

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

*Etude théoriques et numériques de l'écoulement d'un fluide autour
d'un obstacle*

Présentée par :

M^{elle} Debih lameria

Bounab Noura	M.C.B,	Examineur..
Touahria messaoud	M.C.B,	Président.
Blizak Tahar	M.A.A,	Encadreur.

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **Allah** le tout puissant et miséricordieux qui nous a donné la santé, le courage, la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu Je remercie ma famille pour leur soutien morale et physiques et encouragement tout au long des mon étude

J'adresse mes remerciements et ma gratitude à mon honorable professeur, *Caher Belizak* qui a aimablement supervisé cette recherche, et pour tout le soutien, les conseils et les conseils qu'il m'a donnés pour mener à bien ce travail tel qu'il est il a les plus hautes expressions de remerciement et d'appréciation .des remerciements sont adressés à chaque enseignant qui nous a fait bénéficier de ses connaissances, des premières étapes de l'étude à ce moment.

Je remercie également le frère **Nabil**, qui m'a aidé à mener à bien cette recherche, que allah le protège.

Nous remercions également tous ceux qui ont communiqué avec nous de près ou de loin, et nous remercions tous les enseignants, travailleurs et étudiants de la Faculté de Mathématiques et d'Informatique de l'Université de M'sila

Ce sont aussi des mots de remerciement à tous ceux qui nous ont exhortés et insufflé en nous l'espoir et la volonté

Merci à tous.



Dédicace

Comme il est beau pour une personne de donner ce qu'elle a de plus précieux, et la plus belle chose est de donner le précieux au plus précieux C'est le fruit de mes efforts que je récolte aujourd'hui, c'est un cadeau que je dédie à :

*A Celui qui a illuminé mon chemin de la lumière de ses bougies qui ne fondent pas pour un avenir basé sur l'humilité et la connaissance, Ô créature la plus chère au monde "mon père ". A celle que je préfère à moi-même, à la source de tendresse, à celle dont les pieds décrivaient le Paradis, à ma mère bien-aimée
Que Allah prolonge leur vie*

*A ma voisine, ma sœur et ma chère **Adila Ghasemi** Le soutien, l'humérus et l'avant-bras, mes frères et sœurs, je vous offre ce cadeau d'amour, de dignité et d'élévation A
Mes sœurs que ma mère n'a pas enfantées, mais avec qui j'ai goûté au sens de la fraternité : **Amal charif. Inaam Alili. Soumia Charif. Marwa Charif. Madiha chami, Nadia Ghaleb.***

Aux

*Camarades universitaires : **Souad Kaka, Basma chami, Djihan Makhlouf, chaimaa Latrashi, Salma Hachaichi, Razika***

A Tous ceux qui m'ont appris une lettre, à tous ceux qui m'ont soutenu, même avec un sourire A tous ceux qui n'ont pas trouvé leur nom dans ce cadeau




Table des matières

Dédicace	i
Introduction générale	v
1 Notation préliminaires sur la mécanique des fluides et fonction analytique	1
1.1 Introduction	1
1.2 les fluides	1
1.2.1 L écoulement fluide est à deux dimensions	1
1.2.2 Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel	1
1.2.3 Les écoulement des fluide	2
1.2.4 Fonction de courant	3
1.2.5 Lignes de courant	4
1.2.6 Le potentiel complexe	4
1.2.7 Fonction de Potentiel	5
1.2.8 Équation de Bernoulli	5
1.3 Fonction à variable complexe	5
1.3.1 Fonction harmonique	5
1.3.2 Fonction analytique	6
1.3.3 Théorème de Schwartz	6
1.3.4 Les Conditions de Cauchy-Riemann	6
1.3.5 Différentielle totale	6
2 Transformations conformes	7
2.1 Introduction	7
2.2 Transformations	7
2.3 Forme complexe d'une transformation	8
2.4 Transformations conformes	8
2.5 Quelques transformations	9
2.5.1 Quelques transformations générales	9
2.6 Representation sur le Demi -Plan	10
2.7 Transformation hodographe	11
2.8 La transformation de Schwartz-Christoffel	12

2.9	Jet libre	13
2.9.1	Exemple	13
3	Effets de la tension de surface sur l'écoulement de cavitation	17
3.1	Introduction	17
3.2	Formulation du problème	18
3.3	Procédure numérique	20
3.4	Discussion des résultats	24
	Conclusion Générale	25
	Resumer	26
	Bibliography	28

Table des figures

1.1	Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme	2
2.1	plan xy	8
2.2	plan uv	8
2.3	Un rectangle infini de largeur a	10
2.4	Un demi-rectangle infini de largeur a	10
2.5	8-78	13
2.6	8-79	13
3.1	Croquis du flux et des coordonnées	18
3.2	l'écoulement dans le plan du potentiel complexe $f = \phi + i\psi$	18
3.3	le plan t	20
3.4	Cavités dans un écoulement bidimensionnel stationnaire passant autour d'un cercle pour différentes valeurs du nombre de Weber α	24
3.5	Valeurs de la position angulaire γ des points de séparation pour l'écoulement avec cavitation autour d'un cercle en fonction de $\frac{1}{\alpha}$	25

Introduction

LA MÉCANIQUE DES FLUIDES est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes.

Dans la mécanique des fluides Les écoulements bidimensionnels de type jet peuvent être observés dans des nombreux phénomènes naturels ou physiques qui interviennent dans le domaine industriel . Ainsi de son importance majeure , ce type d'écoulement fait l'objet de plusieurs travaux de recherche scientifique.

Dans le présent travail, nous étudions numériquement écoulement d'un fluide autour d'un obstacle incurvé. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables $(x; y)$ de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$.

Le problème considéré dans ce travail est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la frontière libre .

Dans le cas où l'effet de la tension de surface est négligé , la solution exacte peut être calculée en utilisant la théorie des lignes de courant libre introduite par Helmholtz en 1868 et Kirchhoff en 1869 .

Le présent mémoire comporte trois chapitres : Après cette introduction on présente dans le premier chapitre les notions fondamentales de la mécanique des fluides, telle que on traite les types d'écoulements, et on définit aussi les lignes et fonctions de courant, et quelques définitions des fonctions à variable complexe, fonction analytique, équation de Cauchy - Riemann, Théorème de Schwartz.

Dans le second chapitre donnée une définition de la transformation conforme et quelques transformations générales, Transformation hodographe, La transformation de Schwarz Christoffel et on va présenter le jet libre.

Dans le dernier chapitre du memoire on étudier le problème dans le cas où la tension de surface et l'effet de gravité sont négligeable, On utilise la méthode hodographe et la théorie des ligne de courant pour trouvé la soulution analytique du problém.

Enfin on termine ce travail par une conclusion générale.

Notation préliminaires sur la mécanique des fluides et fonction analytique

Chapitre
1

1.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous aborderons quelques concepts initiaux liés à la mécanique des fluides et quelques définitions de fonction à variables complexes.

1.2. Les fluides

Un fluide est un milieu matériel continu déformable, sans rigidité qui peut s'écouler c'est-à-dire subir de grandes variations de forme sous l'action de forces. Plus les forces sont faibles, plus les variations de forme se déroulent lentement. La notion de fluide s'oppose à celle de solide, cependant on considère les fluides et les solides comme des ensembles de particules matérielles infiniment petites.

- Solidement liées entre elles dans le cas des solides.
- Libres de se déplacer les unes par rapport aux autres dans le cas des fluides.

1.2.1. L'écoulement fluide est à deux dimensions

Les caractéristiques de l'écoulement dans un plan sont les mêmes que dans tout plan parallèle. Ceci permet de ne considérer qu'un plan que nous prendrons pour plan des z . Les lignes construites dans ce plan seront considérées comme les sections droites de cylindres infinis à génératrices perpendiculaires au plan considéré.

1.2.2. Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel

Si V_x et V_y désignent les composantes de la vitesse du fluide en (x, y) selon les axes des x et y , il existe une fonction ϕ appelée potentiel des vitesses telle que

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.2.1)$$

De façon équivalente si C est courbe fermé simple quelconque du plan de la variable z et si V_t désigne la composante tangentielle de la vitesse sur C

$$\oint_C V_t ds = \oint_C V_x dy - V_y dx = 0 \quad (1.2.2)$$

L'une ou l'autre des intégrales (1.2.2) est appelée la circulation du fluide le long de C . Quand la circulation est nulle sur toute courbe C , le fluide est dit irrotationnel.

1.2.3. Les écoulement des fluide

Écoulement uniforme

Une écoulement bidimensionnel a surface libre est dit uniforme si l'écoulement de vitesse est constante.

$$A_1 = A_2$$

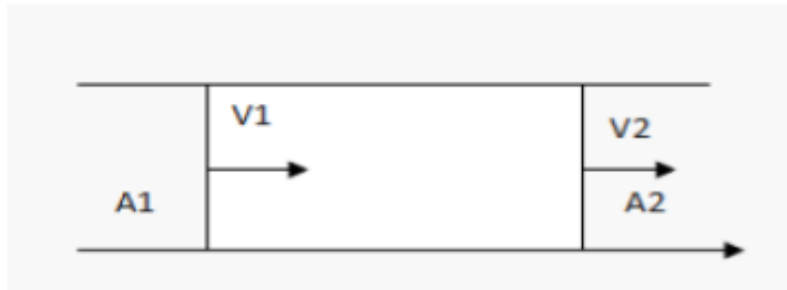


FIGURE 1.1 – Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme

Écoulement permanent

on dit aussi stationnaire, si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad (1.2.3)$$

Écoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si :

$$\text{rot}(\vec{V}) = 0 \quad (1.2.4)$$

en tout point du fluide, ou $\text{rot} \vec{V}$ représente le vecteur rotation ou vorticité.

Écoulement incompressible

Un fluide est dit incompressible si le volume de chaque particule fluide ne varie pas au cours de mouvement se traduit par l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

Écoulement parfait

Un écoulement parfait est une approximation dans le cas où les effets visqueux sont négligeables, et un fluide parfait possédant une viscosité rigoureusement nulle n'a aucune implication que un sens.

fluide parfait \implies écoulement parfait

Écoulement stationnaire

On appelle écoulement stationnaire ou encore écoulement permanent, un écoulement dont toutes les caractéristiques quantitatives sont indépendantes du temps, en particulier pour la vitesse $\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3)}{\partial t} = 0$. Cela signifie simplement que les lignes de courant n'évoluent pas au cours du temps. Il est facile de voir que dans un écoulement stationnaire les lignes de courant sont les mêmes que les trajectoires.

1.2.4. Fonction de courant

Dans un domaine D , on appelle écoulement plan (ou bidimensionnel) si en tout point de ce domaine, à l'instant t , le vecteur vitesse \vec{V} est parallèle à un plan.

Écrivons

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (1.2.5)$$

Pour tous les points de ce domaine

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2.6)$$

Cela implique que la forme différentielle $u dy - v dx$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ :

$$\exists \psi(x, y, t), d(\psi) = u dy - v dx \quad (1.2.7)$$

On a donc immédiatement

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.2.8)$$

ψ s'appelle la fonction de courant, car elle permet un calcul simple des lignes de courant. Les lignes $\psi(x, y, t) = C(t)$ sont les lignes de courant. De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u = \partial \psi / \partial y \\ v = -\partial \psi / \partial x \end{pmatrix} = -\partial^2 \psi / \partial^2 x - \partial^2 \psi / \partial^2 y = 0 \quad (1.2.9)$$

$\implies \Delta \psi = 0$, ψ vérifie aussi l'équation de Laplace.

1.2.5. Lignes de courant

Définition 1.

La description eulérienne conduit elle aussi à une représentation du champ de vitesse, à un instant t , sous la forme d'une famille de lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse, que l'on appelle lignes de courant. L'équation des lignes de courant se déduit directement de cette définition en écrivant que : Un petit déplacement \vec{dx} sur la ligne de courant est colinéaire au vecteur vitesse :

$$\vec{V} \wedge \vec{dx} = 0 \text{ soit } \varepsilon_{jk} \vec{V}_j dx_k = 0 \quad (1.2.10)$$

En explicitant cette relation, on obtient :

$$\begin{cases} V_2 dx_3 - V_3 dx_2 = 0 \\ V_3 dx_1 - V_1 dx_3 = 0 \\ V_1 dx_2 - V_2 dx_1 = 0 \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Les lignes de courant sont donc les intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx_1}{V_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{V_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{V_3(\vec{x}, t)} \quad (1.2.12)$$

Où t la valeur fixée.

1.2.6. Le potentiel complexe

On voit d'après 1.2.1 et (1.2.5) que le potentiel des vitesses est harmonique, i.e, vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2.13)$$

On en déduit qu'il existe une fonction harmonique conjuguée $\psi(x, y)$ tel que

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1.2.14)$$

Soit analytique. On a d'après (1.2.1), par dérivation

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_x - iV_y \quad (1.2.15)$$

La vitesse (appelée quelque fois vitesse complexe) est donc donnée par

$$\vec{V} = V_x - iV_y = \overline{d\Omega/dz} = \overline{\Omega'(z)} \quad (1.2.16)$$

et a pour module

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \left| \overline{\Omega'(z)} \right| = \left| \Omega'(z) \right| \quad (1.2.17)$$

Les points pour lesquels la vitesse est nulle, i.e. $\Omega'(z) = 0$, sont appelées points d'arrêt, La fonction $\Omega(z)$ dont l'importance est fondamentale dans la caractérisation d'un écoulement est appelée le potentiel complexe.

1.2.7. Fonction de Potentiel

On rappelle que pour un écoulement irrotationnel : $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = 0$ Peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$.

La fonction ϕ s'appelle fonction potentiel. On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Si de plus le fluide est incompressible la fonction ϕ vérifie l'équation de Laplace.

1.2.8. Équation de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. Dans le cas d'un fluide laminaire visqueux et incompressible, et on négligeant les effets de la gravité, on obtient la relation suivant :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

Où P_i la pression, $i = 1, 2$

V la vitesse de fluide

ρ la densité de fluide

Si le fluide non visqueux dans ce cas l'équation de Bernoulli est devient comme suite :

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{const} \quad (1.2.20)$$

1.3. Fonction à variable complexe

1.3.1. Fonction harmonique

Définition 2.

Si les dérivées partielles secondes de u et v par rapport x et à y existent et sont continues dans Ω , alors on peut tirer de (1.3.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (1.3.1)$$

On déduit de la que, sous ce conditions, les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique que vérifient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.3.2)$$

Les fonctions telles que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ qui vérifient l'équation de la place dans Ω sont appelée fonctions harmoniques.

1.3.2. Fonction analytique

Définition 3.

Soit Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. f est dite holomorphe sur Ω si f est dérivable en tout point de Ω .

Définition 4.

Soit Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. f est dite Analytique si elle développable en série entière en tout point de Ω .

Proposition 1.

Toute fonction Analytique sur Ω est holomorphe sur Ω .

1.3.3. Théorème de Schwartz

Théorème 1.

Si les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues au voisinage de (x_0, y_0) alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \quad (1.3.3)$$

1.3.4. Les Conditions de Cauchy-Riemann

Définition 5.

Une condition nécessaire pour que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ soit analytique dans un ouvert connexe Ω est que, dans Ω , u et v vérifient les conditions de Cauchy-Rimman

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.3.4)$$

Si les dérivées partielles sont continues dans Ω , alors les conditions de Cauchy-Rimman sont des conditions suffisantes pour que $f(z)$ soit analytique dans Ω . Les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont souvent appelées fonctions conjuguées, si l'on se donne l'une d'entre elle, on peut déterminer l'autre (à une constante additive près) de telle manière que $f(z) = u + iv$ soit analytique.

1.3.5. Différentielle totale

On appelle différentielle totale de 1^{er} ordre d'une fonction $f(x, y)$ l'expression

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

Transformations conformes

Chapitre 2

2.1. Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter une définition sur les transformations conformes et quelques propriétés fondamentale sur elles, qui présente dans des transformations conformes, mention transformation d'holographe et la transformation de Schwarz- Christoffel.

2.2. Transformations

Définition 1.

L'ensemble d'équation

$$u = u(x; y) \quad v = v(x; y) \quad (2.2.1)$$

Définit, en général une transformation qui établit une correspondance entre les points du plan et les points du plan . Les équations(3.2.1) sont appelées équation de transformation, si à chaque point du plan uv correspond un et un seul points du plan xy , et inversement on parle d'une transformation biunivoque. Dans un tel cas, un ensemble des points dans la plan xy (tel qu'une courbe ou une région) est mappé dans un ensemble de points dans le plan uv (courbe ou région) et inversement. Les ensembles correspondants de point dans les deux plans sont souvent appelés images l'un de l'autre.

2.3. Forme complexe d'une transformation

Il est particulièrement intéressant de considérer le cas où u et v désignent la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$ i.e. $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$. dans un tel cas le jacobien de la transformation est :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2 \quad (2.3.1)$$

On en déduit que la transformation est conforme dans les domaines où $f'(z) \neq 0$. les points pour lesquels $f'(z) = 0$ sont appelés points critiques.

2.4. Transformations conformes

Supposons que le point $(x_0; y_0)$ d'un plan des xy soit transformé en le point $(u_0; v_0)$ d'un plan des uv [figure 2.1 et figure 2.2] cependant que les courbes C_1 et C_2 [se coupant en $(x_0; y_0)$] sont respectivement transformées en C'_1 et C'_2 [se coupant en $(u_0; v_0)$]. Une transformation telle que l'angle entre C_1 et C_2 en $(x_0; y_0)$ est égale en grandeur et sens, l'angle entre C'_1 et C'_2 en $(u_0; v_0)$, est dite conforme en $(x_0; y_0)$ une transformation qui conserve les angles en grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonale

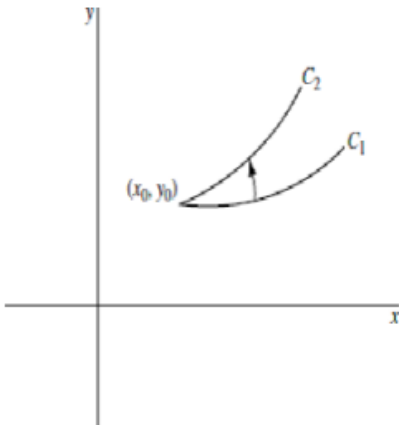


FIGURE 2.1 – plan xy

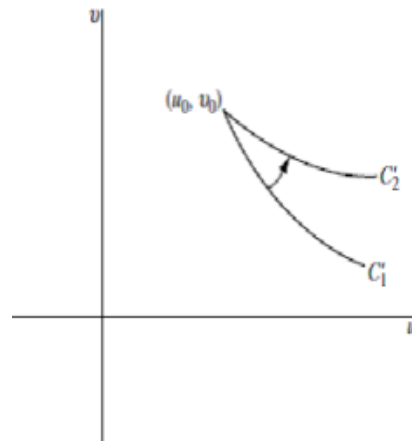


FIGURE 2.2 – plan uv

Théorème 1.

Si $f(z)$ est analytique et si $f'(z) \neq 0$ en tous les points d'un ouvert connexe, la transformation $w = f(z)$ est conforme en tous points de Ω .

2.5. Quelques transformations

2.5.1. Quelques transformations générales

Dans les exemples suivants α, β, γ sont des constantes complexes, a, θ_0 , étant des constantes réelles.

Rotation $w = e^{i\theta_0}z$

Par cette transformation les figures du plan z subissent une rotation d'angle θ_0 .

Homothétie $w = az$

Par cette transformation les figures sont dilatées (ou contractées) si $a > 1$ (si $0 < a < 1$). On considère la contraction comme un cas particulier de dilatation.

Translation $w = z + \beta$

Par cette transformation les figures du plan z sont déplacées ou translatées dans la direction du vecteur

β .

Inversion $w = 1/z$

Pour z non nul transformée les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

Transformation de joukowski

La transformation de joukowski est définie par : $w = \frac{\pi z}{\alpha}$

$$J(z) = z + \frac{1}{z}; \quad \forall z \neq 0 \quad (2.5.1)$$

Cette application est holomorphe sur $\mathbb{C} - 0$ car :

$\forall z \neq 0, J'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$. De plus $\forall z \notin \{-1, 0, 1\}, J'(z) \neq 0$, donc cette transformation est une application conforme sur tous les domaines ouverts d'un plan complexe n'incluant ni 0 ni 1 ni -1.

Transformation linéaire $w = \alpha z + \beta$

Où α et β sont des constantes complexes est appelée une transformation linéaire. Étant donné que l'on peut écrire $w = \alpha z + \beta$ au moyen des transformations successives $w = \zeta + \beta, \zeta = e^{i\theta_0}z, \tau = \alpha z = ae^{i\theta_0}$ on voit que la transformation linéaire la plus générale s'exprime sous la forme de produit de la transformation telles que translation, rotation, homothétie.

Transformation linéaire fractionnelle

La transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2.5.2}$$

Avec a, b, c, d des complexes. Transformée les cercles en droites et respectivement .

2.6. Representation sur le Demi -Plan

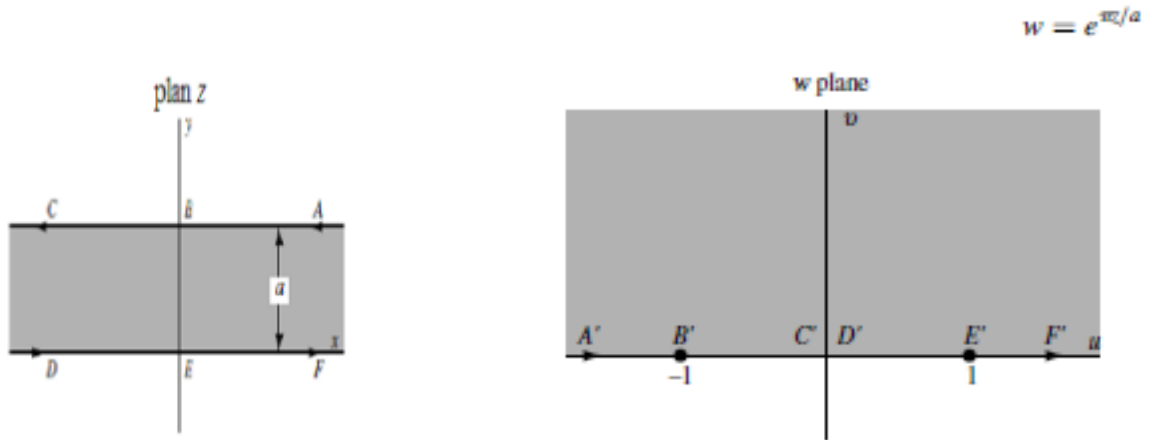


FIGURE 2.3 – Un rectangle infini de largeur a

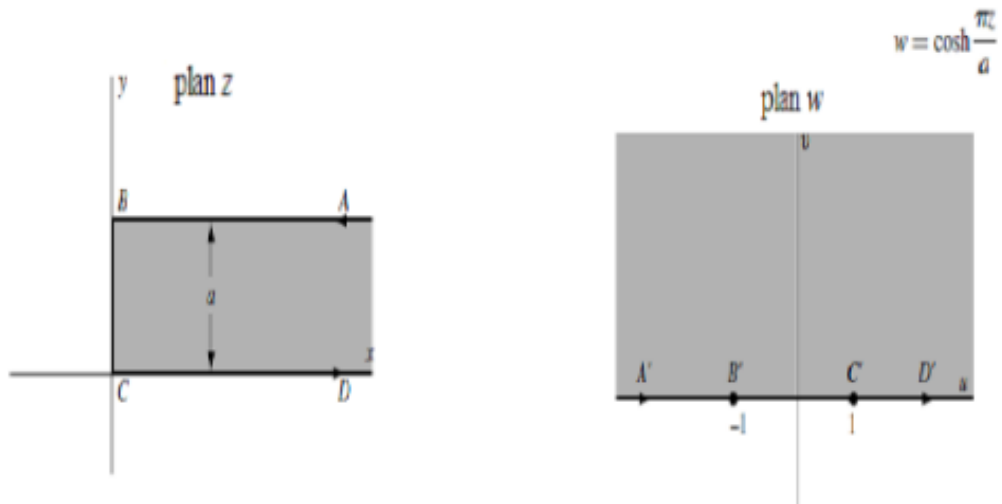
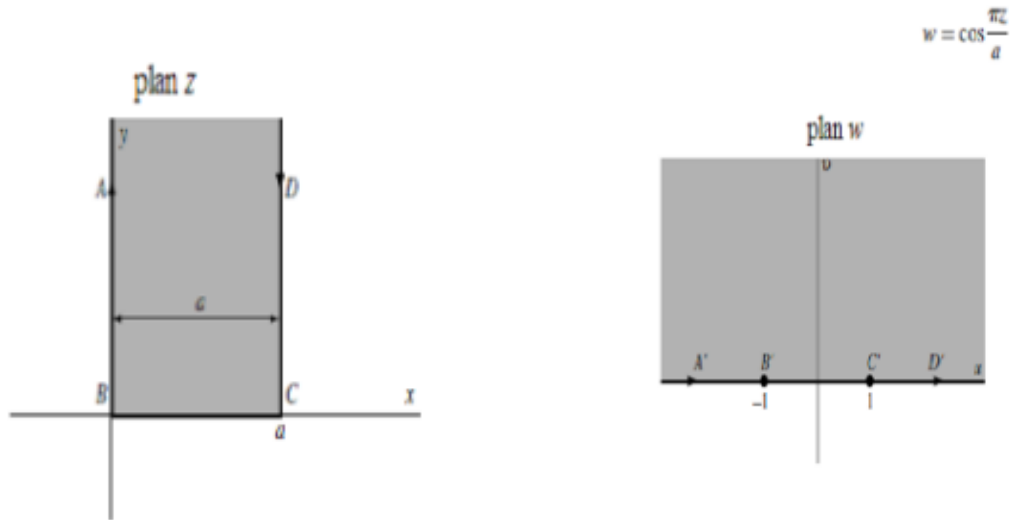


FIGURE 2.4 – Un demi-rectangle infini de largeur a



2.7. Transformation hodographe

La théorie des lignes de courant est étudié le problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel, bornés par des parois rectilignes et des lignes de courant libre de forme inconnue, sur lesquelles la pression est supposée constante. Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte. L'idée est d'introduire la fonction complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u-iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta \quad (2.7.1)$$

Où U la vitesse de référence

θ l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale

et $f = \phi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = u-iv$ et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$

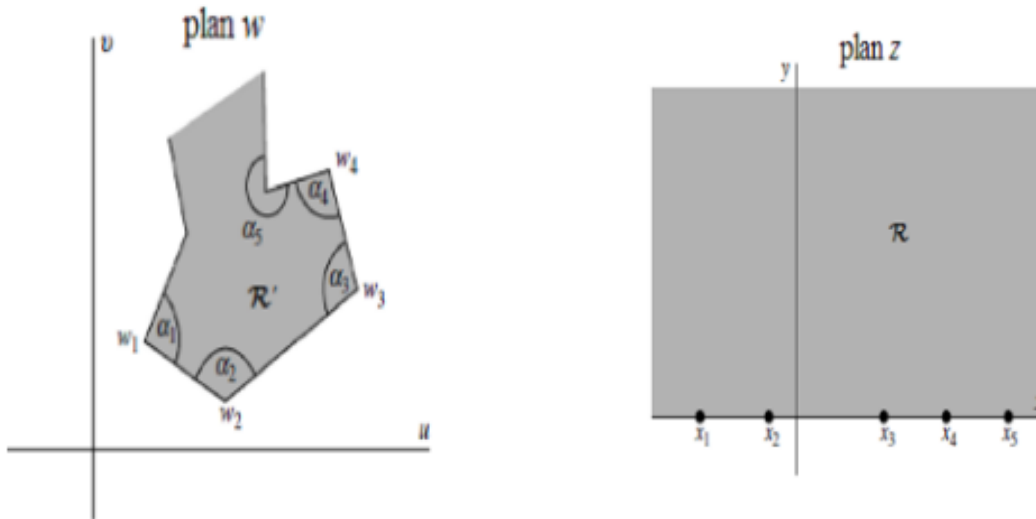
(u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des x et l'axe des y , respectivement.

On note que La fonction possède les propriétés suivantes :

- La partie réelle de Ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e., $\log\left(\frac{u}{q}\right) = \text{const.}$
- La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e., $\theta = \text{const.}$

2.8. La transformation de Schwartz-Christoffel

Considérons un polygone [figure 2.5] dans le plan des w , ayant pour sommets w_1, w_2, \dots, w_n et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soient w_1, w_2, \dots, w_n les points correspondant respectivement x_1, x_2, \dots, x_n de l'axe réel du plan des z [figure 2.8]



Une transformation qui représente l'intérieur R d'un polygone considéré sur le demi-plan supérieur d'un plan des z , et la frontière d'un polygone sur l'axe réel, est donnée par

$$w = A \int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} dz + B \quad (2.8.1)$$

Où A et B sont des constantes complexes.

On notera que

1. Parmi les points x_1, x_2, \dots, x_n on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n , à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de 2.5 et 2.6 n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

2.9. Exemples

2.9.1. Transformer la demi-bande au demi plan supérieur

Pour transformer la demi-bande au demi-plan supérieur pouvez utiliser une transformation conforme telle que la transformation de Schwarz-Christoffel

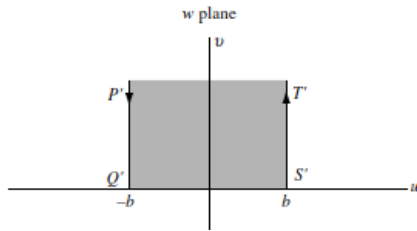


FIGURE 2.5 – 8-78

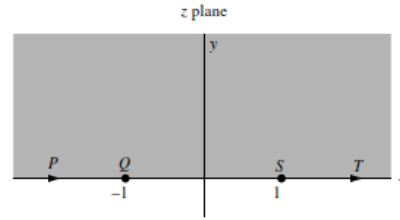


FIGURE 2.6 – 8-79

La transformation de Christoffel-Schwartz donné par :

$$\frac{dw}{dz} = (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} \quad (2.8.2)$$

$$\frac{dw}{dz} = A(z + 1)^{[(\pi/2)/\pi] - 1} (z - 1)^{[(\pi/2)/\pi] - 1} = \frac{A}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{K}{\sqrt{1 - z^2}}$$

par integration :

$$w = K \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} + B = K \sin^{-1} z + B$$

$$w(1) = b \text{ et } w(-1) = -b \Rightarrow B = 0, K = 2b/\pi \text{ Donc: } w = \frac{2b}{\pi} \sin^{-1} z$$

2.9. 2. Jet libre

Nous nous intéressons des écoulements potentiels irrationnels. De l'équation de continuité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, on tire que quel que soit l'écoulement d'un fluide incompressible, il existe toujours une fonction dite fonction de courant qui vérifié :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.9.1)$$

Avec $\mathbf{u} = (u; v)$ dans un repère cartésien xy . Si de plus l'écoulement est irrationnelle, alors sa vorticité est nulle : $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ et donc il existe une fonction dite potentiel de vitesse telle que : $\mathbf{u} = -\nabla \phi$ Nous plaçons aussi en régime permanent de telle sorte que le théorème de Bernoulli soit vérifié le long des lignes de courant $\psi = cte$. On a négligé en première approximation l'effet du champ de pesanteur. On peut définir un potentiel complexe : $f = \phi + i\psi$, La dérivée de ce potentiel par rapport $z = x + iy$ fournit la vitesse complexe :

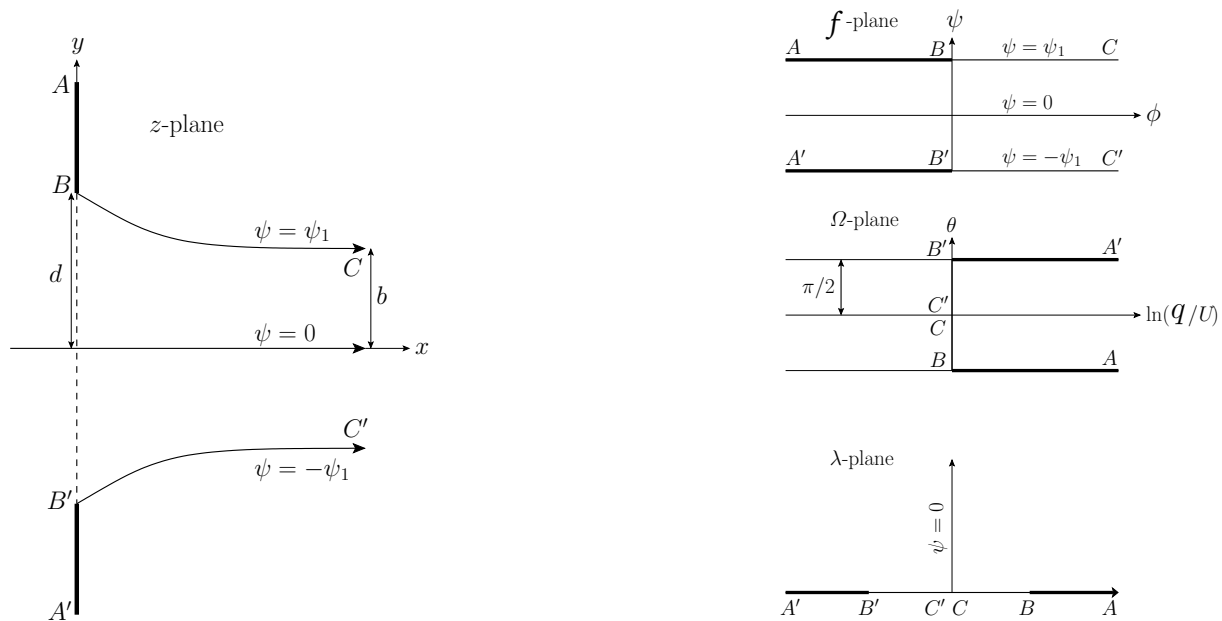
$$\frac{df}{dz} = u - iv \quad (2.9.2)$$

Par exemple de l'application de la théorie de la lignes de courant, calculons la Rapport de contraction d'un jet bidimensionnel de liquide sortant d'un orifice. Supposons que l'orifice est une fente mince et longue dans une paroi plane de faible épaisseur et que le mur fait partie d'un grand vaisseau contenant du liquide. La vitesse du liquide sur les lignes de rayonnement libres qui émergent des bords de l'orifice est uniforme et égale à v , disons. C'est aussi la vitesse de l'intérieur du jet en aval de l'orifice, où (négligeant les effets de la gravité), les raides sont

droites et parallèles. (Voir la figure 2 :12). Laissez les deux lignes de courant délimiter le débit, sur lequel $\psi = +\psi_1$ et $\psi = -\psi_1$, Dire-êtré ABC et $A'B'C'$, respectivement, où A, A', C et C' Tous représentent des points l'infini. La figure 2.12 montre la ligne droite correspondante Limites dans les plans f et Ω , où est maintenant défini de manière plus pratique Manière comme

$$\Omega = \ln\left(U \frac{dz}{df}\right) = \ln\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta \tag{2.9.3}$$

En raison de la symétrie de l'écoulement on peut restreindre l'étude du problème au demi plan supérieur.



Pour trouve la solution analytique on utilise une transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer chacun des polygones à un même polygone d'un nouvel espace que l'on va appeler λ .

Nous devons cartographier la bande infinie $C B A$ Dans le plan f vers la moitié supérieure du plan λ . La transformation conforme d'une bande semi-infinie sur la moitié supérieure d'un autre plan complexe.

la transformation de Schwartz-Christoffel donne :

$$\begin{aligned} f &= \alpha \int (\lambda - 1)^{\frac{\pi}{\alpha} - 1} (\lambda - 0)^{\frac{0}{\alpha} - 1} d\lambda \\ &= \alpha \int (\lambda)^{-1} d\lambda \\ &\Rightarrow f = \alpha \ln(\lambda) + \beta \end{aligned}$$

pour obtient α et β en effet :

$$i\psi_1 = \alpha \ln(1) + \beta \tag{2.9.4}$$

$$-i\psi_1 = \alpha \pi i + \beta \tag{2.9.5}$$

Correspondant nous trouvons

$$\beta = i\psi_1 \text{ et } \alpha = \frac{-2\psi_1}{\pi}$$

On remplace dans

$$\begin{aligned} f &= \frac{-2\psi_1}{\pi} \ln(\lambda) + i\psi_1 \\ \Rightarrow \lambda &= i \exp\left(\frac{\pi f}{2\psi_1}\right) \end{aligned}$$

Ensuite, nous devons cartographier la bande infinie ABC dans le plan Ω vers le haut moitié du plan λ . La transformation conforme d'une bande semi-infinie sur la moitié supérieur d'un autre plan complexe.

la transformation de Schwartz-Christoffel donne :

$$\Omega = -\alpha i \arccos(\lambda) + \beta$$

pour obtient α et β en effet :

$$-i\frac{\pi}{2} = -i\alpha \arccos(1) + \beta; 0 = -i\alpha \arccos(0) + \beta$$

Par calcul on trouve

$$\Omega = i \arccos(\lambda) - i\frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} \quad \lambda = i \sinh(\Omega)$$

Le champ d'écoulement a maintenant été cartographié sur la moitié supérieure du plan λ de deux manières coïncidentes.

$$\begin{aligned} \lambda &= i \exp\left(\frac{\pi f}{2\psi_1}\right) \\ &= i \sinh(\Omega) \\ &= \frac{i}{2} \left(U \frac{dz}{df} - \frac{1}{U} \frac{df}{dz} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$U \frac{dz}{df} = -i\lambda + (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$$

Où, avec des coupes dans le plan Z à AB , la branche correcte de $(1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ est réel et positif quand $f=0$. L'intégration, des rendements

$$\frac{\pi U}{2\psi_1} (z - z_1) = i(\lambda - 1) - (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \text{th}^{-1} (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$$

Où z_1 est une constante. Cependant, $\lambda = 1$ au point B , où $z = id$ ($2d$ étant le Largeur de l'orifice), donc $z_1 = id$, et

$$\frac{\pi U}{2\psi_1} (z - id) = i(\lambda - 1) - (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \text{th}^{-1} (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Alors} \quad z = -\frac{2\psi_1}{\pi U} \left[(1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \text{th}^{-1} (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \right] + i \left(\frac{2\psi_1}{\pi U} (\lambda - 1) + d \right)$$

Enfin, la relation requise entre z est ω obtenue en éliminant λ entre les équations (2.11) et (2.15). Sur la surface libre BC , nous avons

$$\psi = \psi_1, \quad \phi = Us, \quad \Omega = i\theta$$

Où s désigne la distance mesurée le long de la ligne de calcul de B. Il résulte de Les équations (2.11) et (2.12) que

$$\lambda = \exp\left(-\frac{\pi U}{2\psi_1}s\right)$$

Ainsi, on utilisant l'équation , l'équation de rationalisation BC peut être écrire sous la forme paramétrique, comme

$$x = -\frac{2\psi_1}{\pi U} \left[(1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \text{th}^{-1} (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$y = \frac{2\psi_1}{\pi U} (\lambda - 1) + d$$

Ainsi, la demi-largeur asymptotique du jet est

$$b = \lim_{s \rightarrow \infty} y(s) = d - \frac{2\psi_1}{\pi U}$$

En d'autres termes, comme prévu, le profil de vitesse devient uniforme à travers le jet en aval de l'orifice, ce qui implique que $\psi_1 = bU$. Il découle, à partir de l'équation 18, que le rapport de contraction d'un jet de liquide bidimensionnel émergeant d'un orifice dans une paroi plane prend la valeur

$$\frac{b}{d} = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0,61$$

Effets de la tension de surface sur l'écoulement de cavitation autour d'un obstacle courbé

Chapitre
3

3.1. Introduction

Le problème de l'écoulement de cavitation autour d'un obstacle courbé bidimensionnel, incluant la tension de surface dans la condition de frontière dynamique, est en cours d'étude. La solution numérique du problème est obtenue par troncature de série. Des solutions explicites sont présentées spécifiquement pour l'écoulement autour d'un cercle. L'analyse démontre qu'en présence de valeurs non nulles de tension superficielle, une solution unique existe où l'écoulement quitte l'obstacle tangentiellement. Lorsque la tension superficielle approche zéro, cette solution converge vers la solution classique qui satisfait la condition de Brillouin-Villat. Vanden-Broeck a étudié l'influence de la tension superficielle sur l'écoulement de cavitation autour d'une plaque plane et la forme d'un jet émergeant d'un réservoir. Ses résultats indiquent que la vitesse devient infinie aux points de séparation. Cependant, en tenant compte de l'épaisseur finie et de la courbure des extrémités de la plaque et des parois du réservoir, ces valeurs de vitesse non bornées sont éliminées. Dans le présent travail, nous examinons l'effet de la tension de surface sur l'écoulement de cavitation autour d'un obstacle courbé. Lorsque la tension de surface est négligée, le problème a un nombre infini de solutions. Nous montrons que cette dégénérescence est éliminée en résolvant le problème avec la tension de surface, puis en prenant la limite lorsque la tension de surface tend vers zéro. Des résultats numériques explicites sont présentés pour l'écoulement de cavitation autour d'une ellipse. Les résultats présentés ici devraient être pertinents pour toute situation physique dans laquelle la surface libre d'un fluide rencontre une surface solide.

3.2. Formulation du problème

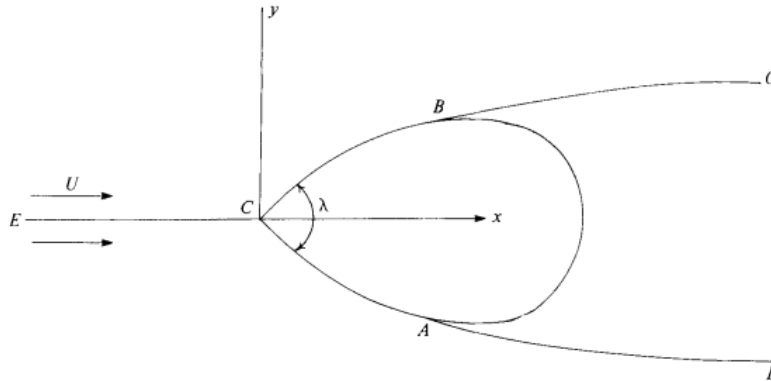


FIGURE 3.1 – Croquis du flux et des coordonnées

Nous considérons l'écoulement cavitant après un obstacle incurvé (voir figure 3.1). On note par L une dimension typique de l'obstacle. A l'infini on a un débit à constante vitesse U . Le fluide est supposé non visqueux et incompressible. Nous restreignons notre attention aux obstacles symétriques par rapport à la direction du vitesse à l'infini. Les écoulements au-delà d'obstacles non symétriques peuvent être traités de la même manière. Il est commode d'introduire des variables sans dimension en choisissant L comme unité de longueur et U comme unité de vitesse

Nous introduisons le potentiel sans dimension ϕ et la fonction de flux ψ . La constante b est choisi tel que $\phi = 1$ aux points de séparation. Sans perte de généralité nous choisir $\phi = 0$ en $x = y = 0$. La surface libre, l'obstacle et l'axe des abscisses négatif sont portions de la ligne de courant $\psi = 0$

On note la vitesse complexe par $u - iv$ et on définit la fonction $\tau - i\theta$ par la relation

$$u - iv = e^{\tau - i\theta} \quad (3.2.1)$$

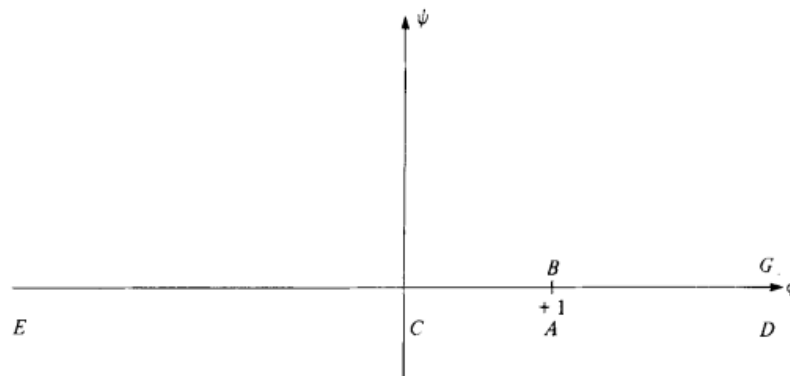


FIGURE 3.2 – l'écoulement dans le plan du potentiel complexe $f = \phi + i\psi$

On cherchera $\tau - i\theta$ comme fonction analytique de $f = \phi + i\psi$ dans le demi-plan $\psi < 0$. Le plan potentiel complexe est esquissé dans la figure 3.2. A l'infini nous avons besoin de la

vitesse Figure 3.1 Schéma de principe d'un problème d'écoulement de cavité après un obstacle incurvé Figure 3.2 être une unité dans la direction x de sorte que la fonction $\tau - i\theta$ à l'infini disparaisse dans la vue A la surface de la cavité, l'équation de Bernoulli et la pression créée par celle-ci sont présentes de (3.2.1). rendement de tension superficielle

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{T}{\rho}K = \frac{1}{2}U^2 \quad (3.2.2)$$

Ici q est la vitesse d'écoulement, K la courbure de la surface de la cavité comptée positive lorsque le centre de courbure se trouve à l'intérieur des régions fluides, T la tension superficielle et ρ la densité. Dans les variables sans dimension, cela devient (pour plus de détails, voir Ackerberg 1975)

Nous cherchons des solutions pour lesquelles l'écoulement quitte l'obstacle de manière tangentielle. Par conséquent, nous exigeons que la vitesse soit finie à $\phi = 1$ La relation (3.2.1) montre que la courbure de la surface libre $\frac{e^\tau}{b} \frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ est alors également finie à $\phi = 1$ pour $\alpha \neq +\infty$ Ainsi, nous imposons la condition

$$\left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| < +\infty \quad \text{à} \quad \phi = 1 \quad (3.2.3)$$

Cependant, nous n'exigeons pas que la courbure de la surface libre soit égale à la courbure de l'obstacle. Par conséquent, nous permettons une discontinuité finie de saut de

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} < +\infty \quad \text{at} \quad \phi = 1 \quad (3.2.4)$$

Enfin, l'équation de Bernoulli (3.2.2) ressemble à ceci :

$$\frac{e^\tau}{b} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{1}{2}\alpha(e^{2\tau} - 1) \quad (1 < \phi < +\infty) \quad (3.2.5)$$

Ici α est le nombre de Weber défini par

$$\alpha = \frac{\rho U^2 L}{T} \quad (3.2.6)$$

La symétrie du problème et la condition cinématique sur l'obstacle donnent

$$\theta(\phi) = 0 \quad (\psi = 0, \phi < 0) \quad (3.2.7)$$

$$F[x(\phi), y(\phi)] = 0 \quad (\psi = 0, 0 < \phi < 1) \quad (3.2.8)$$

$F(x, y) = 0$ est l'équation de la forme de l'obstacle, et les fonctions $\theta(\phi)$, $x(\phi)$ et $y(\phi)$ désignent respectivement $\theta(\phi, 0-)$ Ceci termine la formulation du problème de détermination de la fonction $\tau - i\theta$ et la constante b . Pour chaque valeur de α , $\tau - i\theta$ doit être analytique dans le demi-plan $\psi < 0$ et satisfont les conditions aux limites (3.2.5), (3.2.7) et (3.2.8)

3.3. Procédure numérique

la fonction de kirchhoff définie par :

$$\begin{aligned}\Omega &= \log\left(\frac{u}{q}\right) + i\theta \\ &= \log\left(U \frac{dz}{df}\right) = -\tau + i\theta \\ \frac{\partial z}{\partial f} &= e^{-\tau+i\theta} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} &= e^{\tau-i\theta} = u - iv\end{aligned}$$

On trouve la solution analytique du problème :

Lorsque la tension superficielle est négligée, le nombre de Weber est infini et la condition (2.3) se réduit à la condition de ligne libre $\tau = 0$. Ensuite on met $\tilde{f} = \tilde{\phi} + i\tilde{\psi}$ et $f = b\tilde{f}$ donc $\phi = 1$ à B et B' . On définit la nouvelle variable t par la transformation .

$$(\tilde{f})^{\frac{1}{2}} = \left(t - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{2i} \quad (3.3.1)$$

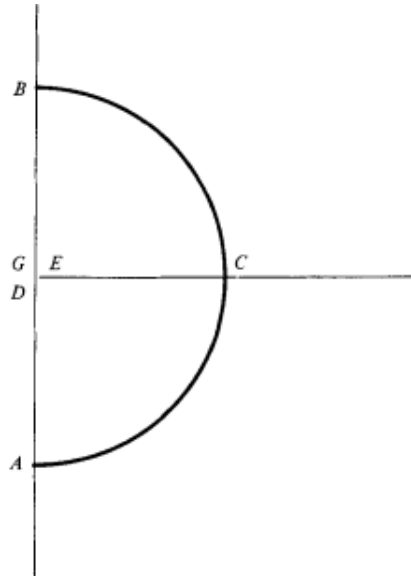


FIGURE 3.3 – le plan t

Nous avons que lorsque la barrière est un plan , nous avons utilisé

$$\Omega = \log\left[\frac{1+t}{1-t}\right] \quad (3.3.2)$$

Lorsque la barrière est constituée de deux plans se rencontrant à un angle λ sous le nom de problème de Bobileff, nous avons

$$\Omega = \lambda \log\left[\frac{1+t}{1-t}\right]$$

Pour un objet courbé symétrique , on est amené à écrire comme une fonction analytique de t par la relation :

$$\Omega(t) = \frac{\lambda}{\pi} \log \left[\frac{1+t}{1-t} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n t^{2n-1} \quad (*)$$

Nous supposons ici que A_n , est réel et que la série n'a qu'une puissance impaire de t . Celle-ci est soumise aux 2 conditions suivantes :

- Sur AO ($\theta = 0$) est réel $\implies t$ est réel
 $\log \frac{1+t}{1-t} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \xi$ soit doit être réel
- sur la surface libre $u^2 + v^2 = e^{2\tau}$ depuis $u - iv = e^{\tau - i\theta}$ nous avons
 $u = e^{\tau} \cos \theta$ et $v = e^{\tau} \sin \theta$

et ca veut-dire $u^2 + v^2 = e^{2\tau}$ réel $\implies \Omega$ doit être purement imaginaire pou $t = ir, -1 < r < 1$
Ainsi, nous exigeons que la puissance de t soit un nombre impair. n'ont pas utilisé est la condition cinématique sur l'obstacle. Elle sera imposée ultérieurement. Afin de résoudre le problème , on tronque la série infinie en $(*)$ après N termes , soit :

$$-\tau + i\theta = \Omega = \frac{\lambda}{\pi} \log \frac{1+t}{1-t} + \sum_{n=1}^N A_n t^{2n-1} \quad (3.3.3)$$

Nous avons $N + 1$ inconnues , soit b, A_1, A_2, \dots, A_N . Sur le cercle unité on écrit $t = e^{i\sigma}$ où $-\pi/2 < \sigma < \pi/2$.

Rappelons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial f} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{-\tau + i\theta} \\ e^{-\tau}(\cos \theta + i \sin \theta) &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ e^{-\tau} \cos \theta + i e^{-\tau} \sin \theta &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases} \quad (3.3.4)$$

$$f = \tilde{f} b \implies \tilde{f} = \frac{f}{b}$$

$$\implies (\tilde{f})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{f}{b} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(t - \frac{1}{t} \right) \frac{1}{2i}$$

et on a

$$t = e^{i\sigma}$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{b} \right)^{\frac{1}{2}} &= (e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}) \cdot \frac{1}{2i} \\ &= \sin \sigma \end{aligned}$$

et sur la surface libre

$$f = \phi + i\psi, \quad \psi = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{\phi}{b}\right)^{\frac{1}{2}} &= \sin \sigma \\ \Rightarrow \phi &= b \sin^2 \sigma \\ \Rightarrow d\phi &= b \sin 2\sigma d\sigma \end{aligned}$$

En utilisant cette relation dans (3.3.5), nous trouvons que :

$$\begin{aligned} dx &= e^{-\tau} \cos \theta b \sin 2\sigma d\sigma \\ dy &= e^{-\tau} \sin \theta b \sin 2\sigma d\sigma \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} &= e^{-\tau} \cos \theta b \sin 2\sigma \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} &= e^{-\tau} \sin \theta b \sin 2\sigma \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

En remplaçant $t = e^{i\sigma}$ dans l'équation (3.3.3), on obtient :

$$-\tau + i\theta = \frac{\lambda}{\pi} \log \left(\frac{1 + e^{i\sigma}}{1 - e^{i\sigma}} \right) + \sum_{n=1}^N A_n e^{i(2n-1)\sigma} \quad (**)$$

D'autre part nous a vous.

$$1 + e^{i\sigma} = 1 + \cos \sigma + i \sin \sigma$$

et

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\sigma} &= 1 - \cos \sigma - i \sin \sigma \\ \text{d'où} \quad \frac{1 + e^{i\sigma}}{1 - e^{i\sigma}} &= \frac{(1 + \cos \sigma + i \sin \sigma)(1 - \cos \sigma + i \sin \sigma)}{(1 - \cos \sigma - i \sin \sigma)(1 - \cos \sigma + i \sin \sigma)} \\ &= \frac{i \sin \sigma}{1 - \cos \sigma} \end{aligned}$$

On substitue dans la relation (**) on trouve

$$\begin{aligned} -\tau + i\theta &= \frac{\lambda}{\pi} \left[\log \left(\frac{|\sin \sigma|}{1 - \cos \sigma} \right) - \frac{i\pi}{2} \right] + \sum_{n=1}^N [A_n (\cos(2n-1)\sigma + i \sin(2n-1)\sigma)] \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \log \left(\frac{|\sin \sigma|}{1 - \cos \sigma} \right) + \sum_{n=1}^N A_n \cos(2n-1)\sigma + i \left[-\frac{\lambda}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin(2n-1)\sigma \right] \end{aligned}$$

Donc

$$\theta(\sigma) = -\frac{\lambda}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin(2n-1)\sigma \quad (3.3.6)$$

$$\tau(\sigma) = -\frac{\lambda}{\pi} \log \left[-\frac{\sin \sigma}{1 - \cos \sigma} \right] - \sum_{n=1}^N A_n \cos(2n-1)\sigma \quad (3.3.7)$$

pour $-\frac{\pi}{2} < \sigma < 0$ par symétrie du problème Nous substituons la relation (3.3.5) et (3.3.7) dans la relation (3.3.5) et intégrons pour obtenir x et y Nous introduisons maintenant M les

point du maillage sur la circonférence du cercle unité par :

$$\sigma_1 = -\frac{\pi}{2M}I, \quad I = 1, 2, \dots, M.$$

et M point intermédiaire du maillage $\sigma_1^M = -(\pi/2M)\left(I - \frac{1}{2}\right)$, $I = 1, 2, \dots, M$. A partir de ceux-ci nous pouvons calculer $(\partial x/\partial \sigma)_{\sigma=\sigma_1^M}$ et $(\partial y/\partial \sigma)_{\sigma=\sigma_1^M}$. De plus on obtient $x(\sigma I)$ et $y(\sigma I)$ de puis

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{x(\sigma_{I-1}^M) - x(\sigma_I^M)}{\sigma_{I-1}^M - \sigma_I^M} = b(\sin 2\sigma_I^M) \exp(-\tau(\sigma_I^M)) \cos(\theta(\sigma_I^M)) \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{y(\sigma_{I-1}^M) - y(\sigma_I^M)}{\sigma_{I-1}^M - \sigma_I^M} = b(\sin 2\sigma_I^M) \exp(-\tau(\sigma_I^M)) \sin(\theta(\sigma_I^M)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{x(\sigma_{I-1}^M) - x(\sigma_I^M)}{\left(\frac{\pi}{2M}\right)} = b \sin(2\sigma_I^M) \exp(-\tau(\sigma_I^M)) \cos(\theta(\sigma_I^M)) \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{y(\sigma_{I-1}^M) - y(\sigma_I^M)}{\left(\frac{\pi}{2M}\right)} = b \sin(2\sigma_I^M) \exp(-\tau(\sigma_I^M)) \sin(\theta(\sigma_I^M)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\sigma_{I-1}^M) - x(\sigma_I^M) = [b \sin(2\sigma_I^M) \exp(-\tau(\sigma_I^M)) \cos(\theta(\sigma_I^M))] \frac{\pi}{2M} \\ y(\sigma_{I-1}^M) - y(\sigma_I^M) = [b \sin(2\sigma_I^M) \exp(-\tau(\sigma_I^M)) \sin(\theta(\sigma_I^M))] \frac{\pi}{2M} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\sigma_I^M) = x(\sigma_{I-1}^M) - b \sin(2\sigma_I^M) \exp(-\tau(\sigma_I^M)) \cos(\theta(\sigma_I^M)) \frac{\pi}{2M} & (3.3.8) \\ y(\sigma_I^M) = y(\sigma_{I-1}^M) - b \sin(2\sigma_I^M) \exp(-\tau(\sigma_I^M)) \sin(\theta(\sigma_I^M)) \frac{\pi}{2M} & (3.3.9) \end{cases}$$

L'équation $F(x, y) = 0$ (forme de l'obstacle), fournit M équation algébrique

$$F(x(\sigma_I), y(\sigma_I)) = 0 \quad I = 1, 2, \dots, M. \quad (3.3.10)$$

une équation supplémentaire est obtenue en spécifiant le point de séparation A alors

$$x(-\pi/2) = \text{quantité donnée} \quad (3.3.11)$$

Le système (3.10), (3.11) est facilement résolu par la méthode de Newton.

3.4. Discussion des résultats

Nous considérons l'écoulement de cavitation autour d'un cercle. Nous choisissons la longueur de référence L comme étant le rayon du cercle. Par conséquent, nous écrivons

$$F(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 1 \quad (3.4.1)$$

Nous avons utilisé le schéma numérique de la section 3 pour calculer des solutions pour différentes valeurs de α . Les coefficients a_n et b ont été trouvés à diminuer rapidement à mesure que n augmente. Pour chaque valeur $\alpha \neq +\infty$, il existe une solution unique qui laisse l'obstacle tangentiellement. Profils typiques de la surface libre pour $\alpha = 0$, $\alpha = 2$, et $\alpha = +\infty$ sont représentés sur la figure (3.4) Chacun de ces profils est caractérisé par une position angulaire différente γ des points de séparation. Les valeurs de γ en fonction de $\frac{1}{\alpha}$ sont représentées sur la figure (3.5).

Lorsque α tend vers l'infini, notre solution tend vers la solution classique en ligne libre satisfaisant la condition de Brillouin - Villat. Cette solution est caractérisée par $\gamma = \gamma^* = 55$ Par conséquent, la dégénérescence du problème avec $T = 0$ est supprimée en résolvant le problème avec $T \neq 0$ puis en prenant la limite comme $T \rightarrow 0$.

Comme $\alpha \rightarrow 0$ and $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et le profil de la surface libre se rapproche de deux lignes horizontales parallèles à la direction de la vitesse à l'infini (voir 3.4).

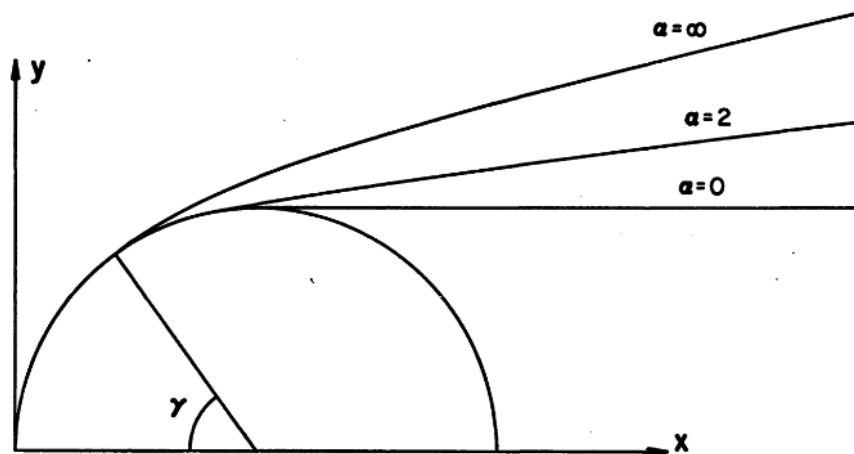


FIGURE 3.4 – Cavités dans un écoulement bidimensionnel stationnaire passant autour d'un cercle pour différentes valeurs du nombre de Weber α



FIGURE 3.5 – Valeurs de la position angulaire γ des points de séparation pour l'écoulement avec cavitation autour d'un cercle en fonction de $\frac{1}{\alpha}$

Conclusion Générale

Les écoulements à surface libre de type jet sont présents dans de nombreuses applications industrielles et urbaines, telles que les chambres de combustion des moteurs, les pompes à jet l'architecture des réservoirs et des barrages. En raison de leur importance pratique, ces types d'écoulement ont fait l'objet de nombreuses études théoriques, expérimentales et numériques.

Dans ce mémoire nous avons étudié théoriquement et numériquement l'écoulement, potentiel bidimensionnel de fluide incompressible et non visqueux pour deux problèmes spécifiques: applique la méthode de l'hodographe et la théorie des ligne de courant libre Pour trouver la solution analytique du problème

1. Ecoulement de fluide à travers un orifice de réservoir: Nous avons négligé l'effet des forces de gravité et de la tension de surface dans ce problème. En utilisant la transformée hodographique correspondante, nous avons pu trouver la forme de la surface libre et le rapport de retrait.
2. Ecoulement autour d'un obstacle courbé en prenant en compte la tension de surface: Dans ce cas nous avons utilisé des transformations conformes et une troncature en série pour déterminer la forme de surface libre.

Abstract

In this work, we have given the definition of the mechanics of fluid and function complex and also gives the conformal transformation and some general transformations, and we have studied the solution to the problem of the flow of an in-compressible fluid and in-viscid in two-dimensional space, neglecting the effect of gravity and surface forces, using Schwartz-Christoffel transformation and the method of the hodograph.

Keywords : mechanics of fluid, Schwartz-Christoffel transformation, method of the hodograph.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons donné la définition de la mécanique de fluide et de fonction complexe et nous avons aussi la transformation conforme et quelques transformations générales, et nous avons étudié la solution au problème de l'écoulement d'un fluide incompressible et non visqueux dans un espace à deux dimensions, en négligeant l'effet de la gravité et des forces de surface, en utilisant la transformation de Schwartz-Christoffel et la méthode de l'hodographe.

Mot clés : transformation de Schwartz-Christoffel, méthode de l'hodographe, problème de l'écoulement d'un fluide incompressible, mécanique de fluide.

ملخص

في هذه المذكرة ، قدمنا تعريفا لميكانيك الموائع ، والدوال المركبة وقدمنا أيضا تعريفا لتحويل المطابق وبعض التحويلات العامة، وقد درسنا الحل لمشكلة تدفق مائع غير قابل لضغط و غير لزج في فضاء ثنائي الأبعاد، مع إهمال تأثير الجاذبية والقوى السطحية، باستخدام تحويل شوارتز كريستوفيل وتحويل هودوغراف.

الكلمات المفتاحية : تحويل شوارتز كريستوفيل، تحويل هودوغراف، ميكانيك الموائع، تدفق مائع غير قابل لضغط .

Bibliographie

- [1] AMARA, ABDELKADER. *CALCUL NUMÉRIQUE D'UN JET BIDIMENSIONNEL D'UN FLUIDE DEVANT UN MUR DE FORME QUELCONQUE*. 2018. Thèse de doctorat. Université de M'sila.
- [2] ANCEY, Christophe. *Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides*.
- [3] BOUZINA, Amira, et al. *Écoulement d'un jet devant un obstacle*. 2022. mémoire de master. UNIVERSITY of M'SILA.
- [4] DAMOU, MERZAK. *Mécanique des fluides*. Ed OPU, 1994.
- [5] GASMI, Abdelkader et MEKIAS, H. *The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet*. Journal of Physics A : Mathematical and General, 2003, vol. 36, no 3, p. 851.
- [6] GASMI, Abdelkader. *Two-dimensional cavitating flow past an oblique plate in a channel*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, vol. 259, p. 828-834.
- [7] Jack Asavanant, *Nonlinear Free - Surface Flow Problems : Part I. Free - Streamline Solutions*, Matimatic Departement, chulalongkron University Bangkok, Thailand.
- [8] KHERFI, Salima. *Problème des écoulements au-dessus des obstacles avec l'effet de gravité*. mémoire de master. UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA.
- [9] LAIADI, Abdelkader, et al. *Effet de la tension de surface sur des écoulement au dessus des obstacles*. 2012. mémoire de magister.
- [10] MAME, Souhila. *Application de la technique de transformations conformes à un écoulement du fluide*. 2016. mémoire de master. UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA Faculté des Mathématiques et de l'Informatique Département de Mathématiques.
- [11] Spiegel, Murray R, Lipschutz, Seymour, Schiller, John J., Sp ,*Schaum's Outline of Complex Variables*, 2ed : 640 fully solved problems , edition (2009)
- [12] SPIEGEL, Murray R. *Variables complexes : cours et problèmes*. McGraw-Hill, 1973.
- [13] VANDEN-BROECK, Jean-Marc. *The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle*. Journal of Fluid Mechanics, 1983, vol. 133, p. 255-264.