx + \int_0^1 \Phi_m^2(x)dx \geq 0. \tag{4.20}$$

De (4.19), (4.7) et (4.5) , on obtient :

$$\int_0^1 \Phi(x)\Phi_m(x)dx = \sum_{n=0}^{m} c_n \int_0^1 \Phi(x)P_n^*(x)dx = \sum_{n=0}^{m} \frac{c_n^2}{2n+1}. \tag{4.21}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Phi_m^2(x)dx &= \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} c_n c_k \int_0^1 P_n^*(x)P_k^*(x)dx \\ &= \sum_{n=0}^{m} c_n^2 \int_0^1 \left[P_n^*(x)\right]^2 dx \\ &= \sum_{n=0}^{m} \frac{c_n^2}{2n+1}.\end{aligned} \tag{4.22}$$

En remplaçant (4.22) et (4.21) dans (4.20), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{c_n^2}{2n+1} \leq \int_0^1 \Phi^2(x)dx. \tag{4.23}$$

En passant à limite $m \to +\infty$, l'inégalité (4.23) devienne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2n+1} \leq \int_0^1 \Phi^2(x)dx. \tag{4.24}$$

Puisque $\Phi \in L^2(0,1)$, alors la série définie dans (4.24) est convergente. Par conséquent, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2n+1}} = 0 \tag{4.25}$$

En utilisant (4.7) et (4.25), on obtient (4.18). □

Lemme 4.3. *Les polynômes de Legendre décalés du première espèce satisfont l'identité suivante :*

$$\sum_{n=0}^{m}(2n+1)P_n^*(x)P_n^*(y) = \frac{m+1}{2(y-x)}\left[P_{m+1}^*(y)P_m^*(x) - P_m^*(y)P_{m+1}^*(x)\right]. \tag{4.26}$$

Démonstration. En multipliant la relation de récurrence (4.2) par $P_n^*(y)$, on obtient :

$$(2n+1)\,(2x-1)\,P_n^*(y)P_n^*(x) = (n+1)\,P_n^*(y)P_{n+1}^*(x) + nP_n^*(y)P_{n-1}^*(x).$$

On change les rôles entre x et y dans cette expression et par la différence, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2(2n+1)(y-x)P_n^*(y)P_n^*(x) = (n+1)\left[P_{n+1}^*(y)P_n^*(x) - P_n^*(y)P_{n+1}^*(x)\right] \\ - n\left[P_n^*(y)P_{n-1}^*(x) - P_{n-1}^*(y)P_n^*(x)\right]. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Avec sommation les deux côtés de(4.27) avec $n = 0, 1, 2, ..., m$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2(y-x)\sum_{n=0}^{m}\left[(2n+1)P_n^*(y)P_n^*(x)\right] &= \sum_{n=0}^{m}\left[(n+1)(P_{n+1}^*(y)P_n^*(x) - P_n^*(y)P_{n+1}^*(x))\right. \\ &\quad \left. -n(P_n^*(y)P_{n-1}^*(x) - P_{n-1}^*(y)P_n^*(x))\right] \\ &= (m+1)\left[P_{m+1}^*(y)P_m^*(x) - P_m^*(y)P_{m+1}^*(x)\right]. \end{aligned} \tag{4.28}$$

En divisant (4.28) par $2(y-x)$, nous obtenons (4.26). □

Remarque 4.1. L'intégration de (4.26) sur $[0,1]$ donne

$$\sum_{n=0}^{m}(2n+1)P_n^*(x)\int_0^1 P_n^*(y)dy = \frac{m+1}{2}\int_0^1 \frac{P_{m+1}^*(y)P_m^*(x) - P_m^*(y)P_{m+1}^*(x)}{y-x}dy, \tag{4.29}$$

et de (4.7), on déduit

$$(m+1)\int_0^1 \frac{P_{m+1}^*(y)P_m^*(x) - P_m^*(y)P_{m+1}^*(x)}{y-x}dy = 2. \tag{4.30}$$

Pour la convergence, nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Soit* $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n P_n^*(x)$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]$. *Alors, la suite des sommes partielles définie par :*

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n^*(x)$$

est convergente simplement vers Φ.

Démonstration. Soit $x \in [0,1]$. Nous avons :

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n^*(x) = \sum_{n=0}^{m}\left[(2n+1)\int_0^1 \Phi(y)\,P_n^*(y)\,dy\right]P_n^*(x).$$

En inversant l'ordre de sommation et d'intégration et en utilisant Lemme 4.3, on obtient :

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \int_0^1 \Phi(y) \sum_{n=0}^{m} \left[(2n+1) P_n^*(y)\right] P_n^*(x) dy \\ &= \frac{m+1}{2} \int_0^1 \frac{\Phi(y) \left[P_{m+1}^*(y) P_m^*(x) - P_m^*(y) P_{m+1}^*(x)\right] dy}{y-x} \\ &= \frac{m+1}{2} \Phi(x) \int_0^1 \frac{\left[P_{m+1}^*(y) P_m^*(x) - P_m^*(y) P_{m+1}^*(x)\right] dy}{y-x} \\ &+ \frac{m+1}{2} \int_0^1 \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y-x} \left[P_{m+1}^*(y) P_m^*(x) - P_m^*(y) P_{m+1}^*(x)\right] dy. \end{aligned}$$

On introduit la fonction $\hbar$ définie par :

$$\hbar(x) = \begin{cases} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x}, & \text{si } y \neq x, \\ \Phi'(x), & \text{si } y = x. \end{cases}$$

La fonction $\hbar$ est continue sur $[0,1]$ et en utilisant (4.30), nous obtenons :

$$S_m(x) = \Phi(x) + \frac{m+1}{2} P_m^*(x) \int_0^1 \hbar(y) P_{m+1}^*(y) dy - \frac{m+1}{2} P_{m+1}^*(x) \int_0^1 \hbar(y) P_m^*(y) dy. \quad (4.31)$$

On pose $b_m = \sqrt{2m+1} \int_0^1 \hbar(y) P_m^*(y) dy$. L'équation (4.31) devient sous la forme suivante :

$$S_m(x) - \Phi(x) = \frac{(m+1) P_m^*(x)}{2\sqrt{2m+3}} b_{m+1} - \frac{(m+1) P_{m+1}^*(x)}{2\sqrt{2m+1}} b_m.$$

En utilisant Lemme 4.1, on obtient :

$$\frac{(m+1)\left|P_m^*(x)\right|}{2\sqrt{2m+3}} < \left[\frac{(m+1)^2}{2m^2+3m} \times \frac{\pi}{32(x-x^2)}\right]^{1/2} < \sqrt{\frac{\pi}{32(x-x^2)}}$$

et

$$\frac{(m+1)\left|P_{m+1}^*(x)\right|}{2\sqrt{2m+1}} < \left[\frac{m+1}{2m+1} \times \frac{\pi}{32(x-x^2)}\right]^{1/2} < \sqrt{\frac{\pi}{32(x-x^2)}}.$$

Alors, les deux fonctions $x \mapsto \frac{(m+1)P_m^*(x)}{2\sqrt{2m+3}}$ et $x \mapsto \frac{(m+1)P_{m+1}^*(x)}{2\sqrt{2m+1}}$ sont bornées.

D'après Lemme 4.2, nous obtenons :

$$\lim_{m\to+\infty} b_m = \lim_{m\to+\infty} b_{m+1} = 0.$$

Par conséquent, nous avons $S_m(x) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \Phi(x)$. □

4.4 Méthode de collocation de Legendre

Dans cette section, nous appliquons la méthode de collocation de Legendre sur le problème (2)-(4) avec $\alpha = 1$ pour la condition initiale (3) et $\beta = 1$ pour la condition aux limites de Robin (4). Soit $u_m(x,t)$ l'approximation de $u(x,t)$ donnée sous la forme suivante :

$$u_m(x,t) = \sum_{i=0}^{m} c_i(t) P_i^*(x). \tag{4.32}$$

En appliquant Théorème (4.1) et (4.32) sur l'équation (2), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m} t^{1-\alpha} c_i''(t) P_i^*(x) + 2a(x,t) \sum_{i=0}^{m} t^{1-\alpha} c_i'(t) P_i^*(x) \\ + b^2(x,t) \sum_{i=0}^{m} c_i(t) P_i^*(x) = \omega(x,t) \sum_{i=2}^{m} \sum_{k=2}^{i} c_i(t) \mathcal{M}_{i,k}^1 x^{k-\xi} + f(x,t).\end{aligned} \tag{4.33}$$

On pose dans (4.33) $x = x_p$, $p = 1, 2, ..., m-1$ les racines du polynôme de Legendre décalé $P_{m-1}^*(x)$, on a :

$$\sum_{i=0}^{m} \left[t^{1-\alpha} c_i''(t) P_i^*(x_p) + 2a(x_p,t) t^{1-\alpha} c_i'(t) P_i^*(x_p) + c_i(t) R_i(x_p) \right] = f(x_p,t), \tag{4.34}$$

où

$$\begin{cases} S_0(x_p) = S_1(x_p) = 0, \\ S_i(x_p) = \sum_{k=2}^{i} \mathcal{M}_{i,k}^1 x_p^{k-\xi}, \quad i = 2, 3, ..., m, \\ R_i(x_p) = b^2(x_p,t) P_i^*(x_p) - \omega(x_p,t) S_i(x_p), \quad i = 0, 1, 2, ..., m. \end{cases} \tag{4.35}$$

En appliquant (4.32) sur (4) et avec (4.4), on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{m} \left[(-1)^{i-1} i(i+1) \mu_1 + (-1)^i \lambda_1 \right] c_i(t) = g(t), \\ \sum_{i=0}^{m} \left[i(i+1) \mu_2 + \lambda_2 \right] c_i(t) = h(t). \end{cases} \tag{4.36}$$

On introduit les vecteurs $X(t)$, $\dot{X}(t)$, $\ddot{X}(t)$ et $F(t)$ définis par :

$$\begin{cases} X(t) = (c_0(t), c_1(t), ..., c_m(t))^T, \\ \dot{X}(t) = (c_0'(t), c_1'(t), ..., c_m'(t))^T, \\ \ddot{X}(t) = (c_0''(t), c_1''(t), ..., c_m''(t))^T, \\ F(t) = (f(x_1,t), f(x_2,t), ..., f(x_{m-1},t), g(t), h(t))^T. \end{cases} \tag{4.37}$$

En remplaçant (4.32) dans les conditions initiales (3) avec $\alpha = 1$, et en utilisant (4.7), on obtient :

$$\begin{cases} c_i(0) = (2i+1)\int_0^1 \varphi(x) P_i^*(x)\, dx, \\ c_i'(0) = (2i+1)\int_0^1 \psi(x) P_i^*(x)\, dx. \end{cases}, \quad i = 0, 1, \ldots, m. \tag{4.38}$$

En combinant les équations (4.34), (4.36) et (4.37), on trouve la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} M(t)\ddot{X}(t) + C(t)\dot{X}(t) + K(t)X(t) = F(t), \\ X(0) = (c_0(0), c_1(0), ..., c_m(0))^T, \\ \dot{X}(0) = (c_0'(0), c_1'(0), ..., c_m'(t))^T. \end{cases} \tag{4.39}$$

où $M(t)$ est la matrice de masse donnée par :

$$M(t) = t^{1-\alpha} \begin{pmatrix} P_0^*(x_1) & P_1^*(x_1) & \cdots & P_m^*(x_1) \\ P_0^*(x_2) & P_1^*(x_2) & \cdots & P_m^*(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_0^*(x_{m-1}) & P_1^*(x_{m-1}) & \cdots & P_m^*(x_{m-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$C(t)$ est la matrice d'amortissement donnée par :

$$C(t) = 2t^{1-\alpha} \begin{pmatrix} a(x_1,t)P_0^*(x_1) & a(x_1,t)P_1^*(x_1) & \cdots & a(x_1,t)P_m^*(x_1) \\ a(x_2,t)P_0^*(x_2) & a(x_2,t)P_1^*(x_2) & \cdots & a(x_2,t)P_m^*(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a(x_{m-1},t)P_0^*(x_{m-1}) & a(x_{m-1},t)P_1^*(x_{m-1}) & \cdots & a(x_{m-1},t)P_m^*(x_{m-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $K\left(t\right)$ est la matrice de rigidité donnée par :

$$K(t)=\begin{pmatrix} R_0\left(x_1\right) & R_1\left(x_1\right) & \cdots & R_m\left(x_1\right) \\ R_0\left(x_2\right) & R_1\left(x_2\right) & \cdots & R_m\left(x_2\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_0\left(x_{m-1}\right) & R_1\left(x_{m-1}\right) & \cdots & R_m\left(x_{m-1}\right) \\ \lambda_1 & 2\mu_1-\lambda_1 & \cdots & (-1)^{m-1}m\left(m+1\right)\mu_1+(-1)^m\lambda_1 \\ \lambda_2 & 2\mu_2+\lambda_2 & \cdots & m\left(m+1\right)\mu_2+\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le système linéaire d'équations différentielles du second ordre (4.39), nous utilisons la méthode α-généralisée, voir [10].

4.5 Méthode α-généralisée

Soient $0=t_0<t_1<\ldots<t_{N_t}=T$ une partition uniforme de l'intervalle $[0,T]$ et $\tau=t_{j+1}-t_j$ est le pas de temps. Nous définissons $t_j=\tau j$ où $j=0,1,\ldots,N_t$. Nous introduisons les notations suivantes :

$$c_i\left(t_j\right)=c_i^j,\ g\left(t_j\right)=g_j,\ h\left(t_j\right)=h_j,\ F_j=\left(f\left(x_1,t_j\right),f\left(x_2,t_j\right),\ldots,f\left(x_{m-1},t_j\right),g_j,h_j\right)^T,$$

et

$$M^j=M\left(t_j\right),\ C^j=C\left(t_j\right),\ K^j=K\left(t_j\right),\ j=0,1,\ldots,N_t.$$

En 1993, Chung et Hulbert ont proposé une méthode appelée la méthode α-généralisée, voir [10]. La forme de base de cette méthode est donnée par :

$$d_{j+1}=d_j+\tau v_j+\tau^2\left[\left(\frac{1}{2}-\theta\right)A_j+\theta A_{j+1}\right], \tag{4.40}$$

$$v_{j+1}=v_j+\tau\left[\left(1-\gamma\right)A_j+\gamma A_{j+1}\right], \tag{4.41}$$

$$M^{j+1}A_{j+1-\alpha_m}+C^{j+1}v_{j+1-\alpha_f}+K^{j+1}d_{j+1-\alpha_f}=F_{j+1-\alpha_f}, \tag{4.42}$$

$$d_0=X(0),\ v_0=\dot{X}\left(0\right),\ A_0=\ddot{X}\left(0\right), \tag{4.43}$$

où

$$d_{j+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\, d_{j+1} + \alpha_f d_j, \tag{4.44}$$

$$v_{j+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\, v_{j+1} + \alpha_f v_j, \tag{4.45}$$

$$A_{j+1-\alpha_m} = (1-\alpha_m)\, A_{j+1} + \alpha_m A_j, \tag{4.46}$$

$$F_{j+1-\alpha_f} = F_{(1-\alpha_f)t_{j+1}+\alpha_f t_j}. \tag{4.47}$$

Dans lequel $j = 0, 1, ..., (N_t - 1)$, d_j, v_j et A_j sont respectivement les vecteurs déplacement, vitesse et accélération au temps t_j.

D'après (4.40), nous avons :

$$A_{j+1} = \frac{1}{\tau^2\theta}\,(d_{j+1} - d_j) - \frac{v_j}{\tau\theta} - \left(\frac{1}{2\theta} - 1\right) A_j. \tag{4.48}$$

En remplaçant (4.48) dans (4.41), on obtient :

$$v_{j+1} = \frac{\gamma}{\tau\theta}\,(d_{j+1} - d_j) + \left(1 - \frac{\gamma}{\theta}\right) v_j + \tau\left(1 - \frac{\gamma}{2\theta}\right) A_j. \tag{4.49}$$

En remplaçant (4.48) et (4.49) dans (4.42) et avec (4.44)-(4.47), on obtient le système linéaire suivant :

$$D^{j+1} d_{j+1} = B_{j+1}, \tag{4.50}$$

où

$$D^{j+1} = \frac{1-\alpha_m}{\tau^2\theta} M^{j+1} + \frac{\gamma\,(1-\alpha_f)}{\tau\theta} C^{j+1} + (1-\alpha_f)\, K^{j+1}, \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} B^{j+1} = {} & F_{j+1-\alpha_f} + M^{j+1}\left[\frac{1-\alpha_m}{\tau^2\theta} d_j + \frac{1-\alpha_m}{\tau\theta} v_j + \left(\frac{1-\alpha_m}{\tau\theta} - 1\right) A_j\right] \\ & + C^{j+1}\left[\frac{\gamma\,(1-\alpha_m)}{\tau\theta} d_j + \left(\frac{\gamma\,(1-\alpha_m)}{\theta} - 1\right) v_j + \tau\,(1-\alpha_f)\left(\frac{\gamma}{2\theta} - 1\right) A_j\right] - \alpha_f K^{j+1} d_j. \end{aligned} \tag{4.52}$$

L'algorithme complet utilisant la méthode $\alpha-$généralisée est ci-dessous :

Algorithme 2 (Méthode α-généralisée)

1: **Initialisations :**

1. Donner les coefficients $a(x,t)$, $b(x,t)$ et $\omega(x,t)$.
2. Donner les ordres fractionnaires $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < \beta \leq 2$.
3. Donner le terme source $f(x,t)$, les données initiales $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.
4. Donner les conditions de Robin $g(t)$, $h(t)$, μ_1 , μ_2, λ_1 et λ_2.
5. Donner les polynômes de Legendre décalés $P_0^*(x), P_1^*(x), ..., P_m^*(x)$.
6. Donner $x_1, x_2, ..., x_{m-1}$ les racines de polynôme de Legendre décalé $P_{m-1}^*(x)$.
7. Donner le pas de temps $\tau = T/N_t$ et le pas de l'espace $h = 1/(N_x+1)$.
8. Choisit les paramètres suivants :

$$\rho_\infty \in [0,1], \alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \theta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2, \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f.$$

9. Donner les constantes :

$$a_0 = \frac{1-\alpha_m}{\beta\tau^2}, a_1 = \frac{\gamma(1-\alpha_f)}{\beta\tau}, a_2 = 1-\alpha_f, a_3 = \frac{1-\alpha_m}{\beta\tau}, a_4 = \frac{1-\alpha_m}{2\beta} - 1,$$

$$a_5 = \frac{\gamma(1-\alpha_f)}{\beta} - 1, a_6 = \tau(1-\alpha_f)\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right), a_7 = \frac{\gamma}{\beta\tau}, a_8 = 1 - \frac{\gamma}{\beta},$$

$$a_9 = \tau\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right), a_{10} = \frac{1}{\beta\tau^2}, a_{11} = \frac{1}{\beta\tau}, a_{12} = \frac{1}{2\beta} - 1.$$

10. Calculer les vecteurs d_0, v_0 et A_0.

2: **Pour chaque étape de temps :**

1. Calculer la matrice de masse M^{j+1}, la matrice d'amortissement C^{j+1}, la matrice de rigidité K^{j+1} et le terme source $F_{j+1-\alpha_f}$.
2. Calculer la matrice $D^{j+1} = a_0 M^{j+1} + a_1 C^{j+1} + a_2 k^{j+1}$ et le deuxième membre

$$B^{j+1} = F_{j+1-\alpha_f} + M(a_0 d_j + a_3 v_j + a_4 a_j) + C(a_1 d_j + a_5 v_j + a_6 a_j) - \alpha_f K d_j.$$

3. Résoudre le système linéaire $A^{j+1} d_{j+1} = B^{j+1}$.
4. Calculer les vecteurs vitesse et accélération :

$$v_{j+1} = a_7(d_{j+1} - d_j) + a_8 v_j + a_9 A_j \text{ et } A_{j+1} = a_{10}(d_{j+1} - d_j) - a_{11} v_j - a_{12} A_j.$$

5. Poser $j = j+1$ et aller à l'étape 2 :1.

4.6 Éxemples numériques

Dans cette section, nous présentons cinq exemples numériques pour le problème d'évolution (2)-(4) avec $\alpha = 1$ dans la condition initiale (3) et $\beta = 1$ dans les conditions aux limites de Robin (4). Soient L_2 et L_∞ les erreurs définis par :

$$L_2 = \|u_e - u_m\|_2 = \sqrt{h \sum_{i=0}^{N} |u_e(x_i,t) - u_m(x_i,t)|^2},$$

$$L_\infty = \|u_e - u_m\|_\infty = \max_{0\le i\le N} |u_e(x_i,t) - u_m(x_i,t)|.$$

où u_e est la solution exacte et u_m est la solution numérique.

Nous comparons les solutions numériques obtenues par Algorithme 2 avec solutions exactes connues et la méthode proposée dans chapitre 3 et d'autres méthodes numériques disponibles dans la littérature. Nous concluons que notre méthode est donne une excellente approximation avec un petit nombre de points de collocation.

Tous les calculs numériques ont été effectués par MATLAB R2014b dans le système d'exploitation Windows 10 (64 bits) avec Intel(R) Core(TM) i7-2670QM, un processeur à 2,20 GHz et 8 Go de mémoire.

Exemple 4.2 ([3]). Nous considérons les données suivantes :

$$\begin{cases} a(x,t) = \frac{1}{2}, \;\; b(x,t) = \omega(x,t) = 1, \;\; \beta = 2, \\ f(x,t) = \left[(x - x^2)\left[\alpha + \alpha^2 - (1+\alpha)t + t^{1+\alpha}\right] + 2t^{1+\alpha}\right] e^{-t}, \\ \varphi(x) = 0, \;\; \psi(x) = 0, \;\; g(t) = h(t) = 0, \\ \mu_1 = \mu_2 = 0, \; \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Pour ces données, le problème d'évolution (2)-(4) est donné par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(1+\alpha)} u(x,t) + \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x,t) + u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t), \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \; 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \; 0 < t \le T. \end{cases} \tag{4.53}$$

On note que la solution exacte de ce problème est $u_e = (x - x^2)\, t^{1+\alpha} e^{-t}$. Si $\alpha = 1$, cet exemple a été étudié dans [3, 28] par différentes méthodes numériques. Nous appliquons Algorithme 2 pour $m = 6$ et $u_6(x,t)$ est la solution numérique définie par :

$$u_6(x,t) = \sum_{i=0}^{6} c_i(t)\, P_i^*(x).$$

Table(4.1) compare les erreurs L_2 et L_∞ obtenus par notre algorithme et avec les méthodes numériques étudiés dans [28] et [3]. Dans Table 4.2, nous comparons les erreurs L_2 et L_∞ aux différentes valeurs de T et α avec $\tau = 0,0001$ et $h = 0,01$ avec les résultats obtenus par la méthode étudié dans [3]. Avec cette étude comparative, on peut conclure que les solutions numériques obtenues par notre algorithme sont très bonnes. Dans Figure 4.1, nous présentons les courbes des solutions exactes et numériques pour $\alpha = 1$ à $T = 1, 2, 3, 4$. Les courbes des solutions exactes et numériques pour $T = 2$ et $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ sont données par Figure 4.2.

TABLE 4.1 – Erreurs L_2 et L_∞ avec $\tau = 0,001$, $h = 0,01$ et $\alpha = 1$.

	Notre méthode		Abdelkebir et Nouiri. [3]		Lin et al. [28]	
T	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
1.0	3.32E-09	5.45E-09	8.15E-07	1.46E-06	2.67E-08	5.17E-09
2.0	9.60E-09	1.25E-08	1.30E-05	1.83E-05	8.78E-08	1.27E-08
3.0	5.86E-10	1.13E-09	4.75E-06	7.12E-06	3.66E-09	1.07E-09
4.0	1.72E-09	2.60E-09	9.09E-06	1.26E-05	1.47E-08	2.62E-09
5.0	1.67E-10	2.45E-10	4.43E-06	6.03E-06	1.79E-09	3.52E-10

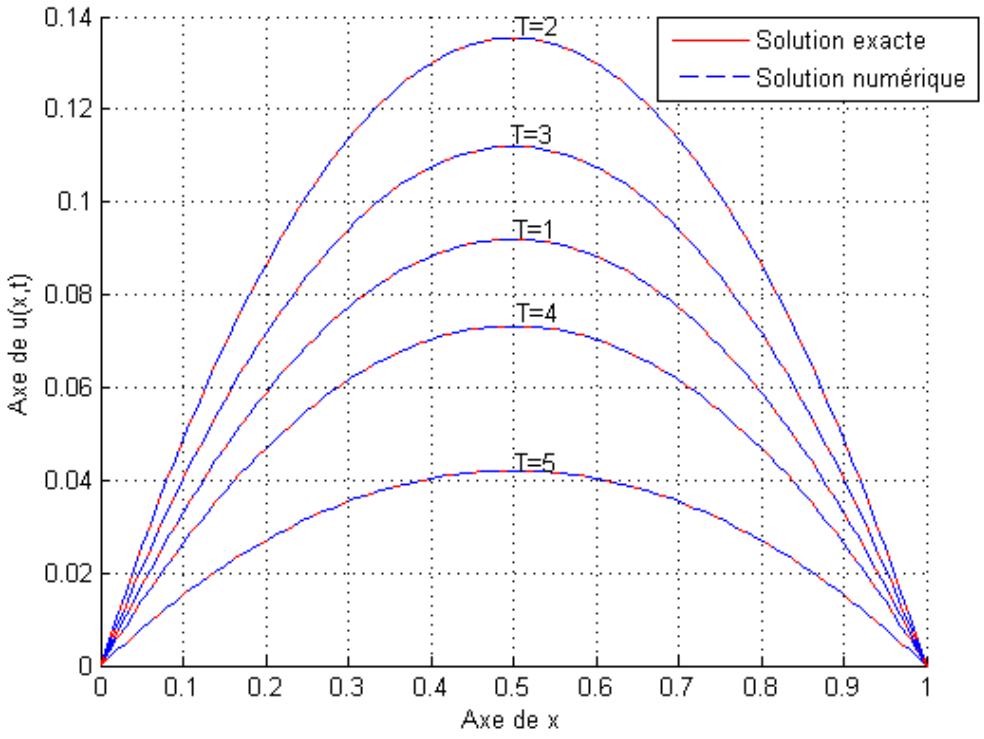


FIGURE 4.1 – Solutions exactes et numériques pour $\alpha = 1$ et $T = 1, 2, 3, 4, 5$.

TABLE 4.2 – Erreurs L_2 et L_∞ avec $\tau = 0,0001$, $h = 0,01$ et $T = 2$.

	Notre méthode		Abdelkebir et Nouiri. [3]	
α	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.2	1.81E-03	2.57E-03	2.08E-03	2.93E-03
0.4	3.09E-04	4.32E-04	4.10E-04	5.77E-04
0.6	3.96E-05	5.54E-05	6.24E-05	8.91E-05
0.8	3.50E-06	4.97E-06	6.73E-06	9.72E-06
1.0	3.06E-10	4.14E-10	1.25E-06	1.75E-06

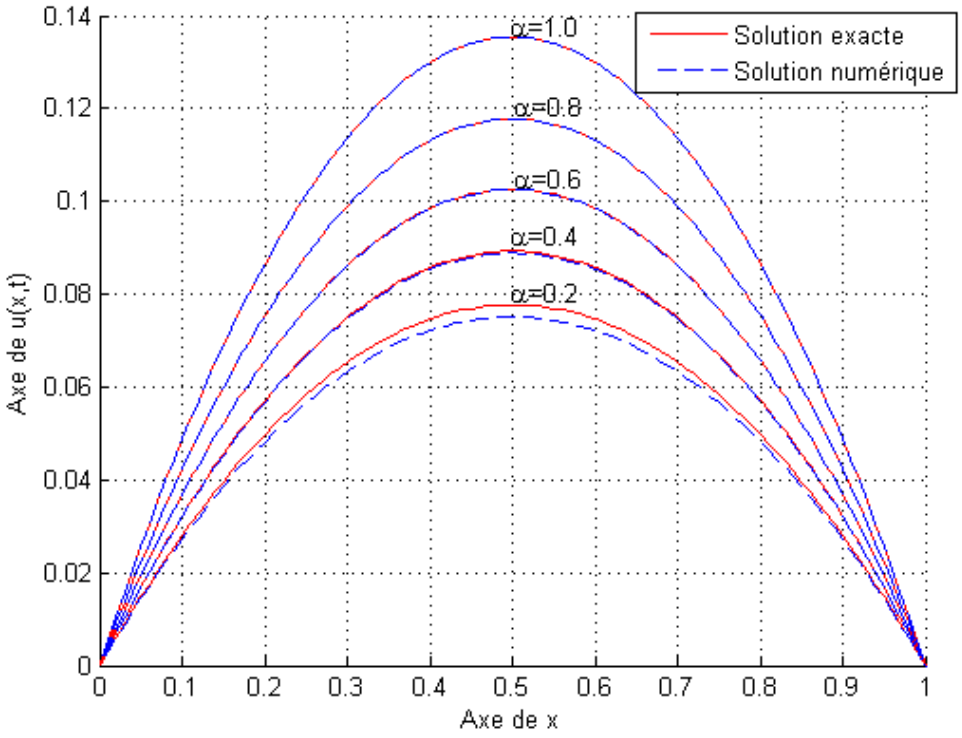


FIGURE 4.2 – Solutions exactes et numériques pour $T = 2$ et $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

Exemple 4.3 ([3]). Nous considérons les données suivantes :

$$\begin{cases} a(x,t) = 6, \;\; b(x,t) = 2, \;\; \omega(x,t) = 1, \;\; \alpha = 1, \\ f(x,t) = \left[3\cos(t) - 12\sin(t) + (\beta-1)^2 x^{2-\beta}\cos(t)\right]\sin((\beta-1)x), \\ \varphi(x) = \sin((\beta-1)x), \;\; \psi(x) = 0, \\ g(t) = 0, \;\; h(t) = \cos(t)\sin(\beta-1), \\ \mu_1 = \mu_2 = 0, \;\; \lambda_1 = -1, \;\; \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Pour ces données, le problème d'évolution (2)-(4) est donné par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(1+\alpha)} u(x,t) + 12\mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x,t) + 4u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t), \\ u(x,0) = \sin((\beta-1)x), \ u_t(x,0) = 0, \ 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0, \ u(1,t) = \cos(t)\sin(\beta-1), \ 0 < t \le T. \end{cases} \tag{4.54}$$

La solution exacte de ce problème est $u_e(x,t) = \cos(t)\sin((\beta-1)x)$. Cet exemple a été étudié par différentes méthodes numériques dans [3], et dans [32] pour le cas $\beta = 2$.

Dans Table 4.3, nous comparons les erreurs L_2 et L_∞ de notre algorithme par des résultats obtenus par les méthodes numériques étudies dans [3,32] pour $\beta = 2$ et $T = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$. Avec cette étude comparative, on conclure que l'algorithme proposé est très efficace. Figure 4.3 et Figure 4.4 représentent les solutions exactes et numériques pour des différentes valeurs de T et β.

TABLE 4.3 – erreurs L_2 et L_∞ avec $\tau = 0.0001$, $h = 0.01$ et $\beta = 2$.

	Notre méthode		Abdelkebir et Nouiri, [3]		Nazir et al., [32]	
T	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.2	4.93E-08	8.07E-08	5.07E-07	1.03E-06	2.96E-06	4.63E-06
0.4	4.27E-08	7.35E-08	3.48E-07	6.12E-07	6.77E-06	1.01E-05
0.6	3.97E-08	6.90E-08	9.23E-07	1.70E-06	9.81E-06	1.42E-05
0.8	3.40E-08	5.95E-08	1.69E-06	2.69E-06	1.20E-05	1.71E-05
1.0	2.67E-08	4.73E-08	2.01E-06	2.91E-06	1.34E-05	1.90E-05

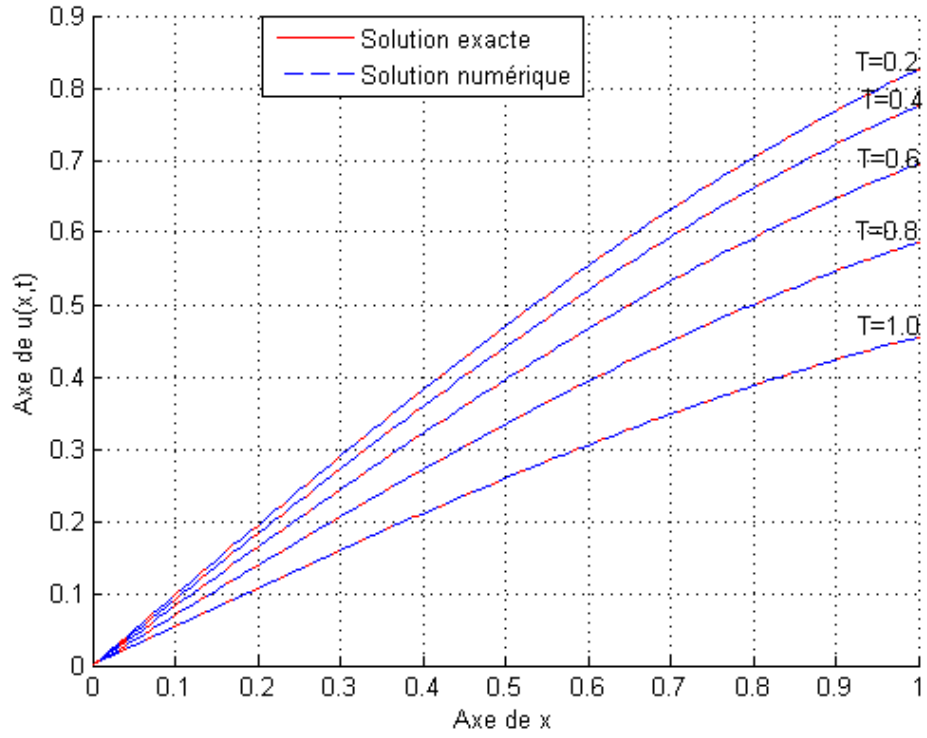


FIGURE 4.3 – Solutions exactes et numériques pour $\beta = 2$ et $T = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

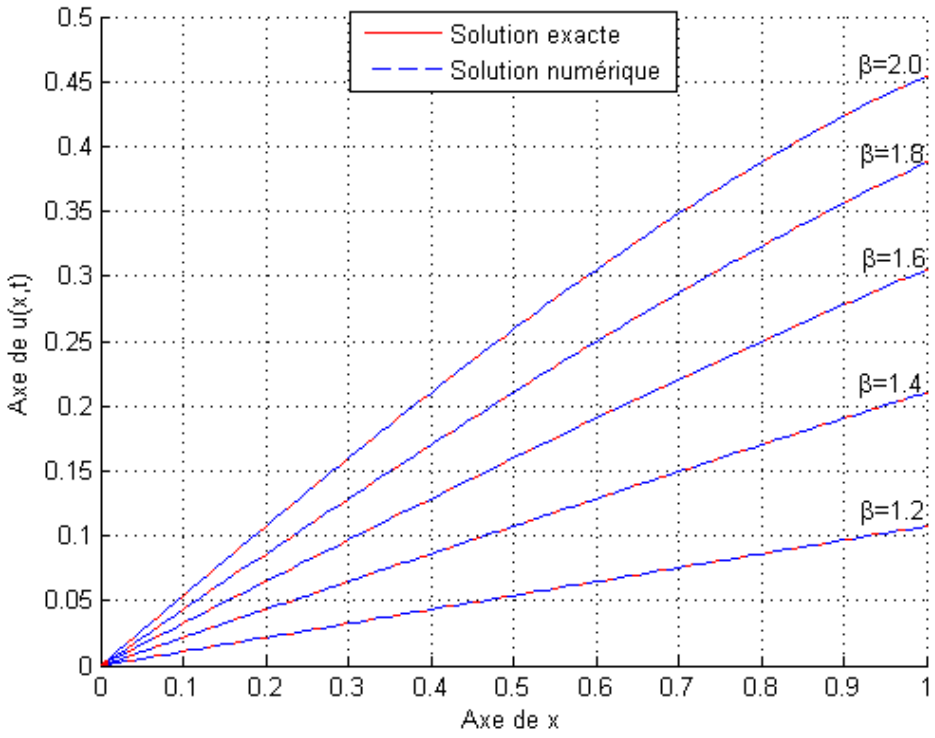


FIGURE 4.4 – Solutions exactes et numériques pour $T = 1$ et $\beta = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$.

Exemple 4.4 (Coefficients variable réguliers)**.** Dans cet exemple, nous avons les données suivantes :

$$\begin{cases} a(x,t) = e^{x+t}, \;\; b(x,t) = \sin(x+t), \;\; \omega(x,t) = 1+x^2, \;\; \beta = \alpha + 1, \\ f(x,t) = \left(4t^{1-\alpha} - 4t^{1-\alpha}e^{x+t} + \sin^2(x+t) - \alpha^2 x^{1-\alpha}(1+x^2)\right) e^{-2t}\sin(\alpha x), \\ \varphi(x) = \sinh(\alpha x), \;\; \psi(x) = -2\sinh(\alpha x), \\ g(t) = 0, \;\; h(t) = e^{-2t}\sinh(\alpha), \\ \mu_1 = \mu_2 = 0, \;\; \lambda_1 = -1, \;\; \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Pour ces données, le problème d'évolution (2)-(4) est donné par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(1+\alpha)} u(x,t) + 2e^{x+t}\mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x,t) + \sin^2(x+t)\, u(x,t) = (1+x^2)\,\mathcal{D}_x^{(1+\alpha)} u(x,t) + f(x,t), \\ u(x,0) = \sinh(\alpha x), \;\; u_t(x,0) = -2\sinh(\alpha x), \;\; 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0, \;\; u(1,t) = e^{-2t}\sinh(\alpha), \;\; 0 < t \le T. \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est $u_e(x,t) = e^{-2t}\sinh(\alpha x)$. Pour $\alpha = 1$, cet exemple a été étudié par différentes méthodes numériques dans [28] et [35].

Dans Table 4.4, nous comparons l'erreur L_∞ de notre algorithme avec les méthodes numériques étudié dans [28] et [35] pour $T = 1, 2, 3, 4, 5$ avec $\tau = 0,0005$, $h = 0,01$ et $\alpha = 1$. Grâce cette étude comparative, nous concluons que notre algorithme est plus efficace et fiable. Le graphe espace-temps de la solution numérique pour $T = 1$ et $\alpha = 1$ est donnée par Figure 4.5. Les erreurs L_2 et L_∞ pour des différentes valeurs de T et α sont présenté dans Table 4.5. Enfin, Figure 4.6 représente les graphes de la solution numérique pour $T = 4$ et $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

TABLE 4.4 – Erreur L_∞ pour $T = 1, 2, 3, 4, 5$ avec $\tau = 0,0005$, $h = 0,01$ et $\alpha = 1$.

	Notre méthode	Pandit et al. [35]	Lin et al. [28]
T	L_∞	L_∞	L_∞
1.0	4.7539E-08	8.1073E-03	1.2776E-04
2.0	2.2249E-08	1.1022E-03	1.9609E-05
3.0	1.8700E-08	1.4738E-04	3.9246E-06
4.0	1.7072E-08	2.0202E-05	8.8376E-07
5.0	1.6388E-08	2.8410E-06	5.2078E-08

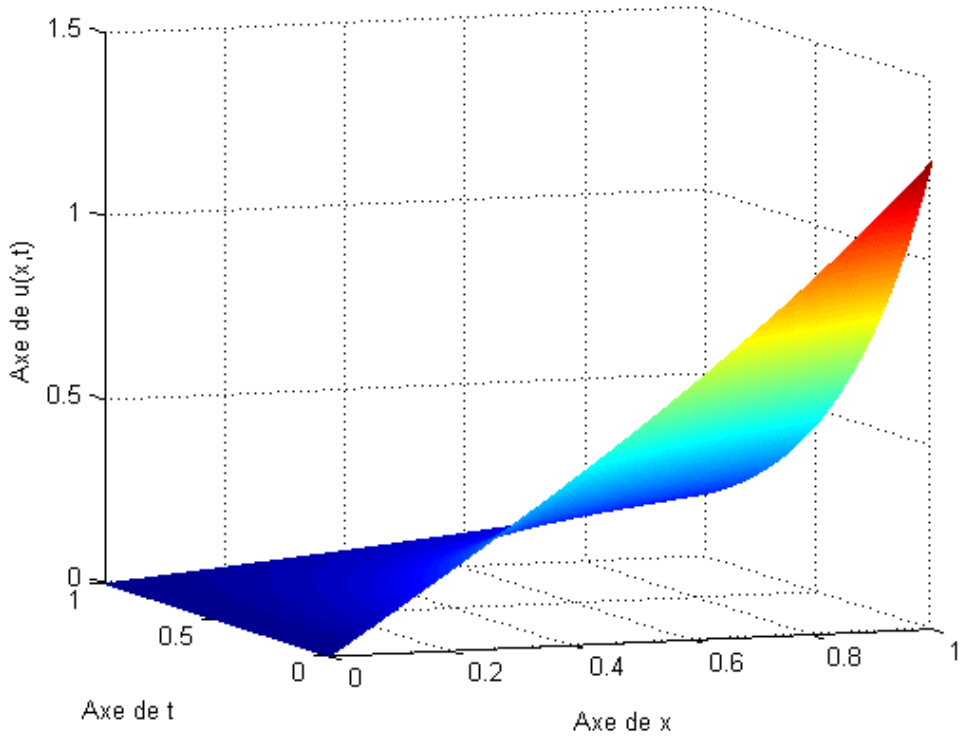


FIGURE 4.5 – Graphe de la solution numérique pour $T = 4$ et $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

TABLE 4.5 – Erreurs L_2 et L_∞ pour différentes valeurs de T et α avec $\Delta t = 0,0005$, $h = 0,01$.

	T=1		T=2		T=3		T=4	
α	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.2	2.53E-09	3.70E-09	2.91E-09	4.32E-09	2.96E-09	4.33E-09	2.91E-09	4.26E-09
0.4	6.66E-09	9.57E-09	6.34E-09	9.13E-09	6.21E-09	8.88E-09	6.05E-09	8.64E-09
0.6	1.25E-08	1.82E-08	9.97E-09	1.41E-08	9.38E-09	1.32E-08	9.00E-09	1.27E-08
0.8	1.99E-08	2.89E-08	1.34E-08	1.86E-08	1.20E-08	1.68E-08	1.12E-08	1.58E-08
1.0	2.98E-08	4.75E-08	1.62E-08	2.22E-08	1.34E-08	1.87E-08	1.21E-08	1.71E-08

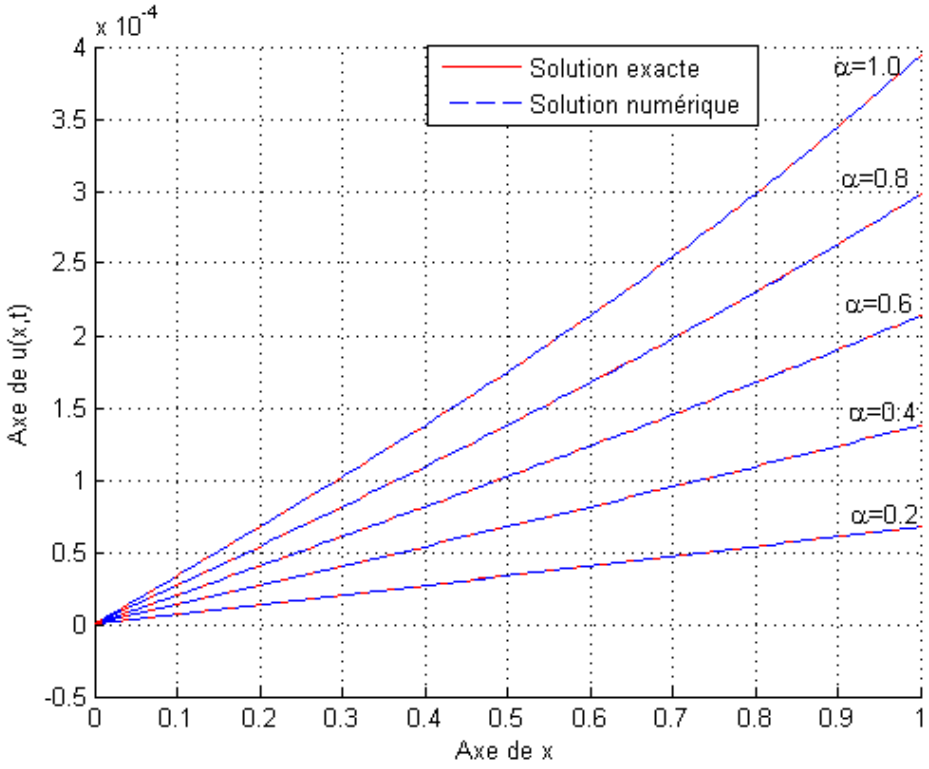


FIGURE 4.6 – Graphe de la solution numérique pour $T = 4$ et $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

Exemple 4.5 (Coefficients singuliers)**.** Dans cet exemple, nous avons les données suivantes :

$$\begin{cases} a(x,t) = \frac{1}{x^2},\ \ b(x,t) = \frac{1}{x},\ \ \omega(x,t) = 1 + x^2,\ \ \beta = \alpha + 1, \\ f(x,t) = \left(4t^{1-\alpha} + \frac{1-4t^{1-\alpha}}{x^2} - \alpha^2 x^{1-\alpha}(1+x^2)\right) e^{-2t} \sinh(\alpha x), \\ \varphi(x) = \sinh(\alpha x),\ \psi(x) = -2\sinh(\alpha x), \\ g(t) = 0,\ \ h(t) = e^{-2t}\sinh(\alpha), \\ \mu_1 = \mu_2 = 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Pour ces données, le problème d'évolution (2)-(4) est donné par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(1+\alpha)} u(x,t) + \frac{2}{x^2}\mathcal{D}_t^{(\alpha)} u(x,t) + \frac{1}{x^2} u(x,t) = (1+x^2)\,\mathcal{D}_x^{(1+\alpha)} u(x,t) + f(x,t), \\ u(x,0) = \sinh(\alpha x),\ u_t(x,0) = -2\sinh(\alpha x),\ 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = e^{-2t}\sinh(\alpha),\ 0 < t \le T. \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est $u_e(x,t) = e^{-2t}\sinh(\alpha x)$.

Dans Table 4.6, nous comparons l'erreur L_∞ de notre méthode avec $\alpha = 1$ et $T = 1, 2, 3, 4, 5$, ainsi que l'erreur L_∞ donné dans [28] et [35].

TABLE 4.6 – Erreur L_∞ pour $T = 1, 2, 3, 4, 5$ avec $\tau = 0,0001$, $h = 0,01$ et $\alpha = 1$.

	Notre méthode	Pandit et al. [35]	Lin et al. [28]
T	L_∞	L_∞	L_∞
1.0	2.1983E-08	4.9526E-03	7.3025E-05
2.0	4.0365E-09	7.7597E-03	4.3352E-06
3.0	1.0183E-09	1.3503E-04	3.5757E-07
4.0	1.5180E-10	2.0606E-05	3.4843E-08
5.0	7.5489E-11	2.9512E-06	9.3298E-10

Exemple 4.6. Dans cet exemple, nous considérons les données suivantes :

$$\begin{cases} a(x,t) = x^2 + t^2, \;\; b(x,t) = 2xt, \;\; \omega(x,t) = 1 + x^2t^2, \;\; \beta = \alpha + 1, \\ f(x,t) = \left[(\alpha+2)(\alpha+1)t + 2(\alpha+2)t^2 + 4x^2t^{\alpha+4}\right](x^{\alpha+2} - \cos(\pi x)) \\ -(1+x^2t^2)x^{1-\alpha}t^{\alpha+2}\left[(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha + \pi^2\cos(\pi x)\right], \\ \varphi(x) = \psi(x) = 0, \\ g(t) = -\lambda_1 t^{2+\alpha}, \;\; h(t) = \left[(2+\alpha)\mu_2 + 2\lambda_2\right]t^{2+\alpha}. \end{cases}$$

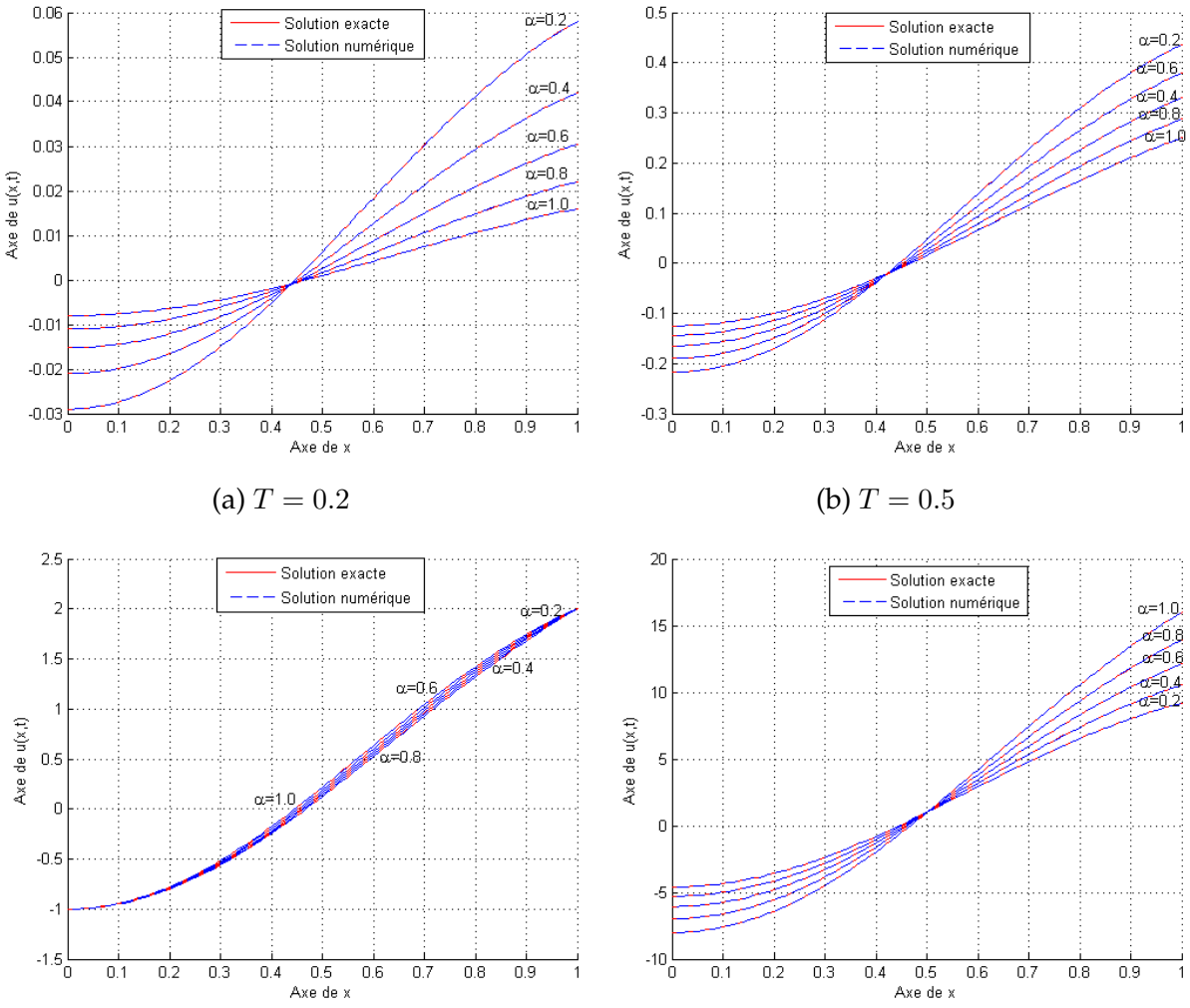
Pour ces données, le problème d'évolution (2)-(4) est donné par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^{(1+\alpha)}u(x,t) + 2(x^2+t^2)\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u(x,t) + 4x^2t^2u(x,t) = (1+x^2t^2)\mathcal{D}_x^{(1+\alpha)}u(x,t) + f(x,t), \\ u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = 0, \;\; 0 \le x \le 1, \\ \mu_1 u_x(0,t) + \lambda_1 u(0,t) = -\lambda_1 t^{2+\alpha}, \\ \mu_2 u_x(1,t) + \lambda_2 u(1,t) = \left[(2+\alpha)\mu_2 + 2\lambda_2\right]t^{2+\alpha}, \;\; 0 < t \le T. \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est $u_e(x,t) = t^{2+\alpha}(x^{2+\alpha} - \cos(\pi x))$. Table 4.7 contient les erreurs L_2 et L_∞ pour différentes valeurs de T et α. Les graphes des solutions exactes et numériques sont donnés par Figure 4.7.

TABLE 4.7 – Erreurs L_2 et L_∞ pour différentes valeurs de T et α avec $\Delta t = 0,0001$, $h = 0,01$.

	T=0.2		T=0.5		T=1.0		T=2.0	
α	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.2	3.35E-06	6.61E-06	2.59E-05	5.45E-05	1.38E-04	3.71E-04	6.05E-04	1.60E-03
0.4	1.80E-06	3.54E-06	2.18E-05	4.94E-05	1.40E-04	3.86E-04	7.44E-04	2.01E-03
0.6	1.39E-06	2.61E-06	1.94E-05	3.37E-05	1.34E-04	2.51E-04	8.36E-04	1.58E-03
0.8	1.20E-06	2.11E-06	1.87E-05	3.24E-05	1.39E-04	2.38E-04	9.75E-04	1.74E-03
1.0	9.99E-07	1.69E-06	1.79E-05	3.06E-05	1.51E-04	2.57E-04	1.22E-03	2.09E-03



(a) $T = 0.2$ (b) $T = 0.5$

(c) $T = 1$ (d) $T = 2$

FIGURE 4.7 – Graphes des solutions exactes et numériques pour différentes valeurs de T et α avec $h = 0.01$ et $\tau = 0.0001$.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié deux problèmes d'évolution gouvernés par d'équation télégraphique fractionnaire en espace et en temps avec coefficients variable ou constants et une condition aux limites de Robin. Cette thèse se déroule en deux étapes :

- ✓ **Résolution analytique :** nous avons utilisé la méthode de Fourier et les propriétés de la dérivée conformable pour calculer la solution analytique sous forme d'une série de fonctions du problème d'évolution (1), (3)-(4). Nous avons présenté trois exemples pour confirmer les techniques utilisées.
- ✓ **Résolution numérique :** nous avons proposé un algorithme basé sur les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce et la méthode de Newmark pour résoudre le problème d'évolution (2)-(4) avec condition aux limites de Dirichlet et les coefficients sont constants. Ensuite, nous avons généralisé notre travail avec une nouvelle méthode basée sur les polynômes de Legendre du première espèce et la méthode α-généralisée pour calculer la solution numérique de notre problème d'évolution. Une étude comparative entre les algorithmes proposés et les méthodes numériques disponibles dans la littérature. Nous avons obtenu une excellence approximation avec un petit nombre de points de collocation.

Comme perspectives, nous avons prévu les deux sujets de recherche suivants :

☞ Étude une classe d'équations télégraphiques fractionnaires non linéaire avec coefficients variable :

$$\mathcal{D}_t^{(1+\alpha)}u\left(x,t\right)+2a\left(x,t\right)\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u\left(x,t\right)+F\left(x,t,u\left(x,t\right)\right)=\omega\left(x,t\right)\mathcal{D}_x^{(\beta)}u\left(x,t\right)+f\left(x,t\right),\ \left(x,t\right)\in\Omega_T,$$

avec les conditions initiales :

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ \ \mathcal{D}_t^{(\alpha)}u\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),\ \ 0\leq x\leq 1,$$

et la condition de Robin avec dérivée conformable :

$$\begin{cases}\mu_1\mathcal{D}_x^{(\beta-1)}u\left(0,t\right)+\lambda_1 u\left(0,t\right)=g\left(t\right),\ \mu_1\lambda_1\leq 0,\ \left|\mu_1\right|+\left|\lambda_1\right|>0,\\ \mu_2\mathcal{D}_x^{(\beta-1)}u\left(1,t\right)+\lambda_2 u\left(1,t\right)=h\left(t\right),\ \mu_2\lambda_2\geq 0,\ \left|\mu_2\right|+\left|\lambda_2\right|>0,\end{cases}\qquad 0\leq t\leq T,$$

où $\Omega_T:=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t\leq T\}$, $0<\alpha\leq 1$, $1<\beta\leq 2$, $a,\omega,f,\varphi,\psi,g,h$ sont des fonctions données et F est une fonction non linéaire.

☞ Analyse mathématique et numérique d'un problème inverse pour déterminer $\{u\left(x,t\right),r\left(t\right)\}$ satisfait l'équation télégraphique fractionnaire suivant :

$$\mathcal{D}_t^{(1+\alpha)}u\left(x,t\right)+2a\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u\left(x,t\right)+b^2u\left(x,t\right)=r\left(t\right)\mathcal{D}_x^{(\beta)}u\left(x,t\right)+f\left(x,t\right),$$

avec la condition initiale non locale

$$\begin{cases} u(x,0) + \delta_1 u(x,T) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) + \delta_2 u_t(x,T) = \psi(x). \end{cases}$$

et la condition aux limites de Robin

$$\begin{cases} \mu_1 \mathcal{D}_x^{(\beta-1)} u(0,t) + \lambda_1 u(0,t) = g(t),\ \mu_1\lambda_1 \leq 0,\ |\mu_1| + |\lambda_1| > 0, \\ \mu_2 \mathcal{D}_x^{(\beta-1)} u(1,t) + \lambda_2 u(1,t) = h(t),\ \mu_2\lambda_2 \geq 0,\ |\mu_2| + |\lambda_2| > 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T,$$

et la condition d'intégrale supplémentaire suivante :

$$\int_0^1 \varpi(x)\, u(x,t)\, dx = E(t),$$

où $0 < \alpha \leq 1$, $1 < \beta \leq 2$, $a > b \geq 0$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ et $0 < T < +\infty$ sont des réels donnés, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, $\varpi(x)$ et $E(t)$ sont des fonctions données et $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}$, $\mathcal{D}_x^{(\beta)}$ sont les dérivées fractionnaires conformables d'ordre α et β respectivement.

Bibliographie

[1] ABDELJAWAD, T. On conformable fractional calculus. *J. Comput. Appl. Math. 279* (2015), 57–66.

[2] ABDELKEBIR, S., AND NOUIRI, B. Analytical solution for the conformable fractional telegraph equation by fourier method. *Proceedings of International Mathematical Sciences 2*, 1 (2020), 1–6.

[3] ABDELKEBIR, S., AND NOUIRI, B. An efficient algorithm for solving the conformable time-space fractional telegraph equations. *Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. (MJPAA) 7*, 3 (2021), 413–429.

[4] AGARWAL, R., AND O'REGAN, D. *Ordinary and partial differential equations*. Springer-Verlag New York, 2009.

[5] ASMA, H. *The Conformable Laplace Transform of the Fractional Chebyshev and Legendre Polynomials*. PhD thesis, Faculty of Graduate Studies, Zarqa University, Jordan, 2017.

[6] BANASIAK, J., AND MIKA, J. Singularly perturved telegraph equations with applications in the random walk theory. *J. Appl. Math. Stoch. Anal. 11*, 1 (1998), 9–28.

[7] BANSU, H., AND KUMAR, S. Numerical solution of space and time fractional telegraph equation : a meshless approach. *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 20*, 3-4 (2019), 325–337.

[8] BERWAL, N., PANCHAL, D., AND PARIHAR, C. Haar waveleet method for numerical solution of telegraph equations. *Ital. J. Pure Appl. Math. 30* (2013), 317–328.

[9] BRAHIM, N., AND BENYATTOU, B. Newmark method applied to the elasto-dynamic problem with slip-rate dependent friction. *Journal of Concrete & Applicable Mathematics 7*, 1 (2009), 70–81.

[10] CHUNG, J., AND HULBERT, G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized-α method. *Cogent Math. 60* (1993), 371–375.

[11] CUI, Z., YU, P., AND MAO, Z. Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of nonlinear fractional differential equations. *Adv. dyn. syst. appl. 7*, 1 (2012), 31–40.

[12] DACOS, F. *Électricité théorique*. Dunod, Paris, 1946.

[13] DAŞ, S. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer, New York, 2008.

[14] DEHGHAN, M., AND SHOKRI, A. A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation. *Numer. Methods Partial Differ. Equ. 24* (2008), 1080–1093.

[15] DHUNDE, R., AND WAGHMARE, G. Double laplace transform method for solving space and time fractional telegraph equations. *Int. J. Math. Math. Sci. 2016* (2016), Hindawi.

[16] DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[17] EL-ATTAR, R. *Special Functions and Orthogonal Polynomials*. Lulu Press Inc., 2008.

[18] EZZATI, M. A. R., AND ALLAHVIRANLOO, T. Numerical solution of time-fractional order telegraph equation by bernstein polynomials operational matrices. *Math. Probl. Eng. 2016* (2016), Hindawi.

[19] FINO, A., AND IBRAHIM, H. Analytical solution for a generalized space-time fractional telegraph equation. *Math. Methods Appl. Sci. 36*, 14 (2013), 1813–1824.

[20] GAO, G., SUN, Z., AND ZHANG, H. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the caputo fractional derivative and its applications. *J. Comput. Phys. 259*, 2 (2014), 33–50.

[21] HAFEZ, R.-M. Numerical solution of linear and nonlinear hyperbolic telegraph type equations with variable coefficients using shifted jacobi collocation method. *Comput. Appl. Math. 37*, 4 (2018), 5253–5273.

[22] HEAVISIDE, O. *Electromagnetic theory, Vol-2*. Chelsea Publishing Company, New York, 1899.

[23] HUANG, F. Analytical solution for the time-fractional telegraph equation. *J. Appl. Math. 2009* (2009), Hindawi.

[24] JAVIDI, M. Chebyshev spectral collocation method for computing numerical solution of telegraph equation. *Comput. Methods Differ. Equ. 1*, 1 (2013), 16–29.

[25] JORDAN, P., AND PURI, A. Digital signal propagation in dispersive media. *J. Appl. Phys. 85*, 3 (1999), 1273–1282.

[26] KHALIL, R., AL-HORANI, M., YOUSEF, A., AND SABABHEH, M. A new definition of fractional derivative. *J. Comput. Appl. Math. 264* (2014), 65–70.

[27] KILBAS, A., SRIVASTAVA, H., AND TRUJLLO, J. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.

[28] LIN, J., HE, Y., REUTSKIY, S., AND LU, J. An effective semi-analytical method for solving telegraph equation with variable coefficients. *Eur. Phys. J. Plus 133*, 7 (2018), 1–11.

[29] MASON, J., AND HANDSCOMB, D. *Chebyshev polynomials*. CRC press, 2002.

[30] MITTAL, R., AND BHATIA, R. Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic telegraph equation by cubic b-spline collocation method. *Appl. Math. Comput. 220* (2013), 496–506.

[31] MOHYUD-DIN, S., YLDRM, A., AND KAPLAN, Y. Homotopy perturbation method for one-dimensional hyperbolic equation with integral conditions. *J. Phys. Sci. 65* (2010), 1077–1080.

[32] NAZIR, T., ABBAS, M., AND YASEEN, M. Numerical solution of second-order hyperbolic telegraph equation via new cubic trigonometric b-splines approach. *Cogent Math. 4*, 1 (2017), 1382061.

[33] NEWMARK, N.-M. A method of computation for structural dynamics. *J. Eng. Mech. - ASCE 85* (1959), 67–94.

[34] NOUIRI, B. Numerical approach of the nonlinear reaction-advection-diffusion equation with time-space conformable fractional derivatives. *AIP Conference Proceedings 2334*, 1 (2021), 060012.

[35] PANDIT, S., KUMAR, M., AND TIWARI, S. Numerical simulation of second-order hyperbolic telegraph type equations with variable coefficients. *Comput. Phys. Commun. 187*, 2 (2015), 83–90.

[36] PEKMEN, B., AND TEZER-SEZGIN, M. Differential quadrature solution of hyperbolic telegraph equation. *J. Appl. Math. 18* (2012).

[37] RAINVILLE, E. *Special functions*. The MACMILLAN COMPANY, New York, 1960.

[38] SAADATMANDI, A., AND DEHGHAN, M. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the chebyshev tau method. *Numer. Methods Partial Differ. Equ. 26*, 1 (2010), 239–252.

[39] SHARIFI, S., AND RASHIDINIA, J. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation by cubic b-spline collocation method. *Appl. Math. Comput. 291* (2016), 28–38.

[40] WESTON, V., AND HE, S. Wave splitting of the telegraph equation in r3 and its application to inverse scattering. *Inverse Probl. 9* (1993), 789–812.

[41] YOUSEFI, S. Legendre multiwavelet galerkin method for solving the hyperbolic telegraph equation. *Numer. Methods Partial Differ. Equ. 26* (2010), 535–543.

[42] YÜZBAŞI, S. Numerical solutions of hyperbolic telegraph equation by using the bessel functions of first kind and residual correction. *Appl. Math. Comput. 287* (2016), 83–93.

ملخص: في هذه الأطروحة، درسنا مسألتي تطور تحكمها معادلة تلغراف كسرية في المكان والزمان مع معاملات متغيرة أو ثابتة وشرط حدودي لروبن. يتم وصف المشتقات الكسرية بالمعنى المطابق. استخدمنا طريقة فوريه وخصائص المشتق المطابق لحساب الحل التحليلي في الحالة التي تكون فيها معاملات معادلة التلغراف ثابتة. بعد ذلك، اقترحنا خوارزمية تعتمد على كثيرات الحدود لتشيبيشاف من النوع الرابع وطريقة نيومارك لحل مسألة التطور مع شرط حدود لدريكلي.

من ناحية أخرى، قمنا بتعميم عملنا باستخدام طريقة جديدة تعتمد على كثيرات الحدود لجوندر وطريقة الفا المعممة لحساب الحل العددي لمسألة التطور حيث تكون المعاملات متغيرة وشرط حدودي لروبن. تم تقديم عدة أمثلة لتأكيد موثوقية وفعالية كل طريقة مقترحة.

كلمات مفتاحية: الحساب الكسري المطابق، شرط حدودي لروبن، معادلة التلغراف، طريقة فوريه، طريقة نيومارك، طريقة ألفا المعممة، كثيرات الحدود لجوندر، كثيرات الحدود لتشيبيشاف.

Dans cette thèse, nous avons considéré deux problèmes d'évolution gouvernés par d'équation télégraphique fractionnaire en espace et en temps avec coefficients variable ou constants et une condition aux limites de Robin. Les dérivées fractionnaires sont décrites au sens conformable. Nous avons utilisé la méthode de Fourier et les propriétés de la dérivée conformable pour calculer la solution analytique dans le cas où les coefficients de l'équation télégraphique sont constants. Ensuite, nous avons proposé un algorithme basé sur les polynômes de Tchebychev du quatrième espèce et la méthode de Newmark pour résoudre ce problème d'évolution avec condition aux limites de Dirichlet. D'autre part, nous avons généralisé notre travail avec une nouvelle méthode basée sur les polynômes de Legendre et la méthode α-généralisée pour calculer la solution numérique de notre problème d'évolution où les coefficients sont variables et la condition aux limites de Robin. Plusieurs exemples sont présentés pour confirmer la fiabilité et l'efficacité de chaque méthode proposée.

Mots-Clés : Calcul fractionnaire confromable, Condition aux limites de Robin, Équation télégraphique, Méthode de Fourier, Méthode de Newmark, Méthode α-généralisée, Polynômes de Legendre, Polynômes de Tchebychev.

In this thesis, we considered two evolution problems governed by fractional telegraphic equation in space and time with variable or constant coefficients and a Robin boundary condition. Fractional derivatives are described in the conformable sense. We used the Fourier method and the properties of the conformable derivative to calculate the analytical solution in the case where the coefficients of the telegraph equation are constant. Then, we proposed an algorithm based on Chebyshev polynomials of the fourth kind and Newmark's method to solve the evolution problem with Dirichlet boundary condition. On the other hand, we have generalized our work with a new method based on Legendre polynomials and the α-generalized method to calculate the numerical solution of the evolution problem where the coefficients are variable and the Robin boundary condition. Several examples are presented to confirm the reliability and effectiveness of each proposed method.

Keywords : Confromable fractional calculus, Fourier method, Newmark method, Legendre polynomials, Robin boundary condition, Telegraph equation, Tchebychev polynomials, α-generalized method.